

Colle de mathématiques – MP Planche A

Intégrales généralisées et séries numériques

17 septembre 2026

Ale Fenu

Exercice 1 (question de cours)

Soit α un réel.

1. Démontrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$, et donner sa valeur dans ce cas.
2. Démontrer que l'intégrale $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$, et donner sa valeur dans ce cas.
3. En déduire qu'il n'existe aucun réel α pour lequel $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge, puis déterminer la nature de $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}(1+t)}$.

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(t) = \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)$.

1. Montrer que f est intégrable sur $]0, +\infty[$.
2. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_0^{+\infty} f(t) dt$.
3. Soient a et b deux réels strictement positifs. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \ln\left(\frac{t^2 + b^2}{t^2 + a^2}\right) dt$.

Exercice 3

On considère la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par $g(t) = \frac{\sin t}{t}$.

1. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ converge.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt$. Montrer que $\frac{2}{(n+1)\pi} \leq u_n \leq \frac{2}{n\pi}$.
3. En déduire que g n'est pas intégrable sur $]0, +\infty[$.
4. Montrer plus précisément que $\int_0^x \frac{|\sin t|}{t} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{\pi} \ln(x)$.

Colle de mathématiques – MP Planche B

Intégrales généralisées et séries numériques

17 septembre 2026

Ale Fenu

Exercice 1 (question de cours)

Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue par morceaux et décroissante.

1. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k)$.
2. En déduire que la série $\sum f(n)$ et l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ ont même nature.
3. Application : pour $\alpha > 0$, déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$.

Exercice 2

1. Montrer que la fonction $t \mapsto \frac{\ln t}{(1+t)^2}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.
2. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_0^1 \frac{\ln t}{(1+t)^2} dt$.
Indication : on choisira judicieusement une primitive de $t \mapsto \frac{1}{(1+t)^2}$.
3. À l'aide du changement de variable $t = \frac{1}{u}$, calculer $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{(1+t)^2} dt$, puis en déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{(1+t)^2} dt$.

Exercice 3

1. À l'aide du changement de variable $t = \sqrt{u}$, montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \sin(t^2) dt$ converge.
2. Montrer que $t \mapsto \sin(t^2)$ n'est pas intégrable sur $[0, +\infty[$.

Indication : on pourra minorer $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin u|}{2\sqrt{u}} du$ pour $k \in \mathbb{N}$.

3. Pour $x > 0$, on pose $R(x) = \int_x^{+\infty} \sin(t^2) dt$. Montrer que

$$R(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{\cos(x^2)}{2x} + O\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

Colle de mathématiques – MP Planche C

Intégrales généralisées et séries numériques

17 septembre 2026

Ale Fenu

Exercice 1 (question de cours)

Soit a un réel et $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux.

1. On suppose f à valeurs réelles et $\int_a^{+\infty} |f(t)| dt$ convergente. En considérant $f^+ = \frac{|f| + f}{2}$ et $f^- = \frac{|f| - f}{2}$, montrer que $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge.
2. Étendre ce résultat au cas où f est à valeurs complexes.
3. Application : déterminer la nature de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{3/2}} dt$.

Exercice 2

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\Gamma_n = \int_0^{+\infty} u^n e^{-u} du$.

1. Montrer que Γ_n est une intégrale convergente pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. À l'aide d'une intégration par parties, établir une relation entre Γ_{n+1} et Γ_n , puis calculer Γ_n .
3. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la convergence et la valeur de $\int_0^{+\infty} t^n e^{-\sqrt{t}} dt$.

Exercice 3

1. À l'aide d'une comparaison série-intégrale, montrer que, pour tout entier $n \geq 2$,

$$n \ln n - n + 1 \leq \ln(n!) \leq n \ln n - n + 1 + \ln n,$$

et en déduire un équivalent simple de $\ln(n!)$.

2. Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{\ln(n!)}$.
3. Montrer que $\sum_{k=2}^n \frac{1}{\ln(k!)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(\ln n)$.
4. Pour $\beta > 0$, déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{(\ln(n!))^\beta}$.