Decibel editrice di Giorgio Villella,
via del Santo 30, 35123 Padova,
telefono (049) 8756956, fax (049) 8762305

Realizzare un libro è un'operazione complessa, che richiede numerosi controlli: sul testo, sulle immagini e sulle relazioni che si stabiliscono tra essi. L'esperienza suggerisce che è praticamente impossibile pubblicare un libro privo di errori. Saremo quindi grati ai lettori che vorranno segnalarceli. Per segnalazioni o suggerimenti relativi a questo libro rivolgersi a Decibel editrice

Distribuzione esclusiva e catalogo
Zanichelli editore, via Irnerio 34, 40126 Bologna,
telefono (051) 293111, telex 521587 Zaned I,
fax (051) 249782–293224

Prima edizione settembre 1995
Ristampa: questa è la prima stampa della prima edizione

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

1996	1997	1998	1999	2000	2001
2002	2003	2004	2005	2006	2007

Stampato
a Bologna dalla Grafica Ragno, via Piemonte 12,
Tolara di Sotto — Ozzano Emilia

Fabrizio Broglia Elisabetta Fortuna Domenico Luminati

PROBLEMI RISOLTI DI ALGEBRA LINEARE

DECIBEL

ZANICHELLI

© 88-08-09180-5

Indice

© 88-08-13272-7

Prefazione

Questo libro è una raccolta di esercizi risolti di Algebra Lineare, in gran parte assegnati come testi di problemi d'esame nei corsi di Geometria I per Matematica e di Geometria per Fisica da noi tenuti a vario titolo presso l'Università di Pisa negli anni compresi fra il 1980 e il 1995.

La letteratura sull'argomento, italiana e non, è assai ricca, e si è ulteriormente arricchita recentemente, di libri di testo di Algebra Lineare e di veri e propri eserciziari. È però piuttosto difficile trovare nelle pubblicazioni esistenti sul mercato esercizi risolti che non siano puramente calcolativi e che vadano oltre la semplice applicazione di qualche definizione o di qualche proposizione. Di qui l'idea di raccogliere una serie di problemi più complessi da un punto di vista teorico, che potessero servire allo studente, dopo i preliminari e necessari esercizi calcolativi, come aiuto al completamento della propria preparazione.

Il nucleo iniziale di problemi d'esame è stato integrato con altri esercizi con almeno due scopi principali. Da una parte ci è sembrato utile cercare di svincolare il più possibile questa raccolta sia dai corsi che l'hanno originata sia da uno specifico libro di testo, per facilitarne l'uso anche da parte di studenti di altri corsi di Laurea delle Facoltà di Scienze e di Ingegneria. Dall'altra, abbiamo cercato di fornire allo studente un quadro sufficientemente articolato dei principali fenomeni nell'ambito dell'Algebra Lineare e un maggior numero di modelli di ragionamento potenzialmente utili per la risoluzione di altri problemi.

La prima sezione *Terminologia e Richiami* non vuole essere un riassunto della teoria dell'Algebra Lineare: ha il solo scopo di fissare il significato di alcune espressioni usate nel libro. In questa sezione abbiamo inserito alcuni risultati che fanno parte, quasi tutti, del programma di un qualsiasi corso di Algebra Lineare. Lo abbiamo fatto nella forma di esercizi svolti perché nel seguito si farà spesso riferimento non solo al risultato, ma anche al ragionamento usato nella soluzione proposta.

Gli esercizi sono presentati nel libro senza seguire un ordine preciso, né di difficoltà, né di argomento; anzi spesso accade che di un problema si diano più soluzioni ricorrendo ad argomenti teorici diversi. Questa scelta mira anche a mettere il più possibile lo studente nella situazione d'esame, quando, leggendo i testi degli esercizi del compito, non è automaticamente evidente a quali strumenti teorici far ricorso per arrivare ad una soluzione. Così, a nostro parere, questa raccolta può essere usata da parte dello studente come verifica della sua preparazione e come occasione per abituarsi a far uso delle proprie conoscenze nella loro globalità.

Di tutti gli esercizi, come già accennato, viene proposta almeno una soluzione. Tali soluzioni non sono certamente le uniche, né hanno la pretesa di essere, in qualche senso, "le più belle"; anzi invitiamo gli studenti a cercare proprie soluzioni personali prima di andare a leggere quelle proposte. Per sottolineare questo invito, abbiamo riunito in una sezione i soli testi degli esercizi, riunendo le soluzioni in una sezione successiva.

Per concludere, vogliamo ringraziare tutti coloro che, anche solo con il loro incoraggiamento, ci hanno stimolato a completare questo lavoro.

Elenco dei simboli

$\mathbb{N}$	insieme dei numeri naturali
$\mathbb{Z}$	insieme dei numeri interi
$\mathbb{R}$	campo dei numeri reali
$\mathbb{C}$	campo dei numeri complessi
$\Re e\, z$	parte reale di $z \in \mathbb{C}$
$\Im m\, z$	parte immaginaria di $z \in \mathbb{C}$
$\mathbb{K}$	campo dei numeri reali o dei numeri complessi
$\mathbb{K}[x]$	anello dei polinomi in una indeterminata a coefficienti in $\mathbb{K}$
$\mathbb{K}_n[x]$	spazio vettoriale (su $\mathbb{K}$) dei polinomi in una indeterminata a coefficienti in $\mathbb{K}$, di grado minore o uguale a n
$\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$	insieme delle matrici $n \times m$ a coefficienti in $\mathbb{K}$
$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$	insieme delle matrici $n \times n$ a coefficienti in $\mathbb{K}$
$\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$	insieme delle matrici simmetriche $n \times n$ a coefficienti in $\mathbb{K}$
$\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$	insieme delle matrici antisimmetriche $n \times n$ a coefficienti in $\mathbb{K}$
$GL_n(\mathbb{K})$	gruppo delle matrici $n \times n$ invertibili a coefficienti in $\mathbb{K}$
O_n	gruppo delle matrici ortogonali (reali)
U_n	gruppo delle matrici unitarie (complesse)
$[M]_{i,j}$	elemento di posto i, j della matrice M
$(a_{i,j})$	matrice il cui elemento di posto i, j è $a_{i,j}$
$E_{i,j}$	matrice elementare costituita da tutti 0 tranne un 1 al posto i, j, ossia $[E_{i,j}]_{i,j} = 1$ ed $[E_{i,j}]_{h,k} = 0$ se $h \neq i$ o $k \neq j$
I_n	matrice identità $n \times n$
$\mathfrak{S}_n$	gruppo delle permutazioni di n elementi

$\det A$	determinante della matrice A
$\operatorname{tr} A$	traccia della matrice A
$\operatorname{rk} A$	rango della matrice A
id_V	applicazione identica $V \to V$
$\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f)$	matrice associata all'applicazione lineare $f : V \to W$ rispetto alle basi $\mathcal{B}$ di V e $\mathcal{B}'$ di W
$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$	matrice associata all'applicazione lineare $f : V \to V$ rispetto alla base $\mathcal{B}$, ossia $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$
$\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}$	matrice associata al cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$, ossia $\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'} = \mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(id)$
$\operatorname{Span}\langle S\rangle$	sottospazio generato dall'insieme S
$\operatorname{Hom}(V, W)$	spazio delle applicazioni lineari $V \to W$
$\operatorname{Ker} f$	nucleo di f
$\operatorname{Im} f$	immagine di f
$P_A(t)$	polinomio caratteristico di A, ossia $P_A(t) = \det(A - tI)$
$E(\lambda, f)$	autospazio dell'applicazione lineare f relativo all'autovalore λ
$E(\lambda)$	autospazio relativo all'autovalore λ (si sottintende l'applicazione quando non c'è ambiguità)
$E'(\lambda, f)$	autospazio generalizzato dell'applicazione lineare f relativo all'autovalore λ
$E'(\lambda)$	autospazio generalizzato relativo all'autovalore λ (si sottintende l'applicazione quando non c'è ambiguità)
$J_{\lambda,n}$	blocco di Jordan di ordine n relativo all'autovalore λ
$J(A)$	forma di Jordan della matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$
$V^{\wedge}$	duale di V
Φ_V	isomorfismo canonico tra uno spazio vettoriale di dimensione finita V ed il suo biduale $V^{\wedge\wedge}$ definito da $\Phi_V(v) : f \mapsto f(v)$ per ogni $v \in V$, $f \in V^{\wedge}$
$\operatorname{Ann} S$	annullatore di S, ossia $\{f \in V^{\wedge} \mid f(v) = 0 \quad \forall v \in S\}$
$\langle\ ,\ \rangle$	generico prodotto scalare su uno spazio vettoriale
$\langle\ ,\ \rangle_{\mathbf{R}}$	prodotto scalare standard di $\mathbf{R}^n$
$\langle\ ,\ \rangle_{\mathbf{C}}$	prodotto hermitiano standard di $\mathbf{C}^n$
$W^{\perp}$	ortogonale di $W \subseteq V$ rispetto ad un prodotto scalare definito su V

Terminologia e richiami

Nel testo l'espressione *spazio vettoriale su un campo* $\mathbb{K}$ dovrà sempre essere intesa come "spazio vettoriale di dimensione finita sul campo dei numeri reali o su quello dei numeri complessi"; normalmente la dimensione sarà supposta ≥ 1 per evitare casi banali.

Le matrici diagonali o triangolari superiori di $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ saranno rappresentate rispettivamente nel modo seguente

$$\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_{1,1} & * & \cdots & * \\ & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

intendendo che i posti vuoti contengono l'elemento zero e gli $*$ denotano un qualsiasi elemento di $\mathbb{K}$.

Analoga convenzione sarà usata per le matrici a blocchi: i posti vuoti contengono la matrice nulla con l'opportuno numero di righe e di colonne.

Una matrice $n \times n$ del tipo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

è detta *matrice di Vandermonde* e il suo determinante vale $\prod_{i>j}(a_i - a_j)$.

Chiameremo *minore* di una matrice A ogni sottomatrice quadrata di A.

Se A è una matrice $n \times n$, per ogni $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, chiameremo *complemento algebrico* di posto i, j il numero $(-1)^{i+j} \det A_{ij}$, dove A_{ij} denota il minore di ordine $n - 1$ di A ottenuto cancellando la riga i-esima e la colonna

j-esima. La matrice $\widetilde{A}$ definita da $[\widetilde{A}]_{i,j} = (-1)^{i+j} \det A_{ji}$ sarà chiamata la *matrice aggiunta* di A; essa è tale che $A\widetilde{A} = \widetilde{A}A = (\det A)I$.

Un diagramma di applicazioni

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & W \arrow[d, "\psi"] \\ V' \arrow[r, "g"'] & W' \end{tikzcd}$$

sarà detto *diagramma commutativo* se $\psi \circ f = g \circ \varphi$.

Useremo la parola *operatore* come sinonimo di endomorfismo di uno spazio vettoriale. Dato un operatore $f : V \to V$ di uno spazio vettoriale V, un *sottospazio f-invariante* è un sottospazio vettoriale W di V tale che $f(W) \subseteq W$. A tale proposito ricordiamo:

Esercizio A (Decomposizione di Fitting). Sia $f : V \to V$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale V di dimensione n su $\mathbf{K}$. Dimostrare che esiste un intero $k \leq n$ tale che

(1) $\operatorname{Ker} f^k = \operatorname{Ker} f^{k+1}$;

(2) $\operatorname{Im} f^k = \operatorname{Im} f^{k+1}$;

(3) $f|_{\operatorname{Im} f^k} : \operatorname{Im} f^k \to \operatorname{Im} f^k$ è un isomorfismo;

(4) $f(\operatorname{Ker} f^k) \subseteq \operatorname{Ker} f^k$;

(5) $f|_{\operatorname{Ker} f^k} : \operatorname{Ker} f^k \to \operatorname{Ker} f^k$ è nilpotente;

(6) $V = \operatorname{Ker} f^k \oplus \operatorname{Im} f^k$.

Soluzione. (1) Consideriamo la successione di sottospazi vettoriali di V

$$\{0\} \subseteq \operatorname{Ker} f \subseteq \operatorname{Ker} f^2 \subseteq \operatorname{Ker} f^3 \subseteq \cdots$$

Poiché V ha dimensione finita, le inclusioni non possono essere tutte strette; esiste dunque un intero $k \leq n$ tale che $\operatorname{Ker} f^k = \operatorname{Ker} f^{k+1}$.

(2) Dalla (1) si deduce che $\dim(\operatorname{Im} f^k) = \dim(\operatorname{Im} f^{k+1})$. Poiché $\operatorname{Im} f^k \supseteq \operatorname{Im} f^{k+1}$, si ha che $\operatorname{Im} f^k = \operatorname{Im} f^{k+1}$.

(3) Per la (2) si ha che $f|_{\operatorname{Im} f^k}$ è un endomorfismo surgettivo, quindi un isomorfismo.

(4) Sia $v \in \operatorname{Ker} f^k$. Allora $f(v) \in \operatorname{Ker} f^k$; infatti

$$f^k(f(v)) = f(f^k(v)) = f(0) = 0\,.$$

(5) $(f|_{\operatorname{Ker} f^k})^k = f^k|_{\operatorname{Ker} f^k} = 0$.

(6) Basta far vedere che $\operatorname{Ker} f^k \cap \operatorname{Im} f^k = \{0\}$ e poi ragionare sulle dimensioni dei sottospazi.

Sia $y \in \operatorname{Ker} f^k \cap \operatorname{Im} f^k$. Allora $\exists x \in V$ tale che $f^k(x) = y$. Poiché $f^k(y) = 0$, si ha che $f^{2k}(x) = 0$, cioè $x \in \operatorname{Ker} f^{2k} = \operatorname{Ker} f^k$. Quindi $f^k(x) = 0$, ossia $y = 0$.

Nota. (a) La decomposizione del punto (6) è nota come decomposizione di Fitting.

(b) In (1) abbiamo provato che esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che $\operatorname{Ker} f^k = \operatorname{Ker} f^{k+1}$. Osserviamo che da tale punto in poi la successione diventa stazionaria, ossia

$$\operatorname{Ker} f^k = \operatorname{Ker} f^{k+j} \qquad \forall j \in \mathbb{N}\,.$$

Questo fatto può essere provato facilmente dal lettore per induzione su j.

(c) Analizzando la soluzione dell'esercizio, vediamo che per dimostrare (6) abbiamo usato solo (1); le affermazioni (2), (3), (4) e (5) sono facili conseguenze di (1) e servono per descrivere le principali proprietà dei sottospazi in cui è stato decomposto V. L'implicazione (1) $\Longrightarrow$ (6) è in realtà una equivalenza. Proviamo infatti che (6) $\Longrightarrow$ (1), cioè che

$$V = \operatorname{Ker} f^k \oplus \operatorname{Im} f^k \qquad \Longrightarrow \qquad \operatorname{Ker} f^k = \operatorname{Ker} f^{k+1}\,.$$

Diamo due dimostrazioni di questo fatto.

I modo. Supponiamo, per assurdo, che $\operatorname{Ker} f^k \subsetneq \operatorname{Ker} f^{k+1}$. In tal caso esiste $y \in \operatorname{Ker} f^{k+1}$, $y \notin \operatorname{Ker} f^k$, ossia $w = f^k(y) \neq 0$ e $f^{k+1}(y) = 0$. Allora $w \in \operatorname{Ker} f^k \cap \operatorname{Im} f^k$; ma ciò è assurdo, perché $w \neq 0$ e $\operatorname{Ker} f^k \cap \operatorname{Im} f^k = \{0\}$.

II modo. Dal fatto che $V = \operatorname{Ker} f^k \oplus \operatorname{Im} f^k$, segue che

$$f|_{\operatorname{Im} f^k} : \operatorname{Im} f^k \to \operatorname{Im} f^k$$

è un endomorfismo iniettivo. Infatti, se $y \in \operatorname{Im} f^k$ e $f(y) = 0$, allora $y \in \operatorname{Ker} f^k \cap \operatorname{Im} f^k = \{0\}$, quindi $y = 0$. Ne segue che $f|_{\operatorname{Im} f^k}$ è un isomorfismo di $\operatorname{Im} f^k$ in sé e quindi che $\operatorname{Im} f^k = \operatorname{Im} f^{k+1}$, da cui si deduce subito che $\operatorname{Ker} f^k = \operatorname{Ker} f^{k+1}$. □

Se λ è un autovalore per un endomorfismo f, chiameremo *molteplicità algebrica* di λ la sua molteplicità come radice del polinomio caratteristico e *molteplicità geometrica* la dimensione dell'autospazio $E(\lambda)$.

Una *base a ventaglio per f* è una base rispetto alla quale la matrice associata a f è di forma triangolare superiore.

Esercizio B (Diagonalizzazione simultanea). Siano A e $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ due matrici diagonalizzabili. Si dimostri che

$$A \text{ e } B \text{ sono diagonalizzabili simultaneamente} \iff AB = BA\,.$$

Soluzione. Una implicazione è ovvia: se esiste una matrice invertibile M tale che $M^{-1}AM = D_A$ e $M^{-1}BM = D_B$, con D_A e D_B diagonali, allora

$$\begin{aligned} AB &= MD_AM^{-1}MD_BM^{-1} = MD_AD_BM^{-1} = \\ &= MD_BD_AM^{-1} = MD_BM^{-1}MD_AM^{-1} = BA, \end{aligned}$$

in quanto matrici diagonali commutano.

Viceversa, supponiamo che A e B commutino e proviamo che esiste una base comune di autovettori per A e B.

Siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ gli autovalori di A e $E(\lambda_i, A)$ i rispettivi autospazi. Dall'ipotesi $AB = BA$ segue che $B(E(\lambda_i, A)) \subseteq E(\lambda_i, A)$ per ogni $i = 1, \ldots, k$; infatti, $\forall x \in E(\lambda_i, A)$, si ha

$$A(Bx) = B(Ax) = B(\lambda_i x) = \lambda_i(Bx)$$

e quindi $Bx \in E(\lambda_i, A)$.

Inoltre, essendo A diagonalizzabile, si ha che

$$\mathbf{K}^n = E(\lambda_1, A) \oplus \cdots \oplus E(\lambda_k, A)\,.$$

Sia w un autovettore per B relativo all'autovalore μ. Possiamo scrivere w in modo unico come $w = x_1 + \cdots + x_k$, con $x_i \in E(\lambda_i, A)$, e quindi

$$\mu w = \mu x_1 + \cdots + \mu x_k\,.$$

D'altra parte $\mu w = Bw$, quindi si ha anche

$$\mu w = Bx_1 + \cdots + Bx_k,$$

con $Bx_i \in E(\lambda_i, A)$ per l'invarianza degli autospazi ricordata sopra.

Allora, visto che la decomposizione di μw come somma di vettori di $E(\lambda_1, A), \ldots, E(\lambda_k, A)$ è unica, deve essere

$$Bx_1 = \mu x_1, \quad \ldots, \quad Bx_k = \mu x_k\,.$$

Gli x_i non nulli (ce n'è almeno uno perché w è un autovettore!) sono dunque autovettori comuni per A e B.

Se applichiamo il procedimento partendo da una base $w_1, \ldots, w_n$ di autovettori per B, otteniamo un insieme di almeno n autovettori comuni. Questi generano $\mathbf{K}^n$, perché i w_i si scrivono come loro combinazione lineare, e allora da essi si può estrarre una base di $\mathbf{K}^n$. □

L'insieme delle applicazioni lineari $V \to \mathbf{K}$ (talvolta chiamate funzionali) è uno spazio vettoriale, detto *spazio duale* di V e denotato $V^\wedge$. Lo spazio $V^\wedge$ ha la stessa dimensione di V (ricordiamo che i nostri spazi vettoriali sono sempre di dimensione finita), pertanto $V^\wedge$ è isomorfo a V tramite un isomorfismo che dipende dalla scelta di una base in V. Esiste però un isomorfismo tra V e $V^{\wedge\wedge}$ indipendente da tale scelta: l'applicazione $\Phi_V : V \to V^{\wedge\wedge}$ definita

da $\Phi_V(v)(f) = f(v)$. Ci riferiremo a questo isomorfismo come *isomorfismo canonico* fra V ed il suo biduale.

Per ogni sottoinsieme S di V, l'insieme

$$\operatorname{Ann} S = \{f \in V^\wedge \mid f(x) = 0 \quad \forall x \in S\},$$

è un sottospazio vettoriale di $V^\wedge$, detto *annullatore di* S; se W è un sottospazio vettoriale di V, si ha $\dim(\operatorname{Ann} W) = \dim V - \dim W$.

Esercizio C (Proprietà dell'annullatore). Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbf{K}$ e siano $S, T \subseteq V$ suoi sottoinsiemi. Si dimostri che

(1) $S \subseteq T \implies \operatorname{Ann} T \subseteq \operatorname{Ann} S$;
(2) $\operatorname{Ann}(\operatorname{Ann} S) = \operatorname{Span}(S)$, quando si consideri $V^{\wedge\wedge}$ identificato con V mediante l'isomorfismo canonico.

Soluzione. La (1) è ovvia conseguenza della definizione di annullatore.

Dimostriamo la (2). Vogliamo far vedere che

$$\operatorname{Ann}(\operatorname{Ann} S) = \Phi_V(\operatorname{Span}(S))\,.$$

Cominciamo a dimostrare questa uguaglianza nel caso particolare di un sottospazio di V, ossia dimostriamo che, se W è un sottospazio di V, allora

$$\operatorname{Ann}(\operatorname{Ann} W) = \Phi_V(W)\,.$$

L'inclusione $\operatorname{Ann}(\operatorname{Ann} W) \supseteq \Phi_V(W)$ è immediata: infatti, se $w \in W$ ed $f \in \operatorname{Ann} W$, allora dalle definizioni di Φ_V e di annullatore segue che

$$\Phi_V(w)(f) = f(w) = 0,$$

ovvero $\Phi_V(w) \in \operatorname{Ann}(\operatorname{Ann} W)$.

Dimostriamo ora l'inclusione opposta. Sia $\varphi \in \operatorname{Ann}(\operatorname{Ann} W) \subseteq V^{\wedge\wedge}$ e sia v l'unico vettore di V tale che $\Phi_V(v) = \varphi$. Se per assurdo $v \notin W$, allora esisterebbe un funzionale $f \in V^\wedge$ tale che $f(v) \neq 0$ ma $f|_W = 0$, ossia $f \in \operatorname{Ann} W$. Ma allora si avrebbe

$$\varphi(f) = \Phi_V(v)(f) = f(v) \neq 0,$$

contro l'ipotesi che $\varphi \in \operatorname{Ann}(\operatorname{Ann} W)$; dunque $v \in W$ e quindi $\operatorname{Ann}(\operatorname{Ann} W) \subseteq \Phi_V(W)$, da cui la tesi.

Osserviamo che, una volta dimostrata la prima inclusione, si poteva far seguire la tesi dalla formula che lega le dimensioni di un sottospazio e del suo annullatore. Infatti dalla relazione $\dim(\operatorname{Ann} W) = \dim V - \dim W$ segue che

$$\begin{aligned} \dim(\operatorname{Ann}(\operatorname{Ann} W)) &= \dim V^\wedge - \dim(\operatorname{Ann} W) = \\ &= \dim V^\wedge - \dim V + \dim W = \dim(\Phi_V(W)) \end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza vale in quanto Φ_V è un isomorfismo e $\dim V^\wedge = \dim V$ (dal momento che V ha dimensione finita).

Dimostriamo ora il caso generale. Osserviamo che, dall'inclusione $S \subseteq \mathrm{Span}\langle S\rangle$ e dalla (1), segue che

$$\mathrm{Ann}(\mathrm{Span}\langle S\rangle) \subseteq \mathrm{Ann}(S)\,.$$

Da questa, applicando ancora la (1) e a meno dell'identificazione data da Φ_V, si ottiene

$$\mathrm{Ann}\big(\mathrm{Ann}(S)\big) \subseteq \mathrm{Ann}\big(\mathrm{Ann}(\mathrm{Span}\langle S\rangle)\big) = \mathrm{Span}\langle S\rangle$$

dove l'ultima uguaglianza vale, per quanto dimostrato sopra, in quanto $\mathrm{Span}\langle S\rangle$ è un sottospazio. D'altra parte, ragionando come sopra, si vede subito che $S \subseteq \mathrm{Ann}\big(\mathrm{Ann}(S)\big)$, quindi $\mathrm{Ann}\big(\mathrm{Ann}(S)\big)$ è un sottospazio di V che contiene S ed è contenuto in $\mathrm{Span}\langle S\rangle$. Dato che $\mathrm{Span}\langle S\rangle$ è per definizione il più piccolo sottospazio contenente S, necessariamente deve risultare $\mathrm{Ann}\big(\mathrm{Ann}(S)\big) = \mathrm{Span}\langle S\rangle$. □

Esercizio D. Siano W ed U due sottospazi di uno spazio vettoriale V. Si dimostri che

(1) $\mathrm{Ann}\, W \cap \mathrm{Ann}\, U = \mathrm{Ann}(W + U)$;
(2) $\mathrm{Ann}\, W + \mathrm{Ann}\, U = \mathrm{Ann}(W \cap U)$.

Soluzione. (1) Poiché $W \subseteq W + U$ e $U \subseteq W + U$, si ha (cfr. esercizio C) $\mathrm{Ann}(W+U) \subseteq \mathrm{Ann}\, W$ e $\mathrm{Ann}(W+U) \subseteq \mathrm{Ann}\, U$; quindi $\mathrm{Ann}(W+U) \subseteq \mathrm{Ann}\, W \cap \mathrm{Ann}\, U$.

Viceversa proviamo che $\mathrm{Ann}\, W \cap \mathrm{Ann}\, U \subseteq \mathrm{Ann}(W+U)$. Sia $\varphi \in \mathrm{Ann}\, W \cap \mathrm{Ann}\, U$; allora $\varphi(u) = \varphi(w) = 0$ per ogni $u \in U$ e $w \in W$. Ciò implica che $\varphi(w+u) = 0$ per ogni $u \in U$ e $w \in W$ e quindi $\varphi(v) = 0$ per ogni $v \in W + U$. Di conseguenza $\varphi \in \mathrm{Ann}(W+U)$.

(2) Ricordando che $\mathrm{Ann}\big(\mathrm{Ann}\, U\big) = U$ (a meno dell'identificazione canonica di $V^{\wedge\wedge}$ con V) (cfr. esercizio C), ed applicando la (1) agli spazi $\mathrm{Ann}\, U$ e $\mathrm{Ann}\, W$ si ha

$$\begin{aligned}\mathrm{Ann}\, W + \mathrm{Ann}\, U &= \mathrm{Ann}\big(\mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}\, W + \mathrm{Ann}\, U)\big) = \\ &= \mathrm{Ann}\big(\mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}\, W) \cap \mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}\, U)\big) = \mathrm{Ann}(W \cap U)\end{aligned}$$

che è ciò che si voleva dimostrare.

Nota. Nell'ultima uguaglianza si è usato il fatto che

$$\mathrm{Ann}\big(\Phi_V(W)\big) = \Phi_{V^\wedge}(\mathrm{Ann}\, W)\,.$$

Per provare ciò, basta osservare che per il punto (2) dell'esercizio C, si ha che $\mathrm{Ann}\big(\mathrm{Ann}\, W\big) = \Phi_V(W)$, da cui

$$\mathrm{Ann}\big(\Phi_V(W)\big) = \mathrm{Ann}\big(\mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}\, W)\big) = \varphi_{V^\wedge}(\mathrm{Ann}\, W)\,. \quad \square$$

Se $f : V \to W$ è una applicazione lineare, l'applicazione $f^\wedge : W^\wedge \to V^\wedge$ definita da

$$f^\wedge(\varphi) = \varphi \circ f \qquad \forall \varphi \in W^\wedge$$

sarà chiamata *applicazione trasposta di f*.

Esercizio E (Proprietà dell'applicazione trasposta). Siano V e W spazi vettoriali sul campo $\mathbf{K}$. Se $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$, si dimostri che

(1) $f^\wedge \in \mathrm{Hom}(W^\wedge, V^\wedge)$;
(2) $f^{\wedge\wedge} = f$, a meno dell'identificazione canonica di uno spazio con il suo biduale;
(3) l'applicazione $^\wedge : \mathrm{Hom}(V,W) \to \mathrm{Hom}(W^\wedge, V^\wedge)$ definita da $^\wedge(f) = f^\wedge$ è un isomorfismo lineare;
(4) se $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ sono basi rispettivamente di V e W e $\mathcal{B}^\wedge$ e $\mathcal{C}^\wedge$ sono le rispettive basi duali, allora $\mathcal{M}^{\mathcal{C}^\wedge}_{\mathcal{B}^\wedge}(f^\wedge) = {}^t\big(\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f)\big)$;
(5) se U è uno spazio vettoriale su $\mathbf{K}$ e $g \in \mathrm{Hom}(W, U)$, allora $(g \circ f)^\wedge = f^\wedge \circ g^\wedge$;
(6) $\mathrm{Ker}\, f^\wedge = \mathrm{Ann}(\mathrm{Im}\, f)$;
(7) $\mathrm{Im}\, f^\wedge = \mathrm{Ann}(\mathrm{Ker}\, f)$.

Nel caso di applicazioni $f \in \mathrm{Hom}(V, V)$, si dimostri che

(8) un sottospazio $U \subseteq V$ è f-invariante se e solo se $\mathrm{Ann}\, U$ è $f^\wedge$-invariante.

Soluzione. (1) La verifica che $f^\wedge$ è lineare è semplice e viene lasciata al lettore.

(2) Indichiamo con $\Phi_V : V \to V^{\wedge\wedge}$ e $\Phi_W : W \to W^{\wedge\wedge}$ gli isomorfismi canonici; dobbiamo dimostrare che il seguente diagramma è commutativo:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Phi_V"'] & W \arrow[d, "\Phi_W"] \\ V^{\wedge\wedge} \arrow[r, "f^{\wedge\wedge}"'] & W^{\wedge\wedge} \end{tikzcd}$$

ossia che per ogni $v \in V$ si ha

$$f^{\wedge\wedge}\big(\Phi_V(v)\big) = \Phi_W\big(f(v)\big)\,.$$

Per mostrare questa uguaglianza, facciamo vedere che i funzionali $f^{\wedge\wedge}\big(\Phi_V(v)\big)$, $\Phi_W\big(f(v)\big) \in W^{\wedge\wedge}$ assumono lo stesso valore su ogni funzionale $\varphi \in W^\wedge$. Ed infatti

$$\begin{aligned} f^{\wedge\wedge}\big(\Phi_V(v)\big)(\varphi) &= \big(\Phi_V(v) \circ f^\wedge\big)(\varphi) = \Phi_V(v)\big(f^\wedge(\varphi)\big) = \\ &= f^\wedge(\varphi)(v) = \varphi\big(f(v)\big) = \Phi_W\big(f(v)\big)(\varphi)\,. \end{aligned}$$

(3) Il fatto che $\hat{}$ è una applicazione lineare è una ovvia verifica. Per dimostrare che essa è un isomorfismo basta provare che è iniettiva (perché?), cioè che $\hat{}(f) = 0 \implies f = 0$. Supponiamo pertanto che $\hat{}(f) = f^{\wedge} = 0$. Ciò vuol dire che per ogni $\varphi \in W^{\wedge}$ si ha che $\varphi \circ f = 0$, ossia

$$\operatorname{Im} f \subseteq \bigcap_{\varphi \in W^{\wedge}} \operatorname{Ker} \varphi = \{0\},$$

dove l'ultima uguaglianza segue dal fatto che se $w \in W$ è un vettore diverso da 0, allora esiste almeno un funzionale $\varphi \in W^{\wedge}$ tale che $\varphi(w) \neq 0$ (perché?). Abbiamo così dimostrato che $\operatorname{Im} f = \{0\}$, cioè $f = 0$.

(4) Siano $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ e $\mathcal{C} = \{w_1, \ldots, w_m\}$ le due basi e sia $M = (m_{i,j}) = \mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f)$, ossia $f(v_j) = \sum_{h=1}^{m} m_{h,j} w_h$. Ricordiamo che se $\psi \in V^{\wedge}$ le coordinate di ψ rispetto alla base duale $\mathcal{B}^{\wedge}$ sono date da $\psi(v_1), \ldots, \psi(v_n)$, per cui $\psi = \sum_{i=1}^{n} \psi(v_i) \hat{v_i}$. Poiché la matrice $\mathcal{M}^{\mathcal{C}^{\wedge}}_{\mathcal{B}^{\wedge}}(f^{\wedge})$ è la matrice che nella colonna j-esima ha le coordinate rispetto alla base $\mathcal{B}^{\wedge}$ del funzionale $f^{\wedge}(\hat{w_j})$, si deduce che l'elemento di posto i, j di $N = \mathcal{M}^{\mathcal{C}^{\wedge}}_{\mathcal{B}^{\wedge}}(f^{\wedge})$ è dato da

$$\begin{aligned} [N]_{i,j} &= f^{\wedge}(\hat{w_j})(v_i) = \hat{w_j}(f(v_i)) = \\ &= \hat{w_j}\Big(\sum_{h=1}^{m} m_{h,i} w_h\Big) = \sum_{h=1}^{m} m_{h,i} \hat{w_j}(w_h) = m_{j,i} = [M]_{j,i} \end{aligned}$$

che è la tesi del punto (4).

La (5) segue immediatamente dalla definizione.

(6) Dalle definizioni segue subito che $\varphi \in \operatorname{Ker} f^{\wedge} \iff f^{\wedge}(\varphi) = 0 \iff \varphi \circ f = 0 \iff \varphi(f(v)) = 0 \quad \forall v \in V \iff \varphi(w) = 0 \quad \forall w \in \operatorname{Im} f \iff \varphi \in \operatorname{Ann}(\operatorname{Im} f)$.

La (7) si prova in modo del tutto analogo (si provi anche a dedurre la (7) dalla (6) usando l'identificazione di uno spazio vettoriale con il suo biduale).

(8) Sia U un sottospazio invariante per f e sia $\varphi \in \operatorname{Ann} U$. Allora, se $u \in U$

$$f^{\wedge}(\varphi)(u) = \varphi(f(u)) = 0$$

dato che $f(u) \in U$; questo prova che $f^{\wedge}(\varphi) \in \operatorname{Ann} U$. Per dimostrare l'altra implicazione, osserviamo che se $\operatorname{Ann} U$ è invariante per $f^{\wedge}$, allora per quanto appena dimostrato $\operatorname{Ann}(\operatorname{Ann} U)$ è $f^{\wedge\wedge}$-invariante. Ma per quanto visto al punto (2), a meno dell'identificazione di V con $V^{\wedge\wedge}$, si ha che $f^{\wedge\wedge} = f$, e, sempre a meno di tale identificazione, $\operatorname{Ann}(\operatorname{Ann} U) = U$ (cfr. esercizio C). Quindi U è invariante per f.

Nota. Se $f \in \operatorname{Hom}(V, V)$ e A è la matrice associata a f rispetto ad una base $\mathcal{B}$ di V, dal punto (4) deduciamo che la matrice associata a $f^{\wedge}$ rispetto alla base $\mathcal{B}^{\wedge}$ è ${}^{t}A$. Pertanto f e $f^{\wedge}$ hanno lo stesso polinomio caratteristico e, in particolare, gli stessi autovalori. □

Chiameremo *prodotto scalare* su V ogni applicazione bilineare simmetrica $b : V \times V \to \mathbb{K}$; con abuso di notazione, indicheremo con $b|_W$ la restrizione $W \times W \to \mathbb{K}$ del prodotto scalare b ad un sottospazio W.

Se b è un prodotto scalare e W è un sottospazio vettoriale di V, l'insieme

$$W^{\perp} = \{v \in V \mid b(v, w) = 0 \quad \forall w \in W\}$$

è un sottospazio vettoriale di V, detto *ortogonale* di W.

Esercizio F (Proprietà dell'ortogonale). Sia $b : V \times V \to \mathbb{K}$ un prodotto scalare su uno spazio vettoriale V e siano U e W due sottospazi vettoriali di V. Si dimostrino i fatti seguenti:

(1) $W \subseteq W^{\perp\perp}$;
(2) se b è non degenere, allora $W = W^{\perp\perp}$;
(3) $U^{\perp} \cap W^{\perp} = (U + W)^{\perp}$;
(4) $(U \cap W)^{\perp} \supseteq U^{\perp} + W^{\perp}$;
(5) se b è non degenere, allora $(U \cap W)^{\perp} = U^{\perp} + W^{\perp}$.

Soluzione. La (1) e la (4) sono facili verifiche dirette, così come l'inclusione $U^{\perp} \cap W^{\perp} \subseteq (U + W)^{\perp}$ di (3). Per completare la prova dell'uguaglianza (3), basta osservare che dalle inclusioni $U \subseteq U + W$ e $W \subseteq U + W$ segue che $(U + W)^{\perp} \subseteq U^{\perp}$ e $(U + W)^{\perp} \subseteq W^{\perp}$, e quindi $(U + W)^{\perp} \subseteq U^{\perp} \cap W^{\perp}$.

La (2) segue dalla (1) e dal fatto che, se b è non degenere, $\dim W^{\perp} = \dim V - \dim W$.

Proviamo infine la (5). Se applichiamo la (3) ai sottospazi $U^{\perp}$ e $W^{\perp}$, abbiamo $U^{\perp\perp} \cap W^{\perp\perp} = (U^{\perp} + W^{\perp})^{\perp}$. Essendo b non degenere, per la (2) questa uguaglianza equivale a $U \cap W = (U^{\perp} + W^{\perp})^{\perp}$, da cui segue la (5) passando all'ortogonale. □

Ogni prodotto scalare non degenere $b : V \times V \to \mathbb{K}$ induce un isomorfismo $\delta_b : V \longrightarrow V^{\wedge}$ definito da $\delta_b(v) = b_v$, dove b_v è l'applicazione lineare $V \to \mathbb{K}$ tale che $b_v(w) = b(v, w)$.

Esercizio G (Proprietà dell'isomorfismo δ_b). Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$, e sia $b : V \times V \to \mathbb{K}$ un prodotto scalare non degenere. Si dimostri che per ogni sottospazio U di V risulta

(1) $\delta_b(U^{\perp}) = \operatorname{Ann} U$;
(2) $U^{\perp} = \operatorname{Ann}(\delta_b(U))$ (a meno dell'isomorfismo $\Phi_V : V \to V^{\wedge\wedge}$).

Soluzione. (1) Sia $f \in V^{\wedge}$ e sia v l'unico vettore di V tale che $f = \delta_b(v)$; pertanto $f(u) = \delta_b(v)(u) = b(v, u)$ per ogni $u \in V$.

Allora $f \in \delta_b(U^{\perp}) \iff v \in U^{\perp} \iff f(u) = b(v, u) = 0 \quad \forall u \in U \iff f \in \operatorname{Ann} U$.

(2) La (1), applicata al sottospazio $U^\perp$, implica che $\delta_b(U^{\perp\perp}) = \mathrm{Ann}(U^\perp)$, da cui segue la tesi passando all'annullatore e ricordando che $U^{\perp\perp} = U$. □

Se V e W sono due $\mathbf{K}$-spazi vettoriali dotati ciascuno di un prodotto scalare non degenere, $\langle\ ,\ \rangle_V$ e $\langle\ ,\ \rangle_W$, per ogni $f \in \mathrm{Hom}(V,W)$ esiste una ed una sola applicazione $f^* \in \mathrm{Hom}(W,V)$, detta l'*applicazione aggiunta di* f, tale che $\langle f(v), w\rangle_W = \langle v, f^*(w)\rangle_V$ per ogni $v \in V$, $w \in W$.

Esercizio H (Proprietà dell'applicazione aggiunta). Siano V e W spazi vettoriali su un campo $\mathbf{K}$ e siano $\langle\ ,\ \rangle_V$ e $\langle\ ,\ \rangle_W$ prodotti scalari non degeneri rispettivamente su V e su W. Si dimostri che

(1) $f^{**} = f \qquad \forall f \in \mathrm{Hom}(V,W)$;

(2) se U è un altro spazio vettoriale su $\mathbf{K}$ dotato di un prodotto scalare non degenere $\langle\ ,\ \rangle_U$, allora $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$ per ogni $f \in \mathrm{Hom}(V,W)$ e $g \in \mathrm{Hom}(W,U)$;

(3) $\mathrm{Ker}\, f^* = (\mathrm{Im}\, f)^\perp \qquad \forall f \in \mathrm{Hom}(V,W)$;

(4) $\mathrm{Im}\, f^* = (\mathrm{Ker}\, f)^\perp \qquad \forall f \in \mathrm{Hom}(V,W)$.

Nel caso di applicazioni $f \in \mathrm{Hom}(V,V)$ si dimostri che

(5) un sottospazio U di V è f-invariante se e solo se $U^\perp$ è f^*-invariante.

Soluzione. La dimostrazione di (1) e di (2) sono delle semplici verifiche.

Le dimostrazioni di (3) e (4) sono del tutto simili tra loro, a titolo di esempio proviamo la (4).

Dato che $\langle\ ,\ \rangle_W$ è non degenere, si ha $v \in \mathrm{Ker}\, f \iff f(v) = 0 \iff \langle f(v), w\rangle_W = 0 \ \ \forall w \in W \iff \langle v, f^*(w)\rangle_V = 0 \ \ \forall w \in W \iff v \in (\mathrm{Im}\, f^*)^\perp$. Quindi $\mathrm{Ker}\, f = (\mathrm{Im}\, f^*)^\perp$; passando all'ortogonale (e usando le proprietà provate nell'esercizio F) si ha la (4).

Si osservi che la (3) può essere dedotta dalla (4) applicata ad f^*, usando la (1) e passando all'ortogonale. Allo stesso modo si può dedurre la (4) dalla (3).

Dimostriamo infine la (5). Se U è f-invariante e $w \in U^\perp$, allora $\forall u \in U$

$$0 = \langle f(u), w\rangle_V = \langle u, f^*(w)\rangle_V$$

quindi $f^*(w) \in U^\perp$. L'altra implicazione si ottiene applicando quella appena provata ad f^*: se $U^\perp$ è invariante per f^*, allora $U^{\perp\perp}$ è invariante per f^{**}. Si conclude allora usando la (1) ed il fatto che, essendo il prodotto scalare non degenere, $U^{\perp\perp} = U$.

Nota. Si osservi che le dimostrazioni sono molto simili a quelle dell'esercizio E, ed infatti le due applicazioni $f^\wedge$ e f^* sono strettamente legate nel senso che preciseremo tra breve.

Siano $\delta_V : V \to V^\wedge$ e $\delta_W : W \to W^\wedge$ gli isomorfismi indotti dai due prodotti scalari. Mostriamo che $f^\wedge$ ed f^* sono la stessa applicazione a meno di questi isomorfismi, ossia che il seguente diagramma è commutativo:

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "\delta_W"'] & V \arrow[d, "\delta_V"] \\ W^\wedge \arrow[r, "f^\wedge"'] & V^\wedge \end{tikzcd}$$

Dobbiamo dunque mostrare che $\delta_V\big(f^*(w)\big) = f^\wedge\big(\delta_W(w)\big)$ per ogni $w \in W$. Per fare questo proviamo che i due funzionali assumono lo stesso valore su ogni $v \in V$. Ed infatti

$$\delta_V\big(f^*(w)\big)(v) = \langle f^*(w), v\rangle_V = \langle w, f(v)\rangle_W$$
$$f^\wedge\big(\delta_W(w)\big)(v) = \delta_W(w)\big(f(v)\big) = \langle w, f(v)\rangle_W\,.$$

D'altra parte se U è un sottospazio di V, allora $U^\perp$ e $\mathrm{Ann}\, U$ sono uguali a meno dell'isomorfismo δ_V, cioè $\delta_V(U^\perp) = \mathrm{Ann}\, U$ (cfr. esercizio G).

Da questi due fatti segue allora immediatamente che le proprietà dimostrate in questo esercizio sono esattamente le stesse dimostrate nell'esercizio E, a meno dell'identificazione di V con $V^\wedge$ e di W con $W^\wedge$. □

Per il teorema di Sylvester, per ogni prodotto scalare b su uno spazio vettoriale reale V di dimensione n sono univocamente determinati dei numeri interi non negativi p e s tali che ogni matrice associata a b è congruente alla matrice

$$\left(\begin{array}{c|c|c} I_p & & \\ \hline & -I_s & \\ \hline & & 0 \end{array}\right).$$

I numeri p, s, $n-(p+s)$ saranno chiamati rispettivamente *indice di positività, negatività, nullità* di b.

Se V è uno spazio euclideo (cioè uno spazio vettoriale reale dotato di un prodotto scalare definito positivo), per ogni operatore f simmetrico (o autoaggiunto) di V esiste una base ortonormale di V formata da autovettori per f. Questo risultato sarà citato come *teorema spettrale.* Ricordiamo che l'esistenza di una base ortonormale di autovettori sussiste anche per gli *operatori normali* in uno spazio vettoriale complesso dotato di un prodotto hermitiano definito positivo (un operatore f è detto normale se $ff^* = f^*f$). In particolare dunque il teorema spettrale vale per gli *operatori hermitiani* ($f^* = f$) e per gli *operatori unitari* ($ff^* = f^*f = id$).

Chiameremo *isometria* ogni operatore f di uno spazio euclideo $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ tale che $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ per ogni $x, y \in V$.

Testi degli esercizi

Esercizio 1. Siano V, W, Z spazi vettoriali su un campo $\mathbf{K}$ e siano $f: V \to W$ e $g: V \to Z$ applicazioni lineari. Si dimostri che

$$\operatorname{Ker} f \subseteq \operatorname{Ker} g \iff \exists\, L: W \to Z \text{ lineare tale che } g = L \circ f\,.$$

Esercizio 2.

(1) Sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ una matrice di rango r. Si dimostri che ogni minore B di A ottenuto scegliendo r righe linearmente indipendenti di A e r colonne linearmente indipendenti di A è invertibile.

(2) Si dimostri che il rango di una matrice simmetrica M coincide con il massimo degli ordini dei minori invertibili di M aventi la diagonale sulla diagonale di M.

Esercizio 3. Sia $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ una matrice triangolare superiore tale che $[M]_{i,i} = 1$ per ogni $i = 1, \ldots, n$. Si dimostri che, se esiste un intero $k \geq 1$ tale che $M^k = I$, allora $M = I$.

Esercizio 4. Si consideri la seguente successione di spazi vettoriali ed applicazioni lineari

$$0 \xrightarrow{f_0} V_1 \xrightarrow{f_1} V_2 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_{n-2}} V_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} V_n \xrightarrow{f_n} 0$$

e si supponga che per ogni $i = 0, \ldots, n-1$ si abbia $\operatorname{Im} f_i = \operatorname{Ker} f_{i+1}$. Si dimostri che

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^i \dim V_i = 0\,.$$

Esercizio 5. Si determinino tutte le matrici $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ tali che $AB = BA$ per ogni matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

Esercizio 6. Calcolare il polinomio caratteristico della matrice

$$M = \left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0 & B \end{array}\right),$$

dove $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ e $C \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$.

Esercizio 7. Siano V, W due spazi vettoriali sul campo $\mathbb{K}$ con $\dim V = n$, $\dim W = m$. Siano $V_1 \subseteq V$, $W_1 \subseteq W$ sottospazi vettoriali di dimensione n_1 ed m_1 rispettivamente. Si consideri l'insieme

$$\mathcal{F} = \{f \in \mathrm{Hom}(V, W) \mid \mathrm{Ker}\, f \supseteq V_1 \text{ ed } \mathrm{Im}\, f \subseteq W_1\}.$$

Si dimostri che $\mathcal{F}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathrm{Hom}(V, W)$ e se ne calcoli la dimensione.

Esercizio 8. Sia V uno spazio vettoriale reale e $b : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineare. Dire se esistono due funzionali $f, g \in V^*$ tali che $b(v, w) = f(v)g(w)$ $\forall v, w \in V$.

Esercizio 9. Costruire, se esiste, una applicazione lineare $f : \mathbb{R}^6 \to \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tale che

$$\mathrm{Im}\, f \supseteq \{A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid \mathrm{rk}\, A = 2\}.$$

Esercizio 10. Si dimostri che ogni matrice ortogonale 2×2 è del tipo

$$R_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \quad \text{oppure} \quad S_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ \sin\vartheta & -\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

con $\vartheta \in \mathbb{R}$.

Si dimostri inoltre che R_ϑ è diagonalizzabile se e solo se ϑ è un multiplo intero di π e che S_ϑ è sempre diagonalizzabile.

Si descrivano geometricamente le applicazioni date dalle matrici R_ϑ ed S_ϑ.

Esercizio 11. Sia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Diciamo che f è $\mathbb{C}$-lineare (risp. $\mathbb{R}$-lineare) se è lineare pensando $\mathbb{C}$ come spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ (risp. $\mathbb{R}$). Che relazione c'è tra l'essere $\mathbb{C}$-lineare e l'essere $\mathbb{R}$-lineare?

Esercizio 12. Si consideri l'applicazione

$$\begin{aligned} \langle\,,\,\rangle &: \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} \\ \langle\,,\,\rangle &: (A, B) \longmapsto \langle A, B\rangle = \mathrm{tr}({}^tAB). \end{aligned}$$

Si dimostri che $\langle\,,\,\rangle$ è un prodotto scalare definito positivo. Nel caso particolare in cui $n = m$ si determini l'ortogonale del sottospazio $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ delle matrici simmetriche.

Esercizio 13. Si consideri l'applicazione

$$\begin{aligned} \langle\,,\,\rangle &: \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} \\ \langle\,,\,\rangle &: (A, B) \longmapsto \langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB). \end{aligned}$$

(1) Si dimostri che $\langle\,,\,\rangle$ è un prodotto scalare non degenere;

(2) si determini l'ortogonale di $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$;

(3) si determinino gli indici di positività, negatività e nullità di $\langle\,,\,\rangle$.

Esercizio 14. Sia $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matrice strettamente triangolare superiore, ossia $[N]_{i,j} = 0$ per ogni $i \geq j$. Si dimostri che $N^n = 0$.

Supponendo che $[N]_{i,i+1} \neq 0$ per ogni $i = 1, \ldots, n-1$ si dimostri che $N^k \neq 0$ per ogni $k < n$.

Esercizio 15. Sia $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ una applicazione lineare tale che

$$f(AB) = f(BA) \qquad \forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

Dimostrare che esiste $\lambda \in \mathbb{K}$ tale che

$$f(X) = \lambda \cdot \mathrm{tr}\, X \qquad \forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

Esercizio 16. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ e $\langle\,,\,\rangle$ un prodotto scalare definito positivo su V. Sia $f : V \to V$ una applicazione lineare avente tutti gli autovalori reali. Si dimostri che esiste una base ortonormale di V a ventaglio per f.

Esercizio 17. Si dimostri che il polinomio minimo della matrice

$$M = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$$

è il minimo comune multiplo tra i polinomi minimi di A e B.

Esercizio 18. Dire se $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ dotato delle seguenti operazioni:

$$\begin{aligned} \boxplus &: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ & \qquad \boxdot &: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ \boxplus &: (x, y) \longmapsto x \boxplus y = xy & \qquad \boxdot &: (\alpha, x) \longmapsto \alpha \boxdot x = x^\alpha \end{aligned}$$

è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

Esercizio 19. Sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ con $\mathrm{rk}\, A = k$.

(1) Si dimostri che esistono due matrici $P \in GL_n(\mathbb{R})$ e $Q \in O_n$ tali che

$$PAQ = \left(\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right).$$

(2) Usando il punto (1), si dimostri che $\mathrm{rk}(A\,{}^tA) = \mathrm{rk}\, A$.

Esercizio 20. Sia $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ una matrice di rango r. Sia

$$S = \{X \in \mathcal{M}_{n\times k}(\mathbb{R}) \mid AX = 0\}.$$

Si dimostri che S è uno spazio vettoriale (con le usuali operazioni sulle matrici) e se ne calcoli la dimensione.

Esercizio 21. Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbf{K}$ e sia $\langle\ ,\ \rangle$ un prodotto scalare su V. Sia $W \subseteq V$ un sottospazio vettoriale tale che $\langle\ ,\ \rangle|_W$ sia non degenere. Si dimostri che

$$V = W \oplus W^{\perp}.$$

Esercizio 22. Sia V uno spazio vettoriale e siano A, B due sottospazi vettoriali di V tali che $V = A \oplus B$. Se $f : A \to A$ e $g : B \to B$ sono due applicazioni lineari, si consideri l'applicazione lineare $L : V \to V$ definita da $L(v) = f(a) + g(b)$, dove $v = a + b$, $a \in A$, $b \in B$.

Si dimostri che

$$L \text{ è diagonalizzabile} \iff f \text{ e } g \text{ sono diagonalizzabili}.$$

Esercizio 23. Sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $\operatorname{rk} A = 1$. Dimostrare che

$$A \text{ è diagonalizzabile} \iff \operatorname{tr} A \neq 0.$$

Esercizio 24. Siano V e W spazi vettoriali reali dotati ciascuno di un prodotto scalare definito positivo. Sia $f : V \to W$ una applicazione lineare e sia $f^* : W \to V$ l'applicazione aggiunta di f. Si dimostri che

(1) f è iniettiva se e solo se $f^* \circ f : V \to V$ è un isomorfismo;

(2) f è surgettiva se e solo se $f \circ f^* : W \to W$ è un isomorfismo.

Esercizio 25. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e sia $f : V \to V$ una applicazione lineare tale che $f^2 = id$. Si dimostri che esiste una base di V rispetto alla quale la matrice associata ad f è

$$\left(\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & -I_{n-k} \end{array}\right)$$

con $k \in \mathbb{N}$ univocamente determinato.

Esercizio 26. Sia $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, con $n \geq 1$, una applicazione lineare. Si dimostri che esiste un sottospazio vettoriale W di $\mathbf{R}^n$ invariante per f e tale che $0 < \dim W \leq 2$.

Esercizio 27. Sia $f : V \to V$ un endomorfismo non nilpotente di uno spazio vettoriale V. Si dimostri che esiste un sottospazio vettoriale $A \neq \{0\}$ di V tale che $f(A) = A$.

Esercizio 28. Sia V uno spazio vettoriale reale e sia $f : V \to V$ una applicazione lineare diagonalizzabile. Sia $W \subseteq V$ un sottospazio invariante per f, ossia $f(W) \subseteq W$.

(1) Dire se esiste un supplementare U per W ($V = W \oplus U$) che sia invariante per f.

(2) $f|_W : W \to W$ è diagonalizzabile?

Esercizio 29. Sia A la matrice triangolare superiore

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ & \alpha & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \alpha & a_{n-1,n} \\ & & & & \alpha \end{pmatrix}$$

con $a_{1,2} \cdot a_{2,3} \cdots a_{n-1,n} \neq 0$. Allora la forma di Jordan di A è

$$J_{\alpha,n} = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & & \\ & \alpha & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \alpha \end{pmatrix}.$$

Esercizio 30. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita n sul campo $\mathbf{K}$ e sia $f : V \to V$ una applicazione lineare tale che $f^2 = f$. Si dimostri che esiste una base di V rispetto alla quale la matrice associata ad f è

$$\left(\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

con $k \in \mathbf{N}$ univocamente determinato.

Esercizio 31. Sia V uno spazio vettoriale reale e sia $\langle\ ,\ \rangle$ un prodotto scalare su V semidefinito positivo [risp. negativo]. Si dimostri che

$$V^{\perp} = \{v \in V \mid \langle v, v\rangle = 0\}.$$

Esercizio 32. Sia A una matrice di $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ e sia $L : \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ l'applicazione lineare definita da $L(X) = AX$. Si dimostri che

(1) L è iniettiva $\iff$ A è invertibile;

(2) λ è autovalore per L $\iff$ λ è autovalore per A;

(3) L è diagonalizzabile $\iff$ A è diagonalizzabile.

Esercizio 33. Sia $g : \mathbf{K}^n \to \mathbf{K}^n$ una applicazione lineare nilpotente. Allora $g^n = 0$.

Esercizio 34 (Forma canonica delle matrici ortogonali). Sia $A \in O_n$ una matrice ortogonale. Si dimostri che esiste una matrice ortogonale M tale che

$$M^{-1}AM = {}^tMAM = \begin{pmatrix} \boxed{I_{k_1}} & & & & \\ & \boxed{-I_{k_2}} & & & \\ & & \boxed{R_{\vartheta_1}} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \boxed{R_{\vartheta_k}} \end{pmatrix}$$

dove $\forall i = 1, \dots, k \quad R_{\vartheta_i} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta_i & -\sin\vartheta_i \\ \sin\vartheta_i & \cos\vartheta_i \end{pmatrix}$ con $\vartheta_i \neq h\pi \ \forall h \in \mathbf{Z}$.

Esercizio 35. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e sia $g : V \to V$ una applicazione lineare di rango r. Sia $L : \mathrm{Hom}(V,V) \to \mathrm{Hom}(V,V)$ l'applicazione definita da $L(f) = g \circ f$.

Dimostrare che L è lineare e calcolare $\dim(\mathrm{Ker}\, L)$ e $\dim(\mathrm{Im}\, L)$.

Esercizio 36. Siano $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Supponiamo che $M^2 = N^2 = I$ e che $\mathrm{tr}\, M = \mathrm{tr}\, N$. Allora M è simile a N.

Esercizio 37 (Triangolazione simultanea). Siano A e B matrici quadrate reali di ordine n, aventi tutti gli autovalori reali. Dimostrare che, se $AB = BA$, allora esiste una matrice ortogonale N di ordine n tale che $N^{-1}AN$ e $N^{-1}BN$ sono triangolari.

Esercizio 38. Sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ una matrice diagonalizzabile. Si dimostri che

$$\exists k \in \mathbf{N} \text{ tale che } A^k = I \iff A^2 = I\,.$$

Esercizio 39. Sia $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbf{R})$ una matrice tale che $[A]_{i,j} \in \mathbf{Z}$ per ogni i, j. Si dimostri che $\mathrm{Ker}\, A$ possiede una base di vettori appartenenti a $\mathbf{Z}^n$.

Esercizio 40. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione ≥ 1 e sia $f : V \to V$ una applicazione lineare tale che $f^2 = -id$. Si dimostri che esiste una base di V rispetto alla quale la matrice associata ad f è

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & -I_m \\ \hline I_m & 0 \end{array}\right)$$

con $m \in \mathbf{N}$ univocamente determinato.

Esercizio 41. Sia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ una applicazione lineare. Dimostrare che esiste un sottospazio vettoriale π di $\mathbf{R}^3$ di dimensione 2 tale che $f(\pi) \subseteq \pi$.

Esercizio 42. Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbf{K}$ e sia $f : V \to V$ una applicazione lineare diagonalizzabile. Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ gli autovalori di f. Si dimostri che, per ogni $W \subseteq V$ sottospazio invariante per f, si ha

$$W = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$$

essendo $W_i = W \cap E(\lambda_i)$.

Esercizio 43. Sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ una matrice avente un autovalore reale $\alpha \neq 0$ di molteplicità algebrica n. Si dimostri che per ogni intero $k \geq 1$

$$A^k \text{ è diagonalizzabile} \iff A \text{ è diagonalizzabile}\,.$$

Esercizio 44. Sia V uno spazio vettoriale reale e sia $f : V \to V$ una applicazione lineare tale che $f^2 = id$.

(1) Esiste su V un prodotto scalare definito positivo rispetto al quale f è autoaggiunta?

(2) È vero che f risulta autoaggiunta rispetto ad un qualsiasi prodotto scalare su V definito positivo?

Esercizio 45. Sia M una matrice $n \times n$ tale che $M^2 = M$ e $\mathrm{tr}\, M = k$. Si dimostri che k è intero, $0 \leq k \leq n$, e che $\mathrm{rk}\, M = k$.

Esercizio 46. Siano $v, w \in \mathbf{R}^n$. Si dimostri che la matrice $v\,{}^tw$ è simmetrica se e solo se v e w sono linearmente dipendenti.

Esercizio 47. Sia J un blocco di Jordan di ordine n relativo all'autovalore $\lambda \neq 0$. Trovare la forma di Jordan di J^k, per $k \in \mathbf{N}$.

Esercizio 48. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n ed $f : V \to V$ una applicazione lineare non nulla. Dimostrare che esiste una applicazione lineare $g : V \to V$ tale che $g \circ f$ non è identicamente nulla e $(g \circ f)^2 = g \circ f$.

Esercizio 49. Sia A una matrice ortogonale 3×3 tale che $\det A = 1$. Si dimostri che A è una rotazione attorno ad una retta di un angolo ϑ che verifica la relazione

$$\cos\vartheta = \frac{\mathrm{tr}\, A - 1}{2}\,.$$

Esercizio 50. Sia V uno spazio vettoriale e sia $f : V \to V$ una applicazione lineare tale che $f^2 = id$. Si supponga che esistano due sottospazi vettoriali H e K di V tali che

$$V = H \oplus K, \quad f(H) \subseteq K \quad \text{e} \quad f(K) \subseteq H\,.$$

Dimostrare che esiste una base di V rispetto alla quale la matrice associata ad f è del tipo

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & I_m \\ \hline I_m & 0 \end{array}\right).$$

Esercizio 51 (Forma di Jordan reale). Sia A una matrice di $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e sia $J(A) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la forma di Jordan di A. Allora esiste una base di $\mathbb{R}^n$ rispetto alla quale la matrice A assume la forma $J_{\mathbb{R}}(A)$ univocamente determinata da $J(A)$ mediante la seguente costruzione:

(1) si lasciano gli stessi blocchi di Jordan relativi agli autovalori reali;

(2) per ogni coppia di autovalori complessi coniugati μ, $\overline{\mu}$ di A, si sostituisce ogni coppia di blocchi $J_{\mu,k}$, $J_{\overline{\mu},k}$ con un blocco $2k \times 2k$ del tipo

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} H_\mu & I & & \\ \hline & H_\mu & \ddots & \\ \hline & & \ddots & I \\ \hline & & & H_\mu \end{array}\right)$$

dove $H_\mu = \begin{pmatrix} \Re e\,\mu & \Im m\,\mu \\ -\Im m\,\mu & \Re e\,\mu \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Esercizio 52. Trovare tutte le possibili forme di Jordan (o di Jordan reale) di una applicazione lineare $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $A^6 = id$.

Esercizio 53. Sia A una matrice di $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avente solo l'autovalore 1 e tale che $A^k = A^{k+1}$, per qualche $k \in \mathbb{N}$. Si dimostri che A è la matrice identica.

Esercizio 54. Sia V uno spazio vettoriale reale e siano $v_1, \dots, v_k$ vettori di V. Su $V^{\wedge}$ si consideri il prodotto scalare definito da

$$\langle f, g\rangle = \sum_{i=1}^{k} f(v_i)g(v_i) \qquad \forall\, f, g \in V^{\wedge}.$$

Si determinino, in funzione dei v_i, l'indice di positività e di nullità di tale prodotto scalare.

Esercizio 55. Siano A, B due matrici 2×2 a coefficienti complessi. Si dimostri che A e B sono simili $\iff$ A e B hanno gli stessi autovalori e per ciascuno di essi si ha $\dim E(\lambda, A) = \dim E(\lambda, B)$.

Esercizio 56. Siano U, V, W spazi vettoriali su uno stesso campo $\mathbb{K}$ con $\dim U = k$, $\dim V = n$, $\dim W = m$ e sia $g : U \to V$ una fissata applicazione lineare di rango r. Dimostrare che l'insieme

$$\mathcal{F} = \{f \in \operatorname{Hom}(V, W) \mid f \circ g = 0\}$$

è un sottospazio vettoriale di $\operatorname{Hom}(V, W)$ e calcolarne la dimensione.

Esercizio 57. Fissate due matrici $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, si consideri l'insieme

$$E(A, B) = \{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid AX = XB\}.$$

Si dimostri che

(1) $E(A, B)$ è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$;

(2) se A_1 è simile ad A e B_1 è simile a B, allora $E(A, B)$ è isomorfo a $E(A_1, B_1)$.

Esercizio 58 (Forma canonica delle matrici antisimmetriche reali). Sia $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ una matrice $n \times n$ reale, antisimmetrica. Si dimostri che esiste una matrice ortogonale $M \in O_n$ tale che

$$M^{-1}AM = \begin{pmatrix} \boxed{H_{a_1}} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \boxed{H_{a_k}} & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad H_{a_i} = \begin{pmatrix} 0 & a_i \\ -a_i & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 59. Siano A, B matrici di $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si dimostri che

(1) $\operatorname{rk} A + \operatorname{rk} B \le \operatorname{rk} AB + n$;

(2) se n è dispari e $AB = 0$, allora $A + {}^tA$ o $B + {}^tB$ è singolare.

Esercizio 60. Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$ e sia $\langle\ ,\ \rangle$ un prodotto scalare non degenere su V. Sia $f : V \to V$ una applicazione lineare autoaggiunta rispetto a $\langle\ ,\ \rangle$, e sia $b : V \times V \to \mathbb{K}$ la forma bilineare definita da $b(v, w) = \langle f(v), w\rangle$.

(1) Dimostrare che l'indice di nullità di b è uguale alla dimensione di $\operatorname{Ker} f$.

(2) Nel caso che $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e $\langle\ ,\ \rangle$ sia definito positivo, dimostrare che l'indice di positività [risp. negatività] di b coincide con il numero di autovalori positivi [risp. negativi] di f.

Esercizio 61. Sia V uno spazio vettoriale e sia $f : V \to V$ una applicazione lineare tale che $f^2 = f^3$. Si dimostri che esiste una base di V rispetto alla quale la matrice associata a f è del tipo

$$\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & I \end{array}\right)$$

con $A^2 = 0$.

Esercizio 62. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo $\mathbb{K}$ e sia $\langle\, ,\, \rangle$ un prodotto scalare su V. Sia $v_0 \in V$ tale che $\langle v_0, v_0 \rangle = 0$. Si dimostri che esiste una base di V contenente v_0 ed ortogonale rispetto a $\langle\, ,\, \rangle$ se e solo se $\big(\mathrm{Span}(v_0)\big)^{\perp} = V$.

Esercizio 63. Siano V e W due spazi vettoriali su $\mathbb{K}$, V_1 e V_2 due sottospazi vettoriali di V. Si dimostri che

(1) $\mathrm{Hom}(W, V_1 \cap V_2) = \mathrm{Hom}(W, V_1) \cap \mathrm{Hom}(W, V_2)$;

(2) $\mathrm{Hom}(W, V_1 + V_2) = \mathrm{Hom}(W, V_1) + \mathrm{Hom}(W, V_2)$.

Esercizio 64 (Forma canonica delle forme bilineari antisimmetriche). Sia V uno spazio vettoriale di dimensione $n \geq 1$ sul campo $\mathbb{K}$ e sia $b : V \times V \to \mathbb{K}$ una forma bilineare antisimmetrica. Si dimostri che esiste una base di V rispetto a cui la matrice associata a b assume la forma

$$\begin{pmatrix} \boxed{H} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \boxed{H} & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 65. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e siano $f_1, \ldots, f_k, g$ elementi dello spazio duale $V^{\vee}$. Dimostrare che

$$\exists\, a_i \in \mathbb{K} \text{ tali che } g = \sum_{i=1}^{k} a_i f_i \iff \bigcap_{i=1}^{k} \mathrm{Ker}\, f_i \subseteq \mathrm{Ker}\, g\,.$$

Esercizio 66. Sia V uno spazio vettoriale, U e W due sottospazi vettoriali di V di dimensione n ed m rispettivamente, tali che $V = U \oplus W$. Siano

$$\mathcal{F}_1 = \{f \in \mathrm{Hom}(V,V) \mid f(U) \subseteq W \text{ ed } f(W) \subseteq U\},$$
$$\mathcal{F}_2 = \{f \in \mathrm{Hom}(V,V) \mid f(U) \subseteq U \text{ ed } f(W) \subseteq W\}\,.$$

(1) Calcolare la dimensione di $\mathcal{F}_1$ ed $\mathcal{F}_2$.

(2) Dimostrare che $\mathrm{Hom}(V,V) = \mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2$.

Esercizio 67. Sia V uno spazio vettoriale reale e $f : V \to V$ una applicazione lineare. Siano W_1, W_2 sottospazi vettoriali di V invarianti per f e tali che $V = W_1 + W_2$. È vero che, se $f|_{W_1}$ e $f|_{W_2}$ hanno solo autovalori reali, allora f ha tutti gli autovalori reali?

Esercizio 68. Sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matrice simmetrica, definita positiva. Si dimostri che, se esiste $p \in \mathbb{N}$ tale che $A^p = I$, allora $A = I$.

Esercizio 69. Siano V e W due spazi vettoriali sul campo $\mathbb{K}$ di dimensioni n e m rispettivamente. Siano $f : V \to W$ e $g : W \to V$ due applicazioni lineari, la prima iniettiva, la seconda surgettiva. Si costruisca un endomorfismo L di W tale che $g \circ L \circ f$ sia l'identità su V.

Esercizio 70. Siano E, F, G spazi vettoriali sul campo $\mathbb{K}$ e siano $f : F \to G$, $g : E \to G$ applicazioni lineari. Si dimostri che

$$\mathrm{Im}\, g \subseteq \mathrm{Im}\, f \iff \exists\, L : E \to F \text{ lineare tale che } g = f \circ L\,.$$

Esercizio 71. Su $\mathbb{R}^n$ si consideri il prodotto scalare standard e sia $\mathcal{F}$ il sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ definito da

$$\mathcal{F} = \left\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid Av \in (\mathrm{Span}(v))^{\perp}\ \forall\, v \in \mathbb{R}^n\right\}.$$

Si dimostri che $\mathcal{F}$ coincide con l'insieme $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ delle matrici antisimmetriche.

Esercizio 72. Sia $A \in O_2$. Si dimostri che

(1) se A è la matrice di una rotazione di angolo $\vartheta \neq k\pi$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$, allora gli autospazi complessi di A non dipendono da ϑ;

(2) se $\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$ è autovettore per A, allora A è la matrice di una rotazione.

Esercizio 73. Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$ di dimensione n; sia $b : V \times V \to \mathbb{K}$ una forma bilineare simmetrica e k la dimensione di $V^{\perp}$. Dire se gli endomorfismi f di V tali che $b\big(f(v), w\big) = 0$ per ogni $v, w \in V$ formano un sottospazio vettoriale di $\mathrm{Hom}(V,V)$ e, in caso affermativo, calcolarne la dimensione.

Esercizio 74. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione m ed $f : V \to V$ una applicazione lineare. Supponiamo che esista un vettore v di V tale che $f^{m-1}(v) \neq 0$ e $f^m(v) = 0$. Dimostrare che i vettori

$$\{v, f(v), f^2(v), \ldots, f^{m-1}(v)\}$$

sono una base di V.

Esercizio 75. Sia $V = \mathbb{R}[x]$ lo spazio dei polinomi a coefficienti reali in una indeterminata; sia $b : V \times V \to \mathbb{R}$ la forma bilineare definita da $b(P,Q) = \sum_i \alpha_i\beta_i$, dove $P(x) = \sum_i \alpha_i x^i$ e $Q(x) = \sum_i \beta_i x^i$. Si consideri

$$\delta_b : V \longrightarrow V^*$$
$$\delta_b : P \longmapsto b_P$$

dove b_P è il funzionale definito da $b_P(Q) = b(P,Q)$. Si dimostri che

$$f \in \operatorname{Im}\delta_b \iff f(x^i) \neq 0 \quad \text{solo per un numero finito di indici.}$$

Esercizio 76. Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$ di dimensione n ed $f : V \to \mathbb{K}$ una applicazione lineare. Sia w un vettore di V tale che $w \notin \operatorname{Ker} f$. Si consideri l'applicazione lineare $L : V \to V$ definita da $L(v) = v + f(v)w$. Dire se L è diagonalizzabile.

Esercizio 77. Sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matrice antisimmetrica. Si dimostri che A è triangolabile se e solo se $A = 0$.

Esercizio 78. Siano $v_1, \ldots, v_{n-1}$ vettori linearmente indipendenti di $\mathbb{R}^n$. Detta A la matrice $(n-1) \times n$ avente come righe i suddetti vettori, si indichi con Δ_i $(i = 1, \ldots, n)$ il determinante del minore di ordine $n-1$ ottenuto cancellando in A la colonna i-esima.

Si dimostri che $v \in \mathbb{R}^n$ è ortogonale a tutti i vettori $v_1, \ldots, v_{n-1}$ se e solo se esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $v = \lambda(\Delta_1, -\Delta_2, \Delta_3, \ldots, (-1)^{n+1}\Delta_n)$.

Esercizio 79. Siano $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ matrici nilpotenti e tali che $A^{n-1} \neq 0$ e $B^{n-1} \neq 0$. Dire se A e B sono simili.

Esercizio 80. Sia A una matrice di $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si dimostri che, se $A \neq \lambda I$, allora A è simile ad una matrice della forma

$$\begin{pmatrix} 0 & * & \cdots & * \\ * & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & * \\ * & \cdots & * & \operatorname{tr} A \end{pmatrix}.$$

Esercizio 81. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e sia $f : V \to V$ una applicazione lineare tale che $\dim(\operatorname{Im} f) = k < n$.

Si dimostri che esistono due applicazioni lineari $f_1, f_2 : V \to V$ tali che $f = f_1 + f_2$ ed $\operatorname{Im} f_i \supsetneq \operatorname{Im} f$ per $i = 1, 2$.

Esercizio 82. Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$ di dimensione n, f un endomorfismo di V e k un numero intero tale che $0 < k < n$. Dimostrare che, se tutti i sottospazi vettoriali di V di dimensione k sono invarianti per f, allora $f = \lambda \cdot id$, per qualche $\lambda \in \mathbb{K}$.

Esercizio 83. Si dimostri che l'insieme

$$\mathcal{D} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid M \text{ è diagonalizzabile}\}$$

genera tutto $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ come spazio vettoriale.

Esercizio 84. Sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si dimostri che esiste $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ invertibile e tale che

$$M^{-1}AM = \left(\begin{array}{c|c} B & 0 \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$$

dove B e C sono matrici quadrate tali che B ha tutti autovalori reali, mentre C non ha nessun autovalore reale.

Esercizio 85. Per ogni $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, sia $f_{AB} : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'applicazione lineare definita da $f_{AB}(X) = AX + XB$.

Calcolare la dimensione dello spazio vettoriale

$$V = \left\{ f_{AB} \in \operatorname{Hom}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathcal{M}_n(\mathbb{K})) \;\middle|\; A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \right\}.$$

Esercizio 86. Sullo spazio vettoriale $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si consideri il prodotto scalare $\langle X, Y \rangle = \operatorname{tr}(XY)$. Data una matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, sia φ_A l'applicazione lineare

$$\varphi_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$
$$\varphi_A : X \longmapsto AX$$

Determinare le matrici A tali che φ_A è autoaggiunta rispetto a $\langle\ ,\ \rangle$.

Esercizio 87. Siano $a, b \in \mathbb{K}$ e sia A la matrice $n \times n$

$$A = \begin{pmatrix} b & a & \cdots & a \\ a & b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & a & b \end{pmatrix}.$$

Si calcoli il determinante di A.

Esercizio 88. Siano $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si dimostri che A e B sono simili sui complessi se e solo se sono simili sui reali.

Esercizio 89. Sia V uno spazio vettoriale reale e sia $\langle\ ,\ \rangle$ un prodotto scalare definito positivo su V. Sia $P : V \to V$ una proiezione, ossia una applicazione lineare tale che $P^2 = P$. Si dimostri che

(1) P^* è una proiezione;
(2) sono equivalenti le seguenti proposizioni:
  (a) P è una proiezione ortogonale (su un sottospazio di V);

(b) $P = P^*$;
(c) $PP^* = P^*P$.

Esercizio 90. Sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ e si supponga che esista p, $1 \leq p \leq n$, tale che

$$\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} A^2 = \cdots = \operatorname{tr} A^{p-1} = 0 .$$

Si dimostri che A è nilpotente oppure ha almeno p autovalori distinti.

Esercizio 91. Sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ e si supponga che

$$\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} A^2 = \cdots = \operatorname{tr} A^n = 0 .$$

Si dimostri che allora A è nilpotente.

Esercizio 92. Sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ e si supponga che

$$\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} A^2 = \cdots = \operatorname{tr} A^{n-1} = 0 \quad \text{e} \quad \operatorname{tr} A^n \neq 0 .$$

Si dimostri che allora A è diagonalizzabile.

Esercizio 93. Determinare l'insieme delle matrici $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tali che

$$M^{-1}AM \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \qquad \forall M \in GL_n(\mathbb{C}) .$$

Esercizio 94. Sia $\sigma : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ l'applicazione lineare che sulla base canonica agisce nel seguente modo:

$$\sigma : e_i \longmapsto e_{i+1} \quad \forall i = 1, \dots, n-1$$
$$\sigma : e_n \longmapsto e_1 .$$

Si dimostri che σ è diagonalizzabile e se ne calcolino gli autovalori ed una base di autovettori.

Esercizio 95. Per ogni $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ sia R_σ la matrice associata (rispetto alla base canonica di $\mathbb{C}^n$) all'applicazione lineare che agisce permutando secondo σ i vettori della base canonica, ossia $R_\sigma e_i = e_{\sigma(i)}$. Si dimostri che ogni matrice R_σ è diagonalizzabile.

Esercizio 96. Sia $\mathfrak{S}_n$ il gruppo delle permutazioni su n elementi e per ogni $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ sia $R_\sigma \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice associata (rispetto alla base canonica di $\mathbb{C}^n$) all'applicazione lineare che agisce permutando secondo σ i vettori della base canonica, ossia $e_i \mapsto e_{\sigma(i)}$. Si dimostri che

(1) $\mathcal{R} = \operatorname{Span}(R_\sigma \mid \sigma \in \mathfrak{S}_n) \neq \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$;
(2) le relazioni lineari che legano fra loro le matrici R_σ sono generate da relazioni a coefficienti in $\mathbb{Z}$.

Si calcoli inoltre la dimensione del sottospazio $\mathcal{R}$.

Esercizio 97. Sia V uno spazio vettoriale reale e $\langle\ ,\ \rangle$ un prodotto scalare definito positivo su V. Sia $f \in \operatorname{Hom}(V, V)$ tale che $ff^* = f^*f$. Si dimostri che $V = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$.

Esercizio 98. Sia A una matrice reale quadrata di ordine n avente tutti gli autovalori reali. Si dimostri che se $A^p = I$, allora A è diagonalizzabile.

Esercizio 99. Sia $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ una matrice reale $n \times n$ simmetrica e invertibile; sia g il prodotto scalare in $\mathbb{R}^n$ associato ad A rispetto alla base canonica. Si supponga che ogni matrice $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ definisca, rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$, una applicazione lineare autoaggiunta rispetto a g. Si dimostri che A ha un solo autovalore.

Esercizio 100. Sia A una matrice di Jordan in $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ invertibile. Trovare la forma di Jordan di A^{-1}.

Esercizio 101. Sia $\varphi : V \to V$ un endomorfismo diagonalizzabile di uno spazio vettoriale V di dimensione n.

Si dimostri che esiste $v \in V$ tale che $\{v, \varphi(v), \dots, \varphi^{n-1}(v)\}$ è una base di V se e solo se tutti gli autovalori di φ sono distinti.

Esercizio 102. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione n dotato di un prodotto scalare $\langle\ ,\ \rangle$ definito positivo. Sia $f : V \to V$ un'applicazione lineare autoaggiunta, e sia

$$E = \{g \in \operatorname{Hom}(V, V) \mid g \text{ è autoaggiunta ed } f \circ g = g \circ f\} .$$

Dimostrare che E è un sottospazio vettoriale di $\operatorname{Hom}(V, V)$ e calcolarne la dimensione.

Esercizio 103. Sia A una matrice $n \times n$ antisimmetrica e sia $\widetilde{A}$ la matrice aggiunta di A. Si dimostri che

(1) se n è pari, $\widetilde{A}$ è antisimmetrica;
(2) se n è dispari, $\widetilde{A}$ è simmetrica.

Esercizio 104. Siano A, B due matrici reali $n \times n$. Si dimostri che A e B si diagonalizzano simultaneamente per mezzo di una matrice ortogonale se e solo se A e B sono entrambe simmetriche e $AB = BA$.

Esercizio 105. Siano A e B due matrici quadrate complesse di ordine n.

(1) È vero che, se $AB = BA$, allora esiste una base di Jordan simultanea per A e B?
(2) È vero che, se esiste una base di Jordan simultanea per A e B, allora $AB = BA$?

Esercizio 106. Sia $B \in GL_n(\mathbb{R})$. Per ogni $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si ponga $A' = B^{-1} \cdot {}^tA \cdot B$ ed $A'' = (A')'$. Determinare l'insieme delle matrici B tali che $A'' = A$ per ogni $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Esercizio 107. Ogni matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ è simile alla sua trasposta.

Esercizio 108. Sullo spazio vettoriale $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ si consideri il prodotto scalare $\langle X,Y\rangle = \operatorname{tr}({}^tXY)$. Data una matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, sia φ_A l'applicazione lineare

$$\varphi_A : \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$$
$$\varphi_A : X \longmapsto AX .$$

Determinare l'insieme delle matrici A tali che φ_A è autoaggiunta rispetto a $\langle\ ,\ \rangle$.

Esercizio 109. Sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ una matrice nilpotente e sia J la forma di Jordan di A. Trovare la forma di Jordan $\widetilde{J}$ della matrice

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{c|c} A & A \\ \hline 0 & A \end{array}\right) .$$

Esercizio 110. Sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si dimostri che A è simmetrica se e solo se $A{}^tA = {}^tAA$ ed ha tutti gli autovalori reali.

Esercizio 111. Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ una matrice tale che $\operatorname{tr} A = 0$. Si dimostri che esiste una matrice invertibile $N \in M_n(\mathbb{R})$ tale che $N^{-1}AN$ abbia tutti zeri sulla diagonale principale.

Esercizio 112. Sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matrice ortogonale. Dimostrare che $A - I$ è nilpotente se e solo se $A = I$.

Esercizio 113. Sia V uno spazio vettoriale reale e sia $\langle\ ,\ \rangle$ un prodotto scalare su V tale che $\langle v,v\rangle \neq 0$ per ogni $v \in V - \{0\}$. Si dimostri che allora $\langle\ ,\ \rangle$ è definito positivo oppure definito negativo.

Esercizio 114. Si determini l'insieme $\mathcal{F}$ delle matrici $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tali che

$${}^tMAM = A \qquad \forall M \in GL_n(\mathbb{R}) .$$

Esercizio 115. Sia V uno spazio vettoriale reale dotato di un prodotto scalare $\langle\ ,\ \rangle$ definito positivo. Sia $f : V \to V$ una applicazione lineare e sia f^* l'aggiunta di f. Si dimostri che esiste un isomorfismo $\varphi : V \to V$ tale che $f^* = \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi$.

Esercizio 116. Si identifichi O_n con il gruppo delle applicazioni $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ortogonali rispetto al prodotto scalare standard. Sia A una matrice $n \times n$ reale, simmetrica, e sia g il prodotto scalare su $\mathbb{R}^n$ associato alla matrice A rispetto alla base canonica.

Caratterizzare il sottogruppo degli elementi di O_n che conservano il prodotto scalare g.

Esercizio 117. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una applicazione lineare ortogonale (i.e. che conserva il prodotto scalare standard). Si dimostri che f è diagonalizzabile se e solo se esistono due sottospazi $W_1 \neq W_2$ di $\mathbb{R}^3$ tali che $f(W_i) \subseteq W_i$ e $\dim W_i = 2$ per $i = 1, 2$.

La tesi rimane vera se si toglie l'ipotesi che f sia ortogonale?

Esercizio 118. Siano A e B matrici quadrate di ordine n. Per ciascuna delle seguenti affermazioni, dire se è vera (e in tal caso dimostrarla) o se è falsa (e in tal caso trovare un controesempio):

(1) AB e BA sono simili;

(2) AB e BA hanno gli stessi autovalori;

(3) AB e BA hanno gli stessi autovalori con le stesse molteplicità algebriche.

Esercizio 119. Ogni matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ può essere scritta come prodotto di due matrici simmetriche, di cui almeno una invertibile.

Esercizio 120. Sia V uno spazio vettoriale reale dotato di un prodotto scalare definito positivo. Sia $f : V \to V$ una applicazione lineare. Dimostrare che esiste una base ortonormale di V rispetto alla quale la matrice $A = (a_{i,j})$ associata ad f è tale che $a_{i,j} = -a_{j,i} \quad \forall i \neq j$.

Esercizio 121. Sia $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ una matrice invertibile.

(1) Si dimostri che le quattro matrici

$$M, \qquad {}^tM, \qquad M^{-1}, \qquad {}^tM^{-1}$$

sono linearmente dipendenti.

(2) Dire se esiste una matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tale che la dimensione dello spazio $V = \operatorname{Span}(M, {}^tM, M^{-1}, {}^tM^{-1})$ sia esattamente 3.

Esercizio 122. Sia $A \in O_3$ tale che $\det A = 1$ e $\operatorname{tr} A = -1$. Si dimostri che allora A è simmetrica.

Esercizio 123. Sia $L : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ $(n > 1)$ una applicazione lineare tale che $L(AB) = L(A)L(B)\ \ \forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Dimostrare che L è identicamente nulla.

Esercizio 124. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo $\mathbb{K}$ e sia $f \in \operatorname{Hom}(V, V)$. Sia $L : \operatorname{Hom}(V, V) \to \operatorname{Hom}(V, V)$ l'applicazione definita da

$$L : g \longmapsto f \circ g - g \circ f .$$

Si dimostri che, se f è diagonalizzabile, allora anche L lo è. È vero il viceversa?

Esercizio 125. Siano $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Si dimostri che A e B hanno un autovalore in comune se e solo se esiste una matrice $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non nulla tale che $AX = XB$.

La tesi resta ancora vera nel caso che si lavori con matrici reali?

Esercizio 126. Sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matrice avente tutti gli autovalori reali e a due a due distinti e sia $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matrice tale che $AB = BA$.

(1) Dimostrare che B è diagonalizzabile.
(2) Dimostrare che esiste un unico polinomio $P(t) \in \mathbb{R}[t]$, di grado minore o uguale a $n-1$, tale che $B = P(A)$.

Esercizio 127. Sia $\mathbb{C}[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti complessi nell'indeterminata x e sia $f : \mathbb{C}[x] \to \mathbb{C}[x]$ una applicazione lineare tale che $f(pq) = f(p) \cdot f(q)$, per ogni $p, q \in \mathbb{C}[x]$. Si dimostri che, se f non è iniettiva, allora $f(\mathbb{C}[x]) \subseteq \mathbb{C}$.

Esercizio 128. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione $2n$ su $\mathbb{R}$ e sia $\langle\ ,\ \rangle$ un prodotto scalare non degenere su V avente indice di positività ed indice di negatività uguali.

(1) Si trovi un sottospazio $H \subset V$ di dimensione uguale ad n e tale che $\langle\ ,\ \rangle|_H = 0$.
(2) È possibile determinare un sottospazio H come al punto precedente ma tale che $\dim H > n$?

Esercizio 129. Sia V uno spazio vettoriale complesso di dimensione ≥ 1 e siano $f, g : V \to V$ due applicazioni lineari. Si supponga che $fg - gf = f$. Si dimostri che

(1) $\operatorname{Ker} f$ è invariante per g;
(2) esiste un autovettore comune ad f e g;
(3) esiste una base a ventaglio comune ad f e g.

Esercizio 130. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione n, dotato di un prodotto scalare definito positivo $\langle\ ,\ \rangle$. Sia $f : V \to V$ un'applicazione lineare tale che

$$\langle v, w \rangle = 0 \quad \Longrightarrow \quad \langle f(v), f(w) \rangle = 0 .$$

Si dimostri che esistono una isometria lineare $g : V \to V$ ed un numero reale λ tale che $f = \lambda g$.

Esercizio 131. Per ogni $a \in \mathbb{R}$, sia $L_a \in (\mathbb{R}_n[x])^{\hat{}}$ il funzionale definito da

$$L_a : \mathbb{R}_n[x] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$L_a : P \longmapsto P(a) .$$

Si calcoli la dimensione di $\operatorname{Span}\langle L_a \mid a \in \mathbb{R} \rangle$.

Esercizio 132. Siano $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, B simmetrica. Si dimostri che allora il polinomio $P(t) = \det(A + tB)$ ha grado minore o uguale a $\operatorname{rk} B$.

Esercizio 133. Sia $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$. Si calcoli la dimensione del sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$

$$C(A) = \{X \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C}) \mid AX = XA\} .$$

Esercizio 134. Siano $v, w \in \mathbb{R}^n$, $n > 1$. Si calcoli il polinomio caratteristico della matrice $A = v\,{}^t w$ e se ne studi la diagonalizzabilità.

Esercizio 135. Siano $a, b \in \mathbb{K}$ e sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ -b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ -b & \cdots & -b & a \end{pmatrix} .$$

Si calcoli il determinante di A.

Esercizio 136. Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$ e sia $b : V \times V \to \mathbb{K}$ una forma bilineare tale che

(1) esiste $v \in V$ tale che $b(v, v) \neq 0$;
(2) per ogni $v, w \in V$ si ha che $b(v, w) = 0 \implies b(w, v) = 0$.

Si dimostri che b è simmetrica.

Esercizio 137. Siano A e B due matrici reali simmetriche, con A definita positiva e B definita negativa. Si dimostri che $\operatorname{tr}(AB) < 0$.

Esercizio 138. Siano $A_1, \ldots, A_k$ matrici di $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tali che $A_1 + \cdots + A_k = I$. Si dimostri che i seguenti fatti sono equivalenti:

(1) $A_i^2 = A_i$ per ogni $i = 1, \ldots, k$;
(2) $A_i A_j = 0$ per ogni $i \neq j$;
(3) $\operatorname{rk} A_1 + \cdots + \operatorname{rk} A_k = n$.

Esercizio 139. Siano A, B matrici reali $n \times n$ simmetriche. Si dimostri che, se A è definita positiva, allora AB è diagonalizzabile e il numero di autovalori positivi (risp. negativi, nulli) di AB è uguale al numero di autovalori positivi (risp. negativi, nulli) di B.

Esercizio 140. Sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ non nulla. Si consideri l'applicazione lineare

$$L : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$
$$L : X \longmapsto (\det A)X - (\operatorname{tr} X)A\,.$$

Si discuta la diagonalizzabilità di L, al variare della matrice A.

Esercizio 141. Si dimostri che per ogni matrice $A \in GL_n(\mathbb{R})$ esistono una matrice ortogonale N e una matrice triangolare superiore T tale che $A = NT$.

Esercizio 142. Sia $D^i : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ l'applicazione lineare "derivata i-esima". Dire se i seguenti endomorfismi dello spazio vettoriale $\mathbb{R}_n[x]$

$$\begin{array}{ccccc} D^0 & D^1 & D^2 & \cdots & D^n \\ & xD^1 & xD^2 & \cdots & xD^n \\ & & x^2D^2 & \cdots & x^2D^n \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & x^nD^n \end{array}$$

sono elementi linearmente indipendenti in $\operatorname{Hom}(\mathbb{R}_n[x], \mathbb{R}_n[x])$.

Esercizio 143. Sia $W = \{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \operatorname{tr} X = 0\}$ e sia A una matrice di $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tale che $\operatorname{tr}(AX) = 0 \quad \forall X \in W$. Si dimostri allora che esiste $\lambda \in \mathbb{K}$ tale che $A = \lambda I$.

Esercizio 144. Siano V e W spazi vettoriali su $\mathbb{C}$. Si denotino

$$\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W) = \{f : V \to W \mid f \text{ è } \mathbb{C}\text{-lineare}\},$$
$$\operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W) = \{f : V \to W \mid f \text{ è } \mathbb{R}\text{-lineare}\},$$
$$\overline{\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}}(V, W) = \{f : V \to W \mid f \text{ è } \mathbb{C}\text{-antilineare}\},$$

dove un'applicazione $f : V \to W$ viene detta $\mathbb{C}$-antilineare se $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$ per ogni $v_1, v_2 \in V$ ed $f(\lambda v) = \overline{\lambda} f(v)$ per ogni $v \in V$ e $\lambda \in \mathbb{C}$.

Si dimostri che $\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)$ ed $\overline{\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}}(V, W)$ sono sottospazi vettoriali di $\operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$ (come spazi vettoriali su $\mathbb{R}$) e che

$$\operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W) = \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W) \oplus_{\mathbb{R}} \overline{\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}}(V, W)\,.$$

Esercizio 145. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione n dotato di un prodotto scalare $\langle\ ,\ \rangle$ definito positivo e sia $f : V \to V$ una applicazione lineare. Si calcolino gli indici di nullità, positività e negatività del prodotto scalare $b : V \times V \to \mathbb{R}$ definito da $b(x, y) = \langle f(x), f(y)\rangle \ \forall x, y \in V$.

Esercizio 146. Sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si dimostri che

$$\operatorname{tr} A = 0 \iff \exists X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad \text{tali che} \quad A = XY - YX\,.$$

Esercizio 147. Si dimostri che, per ogni matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, esiste una matrice invertibile N tale che tutti gli elementi sulla diagonale principale di $N^{-1}AN$ sono uguali (e quindi uguali a $(1/n)\operatorname{tr} A$).

Esercizio 148.

(1) Sia W un sottospazio vettoriale non nullo di $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tale che

$$\forall A \in W, \quad \forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \qquad AB \text{ e } BA \in W\,.$$

Si dimostri che allora $W = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(2) Si dimostri che se $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ è una applicazione lineare tale che

$$f(AB) = f(A)f(B) \qquad \forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

allora f o è un isomorfismo oppure è l'applicazione nulla.

Esercizio 149. Siano f e g due prodotti scalari sullo spazio vettoriale V di dimensione n e si supponga che f sia non degenere. Si supponga inoltre che esista una base $\mathcal{B}$ di V tale che le matrici associate ad f e g siano rispettivamente

$$F = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}, \qquad G = \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix}.$$

Dimostrare che la n-upla $((\mu_1/\lambda_1), \ldots, (\mu_n/\lambda_n))$ non dipende, a meno dell'ordine, dalla scelta di una tale base $\mathcal{B}$.

Esercizio 150. Si dimostri che per ogni matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ esiste una matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tale che

(1) $AB = BA$;

(2) il polinomio caratteristico $P_B(t)$ di B coincide con il polinomio minimo $m_B(t)$ di B.

Esercizio 151. Siano A e B matrici $n \times n$ tali che $A + hB$ è nilpotente per $n+1$ valori distinti di $h \in \mathbb{K}$. Si dimostri che allora A e B sono nilpotenti.

Esercizio 152. Sia V uno spazio vettoriale ed $f : V \to V$ una applicazione lineare non identicamente nulla. Si dimostri che

(1) Se f è nilpotente, allora non esistono sottospazi $W \subsetneq V$ invarianti per f e tali che $V = W \oplus \operatorname{Ker} f$.

(2) Se per ogni sottospazio $W \subseteq V$ invariante per f e non costituito dal solo 0 si ha che $W \cap \operatorname{Ker} f \neq \{0\}$, allora f è nilpotente.

$\{ f(v_{s+1}), \dots, f(v_n) \}$

È una base dell'Immagine — spazio vettoriale

Im: $f: \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ $I = \{ v \in \mathbb{R}^q \mid \exists\, u \in \mathbb{R}^p \; f(u) = v \}$

$\ker f = \{ u \in \mathbb{R}^p \mid f(u) = 0 \}$

$\ker f \cap \operatorname{Im} f = 0$ per $f^2 = f$

Supponiamo che $z \neq 0$ stia nell'intersezione

quindi $z \in \ker f$ $f(z) = 0$

quindi $z \in \operatorname{Im} f$ $\exists\, u \in \mathbb{R}^p \mid f(u) = z$

$\dim V = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im}$ — $n - s$

n — s — $v_1, \dots, v_s$ sono vettori del nucleo — $n - s$ sono $\neq 0$ in causa di tutti

$f: V \to W$ è un omomorfismo

Se avessi in comune un vettore

$v_s \in \operatorname{Im}$ $f(v_x) = v_s$ $f^2(v_s) = 0$

$f(v_s) = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\operatorname{Im} \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$

base = insieme massimale di generatori indipendenti

per $f^2 = f$ ← $\boxed{\ker \cap \operatorname{Im} = 0}$ cercare

$\dim V = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f$

Soluzioni proposte

Soluzione dell'Esercizio 1. L'implicazione ($\Longleftarrow$) è ovvia, perché se $g = L \circ f$ e se $x \in \operatorname{Ker} f$ si ha $g(x) = L(f(x)) = L(0) = 0$, cioè $\operatorname{Ker} f \subseteq \operatorname{Ker} g$.

Per dimostrare ($\Longrightarrow$) consideriamo una base $\{v_1, \dots, v_s\}$ di $\operatorname{Ker} f$ ed estendiamola ad una base $\{v_1, \dots, v_s, v_{s+1}, \dots, v_n\}$ di V.

? L'insieme $\{f(v_{s+1}), \dots, f(v_n)\}$ è una base di $\operatorname{Im} f$ (perché?), che possiamo estendere ad una base $\{f(v_{s+1}), \dots, f(v_n), w_1, \dots, w_p\}$ di W. Esiste allora una e una sola applicazione lineare $L : W \to Z$ tale che

$$\begin{aligned} L(f(v_i)) &= g(v_i) \quad \text{se } i = s+1, \dots, n \\ L(w_j) &= 0 \quad \text{se } j = 1, \dots, p. \end{aligned}$$

È immediato verificare che, con tale definizione di L, si ha $g = L \circ f$. Si noti che la richiesta sull'immagine tramite L dei vettori $w_1, \dots, w_p$ è del tutto arbitraria e poteva essere fatta anche diversamente. □

Soluzione dell'Esercizio 2. (1) A meno di scambiare l'ordine delle righe e delle colonne di A, possiamo supporre che B sia formato scegliendo le righe $A_1, \dots, A_r$ e le colonne $A^1, \dots, A^r$.

Sia C la sottomatrice $r \times n$ di A formata dalle righe $A_1, \dots, A_r$. Poiché tali righe sono linearmente indipendenti, il rango di C è r, per cui lo spazio $\mathcal{C}(C)$ generato dalle colonne di C ha dimensione r.

Nella matrice A le colonne $A^1, \dots, A^r$ sono linearmente indipendenti per ipotesi e allora, essendo $\operatorname{rk} A = r$, ogni altra colonna A^j appartiene al sottospazio $\operatorname{Span}(A^1, \dots, A^r)$, cioè

$$A^j = \sum_{i=1}^{r} \alpha_{i,j} A^i$$

per opportuni coefficienti $\alpha_{i,j}$. Ma allora anche

$$C^j = \sum_{i=1}^{r} \alpha_{i,j} C^i,$$

per cui $C^1, \dots, C^r$ sono generatori dello spazio $\mathcal{C}(C)$. Visto che $\dim \mathcal{C}(C) = r$, $C^1, \dots, C^r$ ne sono una base. D'altra parte per ogni $j = 1, \dots, r$ la colonna C^j coincide con la colonna B^j, pertanto $B^1, \dots, B^r$ sono linearmente indipendenti e quindi $\det B \neq 0$.

(2) Chiamiamo r il rango di M; sia $\mathcal{F}$ la famiglia dei minori invertibili di M aventi la diagonale sulla diagonale di M e indichiamo con p il massimo degli ordini dei minori di $\mathcal{F}$. Dobbiamo dimostrare che $r = p$; poiché evidentemente $r \geq p$, basta provare che $r \leq p$.

Poiché M ha rango r, esistono in M r righe $M_{i_1}, \dots, M_{i_r}$ linearmente indipendenti. Essendo M simmetrica, le colonne $M^{i_1}, \dots, M^{i_r}$ sono dunque linearmente indipendenti. Queste r righe e r colonne di M formano un minore B $r \times r$ di M che ha la diagonale sulla diagonale di M per costruzione e che è invertibile per quanto provato al punto (1). Abbiamo così visto che in $\mathcal{F}$ esiste almeno un minore di ordine r, per cui $p \geq r$. □

Soluzione dell'Esercizio 3. Per ogni $j \in \{1, \dots, n-1\}$ chiamiamo *j-esima parallela alla diagonale principale di una matrice* M l'insieme degli elementi $[M]_{h,h+j}$ con $1 \leq h \leq n-j$. Se denotiamo tale parallela con $P_j(M)$, abbiamo dunque che $P_j(M)$ è formata dagli elementi $[M]_{1,1+j}, [M]_{2,2+j}, \dots, [M]_{n-j,n}$.

Per prima cosa vogliamo far vedere che, per una matrice triangolare superiore con tutti 1 sulla diagonale, è facile descrivere la prima parallela alla diagonale in ogni potenza M^h con $h \in \mathbb{N}$. Precisamente dimostriamo per induzione su h che

$$[M^h]_{i,i+1} = h[M]_{i,i+1} \quad \forall i = 1, \dots, n-1 . \tag{1}$$

Per $h = 1$ la tesi è ovvia. Supponiamo che la tesi sia vera per h. Dato che sia M che M^h sono matrici triangolari superiori aventi entrambe tutti 1 sulla diagonale principale (verificarlo!), si ha

$$\begin{aligned}[M^{h+1}]_{i,i+1} &= [MM^h]_{i,i+1} = \sum_{s=1}^{n} [M]_{i,s}[M^h]_{s,i+1} = \sum_{s=i}^{i+1} [M]_{i,s}[M^h]_{s,i+1} = \\ &= [M]_{i,i}[M^h]_{i,i+1} + [M]_{i,i+1}[M^h]_{i+1,i+1} = \\ &= [M^h]_{i,i+1} + [M]_{i,i+1} = \\ &= h[M]_{i,i+1} + [M]_{i,i+1} = (h+1)[M]_{i,i+1} .\end{aligned}$$

Nelle ipotesi dell'esercizio, la (1) permette intanto di ottenere che la prima parallela $P_1(M)$ è nulla: infatti, essendo $M^k = I$, si ha $[M^k]_{i,i+1} = 0$ per ogni i, quindi $k[M]_{i,i+1} = 0$ per ogni i e pertanto $[M]_{i,i+1} = 0$ per ogni i.

Per ottenere la tesi, dobbiamo dimostrare che tutte le parallele $P_1(M)$, $P_2(M), \dots, P_{n-1}(M)$ sono nulle. L'idea è quella di generalizzare il ragionamento fatto sopra, provando che, se nella matrice M le prime j parallele $P_1(M), \dots, P_j(M)$ sono nulle, allora per ogni $h \in \mathbb{N}$ la parallela $P_{j+1}(M^h)$ è ricostruibile dalla parallela $P_{j+1}(M)$ e precisamente

$$[M^h]_{i,i+j+1} = h[M]_{i,i+j+1} \quad \forall i = 1, \dots, n-j-1 .$$

Proviamo questo fatto per induzione su h. Per $h = 1$ non c'è nulla da dimostrare. Supponiamo la tesi vera per h e calcoliamo gli elementi della parallela $P_{j+1}(M^{h+1})$:

$$\begin{aligned}[M^{h+1}]_{i,i+j+1} &= [MM^h]_{i,i+j+1} = \sum_{l=1}^{n} [M]_{i,l}[M^h]_{l,i+j+1} = \\ &= \sum_{l=1}^{i-1} [M]_{i,l}[M^h]_{l,i+j+1} + [M]_{i,i}[M^h]_{i,i+j+1} + \\ &+ \sum_{l=i+1}^{i+j} [M]_{i,l}[M^h]_{l,i+j+1} + [M]_{i,i+j+1}[M^h]_{i+j+1,i+j+1} + \\ &+ \sum_{l=i+j+2}^{n} [M]_{i,l}[M^h]_{l,i+j+1} = (h+1)[M]_{i,i+j+1}\end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza vale in quanto

- la prima sommatoria ha gli addendi tutti nulli dato che M è triangolare superiore;
- $[M]_{i,i}[M^h]_{i,i+j+1} = h[M]_{i,i+j+1}$ perché $[M]_{i,i} = 1$ per ipotesi mentre l'elemento $[M^h]_{i,i+j+1}$ sta in $P_{j+1}(M^h)$ e quindi, per ipotesi di induzione, coincide con $h[M]_{i,i+j+1}$;
- la seconda sommatoria è nulla perché, al variare di $l \in \{i+1, \dots, i+j\}$, l'elemento $[M]_{i,l}$ sta nelle parallele $P_1(M), \dots, P_j(M)$, che per ipotesi sono nulle;
- $[M]_{i,i+j+1}[M^h]_{i+j+1,i+j+1} = [M]_{i,i+j+1}$ dato che anche M^h ha tutti 1 sulla diagonale;
- la terza sommatoria è nulla in quanto M^h è triangolare superiore.

È facile a questo punto concludere la dimostrazione dell'esercizio. Infatti abbiamo già provato all'inizio che $P_1(M) = 0$; ne segue che $P_2(M^k) = k \cdot P_2(M)$. Poiché per ipotesi $M^k = I$, si ha che $P_2(M^k) = 0$ e quindi $P_2(M) = 0$. Iterando il procedimento, si deduce che $P_3(M)$ e via via tutte le parallele alla diagonale di M sono nulle e dunque che $M = I$.

Si poteva risolvere l'esercizio anche osservando che

$$M^k - I = (M - I)(M^{k-1} + \cdots + I)$$

(perché?) e che la matrice $T = M^{k-1} + \cdots + I$ è invertibile in quanto somma di matrici triangolari superiori con tutti 1 sulla diagonale. Infatti allora dalla relazione $0 = M^k - I = (M - I)T$ segue subito che $M - I = 0$. □

Soluzione dell'Esercizio 4. Usando la relazione $\dim V_i = \dim(\operatorname{Ker} f_i) + \dim(\operatorname{Im} f_i)$, si ottiene che

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(-1)^i \dim V_i &= \sum_{i=1}^{n}(-1)^i\big(\dim(\operatorname{Ker} f_i) + \dim(\operatorname{Im} f_i)\big) = \\ &= -\dim(\operatorname{Ker} f_1) - \dim(\operatorname{Im} f_1) + \dim(\operatorname{Ker} f_2) + \dim(\operatorname{Im} f_2) + \\ &\quad + \cdots + (-1)^n \dim(\operatorname{Ker} f_n) + (-1)^n \dim(\operatorname{Im} f_n)\,.\end{aligned}$$

Per ipotesi sappiamo che $\dim(\operatorname{Im} f_i) = \dim(\operatorname{Ker} f_{i+1})$, che sostituita nella somma precedente produce

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^i \dim V_i = -\dim(\operatorname{Ker} f_1) + (-1)^n \dim(\operatorname{Im} f_n)\,.$$

Ma f_n è l'applicazione nulla, quindi $\dim(\operatorname{Im} f_n) = 0$. Anche f_0 è nulla, per cui $\dim(\operatorname{Ker} f_1) = \dim(\operatorname{Im} f_0) = 0$. La tesi è così provata. □

Soluzione dell'Esercizio 5. Osserviamo che la condizione $AB = BA$ è una condizione lineare, e quindi è verificata per ogni B se e solo se $AE_{i,j} = E_{i,j}A$ per tutte le matrici elementari $E_{i,j}$ ($E_{i,j}$ è la matrice tutta nulla tranne un 1 al posto i, j), le quali è ben noto che costituiscono una base di $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Osserviamo che $AE_{i,i}$ è la matrice tutta nulla tranne la colonna i-esima che coincide con la i-esima colonna di A, mentre $E_{i,i}A$ è la matrice tutta nulla tranne la riga i-esima che coincide con la i-esima riga di A. Dalle condizioni $AE_{i,i} = E_{i,i}A$ per ogni i segue quindi immediatamente che la matrice A deve essere diagonale. Siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ gli elementi della diagonale principale.

Consideriamo ora le uguaglianze ricavate usando le matrici $E_{i,j}$ con $i \neq j$. La matrice $AE_{i,j}$ è tutta nulla tranne la j-esima colonna che è data dalla colonna i-esima di A; dato che A è diagonale, l'unico elemento non nullo della matrice $AE_{i,j}$ è il termine di posto i, j che è dato da λ_i. Analogamente $E_{i,j}A$ è tutta nulla tranne la i-esima riga che è data dalla riga j-esima di A, e quindi l'unico termine non nullo è il termine di posto i, j che è dato da λ_j.

In definitiva da queste uguaglianze segue che $\lambda_i = \lambda_j$ per ogni i, j e quindi $A = \lambda I$. D'altra parte tali matrici commutano con tutte le altre, e quindi sono tutte e sole le matrici cercate.

Un altro modo per risolvere l'esercizio è il seguente. Se A è una matrice che commuta con tutte le matrici B di $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, in particolare commuta con quelle di $GL_n(\mathbb{K})$ e allora la relazione $AB = BA$ può essere scritta nella forma $B^{-1}AB = A$. Interpretando A come matrice associata ad una applicazione lineare f, rispetto ad una certa base $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$, e B come matrice di cambiamento di base, si vuole dunque vedere "come è fatta f" supponendo che abbia la stessa matrice associata in ogni base.

Cominciamo con il considerare le basi

$$\mathcal{B}_i = \{v_1, \ldots, -v_i, \ldots, v_n\}$$

ottenute da $\mathcal{B}$ cambiando segno all'i-esimo vettore. Rispetto a questa nuova base la matrice associata ad f coincide con A, tranne che nella i-esima riga e nella i-esima colonna dove tutti gli elementi meno quello sulla diagonale principale sono cambiati di segno. Da tali cambiamenti di base consegue che A deve essere diagonale. Siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ gli elementi sulla diagonale principale di A.

Consideriamo ora le basi

$$\mathcal{B}_{ij} = \{v_1, \ldots, \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-esimo}}}{v_j}, \ldots, \underset{\substack{\uparrow \\ j\text{-esimo}}}{v_i}, \ldots, v_n\}$$

ottenute da $\mathcal{B}$ scambiando i vettori v_i e v_j. La matrice che si ottiene per f in una tale base è evidentemente uguale ad A tranne per il fatto che gli elementi λ_i e λ_j sulla diagonale sono scambiati tra loro. Dovendo la matrice restare immutata, ne consegue che $\lambda_i = \lambda_j$ per ogni i, j e quindi $A = \lambda I$. D'altra parte, come già detto, queste matrici commutano con tutte le matrici di $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

In particolare osserviamo che si è così dimostrato che, se V è uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, le applicazioni $f : V \to V$ la cui matrice associata non dipende dalla scelta della base sono quelle del tipo $f(v) = \lambda v$.

Nota. Con la seconda dimostrazione dell'esercizio si è in realtà dimostrato qualcosa di più.

Si osservi infatti che le matrici $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ che si sono usate per imporre la condizione $AB = BA$ (da cui si è dedotto che allora $A = \lambda I$), sono tutte matrici invertibili, simmetriche e, nel caso in cui $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ [risp. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$], sono anche matrici in O_n [risp. U_n]. Si sono quindi dimostrati anche i seguenti fatti:

> *Una matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commuta con tutte le matrici invertibili se e solo se $A = \lambda I$ con $\lambda \in \mathbb{K}$.*

Una matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ commuta con tutte le matrici simmetriche (o anche solo con tutte le simmetriche invertibili) se e solo se $A = \lambda I$ con $\lambda \in \mathbf{K}$.

Una matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ [risp. $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$] commuta con tutte le matrici di O_n [risp. U_n] se e solo se $A = \lambda I$ con $\lambda \in \mathbf{R}$ [risp. $\lambda \in \mathbf{C}$]. $\square$

Soluzione dell'Esercizio 6. Il polinomio caratteristico di M è dato da

$$P_M(t) = \det(M - tI) = \det\left(\begin{array}{c|c} A - tI_n & C \\ \hline 0 & B - tI_m \end{array}\right),$$

quindi è il determinante di una matrice che ha la stessa "forma" di M.

Osserviamo che

$$M = \left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0 & B \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} I_n & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0 & I_m \end{array}\right)$$

per cui, usando il teorema di Binet, si ha

$$\det M = \det\left(\begin{array}{c|c} I_n & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right)\det\left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0 & I_m \end{array}\right).$$

D'altra parte si vede facilmente che

$$\det\left(\begin{array}{c|c} I_n & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right) = \det B \quad \text{e} \quad \det\left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0 & I_m \end{array}\right) = \det A:$$

per la prima uguaglianza, basta calcolare il determinante sviluppando secondo la prima colonna e iterare questo procedimento n volte; per la seconda, si ragiona allo stesso modo rispetto però all'ultima riga.

Se ne deduce che $\det M = \det A \det B$ e quindi

$$\begin{aligned} P_M(t) = \det(M - tI) &= \det\left(\begin{array}{c|c} A - tI_n & C \\ \hline 0 & B - tI_m \end{array}\right) = \\ &= \det(A - tI_n)\det(B - tI_m) = P_A(t)P_B(t). \quad \square \end{aligned}$$

Soluzione dell'Esercizio 7. La dimostrazione che E è un sottospazio di $\mathrm{Hom}(V,W)$ è una verifica (farlo!). Per calcolare la dimensione di E si può procedere in questo modo.

Scegliamo una base $\{v_1, \ldots, v_{n_1}\}$ di V_1 ed una base $\{w_1, \ldots, w_{m_1}\}$ di W_1 e completiamole a basi S e T di V e W rispettivamente.

Sia $\alpha : \mathrm{Hom}(V,W) \to \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbf{K})$ l'isomorfismo indotto dalle basi fissate (quello che associa ad $f \in \mathrm{Hom}(V,W)$ la matrice associata ad f rispetto alle basi S e T). Poiché $\dim E = \dim \alpha(E)$, basta determinare $\alpha(E)$ e calcolarne la dimensione.

Sia $f \in E$. Poiché $V_1 \subseteq \operatorname{Ker} f$, si ha $f(v_1) = \cdots = f(v_{n_1}) = 0$ e quindi le prime n_1 colonne della matrice $\alpha(f)$ sono nulle. Inoltre la condizione $\operatorname{Im} f \subseteq W_1$ implica che i vettori $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ sono combinazione lineare solo dei primi m_1 vettori della base T in W e quindi che le ultime $m - m_1$ righe della matrice $\alpha(f)$ sono nulle. Pertanto la matrice $\alpha(f)$ sarà del tipo

$$(1) \qquad \left(\begin{array}{c|c} 0 & L \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

con $L \in \mathcal{M}_{m_1\times(n-n_1)}$. Viceversa, se la matrice associata a $g \in \mathrm{Hom}(V,W)$ è del tipo (1), allora $g \in E$. Dunque

$$\alpha(E) = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} 0 & L \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \,\middle|\, L \in \mathcal{M}_{m_1\times(n-n_1)} \right\}$$

e quindi $\dim \alpha(E) = m_1(n - n_1)$. $\square$

Soluzione dell'Esercizio 8. Tali funzionali non possono esistere; infatti se $b(v,w) = f(v)g(w)$ $\forall v,w \in V$, allora, detta $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base di V, la matrice associata a b rispetto alla base scelta è la matrice

$$B = \begin{pmatrix} f(v_1)g(v_1) & \ldots & f(v_1)g(v_n) \\ \vdots & & \vdots \\ f(v_n)g(v_1) & \ldots & f(v_n)g(v_n) \end{pmatrix}.$$

Una tale matrice ha rango al più 1 in quanto le righe sono tutte multiple della riga $\begin{pmatrix} g(v_1) & \ldots & g(v_n) \end{pmatrix}$. Quindi se una forma bilineare ha rango maggiore o uguale a 2, sicuramente non può essere scritta come prodotto (nel senso dell'enunciato) di due funzionali. Un controesempio è fornito dalla forma bilineare su $\mathbf{R}^2$ che ha per matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad \square$$

Soluzione dell'Esercizio 9. Se dimostriamo che il sottospazio di $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ generato dalle matrici di rango 2 è tutto $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$, allora è chiaro che una tale applicazione non può esistere, in quanto $\operatorname{Im} f$ dovrebbe contemporaneamente avere dimensione ≤ 8 e contenere uno spazio vettoriale di dimensione 9, il che è impossibile.

Per vedere che le matrici di rango 2 generano tutto $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$, mostriamo che ogni matrice della base canonica di $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ si può scrivere come somma di due matrici di rango 2.

Infatti per ogni $i,j \in \{1,2,3\}$ la matrice E_{ij} può essere scritta come

$$E_{ij} = \frac{1}{2}(E_{ij} + E_{hk}) + \frac{1}{2}(E_{ij} - E_{hk}).$$

con $h, k \in \{1,2,3\}$. Se scegliamo h e k in modo che $h \neq i$ e $k \neq j$, allora le matrici $E_{ij} + E_{hk}$ ed $E_{ij} - E_{hk}$ hanno rango 2, come si voleva. □

Soluzione dell'Esercizio 10. Sia

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

una matrice ortogonale, cioè tale che ${}^tAA = I$. Un semplice calcolo mostra che

$$(1) \qquad A \in O_2 \iff \begin{cases} a^2 + c^2 = 1 \\ b^2 + d^2 = 1 \\ ab + cd = 0. \end{cases}$$

Le prime due relazioni sono verificate se e solo se i punti (a,c) e (b,d) appartengono alla circonferenza unitaria del piano, e quindi se e solo se esistono numeri reali ϑ_1 e ϑ_2 tali che

$$\begin{cases} a = \cos\vartheta_1 \\ c = \sin\vartheta_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} b = \sin\vartheta_2 \\ d = \cos\vartheta_2. \end{cases}$$

Ma allora l'ultima relazione di (1) è verificata se e solo se

$$\cos\vartheta_1 \sin\vartheta_2 + \sin\vartheta_1 \cos\vartheta_2 = 0$$

ossia, usando le ben note formule di trigonometria, se e solo se

$$\sin(\vartheta_1 + \vartheta_2) = 0 \iff \vartheta_2 = -\vartheta_1 + 2k\pi \quad \text{oppure} \quad \vartheta_2 = \pi - \vartheta_1 + 2k\pi\,.$$

Se $\vartheta_2 = -\vartheta_1 + 2k\pi$, si ha che

$$\cos\vartheta_2 = \cos\vartheta_1 \quad \text{e} \quad \sin\vartheta_2 = -\sin\vartheta_1$$

e quindi $A = R_{\vartheta_1}$.

Se invece $\vartheta_2 = \pi - \vartheta_1 + 2k\pi$, si ha che

$$\cos\vartheta_2 = -\cos\vartheta_1 \quad \text{e} \quad \sin\vartheta_2 = \sin\vartheta_1$$

e quindi $A = S_{\vartheta_1}$.

I polinomi caratteristici di R_ϑ e di S_ϑ sono dati da

$$P_{R_\vartheta}(t) = (\cos\vartheta - t)^2 + \sin^2\vartheta = t^2 - 2t\cos\vartheta + 1$$
$$P_{S_\vartheta}(t) = (\cos\vartheta - t)(-\cos\vartheta - t) - \sin^2\vartheta = t^2 - 1\,.$$

Calcolando il discriminante del polinomio $P_{R_\vartheta}(t)$, si vede che questo è non negativo se e solo se $\cos^2\vartheta = 1$. Quindi R_ϑ ha autovalori reali se e solo se $\vartheta = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$, ed in tal caso si ha che $R_\vartheta = \pm I$. Dunque R_ϑ è diagonalizzabile se e solo se $\vartheta = k\pi$.

È invece evidente che $P_{S_\vartheta}(t)$ ha due radici reali distinte 1 e -1, per cui S_ϑ è diagonalizzabile.

Per vedere come agisce R_ϑ sui punti di $\mathbb{R}^2$, usiamo le coordinate polari. Se

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$$

è un punto di $\mathbb{R}^2$, allora

$$R_\vartheta X = \rho \begin{pmatrix} \cos\vartheta\cos\alpha - \sin\vartheta\sin\alpha \\ \sin\vartheta\cos\alpha + \cos\vartheta\sin\alpha \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} \cos(\vartheta + \alpha) \\ \sin(\vartheta + \alpha) \end{pmatrix}$$

ossia $R_\vartheta X$ è ottenuto ruotando X di un angolo ϑ attorno all'origine. Si noti come in tal modo si motivi anche geometricamente che l'applicazione R_ϑ è diagonalizzabile se e solo se ϑ è un multiplo intero di π.

Per vedere come agisce S_ϑ calcoliamo i suoi autovettori. Cominciamo cercando gli autovettori relativi all'autovalore 1. Poiché l'autospazio deve avere dimensione 1, cerchiamo un vettore X della forma

$$X = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$$

tale che $S_\vartheta X = X$, cioè

$$\begin{cases} \cos\vartheta\cos\alpha + \sin\vartheta\sin\alpha = \cos\alpha \\ \sin\vartheta\cos\alpha - \cos\vartheta\sin\alpha = \sin\alpha \end{cases}$$

Usando le solite formule di trigonometria, il sistema precedente diventa

$$\begin{cases} \cos(\vartheta - \alpha) = \cos\alpha \\ \sin(\vartheta - \alpha) = \sin\alpha \end{cases} \iff \vartheta - \alpha \equiv \alpha \pmod{2\pi} \iff \alpha \equiv \frac{\vartheta}{2} \pmod{2\pi}$$

per cui l'autospazio relativo a 1 è generato da

$$\begin{pmatrix} \cos(\vartheta/2) \\ \sin(\vartheta/2) \end{pmatrix}.$$

In modo del tutto analogo si mostra che l'autospazio relativo a -1 è generato da

$$\begin{pmatrix} -\sin(\vartheta/2) \\ \cos(\vartheta/2) \end{pmatrix}.$$

Si ha quindi che S_ϑ lascia invariata la retta passante per l'origine e che forma un angolo $\vartheta/2$ con l'asse delle ascisse, mentre inverte il segno dei vettori che giacciono sulla retta ad essa ortogonale.

In definitiva, quindi, S_ϑ è la simmetria rispetto alla retta passante per l'origine e che forma un angolo $\vartheta/2$ con l'asse delle ascisse.

Nota. Osserviamo che una matrice di O_2 è del tipo R_θ (risp. S_θ) se il suo determinante è 1 (risp. -1). □

Soluzione dell'Esercizio 11. Evidentemente se f è $\mathbb{C}$-lineare allora è anche $\mathbb{R}$-lineare.

Il viceversa non è sempre vero, si consideri ad esempio l'applicazione $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definita da $f(z) = \bar{z}$. Cerchiamo pertanto di caratterizzare le applicazioni $\mathbb{R}$-lineari che sono $\mathbb{C}$-lineari.

Sia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una applicazione $\mathbb{R}$-lineare e sia

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

la matrice associata ad f rispetto alla base $\{1, i\}$ di $\mathbb{C}$ pensato come spazio vettoriale reale.

Le uniche applicazioni $\mathbb{C}$-lineari $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sono quelle del tipo $z \mapsto wz$ con $w \in \mathbb{C}$, che, pensate come applicazioni $\mathbb{R}$-lineari, hanno come matrice associata rispetto alla base $\{1, i\}$ la matrice

$$(1) \qquad \begin{pmatrix} \Re e\, w & -\Im m\, w \\ \Im m\, w & \Re e\, w \end{pmatrix}.$$

Pertanto f sarà una applicazione $\mathbb{C}$-lineare se e solo se A è del tipo (1), cioè $a = d$ e $b = -c$. In altre parole le applicazioni $\mathbb{R}$-lineari che sono anche $\mathbb{C}$-lineari sono tutte e sole quelle la cui matrice associata nella base $\{1, i\}$ è della forma

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

L'esercizio poteva anche essere risolto osservando che

f è $\mathbb{C}$-lineare $\iff$ f è $\mathbb{R}$-lineare e $f(iz) = if(z)$ per ogni $z \in \mathbb{C}$.

L'implicazione ($\Longrightarrow$) è evidente; per provare il viceversa, dimostriamo che per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e per ogni $z \in \mathbb{C}$ si ha che $f\big((\alpha + i\beta)z\big) = (\alpha + i\beta)f(z)$. Infatti

$$\begin{aligned} f\big((\alpha + i\beta)z\big) &= f(\alpha z + i\beta z) = f(\alpha z) + f(\beta i z) = \\ &= \alpha f(z) + \beta f(iz) = \alpha f(z) + i\beta f(z) = (\alpha + i\beta)f(z) \end{aligned}$$

dove la seconda e la terza uguaglianza valgono in virtù della $\mathbb{R}$-linearità di f.

In altri termini, detta $j : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ l'applicazione definita da $j(z) = iz$ (che è ovviamente $\mathbb{R}$-lineare), abbiamo mostrato che una applicazione $\mathbb{R}$-lineare $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ è $\mathbb{C}$-lineare se e solo se $j \circ f = f \circ j$.

L'applicazione j è espressa, rispetto alla base $\{1, i\}$ di $\mathbb{C}$ su $\mathbb{R}$, dalla matrice

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi, se

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

è la matrice associata ad f rispetto a tale base, f è $\mathbb{C}$-lineare se e solo se $AJ = JA$ e quindi se e solo se

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} b & -a \\ d & -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c & -d \\ a & b \end{pmatrix}$$

cioè se $a = d$ e $b = -c$. Pertanto f è $\mathbb{C}$-lineare se e solo se

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}. \quad \square$$

Soluzione dell'Esercizio 12. Dalla linearità della traccia e della trasposizione e dalla distributività del prodotto tra matrici segue immediatamente che $\langle\ ,\ \rangle$ è bilineare. Inoltre $\langle\ ,\ \rangle$ è simmetrico:

$$\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}({}^tAB) = \operatorname{tr}\big({}^t({}^tAB)\big) = \operatorname{tr}({}^tBA) = \langle B, A\rangle\,.$$

Dimostriamo ora che il prodotto scalare è definito positivo. Sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; allora

$$\langle A, A\rangle = \operatorname{tr}({}^tAA) = \sum_{i=1}^{n}[{}^tAA]_{i,i} = \sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{m}[{}^tA]_{i,j}[A]_{j,i}\Big) = \sum_{i,j}[A]_{j,i}^2$$

da cui segue immediatamente che $\langle\ ,\ \rangle$ è definito positivo.

Per trovare l'ortogonale di $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ in $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, osserviamo che, se $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ e $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ (cioè A antisimmetrica), allora

$$\langle A, S\rangle = \operatorname{tr}({}^tAS) = \operatorname{tr}(-A\,{}^tS) = -\operatorname{tr}({}^tSA) = -\langle S, A\rangle = -\langle A, S\rangle$$

da cui segue immediatamente che $\langle A, S\rangle = 0$. Ma allora $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{S}_n(\mathbb{R})^\perp$. Dato che il prodotto scalare è definito positivo, e quindi non degenere, si ha allora che

$$\dim \mathcal{S}_n(\mathbb{R})^\perp = n^2 - \dim \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \dim \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$$

e quindi $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})^\perp = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Nota. Osserviamo che, identificando $\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ con $\mathbb{R}^n$, il prodotto scalare appena definito coincide con il prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^n$. Inoltre un semplice calcolo mostra che, se $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, allora

$$\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}({}^tAB) = \sum_{i=1}^{m}\Big(\sum_{j=1}^{n}[{}^tA]_{i,j}[B]_{j,i}\Big) = \sum_{i,j}[A]_{j,i}[B]_{j,i}$$

che è il prodotto scalare che si ottiene identificando nel modo usuale $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ con $\mathbb{R}^{mn}$ e considerando su $\mathbb{R}^{mn}$ il prodotto scalare standard. □

Soluzione dell'Esercizio 13. Dalla linearità della traccia e dalla distributività del prodotto tra matrici segue immediatamente che $\langle\ ,\ \rangle$ è bilineare. Dimostriamo che $\langle\ ,\ \rangle$ è simmetrica:

$$\begin{aligned}\langle A, B\rangle &= \sum_{i=1}^{n}[AB]_{i,i} = \sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n}[A]_{i,j}[B]_{j,i}\Big) = \\ &= \sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{i=1}^{n}[B]_{j,i}[A]_{i,j}\Big) = \sum_{j=1}^{n}[BA]_{j,j} = \langle B, A\rangle\,.\end{aligned}$$

Proviamo ora che $\langle\ ,\ \rangle$ è non degenere, e quindi l'indice di nullità è zero. Sia A tale che $\langle A, B\rangle = 0$ per ogni $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; in particolare, prendendo $B = {}^tA$, si ha che $\langle A, {}^tA\rangle = \operatorname{tr}(A\,{}^tA) = 0$, da cui segue (cfr. esercizio 12) che $A = 0$.

Per trovare $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})^\perp$ osserviamo che, se $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ e $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, allora

$$\begin{aligned}\langle A, S\rangle &= \operatorname{tr}(AS) = \operatorname{tr}{}^t(AS) = \operatorname{tr}({}^tS\,{}^tA) = \\ &= \operatorname{tr}\big(S(-A)\big) = \langle S, -A\rangle = -\langle A, S\rangle\end{aligned}$$

da cui segue immediatamente che $\langle A, S\rangle = 0$. Ma allora $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{S}_n(\mathbb{R})^\perp$. Dato che il prodotto scalare è non degenere, si ha

$$\dim \mathcal{S}_n(\mathbb{R})^\perp = n^2 - \dim \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \dim \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$$

e quindi $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})^\perp = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Per determinare gli indici di positività e di negatività di $\langle\ ,\ \rangle$ osserviamo che, se $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, allora

$$\langle S, S\rangle = \operatorname{tr}(SS) = \sum_{i,j=1}^{n}[S]_{i,j}[S]_{j,i} = \sum_{i,j=1}^{n}[S]_{i,j}^2 \geq 0$$

ed è uguale a 0 se e solo se $S = 0$. Analogamente se $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ allora

$$\langle A, A\rangle = \operatorname{tr}(AA) = \sum_{i,j=1}^{n}[A]_{i,j}[A]_{j,i} = -\sum_{i,j=1}^{n}[A]_{i,j}^2 \leq 0$$

ed è uguale a 0 se e solo se $A = 0$. Ossia $\langle\ ,\ \rangle|_{\mathcal{S}_n(\mathbb{R})}$ è definito positivo e $\langle\ ,\ \rangle|_{\mathcal{A}_n(\mathbb{R})}$ è definito negativo. Dato che $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, ne consegue che l'indice di positività di $\langle\ ,\ \rangle$ è uguale a $\dim \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = n(n+1)/2$ e l'indice di negatività è uguale a $\dim \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = n(n-1)/2$. □

Soluzione dell'Esercizio 14. Per ogni $j \in \{1, \ldots, n-1\}$ chiamiamo *j-esima parallela alla diagonale principale di una matrice N* l'insieme degli elementi $[N]_{h,h+j}$ con $1 \leq h \leq n-j$ e denotiamo tale parallela con $P_j(N)$. Indichiamo con $P_0(N)$ la diagonale principale di N.

Dimostriamo per induzione che per ogni $k \geq 1$ la matrice N^k è ancora triangolare superiore e le parallele $P_0(N^k), \ldots, P_{k-1}(N^k)$ sono nulle, ossia che $[N^k]_{i,j} = 0$ per ogni $i \geq j-k+1$. Evidentemente ciò prova che, per $k = n$, la matrice N^n è nulla.

Per $k = 1$ la tesi non è altro che l'ipotesi che N sia strettamente triangolare superiore. Supponiamo quindi che la tesi sia vera per k e dimostriamola per $k+1$. Dobbiamo provare che tutti gli elementi di N^{k+1} di posto i, j con $i \geq j-k$ sono nulli. Si ha

$$\begin{aligned}[N^{k+1}]_{i,j} &= [NN^k]_{i,j} = \sum_{h=1}^{n}[N]_{i,h}[N^k]_{h,j} = \\ &= \sum_{h=1}^{j-k}[N]_{i,h}[N^k]_{h,j} + \sum_{h=j-k+1}^{n}[N]_{i,h}[N^k]_{h,j}\,.\end{aligned}$$

Ma ora

- la prima sommatoria è nulla in quanto se $1 \leq h \leq j-k$ allora $i \geq j-k \geq h$, e quindi, dato che N è strettamente triangolare superiore $[N]_{i,h} = 0$;
- la seconda sommatoria è nulla in quanto, per ipotesi di induzione, se $h \geq j-k+1$ si ha $[N^k]_{h,j} = 0$.

Questo prova la prima asserzione.

Per dimostrare la seconda asserzione dimostreremo che per ogni $k < n$ si ha

$$(1)\qquad [N^k]_{i,i+k} = \prod_{h=i}^{i+k-1}[N]_{h,h+1} \qquad \forall i = 1, \ldots, n-k\,.$$

Dalla (1) segue infatti immediatamente la tesi in quanto per ogni $k < n$ i termini $[N^k]_{i,i+k}$ con $1 \leq i \leq n-k$, essendo prodotto di numeri diversi da zero (si ricordi che per ipotesi $[N]_{i,i+1} \neq 0$ per ogni $i = 1, \ldots, n-1$), sono a loro volta numeri diversi da zero e quindi N^k è non nulla.

Proviamo dunque la (1) per induzione su k. Per $k = 1$ la (1) è ovvia. Supponiamo la (1) vera per k e dimostriamola pe $k+1$. Fissiamo i tale che

$1 \leq i \leq n-(k+1)$, allora

$$[N^{k+1}]_{i,i+k+1} = \sum_{j=1}^{n} [N]_{i,j}[N^k]_{j,i+k+1} =$$

$$= \sum_{j=1}^{i} [N]_{i,j}[N^k]_{j,i+k+1} + [N]_{i,i+1}[N^k]_{i+1,i+k+1} + \sum_{j=i+2}^{n} [N]_{i,j}[N^k]_{j,i+k+1} .$$

Osserviamo ora che

- la prima sommatoria è nulla in quanto $[N]_{i,j} = 0$ se $i \geq j$;
- la seconda sommatoria è nulla in quanto se $j \geq i+2$ allora $j \geq (i+k+1)-k+1$ e quindi per quanto dimostrato nel punto precedente si ha che $[N^k]_{j,i+k+1} = 0$.

In definitiva si ha

$$[N^{k+1}]_{i,i+k+1} = [N]_{i,i+1}[N^k]_{i+1,i+k+1} .$$

Ma per ipotesi di induzione

$$[N^k]_{i+1,i+k+1} = \prod_{h=i+1}^{(i+1)+k-1} [N]_{h,h+1} = \prod_{h=i+1}^{i+k} [N]_{h,h+1}$$

e quindi

$$[N^{k+1}]_{i,i+k+1} = [N]_{i,i+1} \prod_{h=i+1}^{i+k} [N]_{h,h+1} = \prod_{h=i}^{i+k} [N]_{h,h+1} . \quad \square$$

Soluzione dell'Esercizio 15. Consideriamo la base di $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ formata dalle matrici elementari $E_{i,j}$, con $1 \leq i,j \leq n$, e ricordiamo che

$$E_{i,j}E_{h,k} = \begin{cases} 0 & \text{se } j \neq h \\ E_{i,k} & \text{se } j = h . \end{cases}$$

Se $i \neq k$ e per qualsiasi j, si ha allora $f(E_{i,k}) = f(E_{i,j}E_{j,k}) = f(E_{j,k}E_{i,j}) = f(0) = 0$, mentre $f(E_{i,i}) = f(E_{i,1}E_{1,i}) = f(E_{1,i}E_{i,1}) = f(E_{1,1})$. Posto dunque $\lambda = f(E_{1,1})$, si ottiene

$$f(X) = f\Big(\sum_{i,j=1}^{n} x_{i,j}E_{i,j}\Big) = \sum_{i,j=1}^{n} x_{i,j} f(E_{i,j}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_{i,i} f(E_{i,i}) = \lambda \sum_{i=1}^{n} x_{i,i} = \lambda \cdot \operatorname{tr} X .$$

In particolare l'esercizio prova che l'insieme

$$\{f : \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \to \mathbf{K} \mid f \text{ è lineare e } f(AB) = f(BA) \quad \forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})\}$$

è uno spazio vettoriale di dimensione 1, di cui l'applicazione tr è quindi una base. $\square$

Soluzione dell'Esercizio 16. La dimostrazione procede per induzione su $n = \dim V$. Per $n = 1$ la tesi è ovvia.

Supponiamo $n > 1$. Dato che f ha tutti gli autovalori in $\mathbb{R}$, esiste un autovettore v_1 per f, che possiamo supporre di norma 1. Sia $W = (\mathrm{Span}(v_1))^\perp$ e sia $P : V \to W$ la proiezione associata alla decomposizione $V = (\mathrm{Span}(v_1)) \oplus W$. Si consideri l'applicazione $g : W \to W$ definita da $g = P \circ f|_W$.

Sia $\{w_2, \ldots, w_n\}$ una base di W, allora la matrice associata a f rispetto alla base $\{v_1, w_2, \ldots, w_n\}$ ha la forma

$$A = \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

dove la matrice B è la matrice associata a g rispetto alla base $\{w_2, \ldots, w_n\}$. Ma allora, se $P_A(t)$ denota il polinomio caratteristico di A e $P_B(t)$ quello di B, si ha $P_A(t) = (\lambda_1 - t)P_B(t)$ e quindi anche g ha tutti gli autovalori in $\mathbb{R}$. Possiamo dunque usare l'ipotesi di induzione per dire che esiste una base $\{v_2, \ldots, v_n\}$ di W, ortonormale rispetto al prodotto scalare $\langle\ ,\ \rangle|_W$ (che è definito positivo) e a ventaglio per g. Per concludere basta osservare che $\{v_1, \ldots, v_n\}$ è una base ortonormale di V che è a ventaglio per f: infatti, usando di nuovo la decomposizione in somma diretta, per ogni $i \geq 2$ si ha che $f(v_i) = \alpha_i v_1 + g(v_i)$, dove $g(v_i) \in \mathrm{Span}(v_2, \ldots, v_i)$ visto che $\{v_2, \ldots, v_n\}$ è una base a ventaglio per g.

La dimostrazione si poteva fare anche usando il fatto che il processo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt conserva i ventagli (perché?). Quindi la tesi segue banalmente applicando tale processo ad una qualsiasi base a ventaglio per f, la cui esistenza è garantita dal teorema di triangolazione.

Nota. L'esercizio dimostra che se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ha tutti gli autovalori reali, allora esiste una matrice ortogonale M tale che $M^{-1}AM$ è triangolare superiore: basta pensare A come applicazione lineare $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e prendere come M la matrice di cambiamento di base dalla base canonica di $\mathbb{R}^n$ alla base ortonormale a ventaglio della tesi. $\square$

Soluzione dell'Esercizio 17. Dal fatto che per ogni $k \in \mathbb{N}$

$$M^k = \left(\begin{array}{c|c} A^k & 0 \\ \hline 0 & B^k \end{array}\right)$$

segue immediatamente che, per un qualsiasi polinomio $Q(t) \in \mathbb{K}[t]$,

$$Q(M) = \left(\begin{array}{c|c} Q(A) & 0 \\ \hline 0 & Q(B) \end{array}\right).$$

Ma allora, se Q è un polinomio tale che $Q(M) = 0$, necessariamente $Q(A) = 0$ e $Q(B) = 0$. Detti quindi m_A ed m_B i polinomi minimi di A e B si ha che m_A ed m_B sono dei divisori di Q.

Di conseguenza il minimo comune multiplo m tra m_A ed m_B è anch'esso un divisore di Q. Dato che m è monico ed $m(Q) = 0$ (perché?), dalla definizione di polinomio minimo segue allora la tesi. □

Soluzione dell'Esercizio 18. La risposta è affermativa. Usando le proprietà delle potenze di numeri reali si verificano immediatamente gli assiomi di spazio vettoriale (si noti che l'elemento neutro per $\boxplus$ è il numero 1).

Si può anche osservare che l'applicazione

$$\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$$
$$\exp : x \longmapsto e^x$$

è una bigezione e che le operazioni $\boxplus$ e $\boxdot$ definite su $\mathbb{R}^+$ altro non sono che le operazioni indotte su $\mathbb{R}^+$, mediante exp, dalle operazioni standard su $\mathbb{R}$; infatti

$$x \boxplus y = \exp\bigl(\exp^{-1}(x) + \exp^{-1}(y)\bigr) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^+$$
$$\alpha \boxdot x = \exp\bigl(\alpha \exp^{-1}(x)\bigr) \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^+ .$$

Questo prova che $(\mathbb{R}^+, \boxplus, \boxdot)$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ ed exp è un isomorfismo di $\mathbb{R}$ (dotato delle usuali operazioni) con $(\mathbb{R}^+, \boxplus, \boxdot)$. □

Soluzione dell'Esercizio 19. Ricordiamo che $\operatorname{rk} A = \dim(\operatorname{Im} A)$. Prendiamo una base ortonormale (rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^n$) $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ di $\mathbb{R}^n$ tale che $\{v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ sia una base di $\operatorname{Ker} A$. Chiaramente ciò è possibile ad esempio prendendo basi ortonormali di $\operatorname{Ker} A$ e di $(\operatorname{Ker} A)^\perp$.

È ben noto che $Av_1, \ldots, Av_k$ costituiscono una base di $\operatorname{Im} A$; completiamola ad una base $\mathcal{C}$ di $\mathbb{R}^n$.

Sia $A' = \mathcal{M}^{\mathcal{E}}_{\mathcal{C}} A \mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}$ (essendo $\mathcal{E}$ la base canonica di $\mathbb{R}^n$) la matrice associata all'applicazione lineare $v \mapsto Av$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ in partenza e $\mathcal{C}$ in arrivo.

Per come sono state scelte le basi

$$A' = \left(\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right);$$

in più, dato che $\mathcal{B}$ è una base ortonormale rispetto al prodotto scalare standard, la matrice $\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}$ risulta essere ortogonale. Questo dimostra (1).

(2) Dalla (1) ricaviamo che

$$A = P^{-1} \left(\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) {}^tQ$$

e quindi

$$A^tA = P^{-1} \left(\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) {}^tQQ \left(\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) {}^tP^{-1} = P^{-1} \left(\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) {}^tP^{-1} .$$

Ma allora

$$\operatorname{rk}(A^tA) = \operatorname{rk} \left(\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) = k = \operatorname{rk} A . \quad \square$$

Soluzione dell'Esercizio 20. L'applicazione $\varphi : \mathcal{M}_{n\times k}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{m\times k}(\mathbb{R})$ data da $\varphi(X) = AX$ è lineare ed $S = \operatorname{Ker}\varphi$, quindi S è uno spazio vettoriale.

Osserviamo che la matrice $n \times k$

$$X = \left(x^1 \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, x^k\right)$$

appartiene ad S se e solo se $x^i \in \operatorname{Ker} A$ per ogni $i = 1, \ldots, k$. Dato che $\operatorname{rk} A = r$, si ha $\dim(\operatorname{Ker} A) = n - r$; sia $\{v^1, \ldots, v^{n-r}\}$ una base di $\operatorname{Ker} A$. Per ogni $i = 1, \ldots, n-r$ e per ogni $j = 1, \ldots, k$, sia $S_{i,j}$ la matrice $n \times k$ avente tutti gli elementi nulli tranne la j-esima colonna costituita dal vettore v^i, ossia

$$S_{i,j} = \left(0 \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, 0 \,\middle|\, \underset{\substack{\uparrow \\ j\text{-esima}}}{v^i} \,\middle|\, 0 \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, 0\right) .$$

È facile mostrare che le matrici $S_{i,j}$ così definite costituiscono una base di S, che ha quindi dimensione $k(n-r)$.

Si veda anche l'esercizio 56. □

Soluzione dell'Esercizio 21. Dal fatto che $\langle\ ,\ \rangle|_W$ è non degenere segue immediatamente che $W \cap W^\perp = \{0\}$; infatti $W \cap W^\perp$ è l'ortogonale di W in W rispetto al prodotto scalare $\langle\ ,\ \rangle|_W$, che è costituito dal solo 0 per definizione di non degenericità.

Dimostriamo ora che

$$\dim V = \dim W + \dim W^{\perp} . \tag{1}$$

Sia $k = \dim W$ e sia $\mathcal{B} = \{w_1, \dots, w_k\}$ una base di W. Allora $v \in W^{\perp}$ se e solo se $\langle v, w_i \rangle = 0$ per ogni $i = 1, \dots, k$. Detta f l'applicazione lineare

$$f : V \longrightarrow \mathbb{K}^k$$
$$f : v \longmapsto \big(\langle v, w_1 \rangle, \dots, \langle v, w_k \rangle\big)$$

evidentemente risulta

$$W^{\perp} = \operatorname{Ker} f . \tag{2}$$

Completiamo la base $\mathcal{B}$ ad una base $\mathcal{B}' = \{w_1, \dots, w_k, v_1, \dots, v_{n-k}\}$ di V. La matrice associata a f rispetto a tale base in partenza ed alla base canonica in arrivo ha allora la forma

$$(A \mid B) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \langle w_1, w_1 \rangle & \cdots & \langle w_k, w_1 \rangle & \langle v_1, w_1 \rangle & \cdots & \langle v_{n-k}, w_1 \rangle \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle w_1, w_k \rangle & \cdots & \langle w_k, w_k \rangle & \langle v_1, w_k \rangle & \cdots & \langle v_{n-k}, w_k \rangle \end{array}\right) .$$

Osserviamo ora che la matrice A è la matrice associata a $\langle\ ,\ \rangle|_W$ rispetto alla base $\mathcal{B}$; dato che $\langle\ ,\ \rangle|_W$ è per ipotesi non degenere, $\det A \neq 0$ e quindi $\operatorname{rk}(A \mid B) = k$, ossia f è surgettiva. Ma allora dalla (2) e dalla formula che lega tra loro le dimensioni del nucleo e dell'immagine di una applicazione lineare segue la (1) e dunque la tesi.

Nota. Il ragionamento usato per provare la (1) mostra anche che, nel caso di un prodotto scalare qualsiasi, vale almeno la disuguaglianza $\dim V \leq \dim W + \dim W^{\perp}$. Da tale relazione e dal fatto che nelle ipotesi dell'esercizio $W \cap W^{\perp} = \{0\}$ segue immediatamente la tesi. □

Soluzione dell'Esercizio 22. Una implicazione è ovvia: se f e g sono diagonalizzabili e se $\{a_1, \dots, a_k\}$ e $\{b_1, \dots, b_{n-k}\}$ sono basi di autovettori rispettivamente per f e per g, allora $\{a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_{n-k}\}$ è una base di V di autovettori per L.

Viceversa, supponiamo che L sia diagonalizzabile. Sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V di autovettori per L, e $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ i rispettivi autovalori. Osserviamo che, se $v_i = a_i + b_i$, con $a_i \in A$ e $b_i \in B$, $i = 1, \dots, n$,

$$L(v_i) = L(a_i + b_i) = f(a_i) + g(b_i) .$$

Essendo i v_i autovettori, si ha che

$$L(v_i) = \lambda_i v_i = \lambda_i(a_i + b_i) = \lambda_i a_i + \lambda_i b_i$$

Dunque $f(a_i) - \lambda_i a_i = -(g(b_i) - \lambda_i b_i)$. Poiché $A \cap B = \{0\}$, segue che $f(a_i) = \lambda_i a_i$ e $g(b_i) = \lambda_i b_i$.

Dunque $\{a_1, \dots, a_n\}$ è un insieme in cui i vettori non nulli sono autovettori per f. D'altra parte $a_1, \dots, a_n$, in quanto immagine dei vettori della base $\{v_1, \dots, v_n\}$ tramite la proiezione $pr_A : V = A \oplus B \to A$, che è una applicazione lineare surgettiva, sono generatori di A. Quindi da $\{a_1, \dots, a_n\}$ si può estrarre una base di A, che risulta evidentemente di autovettori per f. Ripetendo lo stesso discorso per $\{b_1, \dots, b_n\}$, si prova che anche g è diagonalizzabile.

Nota. Nelle ipotesi dell'esercizio si osserva subito che $L(A) \subseteq A$, $L(B) \subseteq B$, $L|_A = f$ e $L|_B = g$. L'esercizio asserisce quindi che, se L è un endomorfismo e V è somma diretta di due sottospazi L-invarianti A e B, allora L è diagonalizzabile se e solo se le restrizioni $L|_A$ e $L|_B$ lo sono. □

Soluzione dell'Esercizio 23. Ricordiamo che il rango e la traccia di una matrice sono invarianti per similitudine, per cui ogni matrice simile ad A ha rango 1 e la stessa traccia di A.

Se A è diagonalizzabile, la matrice diagonale D simile ad A, avendo rango 1, sarà della forma

$$D = \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

con $\lambda \neq 0$. Pertanto $\operatorname{tr} D = \lambda \neq 0$. Ma $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} D$, e quindi $\operatorname{tr} A \neq 0$.

Viceversa, supponiamo che $\operatorname{tr} A \neq 0$. Dal fatto che $\operatorname{rk} A = 1$, deduciamo che l'autospazio $E(0) = \operatorname{Ker} A$ ha dimensione $n - 1$. Sia dunque $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ una base di $\operatorname{Ker} A$, che completiamo ad una base $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_{n-1}, v_n\}$ di $\mathbb{R}^n$. Se N è la matrice del cambiamento di base tra $\mathcal{B}$ e la base canonica di $\mathbb{R}^n$, abbiamo che

$$N^{-1}AN = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix} .$$

Lo scalare a_n è dunque autovalore per $N^{-1}AN$, e quindi anche per A. Inoltre $a_n \neq 0$; infatti $a_n = \operatorname{tr}(N^{-1}AN) = \operatorname{tr} A \neq 0$. Allora A ha l'autovalore 0 di molteplicità (algebrica e geometrica) $n - 1$ e un autovalore $a_n \neq 0$ di molteplicità 1; pertanto A è diagonalizzabile. □

Soluzione dell'Esercizio 24. (1) Chiaramente se f non è iniettiva, a maggior ragione $f^* \circ f : V \to V$ non lo è, quindi, se $f^* \circ f : V \to V$ è un isomorfismo, f deve essere iniettiva.

Viceversa, supponiamo che f sia iniettiva. Dato che $\operatorname{Ker} f^* = (\operatorname{Im} f)^\perp$ (cfr. esercizio H), $\operatorname{Ker} f^* \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$, quindi $f^*|_{\operatorname{Im} f}$ è iniettiva. Ma allora $f^* \circ f$ è iniettiva e quindi è un isomorfismo. Questo conclude la dimostrazione di (1).

(2) Dal fatto che $\operatorname{Ker} f = (\operatorname{Im} f^*)^\perp$ segue che $V = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f^*$; da ciò discende che $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im}(f|_{\operatorname{Im} f^*})$. Poiché ovviamente $\operatorname{Im}(f \circ f^*) = \operatorname{Im}(f|_{\operatorname{Im} f^*})$, otteniamo che $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im}(f \circ f^*)$ e quindi

$$f \text{ è surgettiva} \iff f \circ f^* \text{ è surgettiva} \iff f \circ f^* \text{ è un isomorfismo.}$$

Nota. Nella dimostrazione di (2) abbiamo provato che $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im}(f \circ f^*)$. Ricordiamo che la matrice associata all'applicazione aggiunta di $f : V \to W$ rispetto a due basi ortonormali (supposto di avere due prodotti scalari definiti positivi) non è altro che la trasposta della matrice associata ad f rispetto alle stesse basi. In termini di matrici associate abbiamo quindi provato che $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk}(A\,{}^tA)$, ritrovando così il risultato del punto (2) dell'esercizio 19. □

Soluzione dell'Esercizio 25. Consideriamo i sottospazi vettoriali di V

$$V_+ = \{x \in V \mid f(x) = x\} \quad \text{e} \quad V_- = \{x \in V \mid f(x) = -x\}.$$

Evidentemente $V_+ \cap V_- = \{0\}$; inoltre $V_+ \oplus V_- = V$, in quanto $\forall x \in V$ si ha che

$$x = \frac{x + f(x)}{2} + \frac{x - f(x)}{2},$$

dove

$$\frac{x + f(x)}{2} \in V_+ \quad \text{e} \quad \frac{x - f(x)}{2} \in V_-.$$

Se dunque $\{v_1, \dots, v_k\}$ è una base di V_+ e $\{v_{k+1}, \dots, v_n\}$ è una base di V_-, è immediato vedere che $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base di V con la proprietà richiesta.

In particolare, la tesi assicura che f è diagonalizzabile, che ha solo gli autovalori 1 e -1, e che V_+ ed V_- sono rispettivamente gli autospazi relativi agli autovalori 1 e -1.

Nota. Un esempio della situazione considerata nell'esercizio è

$$V = \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \quad \text{e} \quad f : A \mapsto {}^tA.$$

In questo caso V_+ risulta essere il sottospazio di $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ costituito dalle matrici simmetriche e V_- quello delle matrici antisimmetriche.

Nota. L'esercizio può essere risolto anche ricorrendo al polinomio minimo. Infatti, essendo f radice del polinomio $q(t) = t^2 - 1 = (t+1)(t-1)$, il polinomio minimo di f divide $q(t)$ e quindi si spezza in fattori lineari. Di conseguenza la matrice di Jordan di f conterrà solo blocchi di ordine 1 relativi agli autovalori 1 e -1. □

Soluzione dell'Esercizio 26. Evidentemente se f ha un autovalore reale, la tesi segue prendendo $W = \operatorname{Span}(v)$, essendo v un autovettore per f.

Supponiamo allora che f non abbia autovalori reali e sia $\lambda = \alpha + i\beta$ un autovalore complesso. Sia $\widetilde{f} : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ la complessificata dell'applicazione f, cioè l'applicazione lineare definita da

$$\widetilde{f}(z) = f(u) + if(v) \quad \text{dove } z = u + iv \in \mathbf{C}^n \text{ con } u, v \in \mathbf{R}^n.$$

Chiaramente l'applicazione $\widetilde{f}$ ha lo stesso polinomio caratteristico di f (le matrici associate ad f ed $\widetilde{f}$ rispetto alle basi canoniche di $\mathbf{R}^n$ e di $\mathbf{C}^n$ sono uguali), quindi λ è un autovalore per $\widetilde{f}$.

Se $z = u + iv$ è un autovettore per $\widetilde{f}$ relativo a λ, si ha

$$\begin{aligned}\widetilde{f}(\overline{z}) &= \widetilde{f}(u - iv) = f(u) + if(-v) = \\ &= f(u) - if(v) = \overline{f(u) + if(v)} = \overline{f(z)} = \overline{\lambda z} = \overline{\lambda}\,\overline{z}\end{aligned}$$

quindi $\overline{z}$ è un autovettore relativo a $\overline{\lambda}$. Dato che $\overline{\lambda} \neq \lambda$, i due autovettori z e $\overline{z}$ sono linearmente indipendenti. Ma allora anche i vettori di $\mathbf{R}^n$ $u = (z + \overline{z})/2$ e $v = (z - \overline{z})/2i$ sono linearmente indipendenti in $\mathbf{C}^n$ e quindi, a maggior ragione, sono linearmente indipendenti in $\mathbf{R}^n$. Inoltre

$$\begin{aligned} f(u) &= \widetilde{f}(u) = \widetilde{f}\Big(\frac{z + \overline{z}}{2}\Big) = \frac{\widetilde{f}(z) + \widetilde{f}(\overline{z})}{2} = \frac{\lambda z + \overline{\lambda}\overline{z}}{2} = \alpha u - \beta v \\ f(v) &= \widetilde{f}(v) = \widetilde{f}\Big(\frac{z - \overline{z}}{2i}\Big) = \frac{\widetilde{f}(z) - \widetilde{f}(\overline{z})}{2i} = \frac{\lambda z - \overline{\lambda}\overline{z}}{2i} = \beta u + \alpha v. \end{aligned}$$

La tesi segue allora prendendo $W = \operatorname{Span}(u, v)$. □

Soluzione dell'Esercizio 27. Il risultato è una facile conseguenza della decomposizione di Fitting (cfr. esercizio A). Infatti quel risultato assicura che esiste $k \in \mathbf{N}$ tale che $V = \operatorname{Ker} f^k \oplus \operatorname{Im} f^k$, con $f(\operatorname{Im} f^k) = \operatorname{Im} f^k$. D'altra parte $\operatorname{Im} f^k \neq \{0\}$, altrimenti avremmo $f^k = 0$ contro l'ipotesi che f non sia nilpotente. Basta dunque prendere $A = \operatorname{Im} f^k$. □

Soluzione dell'Esercizio 28. (1) Sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di autovettori per f e sia $\langle\ ,\ \rangle$ il prodotto scalare definito positivo rispetto al quale $\mathcal{B}$ è una base ortonormale (ossia la matrice associata a $\langle\ ,\ \rangle$ rispetto a $\mathcal{B}$ è la matrice identità). Dato che la matrice associata ad f nella base $\mathcal{B}$ è simmetrica (è diagonale!), l'applicazione f è autoaggiunta rispetto al prodotto scalare $\langle\ ,\ \rangle$, pertanto lo spazio $W^\perp$ è invariante per f. Dato che $V = W \oplus W^\perp$, $W^\perp$ fornisce una risposta affermativa al quesito.

(2) Avendo provato (1), si può dimostrare che $f|_W : W \to W$ è diagonalizzabile procedendo come nell'esercizio 22 (cfr. la nota finale).

È possibile rispondere al primo quesito dell'esercizio anche senza fare uso dei prodotti scalari, ragionando ad esempio come segue. Sia $k = \dim W$ e sia $\{w_1, \ldots, w_k\}$ una sua base. Sia $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base di V di autovettori per f. Per il teorema sul completamento dei sistemi di vettori linearmente indipendenti, è possibile trovare $n-k$ vettori $v_{i_1}, \ldots, v_{i_{n-k}}$ tra i v_i tali che l'insieme

$$\{w_1, \ldots, w_k, v_{i_1}, \ldots, v_{i_{n-k}}\}$$

sia una base di V. È allora evidente che lo spazio $U = \operatorname{Span}(v_{i_1}, \ldots, v_{i_{n-k}})$ è un supplementare di W invariante per f.

Osserviamo fra l'altro che questa seconda dimostrazione non fa alcun uso del fatto che lo spazio vettoriale sia reale.

Si noti che la tesi di questo esercizio segue anche da quella dell'esercizio 42. □

Soluzione dell'Esercizio 29. La matrice A ha un solo autovalore α di molteplicità algebrica n. Inoltre (cfr. esercizio 14) $A - \alpha I$ è nilpotente e il suo indice di nilpotenza è n. Poiché l'indice di nilpotenza di $A - \alpha I$ è il massimo ordine di un blocco di Jordan associato all'autovalore α nella forma di Jordan di A, segue che $J(A)$ è costituita da un solo blocco di ordine n. □

Soluzione dell'Esercizio 30. Consideriamo il sottospazio vettoriale di V formato dai vettori invarianti per f, ossia $V_+ = \{x \in V \mid f(x) = x\}$. È facile vedere che $V = V_+ \oplus \operatorname{Ker} f$. Infatti $V_+ \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}$ e ogni $x \in V$ può essere scritto come $x = f(x) + (x - f(x))$, dove $f(x) \in V_+$ e $x - f(x) \in \operatorname{Ker} f$. Basta allora prendere una base $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$, in cui $\{v_1, \ldots, v_k\}$ è una base di V_+ e $\{v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ è una base di $\operatorname{Ker} f$: la matrice associata a f rispetto alla base $\mathcal{B}$ è del tipo richiesto.

In particolare, quanto dimostrato implica che f è diagonalizzabile, che ha solo gli autovalori 1 e 0, che V_+ è l'autospazio relativo all'autovalore 1 e che $V_+ = \operatorname{Im} f$.

Nota. Un esempio della situazione considerata nell'esercizio è

$$V = \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad \text{e} \quad f : A \mapsto \frac{A + {}^tA}{2}.$$

In questo caso I risulta essere il sottospazio di $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ costituito dalle matrici simmetriche e $\operatorname{Ker} f$ quello delle matrici antisimmetriche. Fra l'altro si vede facilmente che, data $f : V \to V$ lineare, si ha

$$f^2 = f \iff \textit{esiste } g : V \to V \textit{ lineare tale che } g^2 = id \textit{ e } f = \frac{id + g}{2}.$$

L'implicazione ($\Longleftarrow$) è ovvia; per il viceversa basta prendere $g = 2f - id$.

Nota. Un altro modo di risolvere l'esercizio è quello di osservare che f è radice del polinomio $q(t) = t^2 - t = t(t-1)$. Il polinomio minimo di f può quindi essere solo t, oppure $t - 1$, oppure $t(t-1)$. In ogni caso il fatto che il polinomio minimo si spezzi in fattori lineari assicura che la forma di Jordan di f contiene solo blocchi di ordine 1 relativi agli autovalori 0 e 1. Dunque la forma di Jordan è del tipo

$$\left(\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right). \quad \square$$

Soluzione dell'Esercizio 31. L'inclusione $V^\perp \subseteq \{v \in V \mid \langle v, v\rangle = 0\}$ è ovvia.

Proviamo dunque l'altra inclusione. Sia $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base ortogonale di V; rispetto a tale base la matrice associata a $\langle\ ,\ \rangle$ sarà del tipo

$$\begin{pmatrix} a_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & a_k & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

con $a_1, \ldots, a_k$ tutti positivi se $\langle\ ,\ \rangle$ è semidefinito positivo, tutti negativi se è semidefinito negativo. Sia $v \in V$ un vettore tale che $\langle v, v\rangle = 0$. Se scriviamo $v = \sum_1^n b_i v_i$, si ha $\langle v, v\rangle = \sum_1^k b_i^2 a_i$. Essendo gli a_i tutti positivi (o tutti negativi) per $i = 1, \ldots, k$, dalla relazione $\langle v, v\rangle = 0$ si ricava che $b_1 = \cdots = b_k = 0$. Quindi $v \in \operatorname{Span}(v_{k+1}, \ldots, v_n) = V^\perp$.

L'inclusione $V^\perp \supseteq \{v \in V \mid \langle v, v\rangle = 0\}$ è anche conseguenza della disuguaglianza di Schwarz, la quale asserisce che per ogni $v, w \in V$ si ha $|\langle v, w\rangle| \le \|v\|\,\|w\|$; infatti da tale disuguaglianza discende che, se $\langle v, v\rangle = 0$, allora $\langle v, w\rangle = 0\ \forall w \in V$, cioè $v \in V^\perp$.

La disuguaglianza di Schwarz usualmente viene provata per prodotti scalari definiti positivi (o negativi), ma è facile verificare che essa vale anche nel caso di prodotti scalari semidefiniti positivi (o negativi). □

Soluzione dell'Esercizio 32. (1) Supponiamo che A sia invertibile; se $X \in \operatorname{Ker} L$, allora $AX = 0$, da cui (moltiplicando a sinistra per A^{-1}) $X = 0$. Dunque L è iniettiva.

Viceversa, supponiamo L iniettiva. Se per assurdo A non fosse invertibile, esisterebbe un vettore $v \neq 0$ tale che $Av = 0$. Ma allora la matrice non nulla

$$X = \left(v \,\middle|\, 0 \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, 0 \right) \tag{1}$$

sarebbe tale che $L(X) = AX = 0$, contro il fatto che L è iniettiva.

L'implicazione ($\Longrightarrow$) può anche essere provata osservando che se L è iniettiva, essa è anche surgettiva; in particolare $I \in \operatorname{Im} L$. Ciò significa che esiste $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tale che $AB = I$ e quindi A è invertibile.

Osserviamo infine che (1) è anche una ovvia conseguenza dell'esercizio 20, dove si è provato che $\dim \operatorname{Ker} L = n(n - \operatorname{rk} A)$.

(2) Se λ è autovalore per L, esiste $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $X \neq 0$, tale che $AX = \lambda X$. Per ogni colonna X^j della matrice X si ha dunque $AX^j = \lambda X^j$. La matrice X, essendo non nulla, contiene almeno una colonna $X^i \neq 0$. Il vettore X^i di $\mathbb{K}^n$ è allora autovettore per A relativo all'autovalore λ.

Viceversa, se λ è autovalore per A e $v \in \mathbb{K}^n$ è un autovettore ad esso relativo, si ha $Av = \lambda v$. Allora la matrice X di (1) è non nulla e tale che $AX = \lambda X$; dunque λ è autovalore per L.

(3) Sia λ un autovalore per L, e quindi anche per A, e siano $E(\lambda, L)$ e $E(\lambda, A)$ gli autospazi relativi a λ per L e per A. Ricordiamo che, se $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, si ha $\dim\{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid BX = 0\} = n(n - \operatorname{rk} B)$ (cfr. esercizio 20), per cui

$$\begin{aligned}\dim E(\lambda, L) &= \dim \operatorname{Ker}(L - \lambda id) = \dim\{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid (A - \lambda I)X = 0\} = \\ &= n(n - \operatorname{rk}(A - \lambda I)) = n \dim E(\lambda, A)\,.\end{aligned}$$

Pertanto, se $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ sono gli autovalori di L (e di A), abbiamo

$$\dim E(\lambda_1, L) + \cdots + \dim E(\lambda_k, L) = n\big(\dim E(\lambda_1, A) + \cdots + \dim E(\lambda_k, A)\big)\,.$$

Ne segue che

$$\sum_{i=1}^{k} \dim E(\lambda_i, L) = n^2 \iff \sum_{i=1}^{k} \dim E(\lambda_i, A) = n$$

e quindi L è diagonalizzabile $\iff$ A è diagonalizzabile.

È possibile provare (3) anche nel modo seguente.

Se A è diagonalizzabile e $\{v_1, \ldots, v_n\}$ è una base di autovettori per A, allora è immediato vedere che le matrici

$$S_{i,j} = \left(0 \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, 0 \,\middle|\, \underset{\substack{\uparrow \\ j\text{-esima}}}{v_i} \,\middle|\, 0 \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, 0 \right)$$

sono una base per $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ di autovettori per L. Viceversa, sia L diagonalizzabile e sia $\{X_{i,j}\}_{1 \le i,j \le n}$ una base di autovettori per L. Come già osservato in precedenza, ogni colonna non nulla delle $X_{i,j}$ è un autovettore per A. Inoltre, per ogni $v \in \mathbb{K}^n$, la matrice

$$X = \left(v \,\middle|\, 0 \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, 0 \right)$$

è combinazione lineare delle $X_{i,j}$ e quindi v è combinazione lineare delle prime colonne $X^1_{i,j}$ delle matrici $X_{i,j}$. Ciò prova che i vettori $X^1_{i,j}$ sono generatori di $\mathbb{K}^n$ e quindi da essi si può estrarre una base di $\mathbb{K}^n$, che risulta formata da autovettori per A. Pertanto A è diagonalizzabile. $\square$

Soluzione dell'Esercizio 33. Dire che g è nilpotente significa che esiste un intero positivo s tale che $g^s = 0$. In particolare g non è iniettiva e quindi $\dim(\operatorname{Ker} g) \geq 1$. Consideriamo la successione di sottospazi di $\mathbb{K}^n$

$$\{0\} \subseteq \operatorname{Ker} g \subseteq \operatorname{Ker} g^2 \subseteq \cdots \subseteq \operatorname{Ker} g^s = \mathbb{K}^n,$$

e sia p il più piccolo numero naturale tale che $\operatorname{Ker} g^p = \operatorname{Ker} g^{p+1}$. Da ciò segue che

(1) $\operatorname{Ker} g^p = \operatorname{Ker} g^{p+1} = \cdots = \operatorname{Ker} g^s = \mathbb{R}^n$ (si veda la nota in fondo alla soluzione dell'esercizio A) e quindi $g^p = 0$;

(2) poiché, $\forall j = 1, \ldots, p$, $\dim(\operatorname{Ker} g^j) \geq j$, si ha in particolare che $\dim(\operatorname{Ker} g^p) \geq p$ e quindi $p \leq n$.

Allora $g^n = g^p \circ g^{n-p} = 0$.

Nota. L'applicazione g, essendo nilpotente, ha solo l'autovalore 0 di molteplicità algebrica n (perché?); quindi esiste una base a ventaglio di $\mathbb{K}^n$ rispetto alla quale la matrice T associata a g è strettamente triangolare superiore. Allora la tesi segue dall'esercizio 14. $\square$

Soluzione dell'Esercizio 34. Nella soluzione del presente esercizio useremo sia il prodotto scalare standard di $\mathbf{R}^n$ che il prodotto hermitiano standard di $\mathbf{C}^n$ e, per evitare confusioni, li indicheremo rispettivamente con $\langle\ ,\ \rangle_{\mathbf{R}}$ e $\langle\ ,\ \rangle_{\mathbf{C}}$. Ricordiamo che

$$\langle v, w\rangle_{\mathbf{C}} = \langle v, w\rangle_{\mathbf{R}} \qquad \forall v, w \in \mathbf{R}^n$$

e che per una matrice ortogonale $A \in O_n$ valgono i seguenti fatti:

$$\begin{aligned} \langle Av, Aw\rangle_{\mathbb{R}} &= \langle v, w\rangle_{\mathbb{R}} \qquad \forall v, w \in \mathbb{R}^n \\ \langle Av, Aw\rangle_{\mathbf{C}} &= \langle v, w\rangle_{\mathbf{C}} \qquad \forall v, w \in \mathbf{C}^n . \end{aligned}$$

Cominciamo ricordando alcune proprietà degli autovalori e degli autospazi di una matrice ortogonale: se $A \in O_n$, allora

- gli autovalori di A sono numeri complessi di modulo 1;
- gli autospazi complessi relativi ad autovalori distinti di A sono ortogonali rispetto a $\langle\ ,\ \rangle_{\mathbf{C}}$.

Infatti se λ è un autovalore di A e $v \in \mathbf{C}^n$ è un autovettore ad esso relativo, allora

$$\lambda\overline{\lambda}\langle v, v\rangle_{\mathbf{C}} = \langle \lambda v, \lambda v\rangle_{\mathbf{C}} = \langle Av, Av\rangle_{\mathbf{C}} = \langle v, v\rangle_{\mathbf{C}}$$

e, dato che $v \neq 0$, allora $\lambda\overline{\lambda} = |\lambda|^2 = 1$. In particolare gli autovalori reali possono essere soltanto 1 e -1.

Inoltre, se λ, $\mu \in \mathbf{C}$ sono due autovalori distinti di A e v, $w \in \mathbf{C}^n$ sono autovettori relativi a λ e μ, allora

$$\langle v, w\rangle_{\mathbf{C}} = \langle Av, Aw\rangle_{\mathbf{C}} = \langle \lambda v, \mu w\rangle_{\mathbf{C}} = \lambda\overline{\mu}\langle v, w\rangle_{\mathbf{C}} .$$

Osserviamo che $\lambda\overline{\mu} \neq 1$, perché altrimenti avremmo $\lambda\mu^{-1} = 1$ e quindi $\lambda = \mu$ contro l'ipotesi (qui si è usato il fatto che se $|\mu| = 1$, allora $\overline{\mu} = \mu^{-1}$). Da ciò segue allora che $\langle v, w\rangle_{\mathbf{C}} = 0$.

Se indichiamo con V_+, $V_- \subseteq \mathbb{R}^n$ gli autospazi reali relativi agli autovalori 1 e -1 rispettivamente, da quanto detto sopra segue in particolare che V_+ e V_- sono ortogonali rispetto a $\langle\ ,\ \rangle_{\mathbb{R}}$.

Posto $W = (V_+ \oplus V_-)^{\perp}$ (ortogonale rispetto a $\langle\ ,\ \rangle_{\mathbb{R}}$), si ha allora la decomposizione in somma diretta, con gli addendi a due a due ortogonali:

$$\mathbb{R}^n = V_+ \oplus V_- \oplus W .$$

Dato che A è ortogonale e $V_+ \oplus V_-$ è invariante per A, anche W è invariante per A.

Se $\mathcal{B}_+$, $\mathcal{B}_-$, $\mathcal{B}_W$ sono rispettivamente basi ortonormali per V_+, V_- e W, allora $\mathcal{B}_+ \cup \mathcal{B}_- \cup \mathcal{B}_W$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$, rispetto alla quale la matrice A assume la forma

$$A_1 = \left(\begin{array}{c|c|c} I_{k_1} & & \\ \hline & -I_{k_2} & \\ \hline & & B \end{array}\right) .$$

In altre parole, esiste una matrice ortogonale M_1 (la matrice di cambiamento di base) tale che

$$A_1 = {}^tM_1AM_1 .$$

Anche la matrice A_1 è ortogonale (perché?) e dunque dalla relazione

$$I = {}^tA_1A_1 = \left(\begin{array}{c|c|c} I_{k_1} & & \\ \hline & -I_{k_2} & \\ \hline & & {}^tB \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c|c} I_{k_1} & & \\ \hline & -I_{k_2} & \\ \hline & & B \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c|c} I_{k_1} & & \\ \hline & I_{k_2} & \\ \hline & & {}^tBB \end{array}\right)$$

segue che anche B è ortogonale.

Inoltre B non ha autovalori reali, perché altrimenti in W ci sarebbe un autovettore per A, il che è assurdo. In particolare B ha ordine pari (si ricordi che ogni matrice di ordine dispari ha almeno un autovalore reale). Poniamo $2k = n - k_1 - k_2$.

Per provare la tesi dell'esercizio, basta allora dimostrare che, data una matrice $B \in O_{2k}$ senza autovalori reali, esiste una matrice $N \in O_{2k}$ tale che

$$(1) \qquad {}^tNBN = \begin{pmatrix} \boxed{R_{\vartheta_1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{R_{\vartheta_k}} \end{pmatrix}$$

essendo le R_{ϑ_i} come nell'enunciato dell'esercizio. Infatti, in tal caso, detta

$$M_2 = \left(\begin{array}{c|c} I_{k_1+k_2} & \\ \hline & N \end{array}\right)$$

e detta $M = M_1M_2$, la matrice M è ortogonale (perché?) e tale che

$${}^tMAM = {}^tM_2A_1M_2 = \left(\begin{array}{c|c|c} I_{k_1} & & \\ \hline & -I_{k_2} & \\ \hline & & {}^tNBN \end{array}\right),$$

che è della forma richiesta nella tesi.

Per provare la (1), procediamo per induzione su k. Se $k = 1$ la tesi segue dalla caratterizzazione delle matrici ortogonali 2×2 (cfr. esercizio 10). Che sia una rotazione (e non una riflessione) e che l'angolo di rotazione non sia un multiplo intero di π segue dal fatto che B non ha autovalori reali.

Supponiamo allora che $k > 1$ e che la tesi sia vera per le matrici ortogonali di ordine $2(k-1)$. Sia $\lambda \in \mathbb{C}$ un autovalore di B e sia $v \in \mathbb{C}^{2k}$ un autovettore ad esso relativo. Dato che B è una matrice reale, $\overline{B} = B$ e quindi

$$B\overline{v} = \overline{B}\overline{v} = \overline{Bv} = \overline{\lambda v} = \overline{\lambda}\overline{v},$$

pertanto $\overline{\lambda}$ è un autovalore per B e $\overline{v}$ è un autovettore ad esso relativo. In più, dato che $\lambda \notin \mathbb{R}$, λ e $\overline{\lambda}$ sono autovalori distinti, e dunque, per quanto visto all'inizio,

$$(v, \overline{v})_{\mathbb{C}} = 0 .$$

In particolare v e $\overline{v}$ sono linearmente indipendenti su $\mathbb{C}$. Detti allora $x, y \in \mathbb{R}^{2k}$ i vettori tali che $v = x + iy$, si ha che $x = (v+\overline{v})/2$ e $y = (v - \overline{v})/2i$, da cui è immediato verificare che x e y sono linearmente indipendenti. In realtà vale qualche cosa di più:

$$\langle x, y\rangle_{\mathbb{R}} = 0 \quad \text{e} \quad \|x\| = \|y\| . \tag{2}$$

Infatti, ricordando che $\langle \ , \ \rangle_{\mathbb{C}}$ e $\langle \ , \ \rangle_{\mathbb{R}}$ coincidono su $\mathbb{R}^n$, abbiamo

$$\begin{aligned}
0 = (v, \overline{v})_{\mathbb{C}} &= (x + iy, x - iy)_{\mathbb{C}} = \\
&= (x, x)_{\mathbb{C}} + (x, -iy)_{\mathbb{C}} + (iy, x)_{\mathbb{C}} + (iy, -iy)_{\mathbb{C}} = \\
&= (x, x)_{\mathbb{C}} - (y, y)_{\mathbb{C}} + i\big((x, y)_{\mathbb{C}} + (y, x)_{\mathbb{C}}\big) \\
&= \langle x, x\rangle_{\mathbb{R}} - \langle y, y\rangle_{\mathbb{R}} + 2i\langle x, y\rangle_{\mathbb{R}}
\end{aligned}$$

da cui, uguagliando a 0 parte reale e parte immaginaria, segue la (2).

Sia ora $\lambda = \alpha + i\beta$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dato che $|\lambda| = 1$, esiste $\vartheta_1 \in \mathbb{R}$ tale che $\alpha = \cos\vartheta_1$ e $\beta = \sin\vartheta_1$, e dato che $\lambda \notin \mathbb{R}$ si ha che ϑ_1 non è un multiplo intero di π. Dal fatto che $Bv = \lambda v$ segue allora che

$$Bx + iBy = B(x + iy) = (\alpha + i\beta)(x + iy) = \alpha x - \beta y + i(\beta x + \alpha y)$$

da cui, uguagliando la parte reale e la parte immaginaria, si ottiene

$$\begin{aligned}
By &= \beta x + \alpha y \\
Bx &= \alpha x - \beta y .
\end{aligned}$$

Poiché $\|x\| = \|y\|$, segue immediatamente che

$$\begin{aligned}
B\frac{y}{\|y\|} &= \beta\frac{x}{\|x\|} + \alpha\frac{y}{\|y\|} \\
B\frac{x}{\|x\|} &= \alpha\frac{x}{\|x\|} - \beta\frac{y}{\|y\|} .
\end{aligned} \tag{3}$$

Ma allora detto $W_1 = \operatorname{Span}\langle x, y\rangle \subset \mathbb{R}^{2k}$, si ha che W_1 (e quindi $W_1^{\perp}$) è invariante per l'azione di B. Di conseguenza rispetto alla base ortonormale $\{y/\|y\|, x/\|x\|, w_3, \ldots, w_{2k}\}$, dove $\{w_3, \ldots, w_{2k}\}$ è una base ortonormale di $W_1^{\perp}$, la matrice B assume la forma

$$B_1 = {}^tN_1 B N_1 = \left(\begin{array}{cc|c} \alpha & -\beta & \\ \beta & \alpha & \\ \hline & & B' \end{array}\right) .$$

Si osservi che, con le notazioni usate,

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = R_{\vartheta_1} .$$

Dato che N_1 è una matrice ortogonale, tale risulta essere anche B_1 e quindi B'; inoltre, visto che gli autovalori di B' sono autovalori anche di B_1 e quindi di B, la matrice B' non ha autovalori reali. Per ipotesi di induzione esiste una matrice ortogonale $N' \in O_{2(k-1)}$ tale che

$${}^tN' B' N' = \begin{pmatrix} \boxed{R_{\vartheta_2}} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{R_{\vartheta_k}} \end{pmatrix} .$$

Si conclude allora come in precedenza considerando la matrice $N_2 \in O_{2k}$ data da

$$N_2 = \left(\begin{array}{c|c} I_2 & \\ \hline & N' \end{array}\right)$$

ed osservando che, detta $N = N_1 N_2$, si ha

$${}^tNBN = {}^tN_2 B_1 N_2 = \left(\begin{array}{cc|c} \alpha & -\beta & \\ \beta & \alpha & \\ \hline & & {}^tN' B' N' \end{array}\right)$$

che ha quindi la forma richiesta in (1). Questo conclude la dimostrazione.

Nota. Il significato geometrico del risultato provato è che, data una matrice ortogonale A, si trovano dei sottospazi a due a due ortogonali V_+, V_-, $V_1, \ldots, V_k$ con $\dim V_i = 2$ per ogni $i = 1, \ldots, k$, invarianti per A, la cui somma è tutto $\mathbb{R}^n$ e sui quali l'azione di A è particolarmente semplice: su V_+ è l'identità, su V_- è l'opposto dell'identità, e su ogni spazio V_i agisce esattamente come una rotazione del piano attorno all'origine.

Nota. Chiaramente l'esercizio appena risolto può essere rienunciato nel modo seguente:

Sia V uno spazio vettoriale reale e sia $\langle\ ,\ \rangle$ un prodotto scalare definito positivo su V. Se $f \in \operatorname{Hom}(V,V)$ è un operatore che conserva il prodotto scalare, allora esiste una base ortonormale di V rispetto a cui la matrice associata ad f ha la forma data nel testo dell'esercizio. □

Soluzione dell'Esercizio 35. La verifica della linearità di L non pone problemi. Per quanto riguarda $\operatorname{Ker} L$, osserviamo che

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker} L &= \{f \in \operatorname{Hom}(V,V) \mid g \circ f = 0\} = \\ &= \{f \in \operatorname{Hom}(V,V) \mid \operatorname{Im} f \subseteq \operatorname{Ker} g\} = \operatorname{Hom}(V, \operatorname{Ker} g)\,.\end{aligned}$$

Pertanto $\dim(\operatorname{Ker} L) = n(n-r)$ e quindi $\dim(\operatorname{Im} L) = n^2 - n(n-r) = nr$. □

Soluzione dell'Esercizio 36. Dall'ipotesi $M^2 = N^2 = I$ segue (cfr. esercizio 25) che

$$M \text{ è simile a } \left(\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & -I_{n-k}\end{array}\right) \quad \text{e} \quad N \text{ è simile a } \left(\begin{array}{c|c} I_h & 0 \\ \hline 0 & -I_{n-h}\end{array}\right)$$

per opportuni numeri interi h e k.

Poiché la traccia è invariante per similitudine, si ha che $\operatorname{tr} M = 2k - n$ e $\operatorname{tr} N = 2h - n$ e dunque, viste le ipotesi, $h = k$. Ma allora M e N risultano simili alla stessa matrice diagonale, e quindi sono simili. □

Soluzione dell'Esercizio 37. Indichiamo ancora con A e B le applicazioni lineari $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ individuate rispetto alla base canonica dalle due matrici, cioè $X \mapsto AX$ e $X \mapsto BX$.

Cominciamo a provare che A e B hanno un autovettore comune.

Sia λ un autovalore per A e consideriamo l'autospazio $E(\lambda, A)$ per l'operatore A. Dal fatto che $AB = BA$, segue che $E(\lambda, A)$ è invariante per B, cioè $B(E(\lambda, A)) \subseteq E(\lambda, A)$ (cfr. la soluzione dell'esercizio B).

Dunque $B|_{E(\lambda,A)}$ è un endomorfismo; è facile vedere che i suoi autovalori sono tutti reali. Infatti, presa una base di $\mathbb{R}^n$ ottenuta completando una base di $E(\lambda, A)$, si osserva che la matrice associata a B rispetto a tale base è del tipo

$$\left(\begin{array}{c|c} F & G \\ \hline 0 & H\end{array}\right).$$

In particolare il polinomio caratteristico di questa matrice, che per ipotesi ha tutte le radici reali, si fattorizza come $P_F(t)P_H(t)$ (cfr. esercizio 6); dunque anche $P_F(t)$ ha tutte le radici reali. D'altra parte, F è la matrice associata nella base fissata a $B|_{E(\lambda,A)}$, che quindi ha tutti gli autovalori reali. Esiste allora

un vettore $v_1 \in E(\lambda, A)$ che sia autovettore per $B|_{E(\lambda,A)}$: esso è l'autovettore comune cercato.

Proviamo ora che A e B sono triangolabili simultaneamente, cioè che esiste una matrice invertibile M di ordine n tale che $M^{-1}AM$ e $M^{-1}BM$ sono triangolari. La dimostrazione sarà fatta per induzione su n, provando che esiste una base di $\mathbb{R}^n$ a ventaglio sia per A che per B.

Se $n = 1$, non c'è nulla dimostrare.

Siano ora A e B di ordine n e sia v_1 un autovettore comune, che esiste per quanto provato sopra. Sia $\{v_1, w_2, \ldots, w_n\}$ una base di $\mathbb{R}^n$; rispetto a tale base le matrici associate ad A e B sono rispettivamente della forma

$$\left(\begin{array}{c|ccc} \lambda & * & \cdots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{array}\right), \qquad \left(\begin{array}{c|ccc} \mu & * & \cdots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & B' & \\ 0 & & & \end{array}\right).$$

Poiché $AB = BA$, è facile verificare che anche $A'B' = B'A'$. Inoltre, per lo stesso ragionamento fatto sopra, A' e B' hanno tutti gli autovalori reali. Allora, per ipotesi di induzione, esiste una base $\{v_2, \ldots, v_n\}$ di $\operatorname{Span}(w_2, \ldots, w_n)$ che è a ventaglio sia per A' che per B'. Si verifica allora facilmente che $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ è una base di $\mathbb{R}^n$ a ventaglio sia per A che per B.

Per completare la dimostrazione, basta applicare alla base $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ l'algoritmo di Gram-Schmidt: esso produce una base $\mathcal{S} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ ortonormale e tale che, per ogni $i = 1, \ldots, n$, $\operatorname{Span}(v_1, \ldots, v_i) = \operatorname{Span}(u_1, \ldots, u_i)$. Pertanto $\mathcal{S}$ è ancora a ventaglio per A e per B e quindi, se N è la matrice di passaggio fra la base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^n$ e la base $\mathcal{S}$, si ha che $N^{-1}AN$ e $N^{-1}BN$ sono triangolari. D'altra parte N è ortogonale, in quanto matrice di passaggio fra basi ortonormali.

Nota. Il viceversa non vale, in quanto matrici triangolari generalmente non commutano. Si considerino ad esempio le due matrici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad \square$$

Soluzione dell'Esercizio 38. Basta dimostrare l'implicazione ($\Longrightarrow$).

Essendo A diagonalizzabile, essa ha tutti gli autovalori reali. D'altra parte se λ è autovalore per A, λ^k lo è per $A^k = I$, quindi $\lambda^k = 1$ e dunque λ può essere solo 1 o -1.

La matrice A^2, che è diagonalizzabile (perché?), ha allora solo l'autovalore 1, cioè è simile a I, ma allora $A^2 = I$. □

Soluzione dell'Esercizio 39. Per definizione $v \in \operatorname{Ker} A$ se e solo se risolve il sistema lineare $Ax = 0$. Sia M un minore non degenere e di rango massimo della matrice A; per il teorema di Rouché-Capelli, detta B la matrice le cui righe concorrono a formare il minore M, il sistema lineare in questione è equivalente al sistema $Bx = 0$.

Sia k l'ordine del minore M e, per semplicità, supponiamo che M sia costituito dalle prime k colonne di B. Detti allora $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (x_1, \dots, x_k)$, $y' = (x_{k+1}, \dots, x_n)$ e detta B' la matrice formata dalle ultime $n-k$ colonne di B, possiamo scrivere

$$Bx = (\, M \mid B' \,) \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = My + B'y' .$$

Le soluzioni del sistema $Bx = 0$ sono dunque determinate dalla formula

$$y = -M^{-1}B'y'$$

ed una base di $\operatorname{Ker} A$ è data dai vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} -M^{-1}B'e_1 \\ e_1 \end{pmatrix}, \dots, v_{n-k} = \begin{pmatrix} -M^{-1}B'e_{n-k} \\ e_{n-k} \end{pmatrix}$$

essendo e_i i vettori della base canonica di $\mathbf{R}^{n-k}$. Ricordiamo ora che

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M} \widetilde{M}$$

dove $\widetilde{M}$ è la matrice aggiunta di M. Osserviamo che il determinante di una matrice a coefficienti interi è ovviamente un numero intero (si ottiene con somme e prodotti a partire dagli elementi della matrice). Ma allora $\det M \in \mathbf{Z}$, $\widetilde{M}$ e B' sono a coefficienti in $\mathbf{Z}$, quindi i vettori

$$(\det M)v_1, \dots, (\det M)v_{n-k}$$

hanno coordinate in $\mathbf{Z}$. D'altra parte sono ancora una base di $\operatorname{Ker} A$ dato che $\det M \neq 0$. $\square$

Soluzione dell'Esercizio 40. Per provare la tesi, basta dimostrare che esiste una base di V del tipo $\{v_1, \dots, v_m, f(v_1), \dots, f(v_m)\}$, infatti rispetto ad una tale base la matrice associata ad f è quella richiesta.

Dato che $V \neq \{0\}$, esiste $v_1 \in V - \{0\}$. I vettori v_1 e $f(v_1)$ risultano essere linearmente indipendenti. Infatti, se no, si avrebbe che $f(v_1) = \lambda v_1$ con $\lambda \in \mathbb{R}$ e allora, applicando f all'ultima uguaglianza, si avrebbe $-v_1 = \lambda f(v_1) = \lambda^2 v_1$, cioè $(\lambda^2+1)v_1 = 0$. Poiché $v_1 \neq 0$, dovrebbe essere $\lambda^2 + 1 = 0$, che è evidentemente impossibile per $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ci sono ora due possibilità: o $\{v_1, f(v_1)\}$ è una base per V (e allora la tesi è provata), oppure $\exists v_2 \notin \operatorname{Span}(v_1, f(v_1))$. Ragionando come sopra è facile vedere che allora $f(v_2) \notin \operatorname{Span}(v_1, v_2, f(v_1))$. Infatti, se no, si avrebbe $f(v_2) = a_1 v_1 + a_2 v_2 + b_1 f(v_1)$ e quindi, applicando f,

$$\begin{aligned} -v_2 &= a_1 f(v_1) + a_2 f(v_2) - b_1 v_1 = \\ &= a_1 f(v_1) + a_2(a_1 v_1 + a_2 v_2 + b_1 f(v_1)) - b_1 v_1 = a_2^2 v_2 + w \end{aligned}$$

con $w \in \operatorname{Span}(v_1, f(v_1))$. Dunque $(a_2^2+1)v_2 + w = 0$. Essendo $\{v_1, v_2, f(v_1)\}$ linearmente indipendenti, deve essere in particolare $a_2^2 + 1 = 0$, che è impossibile.

Abbiamo così provato che l'insieme $\{v_1, v_2, f(v_1), f(v_2)\}$ è linearmente indipendente. Se è una base di V, la tesi è provata; altrimenti si itera il procedimento descritto. Osserviamo che l'algoritmo termina dopo un numero finito di passi, perché V ha dimensione finita.

Nota. Dalla tesi segue in particolare che, se esiste una applicazione lineare $f \in \operatorname{Hom}(V, V)$ tale che $f^2 = -id$, allora necessariamente la dimensione di V è pari. Questo si può vedere anche direttamente: dal fatto che f verifica la relazione $f^2 = -id$ segue che, se λ è un autovalore di f, allora $\lambda^2 = -1$, quindi f non ha autovalori reali. D'altra parte è ben noto che se V è uno spazio vettoriale reale di dimensione dispari, allora ogni $f \in \operatorname{Hom}(V, V)$ ha almeno un autovalore reale.

Un esempio della situazione considerata nell'esercizio è dato dalla rotazione di $\pi/2$ in $\mathbf{R}^2$. $\square$

Soluzione dell'Esercizio 41. Il polinomio caratteristico di f è un polinomio di terzo grado a coefficienti reali, quindi ha almeno una radice reale, ossia f ha almeno un autovalore reale λ.

Se f ha tutti gli autovalori reali e $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ è una base a ventaglio per f, allora $\operatorname{Span}(v_1, v_2)$ è un piano invariante.

Nel caso in cui f non abbia tutti gli autovalori reali, si può procedere come nella soluzione dell'esercizio 26, osservando che se $z = x + iy \in \mathbf{C}^3$ ($x, y \in \mathbf{R}^3$) è un autovettore della complessificata di f relativo ad un autovalore complesso $\mu = \alpha + i\beta$, allora x e y sono linearmente indipendenti e $\operatorname{Span}(x, y) \subset \mathbf{R}^3$ è un sottospazio invariante per f (si ha in effetti $f(x) = \alpha x - \beta y$ ed $f(y) = \beta x + \alpha y$). Per i particolari si veda l'esercizio 26.

Un altro modo di provare la tesi è il seguente. Si consideri l'applicazione trasposta di f

$$f\,\hat{} : (\mathbf{R}^3)\hat{} \to (\mathbf{R}^3)\hat{}$$

definita da $f\,\hat{}(g) = g \circ f$ (cfr. esercizio E). Il polinomio caratteristico di $f\,\hat{}$ è un polinomio di terzo grado a coefficienti reali, quindi ha almeno una radice reale, ossia $f^\wedge$ ha almeno un autovalore reale λ. Pertanto esiste $g \in (\mathbb{R}^3)^\wedge - \{0\}$ tale che $f^\wedge(g) = \lambda g$, cioè $g \circ f = \lambda g$. Da ciò segue subito che $\operatorname{Ker} g$ è un sottospazio f-invariante; basta dunque prendere $\pi = \operatorname{Ker} g$. □

Soluzione dell'Esercizio 42. Sia $w \in W$, e sia $w = v_1 + \cdots + v_k$, $v_i \in E(\lambda_i)$ la sua decomposizione lungo gli autospazi. Per dimostrare la tesi dell'esercizio, è sufficiente dimostrare che $v_i \in W$ per ogni i.

Consideriamo i k vettori $w, f(w), f^2(w), \ldots, f^{k-1}(w)$; dato che W è invariante per f tali vettori appartengono tutti a W. D'altra parte,

$$\begin{aligned} w &= v_1 + \cdots + v_k \\ f(w) &= \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k \\ f^2(w) &= \lambda_1^2 v_1 + \cdots + \lambda_k^2 v_k \\ &\vdots \\ f^{k-1}(w) &= \lambda_1^{k-1} v_1 + \cdots + \lambda_k^{k-1} v_k \end{aligned}$$

e queste uguaglianze possono essere riscritte in forma matriciale

$$\begin{pmatrix} w \\ f(w) \\ f^2(w) \\ \vdots \\ f^{k-1}(w) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_k \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \ldots & \lambda_k^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \ldots & \lambda_k^{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_k \end{pmatrix}.$$

Osserviamo che la matrice $k \times k$ che compare è una matrice di Vandermonde ed il suo determinante è diverso da 0 in quanto $\lambda_i \neq \lambda_j$ se $i \neq j$. Ciò significa che il sistema può essere invertito, ossia si possono ricavare i v_i come combinazione lineare dei vettori $w, f(w), f^2(w), \ldots, f^{k-1}(w)$ e quindi tutti i v_i appartengono a W.

Nota. Dalla tesi dell'esercizio segue in particolare che $f|_W$ è diagonalizzabile; infatti, se $\mathcal{B}_i$ è una base di W_i per $i = 1, \ldots, k$, l'insieme $\mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_k$ è una base di W di autovettori per f.

Si confronti la tesi dell'esercizio con quella dell'esercizio 28. □

Soluzione dell'Esercizio 43. L'implicazione ($\Longleftarrow$) è ovvia (perché?). Proviamo dunque ($\Longrightarrow$). La matrice A, avendo tutti gli autovalori reali, è triangolabile, cioè esiste $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ invertibile tale che

$$A = N^{-1}TN \qquad \text{con} \qquad T = \begin{pmatrix} \alpha & * & \cdots & * \\ & \alpha & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & \alpha \end{pmatrix}.$$

Da questo si deduce facilmente che $A^k = N^{-1}T^kN$ e che

$$T^k = \begin{pmatrix} \alpha^k & * & \cdots & * \\ & \alpha^k & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & \alpha^k \end{pmatrix}.$$

Allora A^k ha gli stessi autovalori di T^k, cioè ha solo l'autovalore α^k con molteplicità algebrica n. Poiché per ipotesi A^k è diagonalizzabile, essa sarà simile alla matrice $\alpha^k I$ e quindi $A^k = \alpha^k I$.

Ora, T^k è simile ad A^k e quindi anche $T^k = \alpha^k I$, cioè T^k è diagonale. Se proviamo che allora T era necessariamente diagonale, la tesi è provata: infatti A, essendo simile alla matrice diagonale T, è diagonalizzabile.

Consideriamo dunque la matrice $M = (1/\alpha)T$, che è una matrice triangolare superiore con tutti 1 sulla diagonale principale. Poiché $M^k = (1/\alpha^k)T^k = I$, si ricava (cfr. esercizio 3) che $M = I$ e dunque che $T = \alpha I$. Così T è diagonale e la tesi è provata.

Nota. Nella soluzione dell'esercizio abbiamo provato che, se α è autovalore di A di molteplicità algebrica n, allora α^k è autovalore di A^k di molteplicità algebrica n. Questo fatto non è vero in generale. Precisamente, è vero che α^k è autovalore di A^k, ma non è vero che la molteplicità algebrica di α^k coincida con quella di α. Si consideri ad esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nota. L'ipotesi $\alpha \neq 0$ è indispensabile; si consideri infatti

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}:$$

$A^2 = 0$ è diagonalizzabile, ma A non lo è. □

Soluzione dell'Esercizio 44. (1) Dalla condizione che $f^2 = id$ segue che f è diagonalizzabile e gli autospazi sono dati da $V_+ = \{v \mid f(v) = v\}$ e da $V_- = \{v \mid f(v) = -v\}$ (cfr. esercizio 25). Presa una base di autovettori, sia

$\langle\ ,\ \rangle$ il prodotto scalare definito positivo su V per cui tale base è ortonormale; allora f è autoaggiunta rispetto a $\langle\ ,\ \rangle$, in quanto la matrice a lei associata rispetto ad una base ortonormale è simmetrica (in questo caso è diagonale). Questo risponde affermativamente a (1).

La risposta a (2) è in generale negativa. Infatti se f è autoaggiunta rispetto ad un prodotto scalare $\langle\ ,\ \rangle$, i suoi autospazi sono tra loro ortogonali; ma allora, a meno che $f = id$ o $f = -id$ (casi in cui c'è un solo autospazio), è sempre possibile trovare un prodotto scalare definito positivo per cui i due autospazi non siano ortogonali.

Per far vedere questo fatto costruiamo un controesempio. Sia $V = \mathbf{R}^2$ e f il ribaltamento rispetto all'asse delle ascisse, cioè $f(x,y) = (x,-y)$; si ha allora $V_+ = \{y = 0\}$ e $V_- = \{x = 0\}$. Sia $\langle\ ,\ \rangle$ il prodotto scalare che rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^2$ ha come matrice associata

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Tale matrice è definita positiva (e quindi $\langle\ ,\ \rangle$ è definito positivo), ma gli spazi V_+ e V_- non sono ortogonali, in quanto $\langle (1,0),(0,1)\rangle = 1$. $\square$

Soluzione dell'Esercizio 45. L'ipotesi $M^2 = M$ implica che la matrice M è diagonalizzabile (cfr. esercizio 30) ed è simile a

$$D = \left(\begin{array}{c|c} I_h & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

per un opportuno $h \in \mathbf{N}$.

Poiché la traccia è un invariante di similitudine, $\operatorname{tr} M = \operatorname{tr} D$, per cui $k = h$ (e dunque k è intero, $0 \leq k \leq n$). Ma anche il rango è invariante per similitudine, per cui $\operatorname{rk} M = \operatorname{rk} D = h = k$. $\square$

Soluzione dell'Esercizio 46. Se v e w sono linearmente dipendenti, allora possiamo supporre che esista $\lambda \in \mathbf{R}$ tale che $w = \lambda v$. Ma allora $v\,{}^t w = \lambda v\,{}^t v$ che è ovviamente simmetrica.

Viceversa supponiamo che $v\,{}^t w$ sia simmetrica, ossia che $v\,{}^t w - w\,{}^t v = 0$. Chiaramente, se uno dei due vettori è nullo, si ha la tesi. Altrimenti, moltiplicando la relazione di simmetria per esempio per v a destra, si ottiene la relazione $0 = v\,{}^t w v - w\,{}^t v v = \langle v, w\rangle v - \|v\|^2 w$, che è una combinazione lineare con coefficienti non tutti nulli, dato che $v \neq 0$. $\square$

Soluzione dell'Esercizio 47. Per ipotesi

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}.$$

Procedendo per induzione su k (cfr. soluzione dell'esercizio 3), si può vedere che

$$J^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} & & \\ & \lambda^k & \ddots & \\ & & \ddots & k\lambda^{k-1} \\ & & & \lambda^k \end{pmatrix}.$$

Dunque J^k è una matrice triangolare superiore con autovalore λ^k di molteplicità algebrica n, e tutti gli elementi sulla prima parallela alla diagonale principale sono non nulli (qui si usa il fatto che $\lambda \neq 0$!). Ma allora, per l'esercizio 29, la forma di Jordan di J^k ha un solo blocco di ordine n, cioè è la matrice $J_{\lambda^k,n}$.

Nota. Se l'autovalore λ è nullo, non è più vero che la forma di Jordan di J^k è costituita da un solo blocco di Jordan. Infatti, ad esempio, se $n = 3$ e $k = 2$, si ha

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e la forma di Jordan di J^2 è

$$J(J^2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Inoltre, se $k = n$, si ha che $J^n = 0$. $\square$

Soluzione dell'Esercizio 48. Sia $\{v_1, \ldots, v_k\}$ una base di $\operatorname{Ker} f$ e sia $\{v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ una base di V. Poiché i vettori

$$w_{k+1} = f(v_{k+1}), \ldots, w_n = f(v_n)$$

risultano linearmente indipendenti, possiamo costruire una applicazione lineare $g : V \to V$ tale che $g(w_{k+1}) = v_{k+1}, \ldots, g(w_n) = v_n$. L'applicazione $g \circ f$

verifica la tesi, infatti

$$g \circ f(v_i) = \begin{cases} 0 & \text{se } i = 1, \dots, k \\ v_i & \text{se } i = k+1, \dots, n \end{cases}$$

da cui segue immediatamente che $(g \circ f)^2 = g \circ f$. Si osservi infine che l'applicazione g risulta non nulla perché, essendo non nulla la f, si ha che $k = \dim(\operatorname{Ker} f) = \dim(\operatorname{Ker}(g \circ f))$ è strettamente minore di n. □

Soluzione dell'Esercizio 49. Essendo una matrice reale 3×3, A ha almeno un autovalore reale λ, ed in più, essendo una matrice ortogonale, necessariamente $\lambda = 1$ o $\lambda = -1$. Dimostriamo che nelle nostre ipotesi 1 è autovalore di A.

Se $\lambda = 1$, non c'è niente da dimostrare. Se $\lambda = -1$, sia v_1 un autovettore unitario di A relativo all'autovalore -1. Dato che A è ortogonale, $W = (\operatorname{Span}(v_1))^\perp$ è invariante per A; quindi, presa una base ortonormale $\{v_2, v_3\}$ di W, la matrice associata ad A rispetto alla base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ ha la forma

$$A_1 = M^{-1}AM = \left(\begin{array}{c|cc} -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{B}} \\ 0 & & \end{array}\right).$$

Inoltre, dato che $\mathcal{B}$ è una base ortonormale, la matrice di cambiamento di base M è a sua volta ortogonale, quindi A_1 è ortogonale, da cui segue che anche B è ortogonale.

Poiché $\det A = 1$, si ha che $\det B = -1$ e quindi B ha due autovalori 1 e -1 (cfr. esercizio 10). Dato che gli autovalori di B sono anche autovalori di A, 1 è un autovalore di A.

Nel ragionamento precedente possiamo allora supporre che $\lambda = 1$ e quindi esiste una base ortonormale in cui A assume la forma

$$A_1 = M^{-1}AM = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{B}} \\ 0 & & \end{array}\right)$$

essendo B una matrice ortogonale con $\det B = 1$. Ma allora, per quanto visto nell'esercizio 10,

$$B = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

e quindi A risulta essere una rotazione attorno a $\operatorname{Span}(v_1)$ di un angolo ϑ.

Osserviamo infine che A ed A_1, essendo simili, hanno la stessa traccia, quindi

$$\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} A_1 = 1 + \operatorname{tr} B = 1 + 2\cos\vartheta$$

da cui segue immediatamente la relazione richiesta, che determina a meno del segno l'angolo ϑ. □

Soluzione dell'Esercizio 50. Dall'ipotesi $f^2 = id$ deduciamo che f è iniettiva. Allora anche $f|_H : H \to K$ è iniettiva e quindi $\dim H \le \dim K$. Ragionando allo stesso modo con $f|_K : K \to H$, si ha che $\dim K \le \dim H$. Dunque $\dim H = \dim K = m$ e, di conseguenza, $\dim V = 2m$.

Sia $\{v_1, \dots, v_m\}$ una base di H. I vettori $f(v_1), \dots, f(v_m)$ sono m vettori di K linearmente indipendenti (visto che $f|_H$ è iniettiva) e quindi costituiscono una base di K.

È facile allora verificare che la matrice associata ad f rispetto alla base $\{v_1, \dots, v_m, f(v_1), \dots, f(v_m)\}$ di V è del tipo richiesto. □

Soluzione dell'Esercizio 51. Prima di procedere alla dimostrazione vera e propria della tesi dell'esercizio, facciamo alcune considerazioni preliminari.

Osservazione 1. Se $\mu \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ è autovalore per A, allora $\overline{\mu}$ è autovalore di A con la stessa molteplicità algebrica di μ.

Infatti, essendo A una matrice reale, il polinomio caratteristico di A, $P_A(t) = \det(A - tI)$, è un polinomio a coefficienti reali. Pertanto, se μ è autovalore per A, allora $\det(A - \overline{\mu}I) = \overline{\det(A - \mu I)} = 0$, per cui anche $\overline{\mu}$ è autovalore. Inoltre

$$P_A(t) = (t-\mu)^k Q(t) \quad \Longleftrightarrow \quad \overline{P_A(t)} = (t - \overline{\mu})^k \overline{Q(t)}\,.$$

Osservando che $\overline{P_A(t)} = P_A(t)$, se ne deduce che μ e $\overline{\mu}$ hanno la stessa molteplicità algebrica.

Osservazione 2. Se λ è un autovalore reale di A e $E'(\lambda) \subseteq \mathbb{C}^n$ è l'autospazio generalizzato ad esso relativo per l'applicazione lineare $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ determinata dalla matrice A, una base di Jordan di $E'(\lambda)$ si trova prendendo basi opportune nella successione di sottospazi

$$\operatorname{Ker}(A - \lambda I) \subseteq \operatorname{Ker}(A - \lambda I)^2 \subseteq \cdots$$

Ma questi sottospazi hanno la stessa dimensione sia come spazi vettoriali reali che complessi, per cui si può scegliere una base di Jordan di $E'(\lambda)$ formata da vettori reali.

Osservazione 3. Sia $\mu \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ un autovalore di A e sia $\{z_1, \dots, z_t\}$ una base di Jordan di $E'(\mu)$; allora $\{\overline{z_1}, \dots, \overline{z_t}\}$ è una base di Jordan di $E'(\overline{\mu})$.

Infatti, visto che $\overline{\operatorname{Ker}(A - \mu I)^r} = \operatorname{Ker}(A - \overline{\mu} I)^r$ per ogni $r \in \mathbb{N}$, i vettori $\overline{z_1}, \dots, \overline{z_t}$ appartengono a $E'(\overline{\mu})$. Inoltre essi sono linearmente indipendenti:

infatti, se $a_1\overline{z_1}+\cdots+a_t\overline{z_t}=0$ con $a_i\in\mathbb{C}$, allora $\overline{a_1}z_1+\cdots+\overline{a_t}z_t=0$ e quindi, essendo $z_1,\ldots,z_t$ linearmente indipendenti, segue che $\overline{a_i}=0\quad\forall i$ e dunque $a_i=0$ per ogni $i=1,\ldots,t$.

Avendo prima dimostrato che μ e $\overline{\mu}$ hanno la stessa molteplicità algebrica, si ha che $\dim E'(\overline{\mu})=\dim E'(\mu)=t$, perciò i t vettori $\overline{z_1},\ldots,\overline{z_t}$ sono una base di $E'(\overline{\mu})$. Resta da vedere che sono una base di Jordan di tale sottospazio.

Sappiamo che per ogni $i=1,\ldots,t$ si ha che $Az_i=\mu z_i$ oppure $Az_i=\mu z_i+z_{i-1}$. Di conseguenza $A\overline{z_i}=\overline{Az_i}=\overline{\mu}\,\overline{z_i}$ oppure $A\overline{z_i}=\overline{Az_i}=\overline{\mu}\,\overline{z_i}+\overline{z_{i-1}}$, che era quanto ci restava da provare.

Con questo ragionamento, fra l'altro, si prova che esiste una perfetta corrispondenza tra i blocchi di Jordan relativi all'autovalore μ e quelli relativi a $\overline{\mu}$, ossia se in $J(A)$ ci sono l blocchi di ordine m relativi all'autovalore μ, allora ce ne sono altrettanti dello stesso ordine relativi a $\overline{\mu}$.

Osservazione 4. Se $\mu\in\mathbf{C}-\mathbf{R}$ è un autovalore di A, allora esiste una base del sottospazio $E'(\mu)\oplus E'(\overline{\mu})$ formata da vettori reali.

Sia $\{z_1,\ldots,z_t\}$ una base di Jordan di $E'(\mu)$. Per l'osservazione 3, sappiamo che $\{\overline{z_1},\ldots,\overline{z_t}\}$ è una base di Jordan di $E'(\overline{\mu})$. In particolare $\dim(E'(\mu)\oplus E'(\overline{\mu}))=2t$. Proviamo che i vettori

$$\Re e\, z_1, \Im m\, z_1, \ldots, \Re e\, z_t, \Im m\, z_t$$

sono una base (di vettori reali) di $E'(\mu)\oplus E'(\overline{\mu})$.

Poniamo $x_i=\Re e\, z_i$ e $y_i=\Im m\, z_i$. Poiché $x_i=(z_i+\overline{z_i})/2$ e $y_i=(z_i-\overline{z_i})/2i$, è evidente che i vettori $x_1,y_1,\ldots,x_t,y_t$ appartengono a $E'(\mu)\oplus E'(\overline{\mu})$ e ne sono generatori. Essendo $2t$, essi sono una base di $E'(\mu)\oplus E'(\overline{\mu})$.

Vediamo come si scrive la matrice associata ad $A|_{E'(\mu)\oplus E'(\overline{\mu})}$ rispetto alla base trovata.

Se $Az_i=\mu z_i$, allora

$$Ax_i=A\frac{z_i+\overline{z}_i}{2}=\frac{\mu z_i+\overline{\mu}\,\overline{z}_i}{2}=\Re e\,(\mu z_i)=(\Re e\,\mu)x_i-(\Im m\,\mu)y_i$$
$$Ay_i=A\frac{z_i-\overline{z}_i}{2i}=\frac{\mu z_i-\overline{\mu}\,\overline{z}_i}{2i}=\Im m\,(\mu z_i)=(\Im m\,\mu)x_i+(\Re e\,\mu)y_i\,.$$

Se invece $Az_i=\mu z_i+z_{i-1}$, allora

$$\begin{aligned}Ax_i&=A\frac{z_i+\overline{z}_i}{2}=\frac{\mu z_i+z_{i-1}+\overline{\mu}\,\overline{z}_i+\overline{z_{i-1}}}{2}=\\&=\Re e\,(\mu z_i)+\Re e\, z_{i-1}=(\Re e\,\mu)x_i-(\Im m\,\mu)y_i+x_{i-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Ay_i&=A\frac{z_i-\overline{z}_i}{2i}=\frac{\mu z_i+z_{i-1}-\overline{\mu}\,\overline{z}_i-\overline{z_{i-1}}}{2i}=\\&=\Im m\,(\mu z_i)+\Im m\, z_{i-1}=(\Im m\,\mu)x_i+(\Re e\,\mu)y_i+y_{i-1}\,.\end{aligned}$$

Di conseguenza, se la matrice associata a $A|_{E'(\mu)}$ rispetto alla base $\{z_1,\ldots,z_t\}$ era del tipo

$$\begin{pmatrix}\boxed{J_1}&&\\&\ddots&\\&&\boxed{J_s}\end{pmatrix}$$

con J_i blocco di Jordan relativo a μ di ordine k_i, la matrice associata a $A|_{E'(\mu)\oplus E'(\overline{\mu})}$ rispetto alla base $\{x_1,y_1,\ldots,x_t,y_t\}$ è una matrice $2t\times 2t$ della forma

$$\begin{pmatrix}\boxed{\widetilde{J}_1}&&\\&\ddots&\\&&\boxed{\widetilde{J}_s}\end{pmatrix}$$

dove $\widetilde{J}_i$ è un blocco di ordine $2k_i\times 2k_i$ del tipo

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c}H_\mu&I&&\\\hline&H_\mu&\ddots&\\\hline&&\ddots&I\\\hline&&&H_\mu\end{array}\right)\qquad\text{con}\qquad I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\qquad H_\mu=\begin{pmatrix}\Re e\,\mu&\Im m\,\mu\\-\Im m\,\mu&\Re e\,\mu\end{pmatrix}.$$

Conclusione. Denotiamo con $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ gli autovalori reali della matrice A e con $\mu_1,\ldots,\mu_s,\overline{\mu}_1,\ldots,\overline{\mu}_s$ quelli complessi; si ha allora la decomposizione in somma diretta

$$\mathbf{C}^n=E'(\lambda_1)\oplus\cdots\oplus E'(\lambda_k)\oplus E'(\mu_1)\oplus E'(\overline{\mu}_1)\oplus\cdots\oplus E'(\mu_s)\oplus E'(\overline{\mu}_s)\,.$$

Scegliendo una base reale in ogni $E'(\lambda_i)$ come visto nell'osservazione 2 e una base reale in ogni $E'(\mu_j)\oplus E'(\overline{\mu}_j)$ come visto nell'osservazione 4, si ottiene una base di $\mathbf{R}^n$ rispetto alla quale la matrice associata ad A è del tipo richiesto nella tesi.

Resta ancora da evitare una ambiguità: per ogni coppia di autovalori complessi coniugati $a+ib$ e $a-ib$, chi è μ e chi è $\overline{\mu}$? Osserviamo infatti che $H_\mu\neq H_{\overline{\mu}}$. Conveniamo allora, ad esempio, di chiedere che $\Im m\,\mu>0$: questo determina univocamente la forma di Jordan reale di A, ovviamente a meno di permutazione dei blocchi. □

Soluzione dell'Esercizio 52. Gli autovalori di A verificano la relazione $\lambda^6=1$, quindi sono da ricercarsi fra le radici seste di 1. Se gli autovalori sono reali, si hanno le seguenti possibilità:

(1) $\lambda_1=\lambda_2=1$. In tal caso la forma di Jordan è necessariamente

$$J_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

In effetti l'altra forma teoricamente possibile, e cioè il blocco $J_{1,2}$ di ordine 2, è da scartare perché $(J_{1,2})^6 \neq I$.

(2) $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. Analogamente al caso precedente si ottiene che la forma di Jordan è

$$J_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(3) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$. In questo caso evidentemente la forma di Jordan è

$$J_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Osserviamo dunque che, se gli autovalori di A sono reali, A risulta diagonalizzabile; questo fatto è vero non appena esiste $p \in \mathbb{N}$ tale che $A^p = id$ (cfr. esercizio 98).

Se gli autovalori di A sono complessi (necessariamente complessi coniugati), A non può essere simile ad una matrice di Jordan in $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Cerchiamo allora la forma di Jordan reale di A, cioè la matrice

$$\begin{pmatrix} \Re e\, \lambda_1 & \Im m\, \lambda_1 \\ -\Im m\, \lambda_1 & \Re e\, \lambda_1 \end{pmatrix},$$

dove λ_1 è, tra i due autovalori complessi coniugati di A, quello con parte immaginaria positiva (cfr. esercizio 51). Si hanno allora le ulteriori seguenti possibilità:

(4) $\lambda_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Otteniamo così la forma di Jordan reale

$$J_4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

che rappresenta la rotazione in senso orario di $\pi/3$ attorno all'origine.

(1) $\lambda_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Si ha allora la forma reale

$$J_5 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

che rappresenta la rotazione in senso orario di $2\pi/3$.

Concludiamo con alcune considerazioni sul polinomio minimo $m(t)$ di A. Poiché $A^6 = id$, A è radice del polinomio $p(t) = t^6 - 1$; dunque il polinomio minimo di A divide $p(t)$, che in $\mathbb{R}[t]$ si fattorizza come

$$p(t) = (t-1)(t+1)(t^2+t+1)(t^2-t+1).$$

Visto che il grado di $m(t)$ è ≤ 2, si hanno le seguenti possibilità:

(1) $m_1(t) = t - 1$
(2) $m_2(t) = t + 1$
(3) $m_3(t) = (t-1)(t+1)$
(4) $m_4(t) = t^2 - t + 1$
(5) $m_5(t) = t^2 + t + 1$

che corrispondono ordinatamente alle 5 possibili forme canoniche trovate sopra. □

Soluzione dell'Esercizio 53. La matrice A, avendo tutti gli autovalori uguali ad 1, è chiaramente invertibile. Inoltre essa verifica la relazione $A^k(I - A) = 0$, da cui, moltiplicando a sinistra per A^{-k}, si ottiene che $I - A = 0$, e cioè la tesi.

Si può anche ragionare nel modo seguente. La forma di Jordan di A è formata da blocchi relativi all'autovalore 1 ed ogni blocco J deve verificare la relazione $J^k = J^{k+1}$. Ma (cfr. soluzione dell'esercizio 47)

$$J^k = \begin{pmatrix} 1 & k & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & k \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

e dunque $J^k = J^{k+1}$ se e solo se il blocco J è di ordine 1; allora la forma di Jordan di A è I, da cui $A = I$. □

Soluzione dell'Esercizio 54. Osserviamo innanzitutto che

$$(f,f) = \sum_{i=1}^{k} \left(f(v_i)\right)^2 \geq 0 \qquad \forall f \in V^*$$

quindi il prodotto scalare è semidefinito positivo. Detti allora ν_+ e ν_0 gli indici di positività e nullità di $\langle\ ,\ \rangle$, si ha $\nu_+ + \nu_0 = n$, dove $n = \dim V$. Dato che il prodotto scalare è semidefinito positivo,

$$(V^*)^\perp = \{f \in V^* \mid (f,f) = 0\}$$

(cfr. esercizio 31). D'altra parte,

$$\langle f, f\rangle = 0 \iff \sum_{i=1}^{k}\big(f(v_i)\big)^2 = 0 \iff f(v_i) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, k$$

e quindi $(V^{\wedge})^{\perp} = \mathrm{Ann}\big(\mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k)\big)$. Ne consegue che

$$\nu_0 = \dim \mathrm{Ann}\big(\mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k)\big) = n - \dim \mathrm{Span}\langle v_1, \dots, v_k\rangle$$

e quindi $\nu_+ = n - \nu_0 = \dim \mathrm{Span}\langle v_1, \dots, v_k\rangle$.

Si osservi in particolare che il prodotto scalare è definito positivo se e solo se $\{v_1, \dots, v_k\}$ è un sistema di generatori per V. □

Soluzione dell'Esercizio 55. Se A e B sono simili, allora rappresentano la stessa applicazione lineare rispetto a due diverse basi, quindi hanno gli stessi autovalori con la stessa molteplicità algebrica e geometrica.

Proviamo ora ($\Longleftarrow$). Dall'ipotesi segue che, se una delle due matrici è diagonalizzabile, anche l'altra lo è ed entrambe sono simili alla stessa matrice diagonale, per cui A e B sono simili fra loro. Il caso in cui A e B sono entrambe non diagonalizzabili si presenta evidentemente quando A e B hanno un autovalore λ di molteplicità algebrica 2 e $\dim E(\lambda, A) = \dim E(\lambda, B) = 1$. Ma allora A e B hanno la stessa forma di Jordan

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

e quindi di nuovo A e B sono simili.

Nota. Con ragionamenti analoghi, si può vedere che l'esercizio resta valido anche per matrici 3×3. Invece non è più valido per matrici 4×4: ad esempio

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

hanno entrambe l'autovalore 0 di molteplicità algebrica 4 e $\dim E(0, A) = \dim E(0, B) = 2$, ma A non è simile a B. Il motivo è che $\dim E(\lambda, A)$ rappresenta il numero dei blocchi di Jordan relativi all'autovalore λ nella forma di Jordan di A. Per matrici di ordine abbastanza basso (≤ 3) la condizione $\dim E(\lambda, A) = \dim E(\lambda, B)$ è sufficiente per garantire che A e B abbiano la stessa forma di Jordan. Se l'ordine delle matrici è ≥ 4, ciò non è più vero, come mostra l'esempio precedente.

Nota. L'esercizio vale anche per matrici reali.

La cosa è evidente nel caso che A e B abbiano gli autovalori reali, perché la dimostrazione data può essere usata in ambito reale. In realtà non è necessario supporre che A e B abbiano autovalori reali. Basta infatti utilizzare il fatto che due matrici reali sono simili sui reali se e solo se sono simili sui complessi (cfr. esercizio 88), che ci permette di trattare A e B come matrici complesse e quindi utilizzare la dimostrazione precedente. □

Soluzione dell'Esercizio 56. L'insieme $\mathcal{F}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathrm{Hom}(V, W)$ in quanto è il nucleo dell'applicazione lineare $L : \mathrm{Hom}(V, W) \to \mathrm{Hom}(U, W)$ definita da $L(f) = f \circ g$.

Per calcolarne la dimensione, osserviamo che la condizione $f \circ g = 0$ equivale a $\mathrm{Im}\, g \subseteq \mathrm{Ker}\, f$ e, per definizione di rango di una matrice, $\dim(\mathrm{Im}\, g) = \mathrm{rk}\, g = r$. Scegliamo allora una base $\mathcal{B}$ di V in modo che i primi r vettori di $\mathcal{B}$ siano una base di $\mathrm{Im}\, g$, ed una arbitraria base $\mathcal{C}$ di W. Rispetto a tale scelta di basi è chiaro che

$$f \in \mathcal{F} \iff \text{le prime } r \text{ colonne di } \mathcal{M}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f) \text{ sono nulle}$$

quindi $\mathcal{F}$ è isomorfo allo spazio $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ costituito dalle matrici con le prime r colonne nulle e quindi

$$\dim \mathcal{F} = \dim \mathcal{F} = m(n - r)\,.$$

Si veda la soluzione dell'esercizio 7, di cui questo esercizio è sostanzialmente un caso particolare. Si confronti anche con l'esercizio 20. □

Soluzione dell'Esercizio 57. (1) La verifica che $E(A, B)$ è un sottospazio vettoriale non presenta difficoltà.

(2) Costruiamo un isomorfismo $L : E(A, B) \to E(A_1, B_1)$.

Per ipotesi esistono due matrici invertibili N e M tali che

$$A = N^{-1} A_1 N \qquad B = M^{-1} B_1 M\,.$$

Se $X \in E(A, B)$, cioè $AX = XB$, dalle uguaglianze precedenti si ricava $(N^{-1}A_1N)X = X(M^{-1}B_1M)$ e quindi $A_1NXM^{-1} = NXM^{-1}B_1$. Ciò implica che la matrice NXM^{-1} sta in $E(A_1, B_1)$.

Definisco allora $L(X) = NXM^{-1}$; essendo N ed M invertibili, è facile verificare che L è un isomorfismo. □

Soluzione dell'Esercizio 58. Dimostriamo innanzitutto il seguente fatto:

> *Se A è una matrice antisimmetrica reale e λ è un suo autovalore, allora λ è nullo oppure è immaginario puro.*

Siano $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ e $z = x + iy \in \mathbb{C}^n$ (con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ed $x, y \in \mathbb{R}^n$) un autovalore ed un corrispondente autovettore di A. Da $Az = \lambda z$ si ottiene immediatamente

$$Ax + iAy = \alpha x - \beta y + i(\alpha y + \beta x)$$

e dato che A è reale ciò equivale a dire

$$(1) \qquad \begin{cases} Ax = \alpha x - \beta y \\ Ay = \alpha y + \beta x . \end{cases}$$

Ricordiamo ora che se A è una matrice antisimmetrica e $\langle\ ,\ \rangle$ è il prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^n$, si ha $\langle Av, v\rangle = 0$ per ogni $v \in \mathbb{R}^n$. In particolare $\langle Ax, x\rangle = \langle Ay, y\rangle = 0$, quindi, moltiplicando scalarmente le due equazioni di (1) rispettivamente per x e y, si ottiene il sistema

$$(2) \qquad \begin{cases} \alpha\langle x, x\rangle - \beta\langle x, y\rangle = 0 \\ \alpha\langle y, y\rangle + \beta\langle x, y\rangle = 0 . \end{cases}$$

Sommando le due equazioni così ottenute si ottiene $\alpha\big(\langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle\big) = 0$ da cui $\alpha = 0$ (dato che, essendo un autovettore, $z = x + iy \neq 0$). Di conseguenza λ è nullo o immaginario puro.

Fra l'altro da (2) segue immediatamente che

> *Se A è una matrice antisimmetrica e $z = x + iy$ è un suo autovettore relativo all'autovalore $i\beta \neq 0$, allora $\langle x, y\rangle = 0$.*

Osserviamo infine che

> *Se A è una matrice antisimmetrica e $W \subset \mathbb{R}^n$ è un sottospazio invariante per A, allora anche $W^\perp$ (ortogonale rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^n$) è invariante per A.*

La dimostrazione di questo fatto è identica a quella del fatto analogo che vale per le matrici simmetriche (dimostrarlo!).

Abbiamo ora tutti gli strumenti per dimostrare la tesi dell'esercizio. Procediamo per induzione sull'ordine n della matrice.

Se $n = 1$ la matrice A è necessariamente la matrice nulla, quindi la tesi è banale.

Supponiamo ora $n > 1$ e che la tesi sia vera per ogni matrice di ordine m con $m < n$.

Abbiamo due casi a seconda che A abbia solo l'autovalore nullo oppure no.

Primo caso: A ha solo l'autovalore 0. In questo caso sia $v \in \operatorname{Ker} A$ di norma 1 e si completi $\{v\}$ ad una base ortonormale. Dato che $\operatorname{Span}(v)$ è invariante, tale è anche il suo ortogonale, pertanto in tale base la matrice assume la forma

$$N^{-1}AN = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

con N matrice ortogonale (corrisponde ad un cambiamento di base tra due basi ortonormali). Da ciò si ricava immediatamente che anche B è antisimmetrica e quindi si può applicare ad essa l'ipotesi di induzione (in che modo?), arrivando a dimostrare che $A = 0$.

Secondo caso: A non ha solo l'autovalore 0. In questo caso A ammette un autovalore immaginario puro $ia_1 \neq 0$; sia $z = x + iy$ un autovettore complesso corrispondente e sia $V_1 = \operatorname{Span}(x, y)$. Le (1) in questo caso diventano

$$(3) \qquad \begin{cases} Ax = -a_1 y \\ Ay = a_1 x . \end{cases}$$

Da ciò segue immediatamente che x e y sono entrambi diversi da 0 (se uno fosse nullo lo sarebbe anche l'altro); in più si è già osservato che $\langle x, y\rangle = 0$, quindi $\dim V_1 = 2$.

Inoltre si ha che $\|x\| = \|y\|$; infatti moltiplicando scalarmente le due equazioni di (3) rispettivamente per y ed x si ha

$$\begin{cases} \langle Ax, y\rangle = -a_1\,\|y\|^2 \\ \langle x, Ay\rangle = a_1\,\|x\|^2 . \end{cases}$$

Dato che A è antisimmetrica, $\langle Ax, y\rangle = -\langle x, Ay\rangle$, e quindi le norme di x e di y coincidono. Ma allora normalizzando i vettori x e y le (3) continuano a valere.

Dalle (3) segue che V_1 è invariante e quindi tale è anche il suo ortogonale. Se completiamo il sistema di vettori ortonormali $\{x, y\}$ ad una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$, in tale base la matrice A assume la forma

$$N^{-1}AN = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & a_1 & \\ -a_1 & 0 & 0 \\ \hline & & \\ 0 & & B \end{array}\right).$$

Come nell'altro caso N è ortogonale, quindi B è antisimmetrica; si conclude allora usando l'ipotesi di induzione.

Nota. Dalla tesi dell'esercizio si deduce che ogni matrice antisimmetrica ha rango pari e determinante ≥ 0.

Nota. Concludiamo con un paio di osservazioni. La prima è che l'esercizio può essere evidentemente rienunciato in forma astratta, nel modo seguente:

> *Sia V uno spazio vettoriale reale dotato di un prodotto scalare definito positivo $\langle\ ,\ \rangle$ e sia $f : V \to V$ un'applicazione lineare antisimmetrica (i.e. $\langle f(v), w\rangle = -\langle v, f(w)\rangle\ \forall v, w \in V$, o equivalentemente $f^* = -f$). Allora esiste una base ortonormale di V in cui la matrice associata ad f assume la forma prevista nella tesi dell'esercizio.*

La seconda osservazione riguarda invece le forme bilineari antisimmetriche; infatti, se si interpreta A come la matrice associata ad una tale forma b su uno spazio vettoriale reale V (rispetto ad una qualche base), il fatto che la matrice M sia ortogonale (ossia $M^{-1} = {}^tM$) permette di interpretare la relazione tra matrici della tesi come una relazione di cambiamento di base per la matrice associata a b. Se ne può quindi dedurre che esiste una base di V rispetto a cui la matrice associata a b ha la forma indicata nella tesi. A questo punto, a meno di moltiplicare i vettori della base per costanti opportune, si ottiene una base rispetto a cui la matrice associata allo forma bilineare b è del tipo

$$B = \begin{pmatrix} \boxed{H} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \boxed{H} & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{con } H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Chiaramente la relazione che lega le matrici A e B è del tipo $B = {}^tNAN$ con N invertibile ma non necessariamente ortogonale.

Si osservi infine che, usando questa strada per dimostrare l'esistenza di una tale base per la forma bilineare antisimmetrica b, si sfrutta in maniera essenziale il fatto che lo spazio sia definito sul campo reale, cosa che in realtà non è necessaria (cfr. esercizio 64). □

Soluzione dell'Esercizio 59. (1) Le matrici A e B rappresentano due applicazioni lineari $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$; fra l'altro si ha

$$\operatorname{rk} AB = \operatorname{rk} A|_{\operatorname{Im} B} = \operatorname{rk} B - \dim(\operatorname{Ker} A \cap \operatorname{Im} B).$$

Di conseguenza

$$\operatorname{rk} A = n - \dim \operatorname{Ker} A \le n - \dim(\operatorname{Ker} A \cap \operatorname{Im} B) = n + \operatorname{rk} AB - \operatorname{rk} B$$

da cui segue la (1).

(2) Sia $n = 2k+1$. Per la (1), sappiamo che $\operatorname{rk} A + \operatorname{rk} B \le 2k+1$ e quindi o $\operatorname{rk} A \le k$ o $\operatorname{rk} B \le k$. Se, ad esempio, $\operatorname{rk} A \le k$ (e quindi anche $\operatorname{rk} {}^tA \le k$), si ha che

$$\operatorname{rk}(A + {}^tA) \le \operatorname{rk} A + \operatorname{rk} {}^tA \le 2k < 2k+1$$

per cui $A + {}^tA$ è singolare. □

Soluzione dell'Esercizio 60. Dimostriamo il punto (1). Dato che f è autoaggiunta, b è un prodotto scalare ed il suo indice di nullità è dato da $\dim V^\perp$, essendo $^\perp$ inteso rispetto a b. Ma

$$\begin{aligned} V^\perp &= \{u \in V \mid b(u,v) = 0 \quad \forall v \in V\} = \\ &= \{u \in V \mid \langle f(u), v\rangle = 0 \quad \forall v \in V\} \end{aligned}$$

e dato che $\langle\ ,\ \rangle$ è non degenere, $\langle f(u), v\rangle = 0\ \forall v \in V$ se e solo se $f(u) = 0$, ossia $V^\perp = \operatorname{Ker} f$.

Per quanto riguarda il punto (2) dell'esercizio, per il teorema spettrale esiste una base ortonormale rispetto a $\langle\ ,\ \rangle$ costituita da autovettori per f. Sia questa $\{v_1, \dots, v_n\}$, e siano $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ i rispettivi autovalori. Allora

$$b(v_i, v_j) = \langle f(v_i), v_j\rangle = \langle \lambda_i v_i, v_j\rangle = \lambda_i \langle v_i, v_j\rangle = \lambda_i \delta_{ij}.$$

Quindi $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base ortogonale per b e quindi la tesi segue dal teorema di Sylvester. □

Soluzione dell'Esercizio 61. Gli autovalori di f verificano la relazione $\lambda^2 = \lambda^3$, per cui possono valere solo 0 o 1. Si ha così che $V = E'(0) \oplus E'(1)$. La matrice associata a f rispetto ad una base di Jordan è allora del tipo

$$\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right),$$

dove A ha solo l'autovalore 0 e B ha solo l'autovalore 1.

Poiché $f^2 = f^3$, l'indice di nilpotenza di $f|_{E'(0)}$ è al massimo 2, per cui $A^2 = 0$. D'altra parte anche B verifica la relazione $B^2 = B^3$ e quindi, essendo B invertibile, $B = I$.

Un altro modo di provare la tesi è ricorrendo al polinomio minimo di f. Poiché f è radice del polinomio $g(t) = t^2 - t^3 = t^2(1-t)$, il polinomio minimo di f (che divide $g(t)$) può contenere il fattore $t-1$ al più con molteplicità 1, per cui 1 è l'ordine massimo di un blocco di Jordan relativo all'autovalore 1. □

Soluzione dell'Esercizio 62. Supponiamo che esistano nello spazio V vettori $v_1, \dots, v_{n-1}$ tali che l'insieme $\mathcal{B} = \{v_0, \dots, v_{n-1}\}$ sia una base di V ortogonale rispetto a $\langle\ ,\ \rangle$; allora, per definizione di base ortogonale, $\langle v_0, v_i\rangle = 0$

per ogni $i = 1, \dots, n-1$. Dato che $\langle v_0, v_0 \rangle = 0$, il vettore v_0 è ortogonale a tutti i vettori di $\mathcal{B}$ e quindi è ortogonale a tutti i vettori di V.

Viceversa, sia U un supplementare di $\mathrm{Span}(v_0)$, e sia $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ una base di U ortogonale rispetto a $\langle\ ,\ \rangle|_U$. Dato che v_0 è ortogonale a tutto V, in particolare è ortogonale ai vettori $v_1, \dots, v_{n-1}$, e quindi $\{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$ è una base ortogonale di V. □

Soluzione dell'Esercizio 63. La prima uguaglianza è facile da provare e senza problemi si verifica anche l'inclusione $\mathrm{Hom}(W, V_1) + \mathrm{Hom}(W, V_2) \subseteq \mathrm{Hom}(W, V_1 + V_2)$. Proviamo dunque che $\mathrm{Hom}(W, V_1 + V_2) \subseteq \mathrm{Hom}(W, V_1) + \mathrm{Hom}(W, V_2)$.

Sia $f : W \to V_1 + V_2$ lineare e sia $y = f(x)$ con $x \in W$.

Se avessimo $V_1 \cap V_2 = \{0\}$, il vettore y potrebbe essere scritto in modo unico come $y = y_1 + y_2$, con $y_1 \in V_1$ e $y_2 \in V_2$. In tal caso si potrebbero definire due applicazioni lineari $g_1 : W \to V_1$ e $g_2 : W \to V_2$ in modo tale che $f = g_1 + g_2$ (basta infatti porre $g_1(x) = y_1$ e $g_2(x) = y_2$); di conseguenza si avrebbe che $f \in \mathrm{Hom}(W, V_1) + \mathrm{Hom}(W, V_2)$.

Possiamo però ridurci alla situazione appena considerata, infatti è possibile trovare un sottospazio vettoriale Z_2 di V_2 tale che $V_1 + V_2 = V_1 \oplus Z_2$ (perché?). Poiché $V_1 \cap Z_2 = \{0\}$, per quanto visto sopra si ha

$$\mathrm{Hom}(W, V_1 + V_2) \subseteq \mathrm{Hom}(W, V_1) + \mathrm{Hom}(W, Z_2),$$

ma d'altra parte $\mathrm{Hom}(W, Z_2) \subseteq \mathrm{Hom}(W, V_2)$ visto che $Z_2 \subseteq V_2$. □

Soluzione dell'Esercizio 64. Procediamo per induzione su $n = \dim V$. Se $n = 1$, la forma b è necessariamente nulla, e allora la tesi vale banalmente.

Sia quindi $n > 1$ e supponiamo la tesi vera per ogni $m < n$. Se b è la forma identicamente nulla, non c'è nulla da dimostrare; supponiamo dunque che esistano $v_1, v_2 \in V$ tali che $b(v_1, v_2) \neq 0$; anzi, a meno di sostituire v_1 con $v_1 / b(v_1, v_2)$, possiamo supporre che $b(v_1, v_2) = 1$.

Se v_1 e v_2 fossero linearmente dipendenti, allora $b(v_1, v_2)$ sarebbe 0 (perché b è antisimmetrica); ne segue che v_1, v_2 sono linearmente indipendenti.

Sia $V_1 = \mathrm{Span}(v_1, v_2)$; la matrice associata a $b|_{V_1}$ rispetto alla base $\{v_1, v_2\}$ di V_1 è la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha determinante diverso da 0, per cui $b|_{V_1}$ è non degenere. Da ciò segue che

$$V = V_1 \oplus V_1^{\perp} \tag{1}$$

(basta ragionare come nell'esercizio 21, dove è considerato il caso simmetrico). Ma allora possiamo applicare l'ipotesi di induzione alla forma bilineare antisimmetrica $b|_{V_1^{\perp}}$ per trovare una base $\{v_3, \dots, v_n\}$ di $V_1^{\perp}$ tale che la matrice B_1 associata alla forma $b|_{V_1^{\perp}}$ sia del tipo previsto nella tesi.

Per (1), l'insieme $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base di V ed in tale base la matrice associata a b è data da

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \\ -1 & 0 & 0 \\ \hline & & \\ 0 & & B_1 \end{array}\right)$$

che è quindi del tipo richiesto. □

Soluzione dell'Esercizio 65. Fissiamo una base $\mathcal{B}$ in V e la sua base duale $\mathcal{B}^*$ in V^*. Siano $a_{i1}, \dots, a_{in}$ le coordinate di f_i rispetto alla base $\mathcal{B}^*$. Detta A la matrice $(a_{i,j})$, il sottospazio $\bigcap \mathrm{Ker}\, f_i$ è (tramite isomorfismo) il sottospazio delle soluzioni del sistema lineare $AX = 0$.

La condizione $\bigcap \mathrm{Ker}\, f_i \subseteq \mathrm{Ker}\, g$ implica che $(\bigcap \mathrm{Ker}\, f_i) \cap \mathrm{Ker}\, g = \bigcap \mathrm{Ker}\, f_i$. Ciò significa che se aggiungiamo alle equazioni del sistema $AX = 0$ l'equazione relativa a g, l'insieme delle soluzioni non cambia; per il teorema di Rouché-Capelli questo equivale a dire che la matrice A', ottenuta da A con l'aggiunta della riga contenente le coordinate di g, ha la stessa caratteristica di A. Dunque la riga aggiunta è combinazione lineare delle righe di A e quindi la tesi è provata.

Un altro modo per dimostrare la tesi è il seguente.

Poiché l'implicazione ($\Longrightarrow$) è ovvia, basta provare ($\Longleftarrow$). Ricordiamo che, per ogni $f \in V^*$,

$$\mathrm{Ann}(\mathrm{Span}(f)) = \mathrm{Ker}\, f$$

(dove abbiamo identificato V con V^{**} tramite l'isomorfismo canonico $\Phi_V : V \to V^{**}$). Pertanto l'ipotesi $\bigcap \mathrm{Ker}\, f_i \subseteq \mathrm{Ker}\, g$ può essere scritta

$$\bigcap_{i=1}^{k} \mathrm{Ann}(\mathrm{Span}(f_i)) \subseteq \mathrm{Ann}(\mathrm{Span}(g)) .$$

Usando il fatto che $\mathrm{Ann}\, A \cap \mathrm{Ann}\, B = \mathrm{Ann}(A + B)$ (cfr. esercizio D), si ottiene

$$\bigcap_{i=1}^{k} \mathrm{Ann}(\mathrm{Span}(f_i)) = \mathrm{Ann}(\mathrm{Span}(f_1) + \dots + \mathrm{Span}(f_k)) =$$
$$= \mathrm{Ann}(\mathrm{Span}(f_1, \dots, f_k))$$

e dunque l'ipotesi diventa

$$\mathrm{Ann}(\mathrm{Span}(f_1,\dots,f_k)) \subseteq \mathrm{Ann}(\mathrm{Span}(g)) .$$

Passando all'annullatore (cfr. esercizio C), si ha $\mathrm{Span}(g) \subseteq \mathrm{Span}(f_1,\dots,f_k)$, da cui la tesi. □

Soluzione dell'Esercizio 66. Il modo di procedere è del tutto analogo a quello dell'esercizio 7.

Fissiamo una base $\mathcal{B} = \{u_1,\dots,u_n,w_1,\dots,w_m\}$ di V, essendo $\{u_1,\dots,u_n\}$ e $\{w_1,\dots,w_m\}$ basi di U e W rispettivamente. È evidente che

$$f \in \mathcal{F}_1 \iff \begin{cases} f(u_i) \in \mathrm{Span}(w_1,\dots,w_m) & \forall i=1,\dots,n \\ f(w_j) \in \mathrm{Span}(u_1,\dots,u_n) & \forall j=1,\dots,m \end{cases}$$

$$f \in \mathcal{F}_2 \iff \begin{cases} f(u_i) \in \mathrm{Span}(u_1,\dots,u_n) & \forall i=1,\dots,n \\ f(w_j) \in \mathrm{Span}(w_1,\dots,w_m) & \forall j=1,\dots,m \end{cases}$$

In termini delle matrici associate rispetto alla base $\mathcal{B}$ si ha quindi

(1) $$f \in \mathcal{F}_1 \iff \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & A_1 \\ \hline B_1 & 0 \end{array}\right)$$

(2) $$f \in \mathcal{F}_2 \iff \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \left(\begin{array}{c|c} A_2 & 0 \\ \hline 0 & B_2 \end{array}\right)$$

dove A_1, B_1, A_2, B_2 sono matrici arbitrarie rispettivamente di ordine $n \times m$, $m \times n$, $n \times n$, $m \times m$. Da questa caratterizzazione segue allora immediatamente che, detti $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ i sottospazi di matrici del tipo (1) e (2) rispettivamente, si ha

$$\dim \mathcal{F}_1 = \dim \mathcal{F}_1 = 2nm \quad \text{e} \quad \dim \mathcal{F}_2 = \dim \mathcal{F}_2 = n^2 + m^2 .$$

Osserviamo che una matrice $X = (x_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n+m}(\mathbf{K})$ sta in $\mathcal{F}_1$ se e solo se $x_{i,j} = 0$ per ogni $(i,j) \in \{1,\dots,n\} \times \{1,\dots,n\}$ e per ogni $(i,j) \in \{n+1,\dots,n+m\} \times \{n+1,\dots,n+m\}$. Pertanto tali $x_{i,j} = 0$ possono essere interpretate come equazioni di $\mathcal{F}_1$, pensato come sottospazio di $\mathbf{K}^{(n+m)^2}$.

Per provare (2), dato che

$$\dim \mathcal{F}_1 + \dim \mathcal{F}_2 = 2nm + n^2 + m^2 = (n+m)^2 = \dim \mathrm{Hom}(V,V),$$

basta mostrare che $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 = \{0\}$. Ma se $f \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$, allora $f(U) \subseteq U \cap W = \{0\}$ ed $f(W) \subseteq U \cap W = \{0\}$, quindi $f|_U = 0$ e $f|_W = 0$ da cui $f = 0$.

La dimostrazione del punto (2) si poteva dare anche ragionando sulle matrici, osservando che evidentemente $\mathcal{M}_{n+m}(\mathbf{K}) = \mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2$, da cui segue la tesi.

Si provi a calcolare $\dim \mathcal{F}_1$ e $\dim \mathcal{F}_2$ nel caso in cui $V = U + W$ e $\dim(U \cap W) = k > 0$. □

Soluzione dell'Esercizio 67. Consideriamo una base $\mathcal{S}$ di $W_1 \cap W_2$; esistono due insiemi di vettori $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ tali che $\mathcal{S} \cup \mathcal{S}_1$ è una base di W_1 e $\mathcal{S} \cup \mathcal{S}_2$ è una base di W_2. Allora $\mathcal{B} = \mathcal{S} \cup \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$ è una base di V.

Essendo W_1 e W_2 invarianti per f, anche il sottospazio $W_1 \cap W_2$ lo è, per cui la matrice associata ad f rispetto alla base $\mathcal{B}$ è del tipo

$$M = \left(\begin{array}{c|c|c} A & * & * \\ \hline 0 & B & 0 \\ \hline 0 & 0 & C \end{array}\right) .$$

Il polinomio caratteristico $P_M(t)$ di M è allora dato da $P_A(t)P_B(t)P_C(t)$ (cfr. esercizio 6). Vogliamo provare che tutte le radici di $P_M(t)$ sono reali.

Le matrici associate alle applicazioni $f|_{W_1}$ e $f|_{W_2}$ rispetto alle basi $\mathcal{S} \cup \mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S} \cup \mathcal{S}_2$ sono rispettivamente

$$\left(\begin{array}{c|c} A & * \\ \hline 0 & B \end{array}\right), \qquad \left(\begin{array}{c|c} A & * \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$$

e i relativi polinomi caratteristici sono dunque $P_A(t)P_B(t)$ e $P_A(t)P_C(t)$. Visto che per ipotesi $f|_{W_1}$ e $f|_{W_2}$ hanno solo autovalori reali, i polinomi $P_A(t)$, $P_B(t)$ e $P_C(t)$ hanno solo radici reali; ma allora lo stesso vale per il polinomio prodotto $P_M(t)$. □

Soluzione dell'Esercizio 68. La matrice A, essendo simmetrica, è diagonalizzabile. I suoi autovalori sono numeri reali positivi (poiché A è definita positiva) e radici p-esime dell'unità (poiché $A^p = I$). Se ne deduce che A ha solo l'autovalore 1, quindi A è simile alla matrice identica I, ma allora $A = I$. □

Soluzione dell'Esercizio 69. Sia $\{v_1,\dots,v_n\}$ una base di V. Essendo f iniettiva, i vettori $f(v_1),\dots,f(v_n)$ sono linearmente indipendenti in W, dunque possiamo completarli ad una base

$$\mathcal{S} = \{f(v_1),\dots,f(v_n),w_{n+1},\dots,w_m\}$$

di W.

L'applicazione g è surgettiva, per cui esistono vettori $z_1,\dots,z_n$ di W tali che $g(z_i) = v_i$ per ogni $i = 1,\dots,n$.

Esiste allora un unico endomorfismo $L \in \mathrm{Hom}(W,W)$ tale che

$$\begin{aligned} L(f(v_i)) &= z_i & i &= 1,\dots,n \\ L(w_j) &= 0 & j &= n+1,\dots,m . \end{aligned}$$

Poiché per ogni $i = 1,\dots,n$, si ha $g(L(f(v_i))) = v_i$, allora $g \circ L \circ f$ è l'applicazione identica.

Si osservi che gli $L(w_j)$ possono essere scelti in modo arbitrario. □

Soluzione dell'Esercizio 70. L'implicazione ($\Longleftarrow$) è ovvia, perché, se $g = f \circ L$ e se $x = g(y)$, si ha $x = f(L(y))$, cioè $\operatorname{Im} g \subseteq \operatorname{Im} f$.

Per dimostrare ($\Longrightarrow$) consideriamo una base $\{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$ di E ottenuta estendendo una base $\{v_{k+1}, \dots, v_n\}$ di $\operatorname{Ker} g$ e definiamo L su questa base in modo che $f(L(v_i)) = g(v_i)$ nel modo seguente.

Se $1 \le i \le k$, $g(v_i)$ è un vettore non nullo di $\operatorname{Im} g$; essendo $\operatorname{Im} g \subseteq \operatorname{Im} f$, esiste un vettore $w_i \in F$ tale che $f(w_i) = g(v_i)$. Definiamo allora $L(v_i) = w_i$.

Se $k+1 \le i \le n$, $g(v_i) = 0$ e quindi possiamo definire $L(v_i) = 0$. □

Soluzione dell'Esercizio 71. Dimostriamo che $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$: se $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, allora per ogni $v \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$\langle Av, v \rangle = \langle v, {}^tAv \rangle = \langle v, -Av \rangle = -\langle v, Av \rangle = -\langle Av, v \rangle$$

e quindi $\langle Av, v \rangle = 0$.

Dimostriamo ora che $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Indichiamo con e_i i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^n$. Se $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{F}$, allora per ogni $i, j = 1, \dots, n$ si ha

$$\begin{aligned} 0 &= \langle A(e_i + e_j), e_i + e_j \rangle = \\ &= \langle Ae_i, e_i \rangle + \langle Ae_j, e_j \rangle + \langle Ae_i, e_j \rangle + \langle Ae_j, e_i \rangle = \\ &= \langle Ae_i, e_j \rangle + \langle Ae_j, e_i \rangle = a_{i,j} + a_{j,i} \end{aligned}$$

e quindi A è antisimmetrica. □

Soluzione dell'Esercizio 72. (1) La matrice di una rotazione ha la forma

$$R_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}.$$

Un semplice calcolo (cfr. soluzione dell'esercizio 10) mostra che il suo polinomio caratteristico è dato da $P_{R_\vartheta}(t) = t^2 - 2t\cos\vartheta + 1$, le cui radici sono

$$\cos\vartheta + \sqrt{\cos^2\vartheta - 1} = \cos\vartheta + \sqrt{-\sin^2\vartheta}$$

ossia si hanno i due autovalori

$$\lambda_1 = \cos\vartheta + i\sin\vartheta \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \cos\vartheta - i\sin\vartheta\,.$$

che sono distinti in quanto per ipotesi $\vartheta \ne k\pi$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$.

Cominciamo a calcolare l'autospazio relativo a λ_1. Tale autospazio è dato dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x\cos\vartheta - y\sin\vartheta = (\cos\vartheta + i\sin\vartheta)x \\ x\sin\vartheta + y\cos\vartheta = (\cos\vartheta + i\sin\vartheta)y \end{cases} \iff \begin{cases} (y + ix)\sin\vartheta = 0 \\ (x - iy)\sin\vartheta = 0 \end{cases}$$

e dato che $\sin\vartheta \ne 0$, questo equivale a $y + ix = 0$ e quindi il primo autospazio è dato da

$$V_1 = \operatorname{Span}\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \rangle\,.$$

Rifacendo calcoli analoghi, oppure osservando che una matrice ortogonale è unitaria (i.e. conserva il prodotto hermitiano standard) e quindi gli autospazi relativi ad autovalori diversi sono ortogonali (rispetto al prodotto hermitiano standard), si trova che il secondo autospazio è dato da

$$V_2 = \operatorname{Span}\langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \rangle\,.$$

Questo prova quindi la prima asserzione.

(2) Ricordiamo che se A non è una rotazione, allora ha la forma

$$S_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ \sin\vartheta & -\cos\vartheta \end{pmatrix}.$$

Tale matrice ha autovalori 1 e -1, per cui è diagonalizzabile sui reali (si veda ancora la soluzione dell'esercizio 10), quindi i due autospazi complessi contengono vettori reali. Ma allora, se

$$\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

fosse un autovettore, questo sarebbe un generatore di un autospazio. D'altra parte

$$\operatorname{Span}\langle \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

non contiene vettori reali non nulli, infatti se

$$\begin{pmatrix} i\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

necessariamente $\alpha = 0$ (se una delle due coordinate è reale, l'altra è immaginaria). □

Soluzione dell'Esercizio 73. Chiamiamo

$$\mathcal{F} = \{ f \in \operatorname{Hom}(V, V) \mid b(f(v), w) = 0 \quad \forall v, w \in V \}\,.$$

Si verifica facilmente che $\mathcal{F}$ è un sottospazio vettoriale di $\operatorname{Hom}(V, V)$. Per calcolarne la dimensione, osserviamo che

$$b(f(v), w) = 0 \quad \forall v, w \in V \iff f(v) \in V^\perp \quad \forall v \iff \operatorname{Im} f \subseteq V^\perp\,.$$

Ma allora, usando il risultato dell'esercizio 7, si ha che $\dim \mathcal{F} = nk$. □

Soluzione dell'Esercizio 74. Poiché i vettori $\{v, f(v), f^2(v), \ldots, f^{m-1}(v)\}$ sono m, basta dimostrare che sono linearmente indipendenti.

Consideriamo la combinazione lineare nulla

$$\lambda_0 v + \lambda_1 f(v) + \lambda_2 f^2(v) + \cdots + \lambda_{m-1} f^{m-1}(v) = 0\,. \tag{1}$$

Poiché $f^j(v) = 0$ se $j \geq m$, applicando f^{m-1} a tale relazione otteniamo

$$\lambda_0 f^{m-1}(v) = 0\,.$$

Visto che per ipotesi $f^{m-1}(v) \neq 0$, si deduce che $\lambda_0 = 0$ e quindi la (1) diventa

$$\lambda_1 f(v) + \lambda_2 f^2(v) + \cdots + \lambda_{m-1} f^{m-1}(v) = 0\,.$$

Ripetendo il ragionamento con f^{m-2}, e poi via via con $f^{m-3}, \ldots, f$, si ottiene che tutti i λ_i devono essere nulli. I vettori $\{v, f(v), f^2(v), \ldots, f^{m-1}(v)\}$ sono dunque linearmente indipendenti (si formalizzi questo processo con una induzione). □

Soluzione dell'Esercizio 75. Sia $f \in \operatorname{Im}\delta_b$, quindi esiste $P \in V$, $P = \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n$, tale che $f = b_P$. Ma allora

$$f(x^i) = b_P(x^i) = \begin{cases} \alpha_i & \text{se } i \leq n \\ 0 & \text{se } i > n \end{cases}$$

e quindi $f(x^i) \neq 0$ solo per finiti indici i.

Viceversa sia $f \in V^*$ con la proprietà che $f(x^i) \neq 0$ solo per finiti indici i, e si consideri la scrittura formale $P(x) = \sum_i f(x^i)x^i$. Visto che i coefficienti sono tutti nulli tranne al più un numero finito, P è un polinomio. Per definizione di b, $b_P(x^i) = f(x^i)$, quindi b_P ed f coincidono su una base di V e quindi coincidono.

Nota. Come noto, se V è uno spazio vettoriale di dimensione finita e b è una forma bilineare non degenere su V, allora l'applicazione $\delta_b : V \to V^*$ definita come nell'esercizio è un isomorfismo.

Questo esercizio mostra che quando la dimensione di V è infinita (come nel caso dello spazio vettoriale $\mathbb{R}[x]$), allora tale fatto non è più vero. Si osservi infatti che la forma bilineare b definita nell'esercizio è non degenere, ma l'applicazione δ_b non è surgettiva: ad esempio il funzionale definito da $f(P) = \sum_i \alpha_i$, dove $P = \sum_i \alpha_i x^i$, è tale che $f(x^i) = 1$ per ogni i, e quindi $f \notin \operatorname{Im}\delta_b$. □

Soluzione dell'Esercizio 76. Dalla definizione di L si ha subito che $L(w) = w + f(w)w = (1 + f(w))w$, per cui w è autovettore per L essendo $w \neq 0$ (perché?).

Inoltre si osserva che, se $v \in \operatorname{Ker} f$, allora $L(v) = v$, cioè v è autovettore per L di autovalore 1. Visto che $f(w) \neq 0$, f non è l'applicazione nulla e quindi $\dim \operatorname{Ker} f = n - \dim(\operatorname{Im} f) = n - 1$. Se dunque $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ è una base di $\operatorname{Ker} f$, l'insieme $\{v_1, \ldots, v_{n-1}, w\}$ è una base di V formata da autovettori per L. Questo prova che L è diagonalizzabile. □

Soluzione dell'Esercizio 77. Una implicazione è ovvia. Supponiamo quindi che A sia triangolabile; allora esiste una base di $\mathbb{R}^n$ a ventaglio per A, base che può essere supposta ortonormale (si ricordi che il processo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt conserva i ventagli). Pertanto esiste una matrice $M \in O_n$ tale che

$$T = M^{-1}AM = {}^tMAM,$$

dove T è una matrice triangolare superiore. Osserviamo ora che

$$\begin{aligned} {}^tT &= {}^t({}^tMAM) = {}^tM\,{}^tAM = \\ &= {}^tM(-A)M = -{}^tMAM = -T \end{aligned}$$

ossia T risulta essere una matrice antisimmetrica e triangolare superiore.

L'unica matrice che ha entrambe queste proprietà è la matrice nulla, quindi $T = 0$, e dunque $A = 0$. □

Soluzione dell'Esercizio 78. Osserviamo che il vettore

$$w = (\Delta_1, -\Delta_2, \Delta_3, \ldots, (-1)^{n+1}\Delta_n)$$

è non nullo. Infatti, essendo i vettori v_i linearmente indipendenti, $\operatorname{rk} A = n - 1$ e quindi esiste almeno un minore non degenere di ordine $n - 1$. Dato che i Δ_i sono i determinanti di tutti i possibili minori di ordine $n - 1$ di A, almeno uno di essi è non nullo.

Mostriamo ora che w è ortogonale ai vettori $v_1, \ldots, v_{n-1}$.

Se $v_1 = (v_{1,1}, v_{1,2}, \ldots, v_{1,n})$, si ha che

$$\langle v_1, w\rangle = v_{1,1}\Delta_1 - v_{1,2}\Delta_2 + \cdots + (-1)^{n+1}v_{1,n}\Delta_n\,.$$

Si osserva allora che $\langle v_1, w\rangle$ corrisponde allo sviluppo secondo la prima riga del calcolo del determinante della matrice

$$B_1 = \begin{pmatrix} v_{1,1} & v_{1,2} & \cdots & v_{1,n} \\ \hline & & A & \end{pmatrix}$$

ottenuta aggiungendo ad A, come prima riga, il vettore v_1. Avendo B_1 due righe uguali, $\det B_1 = 0$ e quindi $\langle v_1, w\rangle = 0$. Analogamente si verifica che ogni $\langle v_i, w\rangle$ è nullo e così $w \in (\operatorname{Span}(v_1, \ldots, v_{n-1}))^{\perp}$.

D'altra parte $\langle\ ,\ \rangle$ è non degenere, dunque

$$\dim(\mathrm{Span}(v_1,\dots,v_{n-1}))^{\perp} = n - \dim(\mathrm{Span}(v_1,\dots,v_{n-1})) = \\ = n-(n-1) = 1$$

e quindi w costituisce una base di $(\mathrm{Span}(v_1,\dots,v_{n-1}))^{\perp}$, da cui la tesi. □

Soluzione dell'Esercizio 79. Poiché A è nilpotente, essa ha solo l'autovalore nullo. In più il fatto che $A^{n-1} \neq 0$ garantisce che la successione dei nuclei

$$\{0\} \subsetneq \operatorname{Ker} A \subsetneq \operatorname{Ker} A^2 \subsetneq \cdots$$

si stabilizza solo al passo n e pertanto la forma di Jordan di A è data da un unico blocco di ordine n. Visto che le stesse conclusioni valgono anche per B, le due matrici hanno la stessa forma di Jordan e quindi sono simili. □

Soluzione dell'Esercizio 80. Osserviamo intanto che, essendo $A \neq \lambda I$, esiste $v_1 \in \mathbb{K}^n$ non nullo tale che Av_1 è indipendente da v_1 (si verifichi che se tutti i vettori di $\mathbb{K}^n$ sono autovettori per A, allora $A = \lambda I$). Di conseguenza esiste una base di $\mathbb{K}^n$ del tipo $\{v_1, Av_1, v_3, \dots, v_n\}$ rispetto alla quale la matrice associata ad A è

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 0 & a_2 & \cdots & a_n \\ \hline 1 & & & \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

con $\operatorname{tr} B = \operatorname{tr} A$.

Proviamo l'esercizio per induzione su n. Per $n = 1$ non c'è niente da dimostrare, e per $n = 2$ la matrice associata ad A nella base $\{v_1, Av_1\}$ è del tipo voluto. Se $n \geq 3$, possiamo supporre $B \neq \lambda I$. Se infatti $B = \lambda I$, basta cambiare base: infatti rispetto a $S = \{v_1, Av_1, v_1 + v_3, v_4, \dots, v_n\}$ (perché S è ancora una base di $\mathbb{K}^n$?) la matrice associata ad A ha l'elemento di posto $2,3$ uguale ad 1 in quanto

$$A(v_1 + v_3) = Av_1 + a_3 v_1 + \lambda v_3 = (a_3 - \lambda)v_1 + Av_1 + \lambda(v_1 + v_3)\,.$$

Applicando dunque l'ipotesi induttiva e ricordando che la traccia è un invariante di similitudine, si ottiene facilmente la tesi. □

Soluzione dell'Esercizio 81. Dato che $\dim(\operatorname{Im} f) = k$, allora $\dim(\operatorname{Ker} f) = n - k$. Prendiamo una base $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V tale che $\{v_{k+1}, \dots, v_n\}$ sia una base di $\operatorname{Ker} f$; allora i vettori $f(v_1), \dots, f(v_k)$ costituiscono una base di $\operatorname{Im} f$ (perché?).

Completiamo questa base di $\operatorname{Im} f$ ad una base di V, ossia prendiamo vettori $w_{k+1}, \dots, w_n$ tali che $\mathcal{C} = \{f(v_1), \dots, f(v_k), w_{k+1}, \dots, w_n\}$ sia una base di V e definiamo le applicazioni f_1 ed f_2 come le uniche applicazioni lineari che sulla base $\mathcal{B}$ agiscono nel modo seguente:

$$f_1 : v_i \longmapsto \begin{cases} \frac{1}{2} f(v_i) & \text{se } i = 1, \dots, k \\ w_i & \text{se } i = k+1, \dots, n \end{cases}$$

$$f_2 : v_i \longmapsto \begin{cases} \frac{1}{2} f(v_i) & \text{se } i = 1, \dots, k \\ -w_i & \text{se } i = k+1, \dots, n. \end{cases}$$

Chiaramente le due applicazioni così costruite sono invertibili (portano una base su una base), quindi $\operatorname{Im} f_i = V \supsetneq \operatorname{Im} f$; in più si verifica immediatamente che

$$f_1 + f_2 : v_i \longmapsto \begin{cases} f(v_i) & \text{se } i = 1, \dots, k \\ 0 & \text{se } i = k+1, \dots, n \end{cases}$$

per cui i valori assunti da $f_1 + f_2$ sulla base $\mathcal{B}$ coincidono con quelli di f e quindi $f = f_1 + f_2$. □

Soluzione dell'Esercizio 82. Osserviamo innanzitutto che la tesi è vera se $k = 1$. Infatti prendiamo una base $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V. Dato che tutti i sottospazi di dimensione 1 sono per ipotesi invarianti, i v_i sono autovettori per ogni i. Siano λ_i i rispettivi autovettori, ossia $f(v_i) = \lambda_i v_i$. Consideriamo il vettore $v = v_1 + \cdots + v_n$. Anche v deve essere un autovettore; sia λ il suo autovalore. Allora

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda v_i = \lambda v = f(v) = \sum_{i=1}^{n} f(v_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i,$$

da cui si ricava

$$\sum_{i=1}^{n} (\lambda - \lambda_i) v_i = 0\,.$$

Dato che $\mathcal{B}$ è una base, $\lambda - \lambda_i = 0$ per ogni i, quindi i λ_i sono tutti uguali, che è la nostra tesi.

Per dimostrare la tesi nel caso generale, procediamo per induzione su k. Quanto visto sopra costituisce il passo iniziale.

Sia allora $1 < k < n$ e supponiamo che la tesi sia vera per $k - 1$ (ossia supponiamo che, se tutti i sottospazi di dimensione $k - 1$ sono invarianti per f, allora $f = \lambda \cdot id$ con $\lambda \in \mathbb{K}$); dimostriamo che allora la tesi è vera anche per k.

Chiaramente è sufficiente provare che, se f lascia invariati tutti i sottospazi di dimensione k (con $k < n$), allora lascia invariati anche tutti i sottospazi di dimensione $k-1$ (la tesi segue poi immediatamente dall'ipotesi di induzione).

Per fare questo basta osservare che ogni sottospazio W di dimensione $k-1$ è intersezione di due sottospazi di dimensione k. Infatti, dato che $k < n$, si ha $n - \dim W \geq 2$ e quindi esistono due vettori $w_1, w_2 \notin W$ linearmente indipendenti; posto allora $W_1 = W + \mathrm{Span}(w_1)$ e $W_2 = W + \mathrm{Span}(w_2)$, si ha che $\dim W_1 = \dim W_2 = k$ e che $W = W_1 \cap W_2$.

Visto che f lascia invariati tutti i sottospazi di dimensione k, f lascia invariati W_1 e W_2 e quindi anche W, in quanto l'intersezione di sottospazi invarianti per f è un sottospazio invariante per f. Questo conclude la dimostrazione. □

Soluzione dell'Esercizio 83. Per dimostrare la tesi troviamo esplicitamente una base $\{M_{i,j}\}$ di $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ costituita da matrici diagonalizzabili.

Cominciamo innanzitutto prendendo

$$M_{i,i} = E_{i,i} \qquad \forall i = 1, \ldots, n\,.$$

Chiaramente $M_{i,i} \in \mathcal{D}$ per ogni i (sono tutte diagonali!).

Sia ora

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & n \end{pmatrix}$$

e per ogni $i \neq j$ sia

$$M_{i,j} = D + E_{i,j}\,.$$

Evidentemente il polinomio caratteristico delle matrici $M_{i,j}$ con $i \neq j$ è dato da

$$P(t) = \prod_{i=1}^{n} (i - t)$$

pertanto tali matrici sono diagonalizzabili, avendo n autovalori distinti. Inoltre

$$E_{i,i} = M_{i,i} \qquad \forall i = 1, \ldots, n$$
$$E_{i,j} = M_{i,j} - \sum_{i=1}^{n} i M_{i,i} \qquad \forall i \neq j$$

quindi le matrici $M_{i,j}$ generano la base standard di $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e dunque generano tutto $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Visto che le $M_{i,j}$ sono n^2 esse costituiscono una base di $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. □

Soluzione dell'Esercizio 84. L'idea della dimostrazione è quella di usare la decomposizione di Fitting, relativamente agli autospazi generalizzati relativi agli autovalori reali (cfr. esercizio A).

Procediamo per induzione sul numero k di autovalori reali della matrice A. Se $k = 0$ la tesi è ovvia. Supponiamo allora la tesi vera per matrici con $k \geq 0$ autovalori reali e dimostriamola per le matrici con $k+1$ autovalori reali.

Sia λ un autovalore reale della matrice A e sia $E'(\lambda)$ l'autospazio generalizzato relativo all'autovalore λ. Sappiamo che $E'(\lambda) = \mathrm{Ker}(A - \lambda I)^m$, con $m \in \mathbb{N}$ il più piccolo numero naturale tale che $\mathrm{Ker}(A-\lambda I)^m = \mathrm{Ker}(A - \lambda I)^{m+1}$. Detto $W = \mathrm{Im}(A - \lambda I)^m$, sappiamo (cfr. esercizio A applicato all'endomorfismo $A - \lambda I$) che

(1) $\mathbb{R}^n = E'(\lambda) \oplus W$;
(2) $E'(\lambda)$ e W sono invarianti per A;
(3) A ristretta a $E'(\lambda)$ ha solo l'autovalore λ, mentre ristretta a W non ha l'autovalore λ.

Prendiamo una base di $\mathbb{R}^n$ costituita da una parte di vettori in $E'(\lambda)$ ed una parte in W (ciò è possibile per (1)); per (2) la matrice, rispetto a tale base, ha una struttura a blocchi del tipo

$$A_1 = \left(\begin{array}{c|c} B_1 & 0 \\ \hline 0 & C_1 \end{array}\right),$$

ossia esiste $M_1 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ invertibile e tale che $M_1^{-1} A M_1 = A_1$. Per (3), la matrice B_1, che rappresenta l'applicazione A ristretta a $E'(\lambda)$, ha solo l'autovalore λ, mentre C_1, che rappresenta l'applicazione A ristretta a W, ha gli stessi autovalori di A escluso l'autovalore λ. In particolare allora C_1 ha k autovalori reali, quindi, per ipotesi di induzione, esiste una matrice $\widetilde{M_2}$ reale ed invertibile tale che

$$\widetilde{M_2}^{-1} C_1 \widetilde{M_2} = \left(\begin{array}{c|c} B_2 & 0 \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$$

dove B_2 ha solo autovalori reali, mentre C non ha autovalori reali. Ma allora presa

$$M_2 = \left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & \widetilde{M_2} \end{array}\right)$$

e detta $M = M_1M_2$, risulta

$$M^{-1}AM = M_2^{-1}M_1^{-1}AM_1M_2 = M_2^{-1}A_1M_2 =$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} B_1 & 0 \\ \hline 0 & \widetilde{M}_2^{-1}C_1\widetilde{M}_2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|cc} B_1 & \multicolumn{2}{c}{0} \\ \hline 0 & \begin{array}{c|c} B_2 & 0 \\ \hline 0 & C \end{array} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} \begin{array}{c|c} B_1 & 0 \\ \hline 0 & B_2 \end{array} & & 0 \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & C \end{array}\right)$$

e la matrice

$$B = \left(\begin{array}{c|c} B_1 & 0 \\ \hline 0 & B_2 \end{array}\right)$$

ha solo autovalori reali, mentre C non ha autovalori reali.

È chiaro che la tesi dell'esercizio può essere anche vista come una facile conseguenza della riduzione a forma canonica di Jordan reale di A (cfr. esercizio 51). □

Soluzione dell'Esercizio 85. La dimostrazione che V è uno spazio vettoriale è una semplice verifica.

Se A e B sono matrici $n \times n$, indichiamo con g_A l'applicazione di $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ in sé definita da $X \mapsto AX$ e con h_B l'applicazione definita da $X \mapsto XB$.

Consideriamo l'insieme $W = \{g_A\}_{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$, che è evidentemente un sottospazio vettoriale di $\operatorname{Hom}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$. Dal fatto che l'applicazione

$$L : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow W$$
$$L : A \longmapsto g_A$$

è lineare, iniettiva e surgettiva, si deduce che $\dim W = n^2$.

Analogamente si vede che il sottospazio W' di $\operatorname{Hom}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$ delle applicazioni $\{h_B\}_{B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$ ha anch'esso dimensione n^2.

Risulta evidentemente $V = W + W'$, per cui si ha

$$\dim V = \dim W + \dim W' - \dim(W \cap W') .$$

Per calcolare la dimensione di $W \cap W'$ osserviamo che una applicazione lineare f appartiene a $W \cap W'$ se e soltanto se $\exists A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tali che $f(X) = AX = XB$, per ogni $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

In particolare prendendo $X = I$ si ha $A = B$, ossia deve risultare $AX = XA$ per ogni $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Ma allora (cfr. esercizio 5) si deve avere $A = \lambda I$, per cui $\dim(W \cap W') = 1$ e quindi $\dim V = 2n^2 - 1$.

Un modo simile di risolvere l'esercizio è considerare l'applicazione lineare

$$T : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \operatorname{Hom}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$$
$$T : (A, B) \longmapsto f_{AB} .$$

Infatti $V = \operatorname{Im} T$ e quindi $\dim V = \dim(\operatorname{Im} T) = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K})) - \dim(\operatorname{Ker} T) = 2n^2 - \dim(\operatorname{Ker} T)$. Si conclude provando, con un ragionamento del tutto simile al precedente, che $\operatorname{Ker} T$ è l'insieme delle matrici scalari e quindi $\dim(\operatorname{Ker} T) = 1$. □

Soluzione dell'Esercizio 86. Poiché $\langle\ ,\ \rangle$ è non degenere (cfr. esercizio 13), è ben definito l'operatore aggiunto φ_A^* di φ_A come l'unico endomorfismo di $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ per cui vale

$$\langle \varphi_A(X), Y \rangle = \langle X, \varphi_A^*(Y) \rangle \quad \forall X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

ossia

$$\operatorname{tr}(AXY) = \langle X, \varphi_A^*(Y) \rangle \qquad \forall X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) .$$

Ricordando che $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$ per ogni $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, si ha quindi che φ_A^* è caratterizzata dalla proprietà

$$\langle X, YA \rangle = \operatorname{tr}(XYA) = \langle X, \varphi_A^*(Y) \rangle \qquad \forall X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) .$$

Dato che $\langle\ ,\ \rangle$ è non degenere, ne consegue che

$$\varphi_A^*(Y) = YA \quad \forall Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) .$$

A questo punto, perché φ_A sia autoaggiunta, si deve avere che

$$\varphi_A(X) = \varphi_A^*(X) \quad \forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad \text{ossia} \quad AX = XA \quad \forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

Per quanto visto nell'esercizio 5 questo è vero se e solo se A è una matrice scalare, ossia $A = \lambda I$ per qualche $\lambda \in \mathbb{R}$. □

Soluzione dell'Esercizio 87. Se $a = 0$ il determinante è ovviamente dato da b^n. Supponiamo $a \neq 0$. Osserviamo che $(1, \ldots, 1)$ è autovettore per A relativo all'autovalore $\alpha = b + (n-1)a = na + b - a$. Inoltre anche $\beta = b - a$ è un autovalore di A, in quanto

$$A - (b-a)I = \begin{pmatrix} a & \cdots & a \\ \vdots & & \vdots \\ a & \cdots & a \end{pmatrix}$$

ha determinante 0. Dato che $a \neq 0$, chiaramente $\alpha \neq \beta$. Osserviamo anche che $\operatorname{rk}(A - (b-a)I) = 1$, quindi $\dim E(\beta, A) = n - 1$. In definitiva abbiamo trovato per A due autovalori distinti di cui uno ha autospazio di dimensione $n-1$; di conseguenza A è diagonalizzabile e la sua forma diagonale è data da

$$D = \begin{pmatrix} \alpha & & & \\ & \beta & & \\ & & \ddots & \\ & & & \beta \end{pmatrix}.$$

Ma allora

$$\det A = \det D = \alpha\beta^{n-1} = (na+b-a)(b-a)^{n-1} = \\ = (b-a)^n + (na)(b-a)^{n-1}.$$

Osserviamo che la formula ottenuta nel caso $a \neq 0$ è valida anche nel caso $a = 0$.

Un altro metodo di soluzione può essere il seguente. Sia $B = A - (b-a)I$; allora evidentemente si ha

$$\det A = \det\big(B + (b-a)I\big) = P_B(a-b).$$

Ricordiamo che il polinomio caratteristico di una matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ è dato da

$$P_M(t) = (-t)^n + a_{n-1}(-t)^{n-1} + \cdots + a_1(-t) + a_0,$$

dove il coefficiente a_k è la somma dei determinanti dei minori principali di ordine $n-k$ di M, intendendo per minori principali le sottomatrici quadrate di M aventi la diagonale sulla diagonale di M.

Osservando che per la matrice B i minori principali hanno tutti determinante nullo tranne al più quelli di ordine 1, si ha che

$$P_B(t) = (-t)^n + \operatorname{tr} B(-t)^{n-1} = (-t)^n + (na)(-t)^{n-1}$$

e quindi

$$\det A = P_B(a-b) = (b-a)^n + (na)(b-a)^{n-1}$$

che è la stessa formula trovata in precedenza. □

Soluzione dell'Esercizio 88. Chiaramente se sono simili sui reali sono simili anche sui complessi.

Supponiamo che siano simili sui complessi, ossia che esista $M \in GL_n(\mathbb{C})$ tale che $M^{-1}AM = B$ o, equivalentemente,

$$(1) \qquad AM = MB.$$

Quello che si vuole trovare è una matrice $N \in GL_n(\mathbb{R})$ tale che $AN = BN$. Sia $M = M_1 + iM_2$ con $M_i \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; allora dalla (1) si ha immediatamente che

$$AM_i = M_iB \qquad i = 1, 2.$$

Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ sia $N_\alpha \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice $N_\alpha = M_1 + \alpha M_2$. Dalla relazione precedente segue subito che

$$(2) \qquad AN_\alpha = N_\alpha B \qquad \forall\, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Dimostriamo che esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $\det N_\alpha \neq 0$. A tale scopo si consideri il polinomio $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ definito da

$$P(x) = \det(M_1 + xM_2).$$

Tale polinomio non è identicamente nullo in quanto $P(i) = \det M \neq 0$ (dato che M è invertibile), ma allora ha un numero finito di radici e pertanto esiste almeno un numero reale α tale che $P(\alpha) \neq 0$. La corrispondente matrice N_α è quindi invertibile ed in più, per (2), realizza una similitudine tra A e B.

Si poteva dimostrare lo stesso risultato usando la forma di Jordan reale. Ricordiamo infatti (cfr. esercizio 51) che, se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, esiste una base di $\mathbb{R}^n$ rispetto alla quale la matrice assume una forma $J_\mathbb{R}(A)$ (detta forma di Jordan reale di A) univocamente determinata dalla forma di Jordan (complessa) $J(A)$ di A.

Da tale fatto segue la tesi dell'esercizio; infatti, se A e B sono simili sui complessi, allora $J(A) = J(B)$, e dunque anche $J_\mathbb{R}(A) = J_\mathbb{R}(B)$. Ciò significa che esiste una base reale rispetto alla quale A e B si scrivono allo stesso modo, per cui A e B sono simili su $\mathbb{R}$. □

Soluzione dell'Esercizio 89. La (1) è ovvia conseguenza di una delle proprietà elencate nell'esercizio H.

(2) Ricordiamo che, se P è una proiezione, allora $V = \operatorname{Im} P \oplus \operatorname{Ker} P$ e $P|_{\operatorname{Im} P} = id_{\operatorname{Im} P}$ (cfr. esercizio 30).

Cominciamo a dimostrare che (a) $\Longleftrightarrow$ (b). Supponiamo che P sia una proiezione ortogonale su $W = \operatorname{Im} P$, ossia $\operatorname{Ker} P = (\operatorname{Im} P)^\perp$. Siano $v_1, v_2 \in V$; scriviamo la loro decomposizione lungo $\operatorname{Im} P$ e $\operatorname{Ker} P$, cioè

$$v_1 = w_1 + u_1 \quad \text{e} \quad v_2 = w_2 + u_2$$

con $w_i \in \operatorname{Im} P$ e $u_i \in \operatorname{Ker} P$. Usando le proprietà delle proiezioni ed il fatto che $\operatorname{Ker} P = (\operatorname{Im} P)^\perp$, si ha allora

$$\begin{aligned}\langle P(v_1), v_2\rangle &= \langle P(w_1+u_1), w_2+u_2\rangle = \langle P(w_1)+P(u_1), w_2+u_2\rangle = \\ &= \langle w_1, w_2+u_2\rangle = \langle w_1, w_2\rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle v_1, P(v_2)\rangle &= \langle w_1+u_1, P(w_2+u_2)\rangle = \langle w_1+u_1, P(w_2)+P(u_2)\rangle = \\ &= \langle w_1+u_1, w_2\rangle = \langle w_1, w_2\rangle\end{aligned}$$

da cui segue che $P = P^*$.

Viceversa supponiamo che $P = P^*$; allora, per le relazioni che legano nucleo ed immagine di un'applicazione e della sua aggiunta (cfr. esercizio H), risulta

$$\operatorname{Ker} P = \operatorname{Ker} P^* = (\operatorname{Im} P)^\perp$$

per cui la proiezione P è ortogonale.

Dimostriamo ora che (b) $\iff$ (c). Chiaramente se $P = P^*$ si ha che $PP^* = P^*P$. Viceversa, supponiamo che $PP^* = P^*P$. Dato che P e P^* sono due proiezioni, per dimostrarne l'uguaglianza è sufficiente dimostrare che $\operatorname{Ker} P = \operatorname{Ker} P^*$ e $\operatorname{Im} P = \operatorname{Im} P^*$.

Osserviamo ora che, per ogni $v \in V$, risulta

$$\langle P(v), P(v)\rangle = \langle v, P^*P(v)\rangle = \langle v, PP^*(v)\rangle = \langle P^*(v), P^*(v)\rangle .$$

Allora, dato che il prodotto scalare è definito positivo, da questa relazione segue che

$$P(v) = 0 \iff P^*(v) = 0$$

e quindi $\operatorname{Ker} P = \operatorname{Ker} P^*$. Ma ora, utilizzando come sopra le proprietà dell'aggiunto, $\operatorname{Ker} P^* = (\operatorname{Im} P)^\perp$, quindi

$$\operatorname{Im} P = (\operatorname{Ker} P^*)^\perp = (\operatorname{Ker} P)^\perp = \operatorname{Im} P^*,$$

e dunque la tesi. □

Soluzione dell'Esercizio 90. Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ gli autovalori della matrice A, e $\mu_1, \dots \mu_k$ le rispettive molteplicità algebriche. Le relazioni sulle tracce si riflettono allora (perché?) sul seguente sistema di $p-1$ equazioni sugli autovalori:

$$(1)\qquad \begin{cases}\mu_1\lambda_1 + \dots + \mu_k\lambda_k = 0\\ \mu_1\lambda_1^2 + \dots + \mu_k\lambda_k^2 = 0\\ \vdots\\ \mu_1\lambda_1^{p-1} + \dots + \mu_k\lambda_k^{p-1} = 0 .\end{cases}$$

Supponiamo che $k < p$ e consideriamo il sistema costituito dalle prime k equazioni del sistema (1), ossia il sistema

$$(2)\qquad \begin{cases}\mu_1\lambda_1 + \dots + \mu_k\lambda_k = 0\\ \mu_1\lambda_1^2 + \dots + \mu_k\lambda_k^2 = 0\\ \vdots\\ \mu_1\lambda_1^{k} + \dots + \mu_k\lambda_k^{k} = 0 .\end{cases}$$

Evidentemente tale sistema può essere riscritto nella forma

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_k\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \dots & \lambda_k^{k-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mu_1\lambda_1\\ \mu_2\lambda_2\\ \vdots\\ \mu_k\lambda_k\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$$

e, dato che la matrice $k \times k$ è una matrice di Vandermonde con determinante diverso da 0 (in quanto i λ_i sono distinti), necessariamente deve risultare

$$\mu_i\lambda_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, k .$$

Dato che la molteplicità algebrica di un autovalore è per definizione un numero positivo, ciò implica $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$; poiché gli autovalori λ_i erano distinti, l'unica possibilità è che $k = 1$ e $\lambda_1 = 0$. In altri termini, o la matrice ha solo l'autovalore nullo, e quindi è nilpotente, oppure ha almeno p autovalori distinti. Questo prova la tesi. □

Soluzione dell'Esercizio 91. Per ipotesi, in particolare, $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} A^2 = \dots = \operatorname{tr} A^{n-1} = 0$, quindi (per quanto visto nell'esercizio 90) A, se non fosse nilpotente, avrebbe n autovalori distinti $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Le condizioni sulle tracce diventano allora il sistema

$$\begin{cases}\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 0\\ \lambda_1^2 + \dots + \lambda_n^2 = 0\\ \vdots\\ \lambda_1^n + \dots + \lambda_n^n = 0\end{cases}$$

che si riscrive:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} .$$

La matrice $n \times n$ è una matrice di Vandermonde non degenere in quanto i λ_i sono tutti distinti, pertanto $\lambda_i = 0$ per ogni i, e dato che i λ_i sono distinti, ciò è assurdo a meno che $n = 1$. Se $n = 1$ dovrebbe evidentemente aversi $A = (0)$ che è nilpotente e quindi si ottiene un assurdo anche in questo caso.

Si può dare un'altra dimostrazione indipendente da quella dell'esercizio 90. Procediamo per induzione sull'ordine della matrice. Se $n = 1$ la tesi è ovvia. Supponiamo allora la tesi vera per $n-1$ e dimostriamola per n. Sia $P_A(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + (-1)^n t^n$ il polinomio caratteristico di A; allora per il teorema di Hamilton-Cayley

$$0 = P_A(A) = a_0 I + a_1 A + \cdots + (-1)^n A^n .$$

Passando alla traccia si ha allora che

$$0 = a_0 \operatorname{tr} I + a_1 \operatorname{tr} A + \cdots + (-1)^n \operatorname{tr} A^n = a_0 \operatorname{tr} I = n a_0$$

quindi $a_0 = 0$, ossia 0 è una radice di $P_A(t)$ e quindi 0 è un autovalore di A. Sia allora $v_1 \in \operatorname{Ker} A - \{0\}$ e siano $v_2, \ldots, v_n$ tali che $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ sia una base di $\mathbb{C}^n$. Rispetto a tale base la matrice associata all'applicazione definita da A assume la forma

$$A' = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & * & \cdots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

ossia la matrice A è simile ad A'. Ne consegue che A^k è simile a $(A')^k$ per ogni k, quindi $\operatorname{tr}(A')^k = 0$ per ogni $k = 1, \ldots, n$. Ma ora, non è difficile vedere che

$$(A')^k = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & * & \cdots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & B^k & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

e quindi, per ipotesi di induzione, B è nilpotente. Da ciò segue allora immediatamente che A', e quindi A, è nilpotente. □

Soluzione dell'Esercizio 92. Dall'ipotesi $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} A^2 = \cdots = \operatorname{tr} A^{n-1} = 0$, ragionando come nell'esercizio 90, segue che A è nilpotente o ha n autovalori distinti. Ma A non è nilpotente, perché altrimenti $A^n = 0$ e quindi $\operatorname{tr} A^n = 0$, contro l'ipotesi. Dunque A ha n autovalori distinti e di conseguenza è diagonalizzabile. □

Soluzione dell'Esercizio 93. Interpretiamo A come matrice associata ad una applicazione lineare $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ e la matrice M come una matrice di cambiamento di base. Il problema è quindi equivalente a caratterizzare le applicazioni lineari $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ la cui matrice associata sia reale in ogni base.

Supponiamo che $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ sia la base rispetto alla quale la matrice associata ad f è A, e per ogni $j = 1, \ldots, n$ sia

$$\mathcal{B}_j = \{v_1, \ldots, i v_j, \ldots, v_n\}$$

la base ottenuta da $\mathcal{B}$ moltiplicando il j-esimo vettore per i (l'unità immaginaria). Sia A_j la matrice associata ad f rispetto a questa nuova base; evidentemente A_j è ottenuta da A moltiplicando la j-esima riga per $-i$ e la j-esima colonna per i. Visto che A e A_j sono matrici reali, necessariamente tutti i termini della j-esima riga e della j-esima colonna, tranne quello sulla diagonale (che viene moltiplicato per i e per $-i$ e quindi è uguale nelle due matrici), devono essere nulli. Visto che questo fatto deve valere per ogni j, la matrice A deve necessariamente essere diagonale.

Siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ gli elementi sulla diagonale, ossia $f(v_j) = \lambda_j v_j$. Per ogni $j = 2, \ldots, n$ consideriamo la base

$$\mathcal{B}'_j = \{v_1 + i v_j, v_2, \ldots, v_n\}$$

e sia A'_j la matrice associata ad f rispetto alla base $\mathcal{B}'$. Un semplice calcolo mostra che

$$f(v_1 + i v_j) = \lambda_1 (v_1 + i v_j) + i(\lambda_j - \lambda_1) v_j$$

ossia il termine di posto $j, 1$ della matrice A'_j è dato da $i(\lambda_j - \lambda_1)$. Ma per ipotesi A'_j è una matrice reale e quindi $i(\lambda_j - \lambda_1) \in \mathbb{R}$; d'altra parte anche A è una matrice reale e quindi $\lambda_j - \lambda_1 \in \mathbb{R}$, per cui necessariamente $\lambda_j - \lambda_1 = 0$. Visto che ciò deve valere per ogni $j = 2, \ldots, n$ la matrice A risulta essere della forma λI con $\lambda \in \mathbb{R}$.

È evidente che le matrici di questo tipo verificano la condizione richiesta e pertanto sono tutte e sole le matrici cercate. □

Soluzione dell'Esercizio 94. Sia S la matrice associata a tale applicazione rispetto alla base canonica, cioè

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & & & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Poiché S è una matrice unitaria, σ è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$.

Calcoliamo il polinomio caratteristico della matrice S. Sviluppando il determinante rispetto alla prima riga si ha

$$P_S(t) = \det \begin{pmatrix} -t & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & -t & & & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -t & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -t \end{pmatrix} =$$

$$= -t \det \begin{pmatrix} -t & & & \\ 1 & -t & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -t \end{pmatrix} + (-1)^{n+1} \det \begin{pmatrix} 1 & -t & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & -t \\ & & & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= (-t)^n + (-1)^{n+1} = (-1)^n (t^n - 1) .$$

La matrice ha dunque come autovalori le radici n-esime dell'unità, cioè ha n autovalori distinti.

Per quanto riguarda gli autovettori, osserviamo che se ω è una radice n-esima di 1, allora il vettore

$$v_\omega = e_1 + \omega e_2 + \omega^2 e_3 + \cdots + \omega^{n-1} e_n$$

è tale che

$$\begin{aligned} \sigma(v_\omega) &= e_2 + \omega e_3 + \omega^2 e_4 + \cdots + \omega^{n-2} e_n + \omega^{n-1} e_1 = \\ &= \omega^{n-1}(\omega e_2 + \omega^2 e_3 + \omega^3 e_4 + \cdots + \omega^{n-1} e_n + e_1) = \omega^{n-1} v_\omega \end{aligned}$$

ossia è un autovettore relativo all'autovalore $\omega^{n-1} = \omega^{-1}$ e, dato che l'insieme delle radici n-esime di 1 è un gruppo,

$$\{\omega^{-1} \mid \omega^n = 1\} = \{\omega \mid \omega^n = 1\} .$$

Gli n vettori v_ω, corrispondenti alle n radici n-esime di 1, sono dunque autovettori relativi ad autovalori distinti e quindi una base di autovettori per σ.

Nota. La matrice S è un caso particolare di matrice della forma

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & & & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

che ha come polinomio caratteristico $P_C(t) = (-1)^n(t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_0)$ (basta procedere come nello svolgimento dell'esercizio), dunque un polinomio avente come coefficienti gli elementi dell'ultima colonna di C. □

Soluzione dell'Esercizio 95. Osserviamo che le matrici di permutazione R_σ sono ortogonali, in particolare $R_{\sigma^{-1}} = {}^tR_\sigma$. Ma allora è un fatto ben noto che le matrici ortogonali sono diagonalizzabili sui complessi (le matrici ortogonali sono in particolare unitarie).

Una dimostrazione diretta può essere data nel seguente modo. Denotiamo con C_k la matrice $k \times k$ della forma

$$C_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & & & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Supponiamo dapprima che $\sigma = (i_1, \ldots, i_k)$ sia un ciclo di ordine k. Siano $j_1, \ldots, j_{n-k}$ i numeri tali che $\{i_1, \ldots, i_k\} \cup \{j_1, \ldots, j_{n-k}\} = \{1, \ldots, n\}$ e si consideri la base $B = \{e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}, e_{j_1}, \ldots, e_{j_{n-k}}\}$.

Rispetto alla base B, l'applicazione associata a R_σ è rappresentata dalla matrice a blocchi

$$R'_\sigma = \left(\begin{array}{c|c} C_k & 0 \\ \hline 0 & I_{n-k} \end{array} \right)$$

e quindi esiste una matrice invertibile M (si osservi che M è a sua volta una matrice di permutazione) tale che

$$M^{-1} R_\sigma M = R'_\sigma .$$

Le matrici della forma C_k sono diagonalizzabili (cfr. esercizio 94), ne segue che R'_σ e quindi R_σ sono diagonalizzabili.

Sia ora $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ e sia $\sigma = \gamma_1\gamma_2 \cdots \gamma_h$ la sua decomposizione in cicli disgiunti. Dato che l'applicazione $\sigma \mapsto R_\sigma$ è un omomorfismo di gruppi, in corrispondenza di tale decomposizione si ha una decomposizione della matrice R_σ nel prodotto $R_\sigma = R_{\gamma_1} R_{\gamma_2} \cdots R_{\gamma_h}$. I cicli γ_i, essendo disgiunti, commutano tra loro e quindi anche le matrici R_{γ_i} commutano. Ma allora, visto che le matrici R_{γ_i} sono diagonalizzabili e commutano, anche il loro prodotto è diagonalizzabile.

Osserviamo che questo secondo passo della dimostrazione poteva essere provato anche osservando che, per il fatto che i cicli γ_i sono disgiunti, si può trovare una base in cui l'applicazione che definisce R_σ è rappresentata da una matrice a blocchi della forma

$$\begin{pmatrix} \boxed{C_{k_1}} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \boxed{C_{k_h}} & \\ & & & \boxed{I_{n-\sum k_i}} \end{pmatrix}$$

in cui k_i denota l'ordine del ciclo γ_i e la cui diagonalizzabilità è conseguenza della diagonalizzabilità di tutte le C_{k_i}. □

Soluzione dell'Esercizio 96. Osserviamo che il vettore $v = e_1 + \cdots + e_n$ è un autovettore per ogni matrice R_σ. Infatti

$$R_\sigma v = R_\sigma\Big(\sum_{i=1}^{n} e_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} R_\sigma e_i = \sum_{i=1}^{n} e_{\sigma(i)} = v\,.$$

Ma allora, se $A \in \mathcal{R}$, necessariamente v è un autovettore per A. Infatti siano $a_\sigma \in \mathbb{C}$ e sia

$$A = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} a_\sigma R_\sigma$$

allora

$$Av = \Big(\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} a_\sigma R_\sigma\Big)v = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} (a_\sigma R_\sigma v) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} (a_\sigma v) = \Big(\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} a_\sigma\Big)v\,.$$

Chiaramente non tutte le matrici in $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ hanno v come autovettore (se ne trovi almeno una!), e ciò implica la (1).

(2) Una relazione lineare fra le matrici R_σ è una relazione del tipo

$$\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} a_\sigma R_\sigma = 0,$$

dove i coefficienti a_σ sono numeri complessi. L'insieme dei coefficienti a_σ può essere pensato come una applicazione $\mathfrak{S}_n \longmapsto \mathbb{C}$ che ad ogni permutazione σ associa un coefficiente a_σ. L'insieme $\mathbb{C}^{\mathfrak{S}_n}$ delle applicazioni $\mathfrak{S}_n \longmapsto \mathbb{C}$ è uno spazio vettoriale (perché?) ed è facile vedere che ha dimensione $n!$ (perché?). Pertanto se consideriamo l'applicazione

$$\varphi : \mathbb{C}^{\mathfrak{S}_n} \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^{n^2}$$
$$\varphi : (a_\sigma) \longmapsto \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} a_\sigma R_\sigma$$

le relazioni lineari che legano tra loro le matrici R_σ non sono altro che gli elementi di $\operatorname{Ker}\varphi$. D'altra parte rispetto alle basi canoniche l'applicazione φ

ha come matrice associata una matrice $A \in \mathcal{M}_{n^2\times n!}(\mathbb{C})$ che ha i coefficienti in $\mathbb{Z}$ (per l'esattezza tali coefficienti sono solo 0 o 1), e per ogni $a \in \mathbb{C}^{\mathfrak{S}_n}$ si ha che $a \in \operatorname{Ker}\varphi$ se e solo se $a \in \operatorname{Ker} A$. Per quanto visto nell'esercizio 39, allora $\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Ker} A$ ha una base di vettori a coordinate in $\mathbb{Z}$.

Calcoliamo ora la dimensione dello spazio $\mathcal{R}$. Abbiamo già visto che il vettore $v = e_1 + \cdots + e_n$ è autovettore di tutte le matrici R_σ (e quindi di tutte le matrici in $\mathcal{R}$). Anche il sottospazio

$$W = \operatorname{Span}(e_i - e_j \mid i,j = 1,\ldots,n)$$

è invariante per ogni R_σ e quindi per ogni $R \in \mathcal{R}$; infatti, per ogni i,j e per ogni $\sigma \in \mathfrak{S}_n$

$$R_\sigma(e_i - e_j) = R_\sigma e_i - R_\sigma e_j = e_{\sigma(i)} - e_{\sigma(j)} \in W\,.$$

Si può provare che W è invariante per tutte le R_σ anche osservando che W è l'ortogonale di $\operatorname{Span}(v)$ e che le matrici R_σ sono ortogonali, e quindi conservano l'ortogonalità.

È facile mostrare che i vettori di W

$$v_1 = e_n - e_1,\ \ldots,\ v_{n-1} = e_n - e_{n-1}$$

sono linearmente indipendenti e dunque sono una base di W, visto che, per quanto osservato sopra, si ha $\dim W = n-1$. Ma allora nella base $\mathcal{B} = \{v, v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ di $\mathbb{C}^n$ le matrici in $\mathcal{R}$ assumono la forma

$$\text{(1)} \qquad \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

con B una matrice $(n-1)\times(n-1)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Evidentemente allora

$$\dim \mathcal{R} \le (n-1)^2 + 1\,.$$

In realtà vale l'uguaglianza: basta provare che $\mathcal{R}$ contiene delle matrici $R_{i,j}$ con $i,j = 1,\ldots,n-1$ che nella base $\mathcal{B}$ assumono una forma del tipo

$$\text{(2)} \qquad \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(R_{i,j}) = \left(\begin{array}{c|ccc} * & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & B_{i,j} & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

con $B_{i,j}$ matrici che costituiscono una base di $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbf{C})$, e che $\mathcal{R}$ contiene anche la matrice R_1 che rispetto alla base B assume la forma

$$\text{(3)} \qquad \mathcal{M}_B(R_1) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right).$$

Evidentemente le matrici di tipo (2) e (3) costituiscono una base dello spazio delle matrici della forma (1) e quindi le matrici R_1 ed $R_{i,j}$ con $i,j = 1,\dots,n-1$ costituiscono una base di $\mathcal{R}$.

Cominciamo costruendo la matrice R_1. Osserviamo che, affinché $\mathcal{M}_B(R_1)$ abbia la forma richiesta, dovrà risultare

$$\begin{cases} R_1(e_n - e_j) = 0 & \forall\, j = 1,\dots,n-1 \\ R_1(e_1 + \dots + e_n) = e_1 + \dots + e_n \end{cases}$$

da cui segue immediatamente che la matrice R_1 deve essere la matrice

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1/n & \cdots & 1/n \\ \vdots & & \vdots \\ 1/n & \cdots & 1/n \end{pmatrix}.$$

Vediamo come si può ottenere tale matrice come combinazione lineare delle R_σ. Ricordiamo che

$$\text{(4)} \qquad [R_\sigma]_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = \sigma(j) \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Quindi, per ogni $i,j = 1,\dots,n$ esistono esattamente $(n-1)!$ permutazioni, e precisamente quelle tali che $\sigma(j) = i$, tali che $[R_\sigma]_{i,j} = 1$ mentre per tutte le altre $[R_\sigma]_{i,j} = 0$. Ma allora

$$\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} R_\sigma = \begin{pmatrix} (n-1)! & \cdots & (n-1)! \\ \vdots & & \vdots \\ (n-1)! & \cdots & (n-1)! \end{pmatrix}$$

e quindi

$$R_1 = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} R_\sigma .$$

Vediamo ora come si possono costruire delle matrici $R_{i,j}$ tali che valga (2). Per ogni $i,j = 1,\dots,n-1$ sia

$$\widetilde{R}_{i,j} = \sum_{\substack{\sigma\in\mathfrak{S}_n \\ \sigma(j)=i}} R_\sigma .$$

Non è difficile vedere, usando la (4), che

$$\begin{array}{cl} \widetilde{R}_{i,j} = \left(\begin{array}{ccc|c|ccc} \beta & \cdots & \beta & 0 & \beta & \cdots & \beta \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \beta & \cdots & \beta & 0 & \beta & \cdots & \beta \\ \hline 0 & \cdots & 0 & \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ \hline \beta & \cdots & \beta & 0 & \beta & \cdots & \beta \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \beta & \cdots & \beta & 0 & \beta & \cdots & \beta \end{array}\right) & \leftarrow i\text{-esima riga} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \uparrow & \\ \qquad\qquad\qquad j\text{-esima colonna} & \end{array}$$

dove $\alpha = (n-1)!$ e $\beta = (n-2)!$, ossia per ogni k

$$\widetilde{R}_{i,j} e_k = \begin{cases} \alpha e_i & \text{se } k = j \\ \beta \sum_{h\neq i} e_h & \text{se } k \neq j . \end{cases}$$

Consideriamo allora la matrice

$$R_{i,j} = \frac{1}{(n-1)!}\widetilde{R}_{i,j},$$

che agisce quindi nel seguente modo

$$R_{i,j} e_k = \begin{cases} e_i & \text{se } k = j \\ \dfrac{1}{n-1}\sum_{h\neq i} e_h & \text{se } k \neq j \end{cases}$$

e vediamo ora come è fatta $\mathcal{M}_B(R_{i,j})$. Si ha immediatamente che

$$R_{i,j} v = \sum_{k=1}^{n} R_{i,j} e_k = \sum_{k\neq j}\Big(\frac{1}{n-1}\sum_{h\neq i} e_h\Big) + e_i = v,$$

e che per ogni $k = 1, \dots, n-1$ si ha

$$R_{i,j}v_k = R_{i,j}e_n - R_{i,j}e_k = \begin{cases} \frac{1}{n-1}\sum_{h\neq i} e_h - \frac{1}{n-1}\sum_{h\neq i} e_h & \text{se } k \neq j \\ \frac{1}{n-1}\sum_{h\neq i} e_h - e_i & \text{se } k = j. \end{cases}$$

Ma ora

$$\frac{1}{n-1}\sum_{h\neq i} e_h - e_i = -\sum_{h\neq i}\frac{1}{n-1}(e_n - e_h) + (n-1)\frac{1}{n-1}e_n - e_i =$$

$$= (e_n - e_i) - \sum_{h\neq i}\frac{1}{n-1}(e_n - e_h) = v_i - \sum_{h\neq i}\frac{1}{n-1}v_h$$

ossia, in definitiva

$$R_{i,j}v_k = \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq j \\ v_i - \sum_{h\neq i}\frac{1}{n-1}v_h & \text{se } k = j. \end{cases}$$

Ma allora, detto $b_i \in \mathbb{C}^{n-1}$ il vettore che ha tutte le coordinate uguali a $-1/(n-1)$ tranne la i-esima uguale ad 1, risulta che la matrice $\mathcal{M}_B(R_{i,j})$ è del tipo

$$\mathcal{M}_B(R_{i,j}) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & B_{i,j} & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

dove $B_{i,j}$ è la matrice nulla con il vettore b_i alla colonna j. Per concludere basta allora dimostrare che le matrici $B_{i,j} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$ sono linearmente indipendenti. Per come sono fatte, è sufficiente dimostrare che i vettori b_i, per $i = 1, \dots, n-1$, sono linearmente indipendenti (perché?). Ma allora si consideri la matrice B che ha i b_i come colonne, ossia

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{n-1} & \cdots & -\frac{1}{n-1} \\ -\frac{1}{n-1} & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -\frac{1}{n-1} \\ -\frac{1}{n-1} & \cdots & -\frac{1}{n-1} & 1 \end{pmatrix};$$

non è difficile calcolare il determinante di tale matrice (cfr. esercizio 87) che risulta essere

$$\det B = \frac{1}{n-1}\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-2} = \frac{n^{n-2}}{(n-1)^{n-1}} \neq 0\,.$$

Quindi i vettori b_i sono linearmente indipendenti, da cui segue la tesi. □

Soluzione dell'Esercizio 97. Come nella soluzione dell'esercizio 89, dalla condizione $ff^* = f^*f$ segue che $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^*$, ma allora $\operatorname{Im} f = (\operatorname{Ker} f^*)^\perp = (\operatorname{Ker} f)^\perp$, da cui segue la tesi. □

Soluzione dell'Esercizio 98. Evidentemente gli autovalori di A possono essere solo 1 o -1, pertanto A è simile ad una matrice T triangolare superiore del tipo

$$T = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & * & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} T_1 & * \\ \hline 0 & T_2 \end{array}\right)$$

con $T_1 \in \mathcal{M}_k(\mathbf{R})$ e $T_2 \in \mathcal{M}_{n-k}(\mathbf{R})$.

Poiché T è simile ad A, anche $T^p = I_n$ e quindi, in particolare, $T_1^p = I_k$. D'altra parte, una matrice triangolare superiore con tutti gli elementi sulla diagonale non nulli ed uguali fra loro ammette una potenza diagonale se e solo se essa stessa era già diagonale (per vedere questo si usi l'esercizio 3 come nella soluzione dell'esercizio 43). Dunque T_1^p può essere I_k se e solo se $T_1 = I_k$, il che significa che i primi k vettori della base a ventaglio sono in realtà autovettori relativi all'autovalore 1.

La matrice A è anche simile ad una matrice triangolare del tipo

$$\begin{pmatrix} -1 & & & & & \\ & \ddots & & & * & \\ & & -1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

(basta costruire una base a ventaglio cominciando a lavorare con l'autovalore -1). Ripetendo lo stesso ragionamento fatto qui sopra, si ottiene che i primi

$n-k$ vettori di questa seconda base a ventaglio sono autovettori relativi all'autovalore -1. Avendo trovato k autovettori indipendenti in $E(1)$ e $n-k$ autovettori indipendenti in $E(-1)$, A è diagonalizzabile.

In particolare, come forma triangolare di A avremmo potuto prendere la forma di Jordan di A,

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{J_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{J_r} \end{pmatrix}$$

costituita dai blocchi di Jordan $J_1, \ldots, J_r$.

Di nuovo, essendo J simile ad A, anche $J^p = I$. È facile vedere che

$$J^p = \begin{pmatrix} \boxed{J_1^p} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{J_r^p} \end{pmatrix}$$

e quindi, per ogni $i = 1, \ldots, r$, deve essere $J_i^p = I$.

Ma, per il ragionamento fatto sopra, J_i^p può essere I se e solo se J_i è diagonale. Essendo J_i un blocco di Jordan, ciò è possibile solo se il blocco ha ordine 1; ma allora J è diagonale e quindi A è diagonalizzabile.

Nota. L'ipotesi che A abbia tutti gli autovalori reali è necessaria: basta pensare, ad esempio, ad una rotazione di $\pi/2$ di $\mathbf{R}^2$ per avere un controesempio. □

Soluzione dell'Esercizio 99. Ricordiamo che l'applicazione lineare definita da una matrice M, cioè avente M come matrice associata rispetto alla base canonica, è autoaggiunta rispetto a g se e solo se

$$^tMA = AM\,.$$

L'ipotesi dell'esercizio si può quindi riformulare nel modo seguente:

$$(1) \qquad BA = AB \qquad \forall B \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})\,.$$

Ma una matrice commuta con tutte le matrici simmetriche se e solo se è del tipo λI (si veda la seconda dimostrazione dell'esercizio 5 e la nota finale); questo prova la tesi.

Per dimostrare la tesi dell'esercizio, si poteva procedere anche come segue: Siano λ e μ due autovalori della matrice A e siano v e w due rispettivi autovettori. Sia B la matrice $v\,{}^tw + w\,{}^tv$. Chiaramente B è simmetrica, quindi, per ipotesi, B è autoaggiunta rispetto ad A. D'altra parte

$$\begin{aligned} AB &= Av\,{}^tw + Aw\,{}^tv = \lambda v\,{}^tw + \mu w\,{}^tv \\ BA &= v\,{}^twA + w\,{}^tvA = v\,{}^t(Aw) + w\,{}^t(Av) = \mu v\,{}^tw + \lambda w\,{}^tv \end{aligned}$$

e quindi, per la (1), si ha che

$$\lambda v\,{}^tw + \mu w\,{}^tv = \mu v\,{}^tw + \lambda w\,{}^tv$$

ossia

$$(2) \qquad (\lambda - \mu)(v\,{}^tw - w\,{}^tv) = 0\,.$$

La matrice $v\,{}^tw - w\,{}^tv$ è nulla se e solo se $v\,{}^tw$ è simmetrica e quindi (cfr. esercizio 46) se e solo se i vettori v e w sono linearmente dipendenti. Ma allora la (2) è vera se e solo se o $\lambda = \mu$ oppure v e w sono linearmente dipendenti, e quindi sono autovettori relativi allo stesso autovalore e quindi ancora $\lambda = \mu$. Ciò prova che A ha un solo autovalore. □

Soluzione dell'Esercizio 100. Cominciamo a considerare il caso in cui A è costituita da un solo blocco di Jordan relativo all'autovalore λ; evidentemente $\lambda \neq 0$, visto che A è invertibile. Si calcola facilmente che

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\lambda & -1/\lambda^2 & \cdots & (-1)^{n+1}/\lambda^n \\ & 1/\lambda & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & -1/\lambda^2 \\ & & & 1/\lambda \end{pmatrix},$$

dunque si tratta di una matrice triangolare superiore tale che il prodotto degli elementi sulla prima parallela alla diagonale principale è non nullo. Allora (cfr. esercizio 29) la forma di Jordan di A^{-1} sarà formata da un solo blocco $n \times n$ relativo all'autovalore $1/\lambda$.

In generale A sarà del tipo

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{A_r} \end{pmatrix}$$

con $A_1, \ldots, A_r$ blocchi di Jordan di ordine $n_1, \ldots, n_r$ relativi agli autovalori non nulli $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ (non necessariamente distinti). D'altra parte

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \boxed{A_1^{-1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{A_r^{-1}} \end{pmatrix}.$$

Se indichiamo con $J(A^{-1})$ la forma di Jordan di A^{-1}, avremo

$$J(A^{-1}) = \begin{pmatrix} \boxed{J(A_1^{-1})} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{J(A_r^{-1})} \end{pmatrix}.$$

Dunque, per la quanto visto sopra, la forma di Jordan di A^{-1} sarà formata da r blocchi di Jordan di ordine $n_1, \dots, n_r$ relativi agli autovalori $1/\lambda_1, \dots, 1/\lambda_r$. □

Soluzione dell'Esercizio 101. Supponiamo che $\{v, \varphi(v), \dots, \varphi^{n-1}(v)\}$ sia una base di V. La matrice associata a φ rispetto a tale base è del tipo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 1 & 0 & & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & a_3 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_n \end{pmatrix}.$$

Per ogni λ autovalore di φ, la matrice $A - \lambda I$ ha rango $n-1$, in quanto il minore ottenuto cancellando la prima riga e l'ultima colonna è invertibile. Quindi $\dim E(\lambda) = 1$. Essendo φ diagonalizzabile, λ deve allora avere molteplicità algebrica 1, quindi non possono esistere autovalori multipli.

Viceversa, siano $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ gli autovalori (distinti) di φ e siano $v_1, \dots, v_n$ autovettori relativi ad essi. Proviamo che il vettore $v = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$ verifica la tesi.

Intanto si ha

$$\begin{aligned} \varphi(v) &= \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n \\ \varphi^2(v) &= \lambda_1^2 v_1 + \lambda_2^2 v_2 + \cdots + \lambda_n^2 v_n \\ &\vdots \\ \varphi^{n-1}(v) &= \lambda_1^{n-1} v_1 + \lambda_2^{n-1} v_2 + \cdots + \lambda_n^{n-1} v_n . \end{aligned}$$

Per vedere se $\{v, \varphi(v), \dots, \varphi^{n-1}(v)\}$ sono linearmente indipendenti, scriviamo la matrice delle coordinate rispetto alla base $\{v_1, \dots, v_n\}$:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

M è una matrice di Vandermonde e, visto che i λ_i sono distinti, $\det M \neq 0$. Questo prova che $\{v, \varphi(v), \dots, \varphi^{n-1}(v)\}$ sono una base.

Nota. Osserviamo che dalla dimostrazione della prima implicazione si deduce che, non appena una applicazione lineare ha un autospazio di dimensione ≥ 2, V non può ammettere una base del tipo considerato. □

Soluzione dell'Esercizio 102. Denotiamo con $S(V) \subset \mathrm{Hom}(V,V)$ l'insieme degli operatori autoaggiunti rispetto a $\langle \, , \, \rangle$, che è notoriamente un sottospazio vettoriale. Si consideri $\varphi : \mathrm{Hom}(V,V) \longrightarrow \mathrm{Hom}(V,V)$

$$\varphi : g \longmapsto f \circ g - g \circ f .$$

Evidentemente φ è un'applicazione lineare, ed in più

$$E = S(V) \cap \mathrm{Ker}(\varphi)$$

e quindi, essendo l'intersezione di due sottospazi vettoriali, anche E è un sottospazio vettoriale. Calcoliamone la dimensione.

L'operatore f è autoaggiunto rispetto a $\langle \, , \, \rangle$, quindi per il teorema spettrale esiste una base spettrale per f, ossia una base ortonormale di autovettori. Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ gli autovalori di f e siano $h_1, \dots, h_k$ le loro rispettive molteplicità (algebrica o geometrica, tanto coincidono). Nella base spettrale la matrice associata ad f ha la forma

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\lambda_1 I_{h_1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{\lambda_k I_{h_k}} \end{pmatrix}.$$

Sia $g \in E$ e sia B la matrice associata a g rispetto alla base fissata. Possiamo dividere a blocchi la matrice B in corrispondenza dei blocchi della matrice A ed otteniamo

$$B = \left(\begin{array}{c|c|c} B_{11} & \cdots & B_{1k} \\ \hline \vdots & & \vdots \\ \hline B_{k1} & \cdots & B_{kk} \end{array}\right)$$

dove il blocco B_{ij} è una matrice $h_i \times h_j$. Ricordiamo ora che la matrice B è la matrice associata ad un operatore autoaggiunto rispetto ad una base ortonormale, e quindi è simmetrica. In termini dei blocchi ciò vuol dire che

$$\forall i, j \quad B_{ij} = {}^t B_{ji} .$$

Imponiamo ora la condizione che gli operatori commutino, ossia, in termini di matrici, che $AB = BA$. Ma

$$AB = \left(\begin{array}{c|c|c} \lambda_1 B_{11} & \cdots & \lambda_1 B_{1k} \\ \hline \vdots & & \vdots \\ \hline \lambda_k B_{k1} & \cdots & \lambda_k B_{kk} \end{array}\right)$$

mentre

$$BA = \left(\begin{array}{c|c|c} \lambda_1 B_{11} & \cdots & \lambda_k B_{1k} \\ \hline \vdots & & \vdots \\ \hline \lambda_1 B_{k1} & \cdots & \lambda_k B_{kk} \end{array}\right).$$

Quindi la condizione $AB = BA$ si traduce in termini di blocchi in

$$\forall i, j \quad \lambda_i B_{ij} = \lambda_j B_{ij} .$$

Pertanto, dato che se $i \neq j$ si ha $\lambda_i \neq \lambda_j$, deve aversi

$$\forall i \neq j \quad B_{ij} = 0 .$$

In definitiva $g \in E$ se e solo se la sua matrice associata, rispetto ad una base spettrale per f, è del tipo

$$B = \begin{pmatrix} \boxed{B_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{B_k} \end{pmatrix}$$

dove ogni B_i è una matrice simmetrica di ordine h_i. Quindi la dimensione di E è data da

$$\dim E = \sum_{i=1}^{k} \frac{h_i(h_i+1)}{2} .$$

Si può calcolare la dimensione di E anche senza ricorrere a calcoli con le matrici.

Il fatto che g ed f commutino garantisce che gli autospazi di f sono g-invarianti. Infatti siano λ e $E(\lambda, f)$ un autovalore per f ed il relativo autospazio; allora, se $v \in E(\lambda, f)$,

$$f\big(g(v)\big) = g\big(f(v)\big) = g(\lambda v) = \lambda g(v) .$$

Quindi $g(v) \in E(\lambda, f)$. Osserviamo ora che, se g lascia invariati tutti gli autospazi di f, allora g ed f commutano. Infatti, siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ gli autovalori di f e $V_1, \ldots, V_k$ i rispettivi autospazi, ossia $V_i = E(\lambda_i, f)$. Per il teorema spettrale sappiamo che

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k . \tag{1}$$

Sia $v \in V$ e sia $v = \sum_1^k v_i$ la sua decomposizione lungo gli autospazi; allora

$$\begin{aligned} g \circ f(v) &= g\Big(f\big(\sum_{i=1}^{k} v_i\big)\Big) = g\big(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i\big) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i g(v_i) = \\ &= \sum_{i=1}^{k} f\big(g(v_i)\big) = f\big(\sum_{i=1}^{k} g(v_i)\big) = f \circ g(v) . \end{aligned}$$

Osserviamo infine che un operatore g che lascia invariati gli autospazi di f è autoaggiunto se e solo se, per ogni $i = 1, \ldots, k$, l'operatore $g_{|V_i} : V_i \to V_i$ è autoaggiunto rispetto al prodotto scalare definito positivo $\langle\ ,\ \rangle|_{V_i}$, dato che gli autospazi di f nella decomposizione (1) sono, sempre per il teorema spettrale, mutuamente ortogonali.

Ciò permette quindi di definire l'applicazione

$$\varphi : E \longrightarrow \mathcal{S}(V_1) \times \cdots \times \mathcal{S}(V_k)$$
$$\varphi : g \longmapsto (g_{|V_1}, \ldots, g_{|V_k})$$

che è chiaramente lineare. Dalla (1) segue immediatamente che φ è iniettiva, in quanto, se $g_{|V_i} = 0$ per ogni i, allora $g = 0$. D'altra parte è anche surgettiva, infatti se $(g_1, \ldots, g_k) \in \mathcal{S}(V_1) \times \cdots \times \mathcal{S}(V_k)$ si consideri l'operatore

$$g : V \longrightarrow V$$
$$g : v = \sum_{i=1}^{k} v_i \longmapsto \sum_{i=1}^{k} g_i(v_i) .$$

Evidentemente $\varphi(g) = (g_1, \ldots, g_k)$, ed inoltre $g_{|V_i} = g_i$ è autoaggiunto per ogni i, quindi anche g lo è; in più g lascia invariati gli autospazi di f e quindi commuta con f. In altri termini $g \in E$.

Ma allora la dimensione dello spazio E è data da

$$\begin{aligned} \dim E &= \dim\big(\mathcal{S}(V_1) \times \cdots \times \mathcal{S}(V_k)\big) \\ &= \sum_{i=1}^{k} \dim \mathcal{S}(V_i) = \sum_{i=1}^{k} \frac{h_i(h_i+1)}{2} \end{aligned}$$

essendo $h_i = \dim V_i$, ossia la molteplicità (algebrica o geometrica) dell'autovalore λ_i per f. □

Soluzione dell'Esercizio 103. Si osserva subito che $A_{ji} = {}^t(({}^tA)_{ij})$ e quindi

$$\det A_{ji} = \det({}^tA)_{ij} = \det(-A)_{ij} .$$

Allora

$$\begin{aligned}[\widetilde{A}]_{i,j} &= (-1)^{i+j}\det A_{ji} = (-1)^{i+j}\det(-A)_{ij} = \\ &= (-1)^{i+j}(-1)^{n-1}\det A_{ij} = (-1)^{n-1}[\widetilde{A}]_{j,i}\end{aligned}$$

da cui segue immediatamente la tesi. □

Soluzione dell'Esercizio 104. Una implicazione è facile da provare: sia infatti N una matrice ortogonale tale che

$$N^{-1}AN = D_1 \qquad \text{e} \qquad N^{-1}BN = D_2$$

con D_1, D_2 matrici diagonali. Allora $A = ND_1N^{-1} = ND_1{}^tN$, da cui segue subito che A è simmetrica; analogamente anche B è simmetrica. Inoltre

$$\begin{aligned}AB &= (ND_1N^{-1})(ND_2N^{-1}) = ND_1D_2N^{-1} = \\ &= ND_2D_1N^{-1} = (ND_2N^{-1})(ND_1N^{-1}) = BA\,.\end{aligned}$$

Viceversa supponiamo che le matrici A, B siano simmetriche e commutino. Da queste ipotesi segue subito che esse sono diagonalizzabili simultaneamente (cfr. esercizio B), cioè esiste una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^n$ formata da autovettori sia per A che per B. Se M è la matrice di passaggio dalla base canonica alla base $\mathcal{B}$, si ha allora

$$M^{-1}AM = D_1 \qquad \text{e} \qquad M^{-1}BM = D_2$$

con D_1, D_2 matrici diagonali.

Per provare la tesi, dobbiamo dimostrare che esiste una base comune di autovettori, che sia ortonormale.

Applicando il procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt alla base $\mathcal{B}$, otteniamo una base ortonormale $\mathcal{S}$ che, proprio per come funziona il metodo di Gram-Schmidt, risulta essere una base a ventaglio sia per A che per B. Le matrici associate ad A e B rispetto alla base $\mathcal{S}$ sono dunque triangolari; precisamente, se denotiamo con L la matrice di passaggio dalla base $\mathcal{B}$ alla base $\mathcal{S}$, si ha

$$L^{-1}M^{-1}AML = T_1 \qquad \text{e} \qquad L^{-1}M^{-1}BML = T_2$$

con T_1, T_2 matrici triangolari. La matrice $N = ML$, in quanto matrice di passaggio fra la base canonica e la base $\mathcal{S}$, ossia fra basi ortonormali, risulta essere ortogonale. Si ha così

$$N^{-1}AN = T_1 \qquad \text{e} \qquad N^{-1}BN = T_2\,.$$

Poiché A e B sono per ipotesi simmetriche ed N è ortogonale, le matrici $N^{-1}AN$ e $N^{-1}BN$ sono simmetriche. Ma allora T_1 e T_2, essendo sia triangolari che simmetriche, sono diagonali e ciò prova la tesi.

La dimostrazione appena vista utilizza l'esistenza di una base comune di autovettori, provata nella soluzione dell'esercizio B, e poi ricorre al procedimento di Gram-Schmidt per renderla ortonormale. Un altro modo di procedere è quello di modificare la costruzione usata nell'esercizio B, utilizzando l'ipotesi di simmetria, in modo da costruire direttamente una base ortonormale di autovettori.

Ricordiamo che le matrici simmetriche A, B rappresentano due operatori autoaggiunti di $\mathbb{R}^n$ dotato del prodotto scalare standard. Siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ gli autovalori di A e $E(\lambda_i, A)$ i rispettivi autospazi; essendo A diagonalizzabile, si ha

$$\mathbb{R}^n = E(\lambda_1, A) \oplus \cdots \oplus E(\lambda_k, A),$$

e, se $i \neq j$, i sottospazi $E(\lambda_i, A)$ e $E(\lambda_j, A)$ sono ortogonali.

Dall'ipotesi $AB = BA$ segue che $B\big(E(\lambda_i, A)\big) \subseteq E(\lambda_i, A)$ (cfr. soluzione dell'esercizio B). Ora, l'endomorfismo $B|_{E(\lambda_i,A)} : E(\lambda_i, A) \to E(\lambda_i, A)$ è chiaramente autoaggiunto e quindi, per il teorema spettrale, esiste una base $\mathcal{B}_i$ ortonormale di $E(\lambda_i, A)$ di autovettori per B. D'altra parte i vettori di $\mathcal{B}_i$, appartenendo a $E(\lambda_i, A)$, sono autovettori anche per A. Basta allora considerare la base $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_k$: essa è costituita da autovettori comuni ad A e B ed è ortonormale, visto che gli autospazi $E(\lambda_i, A)$ sono a due a due ortogonali.

Un terzo modo di provare il viceversa è procedendo per induzione su n.

Per $n = 1$, la tesi è evidente.

Per provare il passo induttivo, cominciamo ad osservare che dall'ipotesi $AB = BA$ segue che A e B ammettono un autovettore comune v_1 (cfr. soluzione dell'esercizio 37). Sia $V = \operatorname{Span}(v_1)$. Poiché A e B rappresentano applicazioni autoaggiunte $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e V è un sottospazio invariante, anche $V^\perp$ è invariante sia per A che per B. Visto che $\dim V^\perp = n - 1$, si può applicare l'ipotesi induttiva agli endomorfismi $A|_{V^\perp}$ e $B|_{V^\perp}$ (perché?): ricaviamo così che esiste una base ortonormale $\{v_2, \ldots, v_n\}$ di $V^\perp$ di autovettori sia per A che per B. Allora la base ortonormale $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ è la base cercata. □

Soluzione dell'Esercizio 105. (1) È falso. Si considerino ad esempio

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A e B commutano e hanno entrambe come forma di Jordan

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ma se esistesse una base di Jordan comune, detta M la matrice del cambio di base, si avrebbe

$$M^{-1}AM = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad M^{-1}BM = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui $A = B$, il che non è.

(2) È falso: se J e J' sono due matrici di Jordan, non è detto che esse commutino. Si considerino ad esempio le matrici

$$J = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & & \\ \hline & & 0 & 1 \\ & & 0 & 0 \end{array}\right), \qquad J' = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & 0 & \\ \hline & & & 0 \end{array}\right);$$

è un semplice calcolo verificare che $JJ' \neq J'J$.

Nota. Siano A e B due matrici $n \times n$ che commutano. Se A e B sono diagonalizzabili, allora esiste una base comune di autovettori (cfr. esercizio B); se A e B sono triangolabili, allora esiste una base comune a ventaglio (cfr. esercizio 37). L'esercizio mostra che l'ipotesi di commutatività non è sufficiente perché esista una base di Jordan comune. □

Soluzione dell'Esercizio 106. Osserviamo che, se interpretiamo A come la matrice associata ad una applicazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ rispetto ad una qualche base, e B come la matrice associata ad una forma bilineare non degenere b su $\mathbb{R}^n$ rispetto alla stessa base, allora la matrice A' non è altro che la matrice associata all'applicazione f^*, aggiunta di f rispetto a b. Quindi A'' è la matrice associata ad f^{**} rispetto alla stessa base.

Ricordiamo ora che, se b è una forma bilineare simmetrica, allora $f^{**} = f$ per ogni f (cfr. esercizio H), e la stessa dimostrazione che prova questo fatto, riadattata opportunamente, mostra che la stessa conclusione vale anche se b è antisimmetrica (dimostrarlo!).

Ne segue allora che, se B è una matrice simmetrica o antisimmetrica, allora $A'' = A$ per ogni matrice A.

Mostriamo ora che vale anche il viceversa, ossia se $A'' = A$ per ogni A allora ${}^tB = \pm B$.

$$\begin{aligned} A'' &= B^{-1}\,{}^t(A')B = B^{-1}\,{}^t(B^{-1}\,{}^tAB)B = \\ &= B^{-1}\,{}^tBA({}^tB)^{-1}B = \big(({}^tB)^{-1}B\big)^{-1}A\big(({}^tB)^{-1}B\big) \end{aligned}$$

per cui, posto $M = ({}^tB)^{-1}B$, si ha che $A'' = A$ per ogni A se e solo se

$$M^{-1}AM = A \qquad \forall\, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Ma allora, $M = \lambda I$ per qualche $\lambda \in \mathbb{R}$ (cfr. esercizio 5). Passando ai determinanti

$$\lambda^n = \det(\lambda I) = \det M = \det\big(({}^tB)^{-1}B\big) = 1$$

per cui $\lambda = \pm 1$; allora $M = \pm I$ e quindi ${}^tB = \pm B$. □

Soluzione dell'Esercizio 107. Basta provare che A e ${}^tA$ hanno la stessa forma di Jordan.

Intanto A e ${}^tA$, avendo lo stesso polinomio caratteristico, hanno gli stessi autovalori con le stesse molteplicità algebriche. Inoltre, per ciascun autovalore λ, il numero dei blocchi di Jordan di $J(A)$ e l'ordine di ciascuno di essi dipende solo dalle dimensioni dei sottospazi della successione

$$\operatorname{Ker}(A - \lambda I) \subseteq \operatorname{Ker}(A - \lambda I)^2 \subseteq \cdots$$

e quindi dai numeri $\operatorname{rk}(A - \lambda I)^j$ con $j \in \mathbb{N}$.

Poiché $({}^tA - \lambda I)^j = {}^t\big((A - \lambda I)^j\big)$ per ogni j, si ha

$$\operatorname{rk}(A - \lambda I)^j = \operatorname{rk}({}^tA - \lambda I)^j \qquad \forall\, j \in \mathbb{N},$$

dunque $J(A) = J({}^tA)$.

Nota. Si osservi che la tesi dell'esercizio resta vera anche se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Per vedere questo si può usare il fatto che matrici reali simili sui complessi sono, in realtà, simili sui reali (cfr. esercizio 88) o direttamente la forma di Jordan reale (cfr. esercizio 51). □

Soluzione dell'Esercizio 108. Poiché $\langle\ ,\ \rangle$ è definito positivo (cfr. esercizio 12) e quindi non degenere, è ben definito l'operatore φ_A^* aggiunto di φ_A come l'unico operatore di $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ tale che

$$\langle \varphi_A(X), Y\rangle = \langle X, \varphi_A^*(Y)\rangle \qquad \forall\, X, Y \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$$

ossia

$$\operatorname{tr}({}^t(AX)Y) = \langle X, \varphi_A^*(Y)\rangle \qquad \forall\, X, Y \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$$

ovvero

$$\operatorname{tr}({}^tX\,{}^tAY) = \langle X, \varphi_A^*(Y)\rangle \qquad \forall\, X, Y \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R}).$$

In altri termini φ_A^* è caratterizzata dalla proprietà

$$\langle X, {}^tAY\rangle = \operatorname{tr}({}^tX\,{}^tAY) = \langle X, \varphi_A^*(Y)\rangle \qquad \forall\, X, Y \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R}).$$

Dato che $\langle\ ,\ \rangle$ è non degenere, deduciamo che

$$\varphi_A^*(Y) = {}^tAY \qquad \forall\, Y \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R}).$$

A questo punto, perché φ_A sia autoaggiunta, deve aversi che

$$\varphi_A(X) = \varphi_A^*(X) \quad \forall X \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$$

ossia

$$AX = {}^tAX \quad \forall X \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$$

e ciò si verifica se e solo se $A = {}^tA$, cioè se e solo se A è simmetrica. □

Soluzione dell'Esercizio 109. Denotiamo con p l'indice di nilpotenza di A. Poiché, $\forall m \in \mathbb{N}$,

$$(1) \qquad \left(\begin{array}{c|c} A & A \\ \hline 0 & A \end{array}\right)^m = \left(\begin{array}{c|c} A^m & mA^m \\ \hline 0 & A^m \end{array}\right),$$

si deduce subito che anche $\widetilde{A}$ ha indice di nilpotenza p; in particolare dunque il massimo ordine dei blocchi di Jordan contenuti in J e in $\widetilde{J}$ è lo stesso.

Come è noto, il numero dei blocchi di Jordan di J e l'ordine di ciascuno di essi dipende solo dalla successione decrescente di numeri

$$\operatorname{rk} A > \operatorname{rk} A^2 > \cdots > \operatorname{rk} A^p = 0\,.$$

Proviamo che $\operatorname{rk} \widetilde{A} = 2 \operatorname{rk} A$.

Intanto, posto $\operatorname{rk} A = k$, sia B un minore di A di ordine k con $\det B \neq 0$. Allora

$$\left(\begin{array}{c|c} B & B \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$$

è un minore invertibile di $\widetilde{A}$ e quindi $\operatorname{rk} \widetilde{A} \geq 2k$.

D'altra parte

- il massimo numero di righe linearmente indipendenti in $(\,0 \mid A\,)$ è k;
- il massimo numero di righe linearmente indipendenti in $(\,A \mid A\,)$ è k: basta osservare che le righe della matrice $(\,A \mid A\,)$ sono del tipo $(\,R_j \mid R_j\,)$ (dove R_j denota la j-esima riga di A), e quindi ogni relazione di dipendenza lineare fra le righe di $(\,A \mid A\,)$ produce una relazione di dipendenza lineare fra le righe di A e viceversa.

Ne segue che in $\widetilde{A}$ ci sono al massimo $2k$ righe linearmente indipendenti e quindi $\operatorname{rk} \widetilde{A} \leq 2k$.

Vista la (1), modificando leggermente il ragionamento precedente, si vede che, $\forall m \in \mathbb{N}$,

$$rk\widetilde{A}^m = 2 \operatorname{rk} A^m\,.$$

Di conseguenza, per ogni fissato intero s compreso fra 1 e p, il numero dei blocchi di Jordan di $\widetilde{J}$ di ordine s è il doppio del numero dei blocchi di Jordan dello stesso ordine presenti in J. A meno di riordinare tali blocchi, si ha dunque che

$$\widetilde{J} = \left(\begin{array}{c|c} J & 0 \\ \hline 0 & J \end{array}\right). \quad \square$$

Soluzione dell'Esercizio 110. Una implicazione è ovvia, infatti A, essendo simmetrica, ha, come noto, tutti gli autovalori reali e $A{}^tA = A^2 = {}^tAA$.

Viceversa, se A ha tutti gli autovalori in $\mathbb{R}$ esiste una base ortonormale (rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^n$) a ventaglio per A (cfr. esercizio 16), ossia esiste una matrice ortogonale M tale che $T = {}^tMAM$ è triangolare superiore. Osserviamo ora che

$$\begin{aligned} T{}^tT &= {}^tMAM{}^tM{}^tAM = {}^tMA{}^tAM = \\ &= {}^tM{}^tAAM = {}^tM{}^tAM{}^tMAM = {}^tTT\,. \end{aligned}$$

Dal fatto che T è triangolare, si deduce che la relazione precedente è verificata se e solo se T è in realtà diagonale. Infatti sia

$$T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix};$$

il termine di posto 1,1 di ${}^tTT$ è dato da a_{11}^2 mentre quello di $T{}^tT$ è dato da $\sum_i a_{1i}^2$, quindi uguagliandoli si ottiene $a_{1i} = 0$ per ogni $i = 2, \ldots, n$. Proseguendo ad uguagliare i termini sulla diagonale di ${}^tTT$ e $T{}^tT$, si ottiene la tesi. (Formalizzare con una induzione!)

Ma allora T, essendo diagonale, è in particolare simmetrica e quindi

$${}^tA = {}^t(MT{}^tM) = {}^tM{}^tTM = {}^tMTM = A,$$

ossia A risulta essere simmetrica.

Nota. In particolare dall'esercizio segue che, se A è una matrice reale ortogonale avente tutti gli autovalori reali, allora A è simmetrica e quindi diagonalizzabile. Per un'altra dimostrazione di questo fatto si veda la soluzione dell'esercizio 122. □

Soluzione dell'Esercizio 111. Se $A = 0$, la tesi è banale. Supponiamo dunque $A \neq 0$ e osserviamo che allora esiste un vettore v che non è autovettore per A. Infatti, se per assurdo tutti i vettori di $\mathbb{R}^n$ fossero autovettori, allora tutto $\mathbb{R}^n$ sarebbe un unico autospazio (perché?) e quindi ci sarebbe un solo autovalore. Avremmo quindi $A = \lambda I$; ma dato che $\operatorname{tr} A = 0$ per ipotesi, si avrebbe $A = 0$, il che è assurdo.

Procediamo per induzione sull'ordine della matrice n. Per $n = 1$ la tesi è banale. Sia $n > 1$. Essendo $A \neq 0$, sappiamo che esiste un vettore v che non è autovettore per A; ciò significa che v ed Av sono linearmente indipendenti. Se completiamo $\{v, Av\}$ ad una base di $\mathbb{R}^n$ e scriviamo la matrice associata rispetto ad una tale base all'applicazione definita da A, si ottiene una matrice $\widetilde{A}$ simile ad A che ha la forma

$$\widetilde{A} = N_1^{-1} A N_1 = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & * & \cdots & * \\ \hline 1 & & & \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{array}\right).$$

Se $B = 0$ la tesi è provata; altrimenti possiamo applicare l'ipotesi di induzione, visto che $\operatorname{tr} B = \operatorname{tr} \widetilde{A} = \operatorname{tr} A = 0$. Esiste quindi $\widetilde{N}_2 \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ invertibile e tale che $\widetilde{N}_2^{-1} B \widetilde{N}_2$ ha tutti zeri sulla diagonale principale. Posto

$$N_2 = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \widetilde{N}_2 & \\ 0 & & & \end{array}\right),$$

si ha che

$$N_2^{-1} N_1^{-1} A N_1 N_2 = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & * & \cdots & * \\ \hline * & & & \\ \vdots & & \widetilde{N}_2^{-1} B \widetilde{N}_2 & \\ * & & & \end{array}\right)$$

che ha tutti zeri sulla diagonale. □

Soluzione dell'Esercizio 112. Ricordiamo che

- una matrice è nilpotente $\iff$ ha tutti gli autovalori uguali a 0;
- λ è autovalore per $A \iff \lambda - 1$ è autovalore per $A - I$.

Pertanto $A - I$ è nilpotente se e solo se A ha solo l'autovalore 1. Ma l'unica matrice ortogonale A avente solo l'autovalore 1 è I: infatti A è diagonalizzabile (si veda la nota alla fine dell'esercizio 110), per cui è simile, e quindi uguale, a I.

Un altro modo per risolvere l'esercizio è il seguente. Se $A - I$ è nilpotente, allora $(A - I)^n = 0$ (cfr. esercizio 33); di conseguenza A è radice del polinomio

$(t-1)^n$ e quindi il polinomio minimo di A è del tipo $(t-1)^s$ per qualche intero $s \leq n$. Poiché le radici del polinomio minimo di una matrice sono esattamente gli autovalori della matrice, ne segue che A ha solo l'autovalore 1. Ragionando come sopra si deduce che allora $A = I$. □

Soluzione dell'Esercizio 113. Supponiamo che $\langle\ ,\ \rangle$ non sia né definito positivo né definito negativo; allora esistono due vettori $v, w \in V$ tali che $\langle v, v\rangle > 0$ e $\langle w, w\rangle < 0$. Osserviamo che i due vettori v e w sono necessariamente indipendenti, infatti se $w = \lambda v$ allora si avrebbe che $\langle w, w\rangle = \langle \lambda v, \lambda v\rangle = \lambda^2 \langle v, v\rangle \geq 0$. Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ si consideri il vettore $u_\alpha = \alpha v + (1-\alpha) w$. Dato che v e w sono indipendenti, $u_\alpha \neq 0$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$. Per la bilinearità e la simmetria di $\langle\ ,\ \rangle$ risulta

$$\begin{aligned}\langle u_\alpha, u_\alpha\rangle &= \langle \alpha v + (1-\alpha) w, \alpha v + (1-\alpha) w\rangle = \\ &= \alpha^2 \langle v, v\rangle + (1-\alpha)^2 \langle w, w\rangle + 2\alpha(1-\alpha)\langle v, w\rangle = \\ &= \big(\langle v, v\rangle + \langle w, w\rangle - 2\langle v, w\rangle\big)\alpha^2 + 2\big(\langle v, w\rangle - \langle w, w\rangle\big)\alpha + \langle w, w\rangle .\end{aligned}$$

Il discriminante del polinomio di secondo grado in α così ottenuto è dato da

$$\big(\langle v, w\rangle - \langle w, w\rangle\big)^2 - \langle w, w\rangle\big(\langle v, v\rangle + \langle w, w\rangle - 2\langle v, w\rangle\big) = \langle v, w\rangle^2 - \langle v, v\rangle\langle w, w\rangle$$

che è positivo, in quanto $\langle v, v\rangle\langle w, w\rangle < 0$. Ma allora questo significa che il polinomio di secondo grado in α ammette radici reali, in altre parole esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $\langle u_\alpha, u_\alpha\rangle = 0$. Ma ciò contraddice l'ipotesi.

Un altro modo di risolvere l'esercizio è il seguente. Procedendo sempre per assurdo, siano $v, w \in V$ tali che $\langle v, v\rangle > 0$ e $\langle w, w\rangle < 0$. Si consideri il vettore $w' = w - (\langle v, w\rangle / \langle v, v\rangle) v$. Un semplice calcolo mostra che

$$\langle v, w'\rangle = 0$$

$$\langle w', w'\rangle = \langle w, w\rangle - \frac{\langle v, w\rangle^2}{\langle v, v\rangle} < 0 .$$

Detti $v'' = v/\sqrt{\langle v, v\rangle}$ e $w'' = w'/\sqrt{-\langle w', w'\rangle}$, risulta $\langle v'', v''\rangle = -\langle w'', w''\rangle = 1$. Ma allora, come prima, v'' e w'' sono linearmente indipendenti, quindi $u = v'' + w'' \neq 0$; in più, per come sono stati presi v'' e w'',

$$\langle u, u\rangle = \langle v'' + w'', v'' + w''\rangle = \langle v'', v''\rangle + \langle w'', w''\rangle + 2\langle v'', w''\rangle = 0$$

che è assurdo. □

Soluzione dell'Esercizio 114. Se $A \in \mathcal{F}$, la relazione ${}^t\!MAM = A$ vale in particolare per ogni matrice ortogonale M e quindi $M^{-1}AM = A$ per ogni M ortogonale. Per quanto visto nell'esercizio 5, da ciò segue che A è una matrice scalare, cioè $A = \lambda I$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

Poiché ${}^t\!M\lambda I M = \lambda {}^t\!MM$, la matrice λI sta in $\mathcal{F}$ se e solo se

$$ {}^t\!M\lambda I M = \lambda I \quad \forall M \in GL_n(\mathbb{R}) \iff \lambda({}^t\!MM - I) = 0 \quad \forall M \in GL_n(\mathbb{R})\,. $$

Dato che non tutte le matrici invertibili sono ortogonali, da ciò segue $\lambda = 0$, ossia l'unica matrice che verifica la relazione richiesta è la matrice nulla. □

Soluzione dell'Esercizio 115. Sia S una base ortonormale di V. Si può facilmente vedere che, se A è la matrice associata a f rispetto alla base S, la matrice associata ad f^* rispetto a S è ${}^t\!A$ (dimostrarlo!).

D'altra parte la matrice A è simile a ${}^t\!A$ (cfr. esercizio 107), per cui esiste una matrice invertibile M tale che ${}^t\!A = M^{-1}AM$. Per avere la tesi basta allora prendere come φ l'isomorfismo associato alla matrice M rispetto ad S. □

Soluzione dell'Esercizio 116. Indichiamo con O_A il sottinsieme che si vuole studiare. Osserviamo innanzitutto che l'insieme delle applicazioni lineari invertibili che conservano g è ovviamente un sottogruppo di $GL_n(\mathbb{R})$, ma allora O_A, essendo intersezione di tale sottogruppo di $GL_n(\mathbb{R})$ con O_n, è chiaramente un sottogruppo di O_n.

Visto che $g(x,y) = {}^t\!xAy$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$, si ha che una matrice ortogonale B appartiene a O_A se e solo se

$$ {}^t\!x\,{}^t\!BABy = {}^t\!xAy \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n $$

ovvero se e solo se

$$ {}^t\!BAB = A \iff AB = BA\,. $$

Il problema è quindi ricondotto a vedere quali matrici ortogonali commutano con la matrice simmetrica A.

Per il teorema spettrale esiste una matrice ortogonale M tale che

$$ A' = {}^t\!MAM = \begin{pmatrix} \boxed{\lambda_1 I_{k_1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{\lambda_h I_{k_h}} \end{pmatrix} $$

dove i λ_i sono gli autovalori (distinti) di A e i k_i le rispettive molteplicità. È evidente che la matrice B commuta con A se e solo se la matrice $B' = {}^t\!MBM$, che è ancora ortogonale, commuta con A'. Scriviamo B' a blocchi della stessa dimensione di quelli di A':

$$ B' = \left(\begin{array}{c|c|c} B_{11} & \cdots & B_{1h} \\ \hline \vdots & & \vdots \\ \hline B_{h1} & \cdots & B_{hh} \end{array}\right). $$

È facile vedere che la condizione che A' e B' commutino è equivalente a dire che $B_{ij} = 0$ per ogni $i \neq j$ (cfr. soluzione dell'esercizio 102), per cui

$$ \text{(1)} \qquad B' = \begin{pmatrix} \boxed{B_{11}} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{B_{hh}} \end{pmatrix}. $$

Visto che

$$ I = {}^t\!B'B' = \begin{pmatrix} \boxed{{}^t\!B_{11}B_{11}} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{{}^t\!B_{hh}B_{hh}} \end{pmatrix} $$

ne consegue che ogni B_{ii} è una matrice ortogonale $k_i \times k_i$. In definitiva il gruppo $O_{A'}$ delle matrici ortogonali che commutano con A' è costituito dalle matrici del tipo (1), dove tutte le B_{ii} sono matrici ortogonali $k_i \times k_i$; in altre parole il gruppo $O_{A'}$ è isomorfo al prodotto diretto $\prod_{i=1}^h O_{k_i}$. Infine, visto che l'applicazione $O_A \to O_{A'}$, definita da $B \mapsto {}^t\!MBM$ è evidentemente un isomorfismo di gruppi, si ha una completa descrizione del gruppo.

Per concludere osserviamo che i fattori diretti del gruppo O_A sono dati dalle applicazioni ortogonali che lasciano un autospazio di A invariato e che sono l'identità ristrette a tutti gli altri. □

Soluzione dell'Esercizio 117. Sia f diagonalizzabile, e sia $\{v_1, v_2, v_3\}$ una base di autovettori. Presi $W_1 = \operatorname{Span}(v_1, v_2)$ e $W_2 = \operatorname{Span}(v_1, v_3)$, si ha evidentemente che $f(W_i) \subseteq W_i$ e $\dim W_i = 2$ per $i = 1, 2$.

Viceversa, supponiamo che esistano W_1 e W_2 con le proprietà richieste. Dato che W_1 e W_2 sono diversi, allora $W_1 \cap W_2 = R$ è un sottospazio di dimensione 1, e dato che i W_i sono invarianti, anche R lo è. Ma allora R è generato da un autovettore di f.

Poiché f è ortogonale, si ha che $R^\perp$ è invariante per f, e quindi i due sottospazi $R_i = R^\perp \cap W_i$ sono invarianti per f.

Inoltre, essendo $R \subset W_i$ per $i = 1, 2$, si ha che $R^\perp \neq W_i$, quindi $\dim R_i = 1$ ossia R_i è generato da un autovettore di f.

Infine, dato che $W_i = R \oplus R_i$ per $i = 1, 2$ e che $\mathbb{R}^3 = W_1 + W_2$, si ha $\mathbb{R}^3 = R \oplus R_1 \oplus R_2$. Prendendo generatori di R, R_1 ed R_2 si ottiene quindi una base di autovettori per f.

Nel caso che f non sia ortogonale, chiaramente vale la prima implicazione (la dimostrazione fornita sopra non usa mai l'ipotesi di ortogonalità). Non vale in generale la seconda implicazione. Si consideri ad esempio l'applicazione

$f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definita dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Chiaramente i sottospazi

$$W_1 = \mathrm{Span}\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle \quad \text{e} \quad W_2 = \mathrm{Span}\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

sono invarianti per f, e d'altra parte f non è diagonalizzabile (la matrice A è già in forma di Jordan). □

Soluzione dell'Esercizio 118. (1) è falsa. Ad esempio, se

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

otteniamo

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che ovviamente non sono simili.

(2) è vera.

Intanto 0 è autovalore per AB se e solo se 0 è autovalore per BA, perché AB è singolare se e solo se BA lo è.

Per quanto riguarda gli autovalori non nulli, supponiamo che $\lambda \neq 0$ sia autovalore per AB; allora esiste $v \in \mathbf{C}^n, v \neq 0$ tale che $ABv = \lambda v$ (in particolare $Bv \neq 0$). Ne segue che $B(ABv) = \lambda(Bv)$, ossia $(BA)(Bv) = \lambda(Bv)$ e quindi λ è autovalore anche per BA.

Scambiando i ruoli di A e B, si ha che anche ogni autovalore non nullo di BA è autovalore di AB; questo prova la (2).

(3) è vera.

Sappiamo già, per (2), che AB e BA hanno gli stessi autovalori, diciamo $\lambda_1, \dots, \lambda_k$; dobbiamo provare che questi hanno le stesse molteplicità algebriche rispetto ad AB ed a BA, in simboli $m(\lambda_i, AB) = m(\lambda_i, BA)$ per $i = 1, \dots, k$.

Cominciamo a considerare il caso più semplice in cui AB e BA sono diagonalizzabili. In questo caso sappiamo che

$$m(\lambda_i, AB) = \dim E(\lambda_i, AB) \quad \text{e} \quad m(\lambda_i, BA) = \dim E(\lambda_i, BA).$$

Basta dunque dimostrare che $\forall i = 1, \dots, k$, i sottospazi $E(\lambda_i, AB)$ e $E(\lambda_i, BA)$ sono isomorfi.

In (2) abbiamo provato che, se $\lambda_i \neq 0$, $B\big(E(\lambda_i, AB)\big) \subseteq E(\lambda_i, BA)$; facciamo allora vedere che

$$B|_{E(\lambda_i, AB)} : E(\lambda_i, AB) \longrightarrow E(\lambda_i, BA)$$

è un isomorfismo.

Iniettività: sia $v \in E(\lambda_i, AB)$ tale che $Bv = 0$. Allora $0 = A(Bv) = (AB)v = \lambda_i v$. Essendo $\lambda_i \neq 0$, si ha che $v = 0$.

Surgettività: sia $w \in E(\lambda_i, BA)$. Allora $BAw = \lambda_i w$, ed anche $ABAw = \lambda_i Aw$, ossia $Aw \in E(\lambda_i, AB)$. Ora, si ha che

$$v = \frac{1}{\lambda_i} Aw \in E(\lambda_i, AB) \quad \text{e} \quad Bv = \frac{1}{\lambda_i} BAw = \frac{1}{\lambda_i}(\lambda_i w) = w,$$

il che prova la surgettività.

Osserviamo che si poteva dimostrare che $B|_{E(\lambda_i, AB)}$ è un isomorfismo anche usando la successione di applicazioni

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r, "A"] & E(\lambda_i, AB) \arrow[r, "B"] \arrow[rr, bend left, "A \circ B"] & E(\lambda_i, BA) \arrow[r, "A"] \arrow[rr, bend right, "B \circ A"'] & E(\lambda_i, AB) \arrow[r, "B"] & E(\lambda_i, BA) \arrow[r, "A"] & \cdots \end{tikzcd}$$

Poiché $A \circ B : E(\lambda_i, AB) \to E(\lambda_i, AB)$ è un isomorfismo per ogni $\lambda_i \neq 0$, in particolare $B|_{E(\lambda_i, AB)}$ è iniettiva. Analogamente, dal fatto che $B \circ A : E(\lambda_i, BA) \to E(\lambda_i, BA)$ è un isomorfismo, segue che $B|_{E(\lambda_i, AB)}$ è surgettiva.

Abbiamo così dimostrato che, $\forall \lambda_i \neq 0$, $\dim E(\lambda_i, AB) = \dim E(\lambda_i, AB)$. Se 0 è autovalore per AB e per BA, dal fatto che

$$\mathbf{C}^n = E(\lambda_1, AB) \oplus \cdots \oplus E(\lambda_k, AB) = E(\lambda_1, BA) \oplus \cdots \oplus E(\lambda_k, BA),$$

segue che necessariamente anche $\dim E(0, AB) = \dim E(0, BA)$.

Nel caso generale (in cui AB e BA non sono necessariamente diagonalizzabili), basta modificare la dimostrazione precedente, usando gli autospazi generalizzati al posto degli autospazi ordinari. Infatti abbiamo che

$$\mathbf{C}^n = E'(\lambda_1, AB) \oplus \cdots \oplus E'(\lambda_k, AB) = E'(\lambda_1, BA) \oplus \cdots \oplus E'(\lambda_k, BA)$$

e che

$$m(\lambda_i, AB) = \dim E'(\lambda_i, AB) \quad \text{e} \quad m(\lambda_i, BA) = \dim E'(\lambda_i, BA).$$

Basta allora dimostrare che $E'(\lambda_i, AB)$ e $E'(\lambda_i, BA)$ sono isomorfi per ogni i.

Intanto proviamo che $B(E'(\lambda_i, AB)) \subseteq E'(\lambda_i, BA)$. A tale scopo useremo il fatto che, $\forall s \in \mathbf{N}$,

$$B(AB - \lambda_i I)^s = (BA - \lambda_i I)^s B,$$

dimostrabile per induzione e che lasciamo per esercizio al lettore.

Sia dunque $v \in E'(\lambda_i, AB)$; allora $\exists j \in \mathbb{N}$ tale che $(AB - \lambda_i I)^j v = 0$, e quindi anche $B(AB - \lambda_i I)^j v = 0$; ossia $(BA - \lambda_i I)^j Bv = 0$. Dunque $Bv \in E'(\lambda_i, BA)$, che era quanto volevamo.

Consideriamo ora la successione di applicazioni

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r, "A"] & E'(\lambda_i, AB) \arrow[r, "B"] \arrow[rr, bend left, "A\circ B"] & E'(\lambda_i, BA) \arrow[r, "A"] \arrow[rr, bend right, "B\circ A"'] & E'(\lambda_i, AB) \arrow[r, "B"] & E'(\lambda_i, BA) \arrow[r, "A"] & \cdots \end{tikzcd}$$

Se $\lambda_i \neq 0$,

$$A \circ B|_{E'(\lambda_i, AB)} \qquad \text{e} \qquad B \circ A|_{E'(\lambda_i, BA)}$$

sono isomorfismi; deduciamo quindi, come sopra, che

$$B|_{E'(\lambda_i, AB)} : E'(\lambda_i, AB) \to E'(\lambda_i, BA)$$

è un isomorfismo e dunque

$$\dim E'(\lambda_i, AB) = \dim E'(\lambda_i, BA) \qquad \forall \lambda_i \neq 0 .$$

Come prima, per differenza, si ottiene anche $\dim E'(0, AB) = \dim E'(0, BA)$ e quindi la tesi.

Nota. Abbiamo provato che AB e BA hanno gli stessi autovalori con le stesse molteplicità algebriche e quindi lo stesso polinomio caratteristico. In particolare, se AB e BA sono diagonalizzabili, esse hanno la stessa forma diagonale e quindi sono simili.

Un esempio di questa situazione è quando $B = {}^tA$, infatti sia $A\,{}^tA$ che ${}^tAA$ sono diagonalizzabili, in quanto simmetriche. Otteniamo dunque che, $\forall A$, le matrici $A\,{}^tA$ che ${}^tAA$ sono simili. □

Soluzione dell'Esercizio 119. Dimostriamo preliminarmente che la tesi dell'esercizio può essere espressa in modo equivalente come segue:

> *A è prodotto di due matrici simmetriche, di cui almeno una invertibile $\iff$ esiste S simmetrica invertibile tale che* $A = S^{-1} \cdot {}^tA \cdot S$.

Infatti, se abbiamo $A = S^{-1} \cdot {}^tA \cdot S$, basta provare che $T = S^{-1} \cdot {}^tA$ è simmetrica e ciò è vero perché

$${}^tT = {}^t(S^{-1} \cdot {}^tA) = A \cdot {}^t(S^{-1}) = S^{-1} \cdot {}^tA \cdot S \cdot {}^t(S^{-1}) = T .$$

Viceversa, supponiamo $A = TS$, con T e S simmetriche, da cui segue che ${}^tA = ST$. Se S è invertibile, allora

$$A = TS = S^{-1}STS = S^{-1} \cdot {}^tA \cdot S .$$

Se invece T è invertibile, allora

$${}^tA = ST = T^{-1}TST = T^{-1}AT .$$

Dunque per provare l'esercizio, basta mostrare che A è simile alla sua trasposta tramite una matrice S simmetrica.

Osserviamo intanto che i blocchi di Jordan (e quindi tutte le matrici di Jordan) sono prodotto di matrici simmetriche, di cui una invertibile; basta infatti permutare le righe del blocco moltiplicando a sinistra per una matrice di permutazione opportuna. Ad esempio, nel caso di un blocco di ordine 3 si ha

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda \\ 0 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Nel caso in cui $\mathbf{K} = \mathbb{R}$ è necessario considerare anche i blocchi della forma di Jordan reale; anch'essi però sono prodotto di matrici simmetriche, infatti

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -b & a \\ a & b \end{pmatrix}$$

e

$$\left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ -b & a & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & -b & a \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & -b & a \\ 0 & 0 & a & b \\ \hline -b & a & 0 & 1 \\ a & b & 1 & 0 \end{array}\right) .$$

Dunque, per quanto visto sopra, per ogni matrice di Jordan (o di Jordan reale) esiste una matrice S simmetrica invertibile tale che $J = S^{-1} \cdot {}^tJ \cdot S$.

Ora, per ogni matrice A, esiste M invertibile tale che $A = M^{-1}JM$, dove J è la forma di Jordan, o di Jordan reale, di A. Di conseguenza, esiste S simmetrica invertibile tale che $J = S^{-1} \cdot {}^tJ \cdot S$.

Da ciò segue che

$$\begin{aligned} A = M^{-1}JM &= M^{-1}S^{-1} \cdot {}^tJ \cdot SM = M^{-1}S^{-1} \cdot {}^tM^{-1} \cdot {}^tA \cdot {}^tMSM = \\ &= ({}^tMSM)^{-1} \cdot {}^tA({}^tMSM) . \end{aligned}$$

La matrice $T = {}^tMSM$ è simmetrica invertibile e $A = T^{-1} \cdot {}^tA \cdot T$, quindi per l'equivalenza vista all'inizio la tesi è provata.

Nota. Abbiamo fra l'altro migliorato il risultato dell'esercizio 107, provando che ogni matrice è simile alla sua trasposta tramite una matrice simmetrica. □

Soluzione dell'Esercizio 120. Sia $f^* : V \to V$ l'applicazione aggiunta di f. L'applicazione $g = f + f^*$ è autoaggiunta e quindi, per il teorema spettrale, esiste una base ortonormale $\mathcal{B}$ di V formata da autovettori per g.

Se denotiamo con M e A le matrici associate rispettivamente a g e ad f rispetto alla base $\mathcal{B}$, si ha che M è diagonale e che la matrice associata ad f^* rispetto a $\mathcal{B}$ (che è ortonormale) è ${}^tA$. Dunque abbiamo che

$$A + {}^tA = M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

da cui si ricava subito che A è del tipo richiesto dalla tesi. □

Soluzione dell'Esercizio 121. Sia $\widetilde{M}$ la matrice aggiunta di M. Visto che $M^{-1} = (1/\det M)\widetilde{M}$, è evidente che le quattro matrici dell'esercizio sono linearmente dipendenti se e solo se lo sono le quattro matrici

$$M, \qquad {}^tM, \qquad \widetilde{M}, \qquad {}^t\widetilde{M}.$$

Dimostriamo che queste quattro matrici sono linearmente dipendenti (indipendentemente, ora, dal fatto che M sia invertibile o meno).

Osserviamo innanzitutto che nel caso di matrici 2×2 l'operatore

$$\begin{aligned} \widetilde{\ } &: \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ \widetilde{\ } &: M \longmapsto \widetilde{M} \end{aligned}$$

è lineare (per matrici di ordine superiore a 2 non è vero) in quanto, se

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

allora

$$\widetilde{M} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Inoltre se A è una matrice 2×2 antisimmetrica, allora $\widetilde{A} = -A$.

Ricordiamo infine che l'operatore $\widetilde{\ }$ commuta con la trasposizione (per matrici di ogni ordine), ossia ${}^t(\widetilde{M}) = {}^t\widetilde{M}$.

Sia $M = S + A$ la decomposizione di M come somma di una matrice simmetrica S e di una antisimmetrica A. Chiaramente risulta

$$\begin{aligned} M &= S + A \\ {}^tM &= {}^t(S + A) = {}^tS + {}^tA = S - A \\ \widetilde{M} &= \widetilde{S + A} = \widetilde{S} + \widetilde{A} = \widetilde{S} - A \\ {}^t\widetilde{M} &= {}^t(\widetilde{S} - A) = {}^t\widetilde{S} - {}^tA = \widetilde{S} + A \end{aligned}$$

quindi le quattro matrici appartengono allo spazio generato da S, A, $\widetilde{S}$ che ha al più dimensione 3, e pertanto sono linearmente dipendenti.

Per quanto riguarda la seconda parte del quesito, proviamo che esistono matrici $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tali che lo spazio generato da

$$M, \qquad {}^tM, \qquad \widetilde{M}, \qquad {}^t\widetilde{M},$$

ha effettivamente dimensione 3. Tali matrici sono esattamente quelle che

(a) hanno parte antisimmetrica A non nulla;

(b) hanno parte simmetrica S tale che S non è una matrice scalare e $\operatorname{tr} S \neq 0$.

Questo segue dal fatto che, essendo S ed $\widetilde{S}$ entrambe simmetriche, la parte antisimmetrica A è indipendente da S ed $\widetilde{S}$ se e solo se è non nulla; inoltre è facile verificare che S ed $\widetilde{S}$ sono linearmente dipendenti se e solo se non vale (b).

Ad esempio la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è tale che la dimensione dello spazio generato dalle quattro matrici sopra definite è esattamente 3. Infatti per questa matrice si ha

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{S} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

che sono linearmente indipendenti.

Notiamo inoltre che ogni volta che fallisce una delle due condizioni sopra enunciate, la dimensione dello spazio generato dalle quattro matrici cala di uno. □

Soluzione dell'Esercizio 122. Se la matrice A ha autovalori reali, allora A è simmetrica: ciò è conseguenza dell'esercizio 110, oppure può essere provato direttamente come segue.

Se A ha tutti gli autovalori reali, esiste una matrice ortogonale M tale che $T = {}^tMAM$ è triangolare superiore (cfr. esercizio 16). La matrice T è anche ortogonale in quanto prodotto di matrici ortogonali, ma allora non è difficile mostrare (farlo!) che le matrici ortogonali triangolari superiori sono in realtà diagonali. Di conseguenza $A = MT^tM$ risulta essere simmetrica.

Per provare la tesi basta dunque dimostrare che, se $\det A = 1$ e $\operatorname{tr} A = -1$, allora gli autovalori di A sono reali. Ricordiamo che gli autovalori, eventualmente complessi, di una matrice ortogonale hanno modulo 1, quindi gli eventuali autovalori reali di A sono solo 1 e -1. Siano α, β e γ i suoi autovalori. Dato che A è una matrice 3×3, ha almeno un autovalore reale, che denotiamo con $\gamma \in \mathbb{R}$.

Se $\gamma = -1$, allora

$$\begin{aligned} \det A = 1 &\implies \alpha\beta = -1 \\ \operatorname{tr} A = -1 &\implies \alpha + \beta = 0 \end{aligned}$$

da cui segue immediatamente che α e β sono reali (uguali a ± 1).

Se $\gamma = 1$, allora

$$\begin{aligned} \det A = 1 &\implies \alpha\beta = 1 \\ \operatorname{tr} A = -1 &\implies \alpha + \beta = -2 \end{aligned}$$

da cui segue che $\alpha = \beta = -1$ e quindi anche in questo caso sono reali.

Da ciò segue la tesi. $\square$

Soluzione dell'Esercizio 123. Osserviamo intanto che se A è una matrice strettamente triangolare, allora $A \in \operatorname{Ker} L$; infatti in tal caso esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che $A^k = 0$ (cfr. esercizio 14) e quindi $L(A^k) = 0$. Per l'ipotesi, $L(A^k) = \left(L(A)\right)^k$, per cui $\left(L(A)\right)^k = 0$ e dunque $L(A) = 0$.

Per dimostrare che L è l'applicazione nulla basta provare che, presa la base $\{E_{i,j}\}_{1 \le i,j \le n}$ di $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ costituita dalle matrici elementari $E_{i,j}$, si ha $L(E_{i,j}) = 0$ per ogni i, j.

Ciò è evidente se $i \neq j$, perché allora $E_{i,j}$ è strettamente triangolare. D'altra parte, anche le matrici $E_{i,i}$ stanno in $\operatorname{Ker} L$ perché, preso un indice $j \neq i$ (esiste in quanto $n > 1$), si ha $E_{i,i} = E_{i,j}E_{j,i}$ e dunque, sfruttando ancora una volta l'ipotesi, $L(E_{i,i}) = 0$. $\square$

Soluzione dell'Esercizio 124. Sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V costituita da autovettori per f e $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ i rispettivi autovalori. Si considerino gli endomorfismi $g_{i,j}$ di V aventi come matrice associata rispetto alla base fissata le matrici elementari $E_{i,j}$; pertanto

$$g_{ij}(v_h) = \delta_{jh} v_i$$

dove δ_{jh} denota il simbolo di Kronecker che vale 1 se $j = h$ e 0 se $j \neq h$.

Gli operatori g_{ij} sono evidentemente una base di $\operatorname{Hom}(V,V)$; dimostriamo che essi sono autovettori per L, mostrando che per ogni i, j si ha

$$L(g_{ij}) = (\lambda_i - \lambda_j) g_{ij} .$$

Per farlo, è sufficiente provare che le due applicazioni coincidono sulla base $\{v_1, \dots, v_n\}$, cioè che $\forall h \in \{1, \dots, n\}$

$$L(g_{ij})(v_h) = (\lambda_i - \lambda_j) g_{ij}(v_h) .$$

Se $h \neq j$ ciò è evidente perché $g_{ij}(v_h) = 0$ per definizione e

$$L(g_{ij})(v_h) = (f \circ g_{ij} - g_{ij} \circ f)(v_h) = f\big(g_{ij}(v_h)\big) - g_{ij}(\lambda_h v_h) = 0 .$$

Se $h = j$ si ha $(\lambda_i - \lambda_j) g_{ij}(v_j) = (\lambda_i - \lambda_j) v_i$ e

$$\begin{aligned} L(g_{ij})(v_j) &= f\big(g_{ij}(v_j)\big) - g_{ij}\big(f(v_j)\big) = f(v_i) - g_{ij}(\lambda_j v_j) = \\ &= \lambda_i v_i - \lambda_j v_i = (\lambda_i - \lambda_j) v_i . \end{aligned}$$

I g_{ij} sono dunque una base di $\operatorname{Hom}(V,V)$ di autovettori per L, per cui L è diagonalizzabile.

Per quanto riguarda il viceversa, supponiamo che L sia diagonalizzabile: sia $\{g_1, \dots, g_{n^2}\}$ una base di autovettori per L e siano $\lambda_1, \dots, \lambda_{n^2}$ i relativi autovalori. Risulta dunque

$$f g_i - g_i f = L(g_i) = \lambda_i g_i .$$

Se supponiamo per un momento che f abbia un autovalore $\mu \in \mathbb{K}$ (in particolare questo è sempre vero se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), allora, detto v un autovettore per f relativo a μ, si ha

$$\begin{aligned} f\big(g_i(v)\big) - g_i\big(f(v)\big) &= \lambda_i g_i(v) \\ f\big(g_i(v)\big) - \mu g_i(v) &= \lambda_i g_i(v) \\ f\big(g_i(v)\big) &= (\lambda_i + \mu) g_i(v) . \end{aligned}$$

Pertanto i $g_i(v)$ o sono nulli o sono autovettori di f. Non è difficile provare che i $g_i(v)$ costituiscono un sistema di generatori per V; anzi, più in generale, possiamo dimostrare che

> *Se* $\{g_1, \dots, g_N\}$ *è un sistema di generatori di* $\operatorname{Hom}(V,V)$ *e* $v \in V - \{0\}$, *allora* $\{g_1(v), \dots, g_N(v)\}$ *è un sistema di generatori di* V.

Infatti sia $w \in V$; allora, dato che $v \neq 0$, esiste un endomorfismo $\varphi \in \operatorname{Hom}(V,V)$ tale che $\varphi(v) = w$. Dato che i g_i costituiscono un sistema di generatori di $\operatorname{Hom}(V,V)$, esistono scalari α_i tali che $\varphi = \sum_{i=1}^N \alpha_i g_i$ e quindi

$$w = \varphi(v) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i g_i(v),$$

come si voleva.

Essendo dunque i $g_i(v)$ generatori di V, da essi possiamo estrarre una base di V, che risulta costituita da autovettori per f. Di conseguenza f è diagonalizzabile.

Per concludere la dimostrazione, resta da far vedere (nel caso $\mathbf{K} = \mathbf{R}$) se è possibile dedurre l'esistenza di un autovalore reale per f. In realtà dimostriamo che ogni autovalore di f è reale. Per fare questo, fissiamo una base $\mathcal{B}$ e consideriamo la matrice $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$ associata ad f rispetto a tale base.

Supponiamo che $\lambda \in \mathbf{C} - \mathbf{R}$ sia un autovalore di A. Dato che A è una matrice reale, anche $\overline{\lambda}$ è un autovalore di A; siano allora $X \in \mathbf{C}^n$ un autovettore per A relativo a λ e sia $Y \in \mathbf{C}^n$ un autovettore per ${}^tA$ relativo a $\overline{\lambda}$ (si è qui usato il fatto che una matrice e la sua trasposta hanno gli stessi autovalori). Si consideri poi la matrice $Z \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ data da $Z = X{}^tY$. Chiaramente la matrice Z è non nulla ed in più risulta

$$
\begin{aligned}
AZ - ZA &= AX{}^tY - X{}^tYA = \\
&= (AX){}^tY - X{}^t({}^tAY) = \\
&= \lambda X{}^tY - X{}^t(\overline{\lambda}Y) = \\
&= (\lambda - \overline{\lambda})X{}^tY = (\lambda - \overline{\lambda})Z\,.
\end{aligned}
$$

Da ciò segue allora che $\lambda - \overline{\lambda}$ è un autovalore per L; essendo l'applicazione L diagonalizzabile, in particolare essa ha tutti gli autovalori reali e quindi $\lambda - \overline{\lambda} \in \mathbf{R}$, che è assurdo in quanto si è supposto che $\lambda \in \mathbf{C} - \mathbf{R}$.

Quindi gli autovalori di f sono tutti reali e pertanto, applicando il ragionamento precedente, si deduce che f è diagonalizzabile. □

Soluzione dell'Esercizio 125. Supponiamo che A e B abbiano un autovalore λ in comune. Dato che una matrice e la sua trasposta hanno gli stessi autovalori, λ è autovalore anche di ${}^tB$. Siano v e w autovettori relativi a λ rispettivamente per A e per ${}^tB$, ossia $Av = \lambda v$ e ${}^tBw = \lambda w$. Si consideri la matrice $X = v{}^tw$, che è non nulla dato che v e w non sono nulli (sono autovettori!). In più

$$
\begin{aligned}
AX &= Av{}^tw = \lambda v{}^tw = \lambda X \\
XB &= v{}^twB = v{}^t({}^tBw) = v{}^t(\lambda w) = \lambda v{}^tw = \lambda X
\end{aligned}
$$

e quindi $AX = XB$.

Proviamo ora il viceversa. Supponiamo che $X \neq 0$ sia una matrice tale che $AX = XB$. Ricordiamo che $\mathbf{C}^n$ si decompone in somma diretta degli autospazi generalizzati di B; dato che X non è identicamente nulla, esiste almeno uno di tali autospazi generalizzati $U = E'(\lambda, B)$ tale che $X(U)$ non sia identicamente nullo. Sia $\{u_1^1, \dots, u_{k_1}^1, \dots, u_1^s, \dots, u_{k_s}^s\}$ una base di U di Jordan

relativamente a B, ossia

$$
\begin{aligned}
Bu_1^j &= \lambda u_1^j & \forall j = 1, \dots, s \\
Bu_i^j &= \lambda u_i^j + u_{i-1}^j & \forall j = 1, \dots, s, \quad i = 2, \dots, k_j.
\end{aligned}
$$

Dato che X non è identicamente nulla su U, esiste un elemento di tale base su cui X non si annulla. Sia u_i^j il primo per cui $Xu_i^j \neq 0$. Se dimostriamo che Xu_i^j è un autovettore per A relativo all'autovalore λ, abbiamo concluso. Ma ora, se $i = 1$

$$AXu_1^j = XBu_1^j = X(\lambda u_1^j) = \lambda Xu_1^j\,.$$

Se invece $i \geq 2$

$$AXu_i^j = XBu_i^j = X(\lambda u_i^j + u_{i-1}^j) = \lambda Xu_i^j + Xu_{i-1}^j = \lambda Xu_i^j$$

dato che u_i^j è il primo vettore della base su cui X non si annulla, e quindi $Xu_{i-1}^j = 0$. Questo prova che Xu_i^j è un autovettore per A relativo a λ e quindi A e B hanno l'autovalore λ in comune.

Nel caso reale, chiaramente la prima implicazione continua a valere (la dimostrazione non fa alcun uso del fatto che si stia lavorando su $\mathbf{C}$). Non vale più la seconda implicazione. Si considerino ad esempio le due matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Un semplice calcolo mostra che le due matrici non hanno autovalori reali in comune, ed infatti gli unici autovalori reali di A e B sono rispettivamente 1 e 2. D'altra parte, detta X la matrice

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

è immediato verificare che

$$AX = XB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si osservi che le due matrici, pur non avendo autovalori reali in comune, hanno però in comune degli autovalori complessi, precisamente i e $-i$. □

Soluzione dell'Esercizio 126. (1) Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{R}$ gli autovalori di A; dato che $\lambda_i \neq \lambda_j$ se $i \neq j$, la matrice A è diagonalizzabile. Esiste quindi una matrice invertibile M tale che $M^{-1}AM = D$, con D matrice diagonale avente sulla diagonale i numeri $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Sia $C = (c_{i,j}) = M^{-1}BM$. Dato che A e B commutano, anche C e D commutano e la condizione $DC = CD$ può essere riscritta

$$\lambda_i c_{i,j} = \lambda_j c_{i,j} \quad \forall i, j .$$

Essendo i λ_i distinti, ne consegue che $c_{i,j} = 0$ se $i \neq j$, ossia la matrice C è diagonale. Questo prova il punto (1).

(2) Se M è una matrice invertibile e P è un polinomio, allora

$$P(M^{-1}AM) = M^{-1}P(A)M;$$

dunque basta provare la tesi per le due matrici D e C definite al passo precedente (sono ottenute rispettivamente da A e B coniugando con una stessa matrice).

Sia $P(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_{n-1}t^{n-1}$ il generico polinomio di grado $\leq n-1$. Dal fatto che D è diagonale, si ha che anche $P(D)$ è diagonale della forma

$$P(D) = \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & P(\lambda_n) \end{pmatrix}.$$

Detti quindi c_i gli elementi della diagonale di C, il problema di trovare P tale che $P(D) = C$ è equivalente a trovare P tale che

$$\begin{cases} P(\lambda_1) = c_1 \\ \quad\vdots \\ P(\lambda_n) = c_n \end{cases}$$

ossia trovare numeri $a_0, \ldots, a_{n-1}$ che risolvano il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} a_0 + a_1\lambda_1 + \cdots + a_{n-1}\lambda_1^{n-1} = c_1 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_0 + a_1\lambda_n + \cdots + a_{n-1}\lambda_n^{n-1} = c_n. \end{cases}$$

Evidentemente la matrice dei coefficienti del sistema è una matrice di Vandermonde ed il suo determinante è diverso da zero, dato che i λ_i sono a due a due distinti. Ne segue che il sistema ha una soluzione unica e quindi esiste un unico polinomio di grado minore o uguale a $n-1$ tale che $P(A) = B$.

Un diverso modo di rispondere al secondo quesito è il seguente. Ci si riconduce come prima al caso D e C diagonali. A questo punto si osserva che le matrici $I, D, D^2, \ldots, D^{n-1}$ sono tutte diagonali ed in più sono linearmente indipendenti. Infatti, se $a_0 I + a_1 D + \cdots + a_{n-1}D^{n-1} = 0$, allora il polinomio $P(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_{n-1}t^{n-1}$, di grado al più $n-1$, è tale che $P(D) = 0$; ma, poiché D ha tutti gli autovalori distinti, il suo polinomio minimo ha grado n, per cui $P(t)$ deve essere il polinomio nullo e quindi $a_0 = a_1 = \cdots = a_{n-1} = 0$. Di conseguenza le matrici $I, D, D^2, \ldots, D^{n-1}$ sono una base dello spazio delle matrici diagonali (che ha dimensione n) e, dato che C è diagonale, esistono unici $a_0, \ldots, a_{n-1}$ tali che $C = a_0 I + a_1 D + \cdots + a_{n-1}D^{n-1}$, che è la tesi. □

Soluzione dell'Esercizio 127. Se f è identicamente nulla, la tesi è evidente. Supponiamo dunque $f \not\equiv 0$, e cioè che esista un polinomio $p(x)$ tale che $f(p) \neq 0$. Allora, per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$, si ha

$$\alpha \cdot f(p) = f(\alpha \cdot p) = f(\alpha) \cdot f(p),$$

dove abbiamo usato nella prima uguaglianza la linearità di f e nella seconda l'ipotesi che f rispetta il prodotto. Dunque $\big(f(\alpha) - \alpha\big) \cdot f(p) = 0$, da cui, visto che l'anello $\mathbb{C}[x]$ non ha divisori di zero, deduciamo che $f(\alpha) = \alpha$ per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$. Abbiamo così provato che $f(\mathbb{C}) \subseteq \mathbb{C}$ e che anzi $f|_{\mathbb{C}} = id$.

Per ogni polinomio $a_n x^n + \cdots + a_0$ di $\mathbb{C}[x]$ si ha

$$f(a_n x^n + \cdots + a_0) = a_n\big(f(x)\big)^n + \cdots + a_0,$$

pertanto per ottenere la tesi basta provare che $f(x) \in \mathbb{C}$.

Poiché f non è iniettiva, esiste un polinomio non nullo $q(x) \in \mathbb{C}[x]$ tale che $f(q) = 0$. Per quanto visto sopra q è non costante, quindi può essere fattorizzato nel prodotto di certi polinomi di primo grado $q_1, \ldots, q_k$; l'ipotesi implica allora che $0 = f(q) = f(q_1) \cdot \ldots \cdot f(q_k)$, per cui si avrà $f(q_i) = 0$ per qualche i.

Sia $q_i(x) = ax + b$. Evidentemente $a \neq 0$ perché q_i ha grado 1; quindi dalla relazione $f(ax+b) = af(x) + b = 0$ si ricava che $f(x) = -b/a \in \mathbb{C}$ da cui, come spiegato sopra, segue la tesi. □

Soluzione dell'Esercizio 128. (1) Dato che $\langle\ ,\ \rangle$ è non degenere, la somma degli indici di positività e negatività è uguale a $\dim V = 2n$; visto che per ipotesi tali indici coincidono, necessariamente sono entrambi uguali ad n. Per il teorema di Sylvester esiste quindi una base $\{v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_n\}$ ortogonale e tale che $\langle v_i, v_i\rangle = 1$ e $\langle w_i, w_i\rangle = -1$ per ogni $i = 1, \ldots, n$. Consideriamo allora lo spazio $H = \operatorname{Span}(v_1 - w_1, \ldots, v_n - w_n)$. Osserviamo che

$$\begin{aligned} &\langle v_i - w_i, v_j - w_j\rangle = \\ &\quad = \langle v_i, v_j\rangle - \langle v_i, w_j\rangle - \langle w_i, v_j\rangle + \langle w_i, w_j\rangle = 0 \qquad \text{se } i \neq j \\ &\langle v_i - w_i, v_i - w_i\rangle = \\ &\quad = \langle v_i, v_i\rangle - \langle v_i, w_i\rangle - \langle w_i, v_i\rangle + \langle w_i, w_i\rangle = 1 - 1 = 0, \end{aligned}$$

pertanto $\langle\ ,\ \rangle$ è nullo su H. D'altra parte è facile vedere che i vettori $v_i - w_i$ sono tra loro indipendenti e quindi $\dim H = n$.

(2) Supponiamo che H sia tale che $\langle\ ,\ \rangle|_H = 0$ e che $\dim H = h > n$. Sia $\{v_1, \dots, v_h\}$ una base di H e siano $w_{h+1}, \dots, w_{2n}$ un completamento ad una base di V. Rispetto a questa base la matrice associata a $\langle\ ,\ \rangle$ è del tipo

$$A = \left(\begin{array}{c|c} 0 & B \\ \hline {}^tB & C \end{array}\right)$$

essendo B una matrice $h \times (2n - h)$ e C una matrice simmetrica $(2n - h) \times (2n - h)$. Ma allora

$$\operatorname{rk}(0 \mid B) \leq 2n - h \qquad \text{e} \qquad \operatorname{rk}({}^tB \mid C) \leq 2n - h$$

e quindi $\operatorname{rk} A \leq 4n - 2h < 2n$. Ciò è assurdo perché il prodotto scalare $\langle\ ,\ \rangle$ è non degenere e quindi $\operatorname{rk} A = 2n$. Ne segue allora che un tale sottospazio H, con $\dim H > n$, non può esistere. $\square$

Soluzione dell'Esercizio 129. (1) Sia $v \in \operatorname{Ker} f$; sfruttando la relazione che lega f e g si ha

$$0 = f(v) = fg(v) - gf(v) = f(g(v)),$$

quindi $g(v) \in \operatorname{Ker} f$.

(2) Per (1) sappiamo che l'applicazione $g_{|\operatorname{Ker} f} : \operatorname{Ker} f \to \operatorname{Ker} f$ è un endomorfismo; pertanto, se $\operatorname{Ker} f \neq \{0\}$, $g_{|\operatorname{Ker} f}$ ha almeno un autovalore (perché il campo degli scalari è $\mathbb{C}$) e quindi esiste $v \in \operatorname{Ker} f - \{0\}$ che è un autovettore per g (e per f relativo all'autovalore 0).

Basta dunque dimostrare che $\operatorname{Ker} f \neq \{0\}$ e cioè che f non è invertibile. Se per assurdo lo fosse, dalla relazione che lega f e g si avrebbe che $f^{-1}gf = g - id$. Ma allora g e $g - id$ dovrebbero avere lo stesso polinomio caratteristico, quindi per ogni t

$$\begin{aligned} P_g(t) = P_{g-I}(t) = \det(g - I - tI) = \\ = \det(g - (t+1)I) = P_g(t+1)\,. \end{aligned}$$

Ma gli unici polinomi che verificano la relazione $Q(t) = Q(t+1)\ \forall t$ sono i polinomi costanti e ciò è assurdo visto che il polinomio caratteristico di un operatore ha grado $n = \dim V \geq 1$. Quindi $\operatorname{Ker} f \neq \{0\}$.

(3) Procediamo per induzione sulla dimensione n dello spazio vettoriale V. Se $n = 1$ la tesi è ovvia. Supponiamo $n > 1$. Per quanto visto dimostrando (2), esiste $v_1 \in \operatorname{Ker} f$ che è un autovettore per g. Sia W un sottospazio di V tale che $V = \operatorname{Span}(v_1) \oplus W$ e sia $\{v_2, \dots, v_n\}$ una base di W. Le matrici associate a f e g rispetto alla base $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ di V sono rispettivamente del tipo

$$A = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & * & \dots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{array}\right), \qquad B = \left(\begin{array}{c|ccc} \beta & * & \dots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & B' & \\ 0 & & & \end{array}\right).$$

Osserviamo che se $P : V \to W$ è la proiezione su W determinata dalla decomposizione in somma diretta $V = \operatorname{Span}(v_1) \oplus W$, le matrici A' e B' sono rispettivamente le matrici associate alle applicazioni $f' = P \circ f|_W : W \to W$ e $g' = P \circ g|_W : W \to W$ rispetto alla base $\{v_2, \dots, v_n\}$ di W.

Dall'ipotesi $fg - gf = f$ segue che $AB - BA = A$. D'altra parte

$$AB - BA = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & * & \dots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A'B' - B'A' & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

per cui deve aversi in particolare $A'B' - B'A' = A'$. Ciò implica che le applicazioni $f', g' : W \to W$ sono tali che $f'g' - g'f' = f'$.

Per ipotesi di induzione esiste allora una base $\{v_2', \dots, v_n'\}$ di W a ventaglio sia per f' che per g'. È immediato verificare che $\{v_1, v_2', \dots, v_n'\}$ è una base a ventaglio sia per f che per g.

Nota. Si osservi che se f è tale che esiste g per cui $fg - gf = f$, allora f è nilpotente. Lo si può facilmente vedere procedendo per induzione come nel punto (3): poiché $f'g' - g'f' = f'$, per ipotesi di induzione f', e quindi la matrice A', è nilpotente. Ma allora anche la matrice

$$A = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & * & \dots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

è nilpotente (perché?) e quindi anche f lo è.

È vero anche il viceversa, nel senso che, se f è una applicazione nilpotente, allora esiste g tale che $fg - gf = f$. Infatti, se $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base di Jordan per f, basta prendere l'applicazione $g : V \to V$ definita da $g(v_k) = kv_k$ (verificare i dettagli). $\square$

Soluzione dell'Esercizio 130. Sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base ortonormale di V. Dato che f conserva l'ortogonalità, allora $\langle f(v_i), f(v_j)\rangle = 0$ per ogni $i \neq j$, quindi f trasforma la base ortonormale in una base ortogonale.

Osserviamo ora che

$$\langle v_i + v_j, v_i - v_j \rangle = \langle v_i, v_i \rangle - \langle v_j, v_j \rangle = 1 - 1 = 0$$

quindi, per l'ipotesi fatta su f, si ha

$$0 = \langle f(v_i) + f(v_j), f(v_i) - f(v_j) \rangle = \langle f(v_i), f(v_i) \rangle - \langle f(v_j), f(v_j) \rangle$$

e quindi, per ogni i, j, risulta $\|f(v_i)\|^2 = \|f(v_j)\|^2$.

In definitiva, f trasforma la base ortonormale $\{v_1, \dots, v_n\}$ in una base ortogonale $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$, i cui vettori hanno norma costante. Sia $\lambda = \|f(v_i)\|$.

Se $\lambda = 0$, dato che il prodotto scalare è definito positivo, allora $f(v_i) = 0$ per ogni i e quindi f è l'applicazione nulla; la tesi segue allora banalmente prendendo $\lambda = 0$.

Se invece $\lambda > 0$, poniamo $g = (1/\lambda) f$. Osserviamo che allora, per quanto visto prima,

$$\langle g(v_i), g(v_j) \rangle = \frac{1}{\lambda^2} \langle f(v_i), f(v_j) \rangle = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ \dfrac{1}{\lambda^2} \lambda^2 = 1 & \text{se } i = j. \end{cases}$$

Ma allora i vettori $g(v_i)$ costituiscono una base ortonormale, e quindi g, trasformando una base ortonormale in una base ortonormale, è una isometria. D'altra parte, per costruzione, $f = \lambda g$ come richiesto. □

Soluzione dell'Esercizio 131. Dato che $\dim(\mathbf{R}_n[x])^{\hat{}} = \dim(\mathbf{R}_n[x]) = n + 1$, necessariamente si ha che $\dim(\operatorname{Span}\langle L_a \mid a \in \mathbf{R} \rangle) \leq n + 1$.

Osserviamo ora che, se $a \in \mathbf{R}$ e se fissiamo su $\mathbf{R}_n[x]$ la base $\{1, x, \dots, x^n\}$, la matrice associata al funzionale L_a è la riga $\begin{pmatrix} 1 & a & \dots & a^n \end{pmatrix}$. Ma allora se $a_0, a_1, \dots, a_n$ sono numeri reali distinti tra loro, le righe

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & a_0 & \dots & a_0^n \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & a_1 & \dots & a_1^n \end{pmatrix} \\ \vdots \\ \begin{pmatrix} 1 & a_n & \dots & a_n^n \end{pmatrix} \end{array}$$

sono linearmente indipendenti, in quanto formano una matrice di Vandermonde avente per determinante

$$\prod_{i<j} (a_j - a_i) \neq 0 .$$

In termini di funzionali questo significa che gli L_{a_i} sono linearmente indipendenti (perché?), e quindi $\dim(\operatorname{Span}\langle L_a \mid a \in \mathbf{R} \rangle) = n + 1$. □

Soluzione dell'Esercizio 132. Dato che B è simmetrica, in particolare è diagonalizzabile, quindi esiste una matrice M invertibile tale che $M^{-1}BM = D$ con D diagonale. Inoltre $\operatorname{rk} B = \operatorname{rk} D$; detto $k = \operatorname{rk} B$, possiamo supporre che gli elementi non nulli della diagonale di D siano i primi k.

Posto $A_1 = M^{-1}AM$, si ha

$$\begin{aligned} P(t) &= \det(A + tB) = \\ &= \det\left(M^{-1}(A + tB)M\right) = \\ &= \det(A_1 + tD) . \end{aligned}$$

Ma ora, usando l'espressione del determinante data per mezzo delle permutazioni, abbiamo

$$\begin{aligned} \det(A_1 + tD) &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} [A_1 + tD]_{i,\sigma(i)} = \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} \left([A_1]_{i,\sigma(i)} + t[D]_{i,\sigma(i)}\right) . \end{aligned}$$

Osserviamo ora che $[D]_{i,\sigma(i)} \neq 0$ se e solo se $i = \sigma(i)$ e $1 \leq i \leq k$; quindi in ogni addendo della somma al massimo k fattori contengono l'indeterminata t e pertanto

$$\deg\left(\prod_{i=1}^{n} \left([A_1]_{i,\sigma(i)} + t[D]_{i,\sigma(i)}\right)\right) \leq k$$

da cui segue che $\deg P \leq k$. □

Soluzione dell'Esercizio 133. La matrice A è simile ad una matrice di Jordan J; sia $M \in GL_p(\mathbf{C})$ tale che $A = M^{-1}JM$.

Consideriamo l'isomorfismo $\varphi : \mathcal{M}_p(\mathbf{C}) \to \mathcal{M}_p(\mathbf{C})$ definito da $\varphi(X) = MXM^{-1}$. È facile verificare che $\varphi(C(A)) = C(J)$. Infatti se $X \in C(A)$ e dunque $AX = XA$, si ha che $M^{-1}JMX = XM^{-1}JM$, ossia $J(MXM^{-1}) = (MXM^{-1})J$ e quindi $\varphi(X) = MXM^{-1} \in C(J)$.

Poiché $\dim C(A) = \dim \varphi(C(A)) = \dim C(J)$, è sufficiente risolvere l'esercizio per una matrice di Jordan J.

Passo 1. Cominciamo considerando il caso in cui J sia costituita da blocchi di Jordan relativi allo stesso autovalore. Se λ è l'unico autovalore di J, non è restrittivo supporre che $\lambda = 0$. Basta infatti osservare che $J = \lambda I_p + J'$, dove J' è costituita da blocchi dello stesso ordine di quelli di J ma relativi all'autovalore 0, e che $X \in C(J)$ se e solo se $X \in C(J')$. Supponiamo dunque $\lambda = 0$.

Siano $J_1, \ldots, J_n$ i blocchi che costituiscono J, ossia

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{J_1} & & & \\ & \boxed{J_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{J_n} \end{pmatrix}$$

e siano $k_1, \ldots, k_n$ i loro rispettivi ordini. Se $X \in \mathcal{M}_p(\mathbf{C})$ è presentata a blocchi corrispondenti a quelli di J,

$$X = \left(\begin{array}{c|c|c} X_{1,1} & \cdots & X_{1,n} \\ \hline \vdots & & \vdots \\ \hline X_{n,1} & \cdots & X_{n,n} \end{array}\right)$$

si ha

$$JX = \left(\begin{array}{c|c|c} J_1X_{1,1} & \cdots & J_1X_{1,n} \\ \hline \vdots & & \vdots \\ \hline J_nX_{n,1} & \cdots & J_nX_{n,n} \end{array}\right), \quad XJ = \left(\begin{array}{c|c|c} X_{1,1}J_1 & \cdots & X_{1,n}J_n \\ \hline \vdots & & \vdots \\ \hline X_{n,1}J_1 & \cdots & X_{n,n}J_n \end{array}\right)$$

e quindi

$$(1) \qquad X \in C(J) \iff J_iX_{i,j} = X_{i,j}J_j \quad \forall i, j = 1, \ldots, n.$$

Detto allora $C(J_i, J_j) = \{X \in \mathcal{M}_{k_i \times k_j}(\mathbf{C}) \mid J_iX = XJ_j\}$, dalla (1) segue immediatamente che

$$C(J) \cong \bigoplus_{i,j} C(J_i, J_j)$$

e quindi

$$(2) \qquad \dim C(J) = \sum_{i,j} \dim C(J_i, J_j)\,.$$

Calcoliamo allora la dimensione degli spazi $C(J_i, J_j)$. Cominciamo col provare il seguente fatto:

> *Se J_1 e J_2 sono due blocchi di Jordan relativi all'autovalore 0, di ordine rispettivamente k_1 e k_2, allora* $\dim C(J_1, J_2) = \min\{k_1, k_2\}$.

Per vedere questo calcoliamo esplicitamente i valori degli elementi delle matrici J_1X ed XJ_2. Un facile calcolo mostra che

$$(3) \qquad \begin{aligned} [J_1X]_{i,j} &= \begin{cases} [X]_{i+1,j} & \text{se } i \le k_1 - 1 \\ 0 & \text{se } i = k_1 \end{cases} \\ [XJ_2]_{i,j} &= \begin{cases} [X]_{i,j-1} & \text{se } j \ge 2 \\ 0 & \text{se } j = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Osserviamo allora che, se consideriamo la famiglia delle diagonali di X (dove per diagonale di X intendiamo l'insieme degli elementi $[X]_{h,k}$ tali che $h - k$ è costante), per ogni fissato valore di i e j si ha che gli elementi $[X]_{i+1,j}$ e $[X]_{i,j-1}$ appartengono alla stessa diagonale.

Da questa osservazione e dalle (3) segue dunque che $X \in C(J_1, J_2)$, ossia $[J_1X]_{i,j} = [XJ_2]_{i,j}$ per ogni i, j, se e solo se

- gli elementi di ciascuna diagonale di X sono uguali tra loro;
- la prima colonna, salvo al più $[X]_{1,1}$, è tutta nulla: per vederlo basta prendere $j = 1$ ed osservare allora che dalle (3) si ha
$$0 = [XJ_2]_{i,1} = [J_1X]_{i,1} = [X]_{i+1,1} \quad \forall i \le k_1 - 1;$$
- l'ultima riga, salvo al più $[X]_{k_1,k_2}$, è tutta nulla (si vede in modo del tutto analogo al precedente).

Da queste considerazioni risulta evidente che $X \in C(J_1, J_2)$ se e solo se X è del tipo

$$X = \left(\begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & \cdots & a_{k_2} \\ 0 & a_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_2 \\ 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right)$$

oppure

$$X = \left(\begin{array}{ccc|cccc} 0 & \cdots & 0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{k_1} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & a_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & a_2 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \end{array}\right)$$

a seconda che $k_1 \ge k_2$ oppure $k_1 \le k_2$, e quindi $\dim C(J_1, J_2) = \min\{k_1, k_2\}$.

Tornando al calcolo della dimensione di $C(J)$, usando la (2) e quanto appena visto, si ha

$$\dim C(J) = \sum_{i,j} \min\{k_i, k_j\} = \sum_{i=1}^{n} k_i + \sum_{i<j} 2\min\{k_i, k_j\}\,.$$

Supponendo allora che i blocchi di J siano ordinati in modo decrescente rispetto all'ordine, ossia $k_1 \geq \cdots \geq k_n$, si ha

$$\begin{aligned}\dim C(J) &= \sum_{i=1}^{n} k_i + \sum_{i<j} 2k_j = \\ &= \sum_{i=1}^{n} k_i + \sum_{j=1}^{n} 2(j-1)k_j = \sum_{i=1}^{n}(2i-1)k_i \,.\end{aligned}$$

Passo 2. Resta ora da esaminare il caso in cui J sia costituita da blocchi relativi ad autovalori anche diversi.

Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ gli autovalori distinti della matrice J; ricordiamo allora che si ha la decomposizione in somma diretta

$$\mathbf{C}^p = E'(\lambda_1, J) \oplus \cdots \oplus E'(\lambda_s, J) \,.$$

Se la base di Jordan rispetto a cui è scritta J è stata ottenuta prendendo un base di Jordan in ciascun autospazio generalizzato e raggruppando ordinatamente tali vettori, la matrice J ha la forma

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{J_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{J_s} \end{pmatrix}$$

dove ogni J_i è una matrice di Jordan avente come unico autovalore λ_i.

Si verifica facilmente che se X commuta con J, allora $X\big(E'(\lambda_i, J)\big) \subseteq E'(\lambda_i, J)$: per vederlo, basta provare per induzione la formula $X(J - \lambda_i I)^n = (J - \lambda_i I)^n X$.

Di conseguenza X commuta con J se e solo se ha la forma

$$X = \begin{pmatrix} \boxed{X_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{X_s} \end{pmatrix}$$

ed ogni X_i commuta con J_i, ossia $X_i \in C(J_i)$. Ma allora

$$\dim C(J) = \dim C(J_1) + \cdots + \dim C(J_s)$$

dove, dato che le J_i hanno un solo autovalore, i valori di $\dim C(J_i)$ sono quelli calcolati nel primo passo. $\square$

Soluzione dell'Esercizio 134. Chiaramente, dato che le colonne di A sono tutte multiple di v, $\operatorname{rk} A \leq 1$, quindi 0 è autovalore per A con molteplicità

geometrica maggiore o uguale a $n-1$. Pertanto il polinomio caratteristico di A è della forma

$$P_A(t) = (-1)^n(t^n - \alpha t^{n-1}) = (-t)^{n-1}(\alpha - t)$$

con $\alpha \in \mathbf{R}$. D'altra parte il coefficiente del termine di grado $n-1$ del polinomio caratteristico è dato da $\operatorname{tr} A$, ed un semplice calcolo mostra che

$$\operatorname{tr} A = \operatorname{tr}(v\,{}^t w) = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i = (v, w)_{\mathbf{R}} \,.$$

Quindi

$$P_A(t) = (-t)^{n-1}\big((v, w)_{\mathbf{R}} - t\big) \,.$$

Per quanto riguarda la diagonalizzabilità di A, se $(v,w)_{\mathbf{R}} \neq 0$, allora A è diagonalizzabile, in quanto, come si è già osservato, 0 è un autovalore con autospazio di dimensione almeno $n-1$ e $(v,w)_{\mathbf{R}} \neq 0$ è un altro autovalore, quindi

$$\dim E(0) = n - 1 \quad \text{e} \quad \dim E((v,w)_{\mathbf{R}}) = 1 \,.$$

Si verifica inoltre facilmente che in questo caso si ha

$$E(0) = \big(\operatorname{Span}(w)\big)^{\perp} \quad \text{e} \quad E((v,w)_{\mathbf{R}}) = \operatorname{Span}(v) \,.$$

Se invece $(v,w)_{\mathbf{R}} = 0$ allora $P_A(t) = (-t)^n$, quindi 0 è l'unico autovalore di A, ma allora A è diagonalizzabile se e solo se è la matrice nulla e ciò si verifica se e solo se o $v = 0$ o $w = 0$. $\square$

Soluzione dell'Esercizio 135. Detta B la matrice

$$B = \begin{pmatrix} b & \cdots & b \\ \vdots & & \vdots \\ b & \cdots & b \end{pmatrix},$$

consideriamo il polinomio

$$P(t) = \det(A + tB) \,.$$

Chiaramente $\det A = P(0)$. Per quanto visto nell'esercizio 132, si ha

$$\deg P \leq \operatorname{rk} B = 1,$$

quindi per determinare il polinomio P è sufficiente determinare i valori che assume su due diversi numeri reali. In particolare si ha

$$A+B=\begin{pmatrix} a+b & 2b & \cdots & 2b \\ & a+b & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & 2b \\ & & & a+b \end{pmatrix}$$

$$A-B=\begin{pmatrix} a-b & & & \\ -2b & a-b & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ -2b & \cdots & -2b & a-b \end{pmatrix}$$

e quindi

$$P(1)=\det(A+B)=(a+b)^n, \qquad P(-1)=\det(A-B)=(a-b)^n .$$

Si verifica allora facilmente che l'unico polinomio di grado minore o uguale a 1 che assume tali valori in 1 e -1 è dato da

$$P(t)=\frac{(a+b)^n-(a-b)^n}{2}\,t+\frac{(a+b)^n+(a-b)^n}{2} .$$

Ne consegue immediatamente che allora

$$\det A = P(0)=\frac{(a+b)^n+(a-b)^n}{2} . \quad \square$$

Soluzione dell'Esercizio 136. Per dimostrare che b è simmetrica, basta provare che la matrice associata a b rispetto ad una fissata base è simmetrica.

Dimostriamo questo fatto per induzione su $n=\dim V$.

Se $n=1$, la tesi è ovvia. Se $n\geq 2$, per l'ipotesi (1) esiste $v_1\in V$ tale che $b(v_1,v_1)\neq 0$; completiamo tale vettore ad una base $S=\{v_1,\ldots,v_n\}$ di V.

Essendo $b(v_1,v_1)\neq 0$, a meno di sostituire v_i con

$$v_i'=v_i-\frac{b(v_i,v_1)}{b(v_1,v_1)}\,v_1$$

(perché $\{v_1,v_2',\ldots,v_n'\}$ è ancora una base di V?), possiamo supporre che $b(v_1,v_j)=0$ per ogni $j=2,\ldots,n$. La matrice associata a b rispetto alla base

S è allora del tipo

$$B=\left(\begin{array}{c|ccc} a & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & C & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

dove C è la matrice associata alla restrizione $b|_{H\times H}$, con $H=\operatorname{Span}(v_2,\ldots,v_n)$ sottospazio di dimensione $n-1$.

Se $C=0$ la tesi è provata, perché B è simmetrica. Supponiamo dunque $C\neq 0$.

L'applicazione bilineare $b|_{H\times H}$ verifica evidentemente l'ipotesi (2); per applicare l'ipotesi induttiva basta provare che essa verifica anche l'ipotesi (1), ossia che esiste $w\in H$ tale che $b(w,w)\neq 0$. Questo è evidente se la diagonale di C contiene almeno un elemento non nullo.

Nel caso in cui C è non nulla, ma con diagonale principale tutta nulla, osserviamo che C non può essere antisimmetrica. Infatti altrimenti esisterebbero indici $i,j\in\{2,\ldots,n\}$ tali che $b_{i,j}=\alpha$ e $b_{j,i}=-\alpha$, con $\alpha\neq 0$; ma allora

$$b\Big(-\frac{\alpha}{a}\,v_1+v_i,v_1+v_j\Big)=0$$
$$b\Big(v_1+v_j,-\frac{\alpha}{a}\,v_1+v_i\Big)=-\frac{\alpha}{a}\,a-\alpha=-2\alpha\neq 0,$$

contro l'ipotesi (2).

Essendo dunque C non nulla e non antisimmetrica, esistono $i,j\in\{2,\ldots,n\}$ tali che $b_{i,j}=\alpha$, $\quad b_{j,i}=\beta$ e $\alpha+\beta\neq 0$. Allora

$$b(v_i+v_j,v_i+v_j)=b(v_i,v_j)+b(v_j,v_i)=\alpha+\beta\neq 0 .$$

Basta quindi prendere $w=v_i+v_j$.

Possiamo dunque applicare l'ipotesi induttiva a $b|_{H\times H}$ e ricavare che esiste una base $\{w_2,\ldots,w_n\}$ di H rispetto alla quale la matrice associata a $b|_{H\times H}$ è simmetrica. Ma allora anche la matrice associata a b rispetto alla base $\{v_1,w_2,\ldots,w_n\}$ di V è simmetrica.

Nota. Se non vale (1), ossia se $b(v,v)=0$ per ogni $v\in V$, allora la forma bilineare b è antisimmetrica, infatti per ogni v, $w\in V$ si ha

$$0=b(v+w,v+w)=b(v,v)+b(w,w)+b(v,w)+b(w,v)=$$
$$=b(v,w)+b(w,v) . \quad \square$$

Soluzione dell'Esercizio 137. Dato che A è simmetrica e definita positiva, esiste una matrice ortogonale M tale che

$$A' = {}^tMAM = M^{-1}AM = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

con $\lambda_i > 0$ per ogni i.

Detta $B' = {}^tMBM = M^{-1}BM$, si ha che

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(AB) &= \operatorname{tr}(M^{-1}ABM) = \operatorname{tr}(M^{-1}AMM^{-1}BM) = \\ &= \operatorname{tr}(A'B') . \end{aligned}$$

D'altra parte, dato che B è definita negativa, anche $B' = {}^tMBM$ lo è, quindi sulla diagonale di B' ci sono numeri strettamente negativi (sono i prodotti scalari, rispetto al prodotto scalare rappresentato da B', dei vettori di base con se stessi). Ma allora, detti $d_i < 0$ gli elementi della diagonale di B', gli elementi della diagonale di $A'B'$ sono dati da $\lambda_i d_i$; visto che $\lambda_i > 0$ e $d_i < 0$ per ogni i, si ha immediatamente la tesi. □

Soluzione dell'Esercizio 138. (2) $\implies$ (1). Basta moltiplicare ambo i membri dell'uguaglianza $A_1 + \cdots + A_k = I$ per la matrice A_i e usare l'ipotesi (2).

(1) $\implies$ (3). Dal fatto che $A_i^2 = A_i$ deduciamo che $\operatorname{rk} A_i = \operatorname{tr} A_i$ (cfr. esercizio 45). Allora

$$\begin{aligned} \operatorname{rk} A_1 + \cdots + \operatorname{rk} A_k &= \operatorname{tr} A_1 + \cdots + \operatorname{tr} A_k = \\ &= \operatorname{tr}(A_1 + \cdots + A_k) = \operatorname{tr} I = n . \end{aligned}$$

(3) $\implies$ (2). L'ipotesi $A_1 + \cdots + A_k = I$ implica che $\operatorname{Im}(A_1 + \cdots + A_k) = \mathbf{K}^n$ e quindi anche $\operatorname{Im} A_1 + \cdots + \operatorname{Im} A_k = \mathbf{K}^n$. La condizione (3) d'altra parte dice che $\dim \operatorname{Im} A_1 + \cdots + \dim \operatorname{Im} A_k = n$, da cui si deduce che

$$\operatorname{Im} A_1 \oplus \cdots \oplus \operatorname{Im} A_k = \mathbf{K}^n .$$

Per ogni $v \in \mathbf{K}^n$, possiamo scrivere $A_i v = IA_i v = A_1 A_i v + \cdots + A_k A_i v$; abbiamo così una presentazione del vettore $A_i v \in \operatorname{Im} A_i$ come somma di vettori appartenenti a $\operatorname{Im} A_1, \ldots, \operatorname{Im} A_k$. Per l'unicità della presentazione di un vettore come somma di componenti rispetto a una somma diretta di sottospazi, si deve avere che $A_i v = A_i^2 v$ e che $A_j A_i v = 0$ per ogni $j \neq i$. Poiché questo vale per ogni $v \in \mathbf{K}^n$, segue che $A_j A_i = 0$ per ogni $j \neq i$. □

Soluzione dell'Esercizio 139. Essendo A simmetrica definita positiva, esiste una matrice simmetrica definita positiva S tale che $A = S^2$. Infatti sia N una matrice ortogonale tale che

$${}^tNAN = N^{-1}AN = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

I numeri $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sono tutti positivi, in quanto autovalori di A che è per ipotesi definita positiva. Posto allora

$$D = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix},$$

è facile verificare che la matrice simmetrica definita positiva $S = ND{}^tN$ è tale che $A = S^2$.

Da ciò segue che $S^{-1}A = S$ e quindi che $S^{-1}ABS = SBS = {}^tSBS$. La matrice AB, essendo simile alla matrice simmetrica ${}^tSBS$, è dunque diagonalizzabile. Ma ora

- AB e ${}^tSBS$, essendo simili, hanno gli stessi autovalori;
- B e ${}^tSBS$, essendo congruenti, hanno gli stessi indici di positività, negatività e nullità.

Poiché per una matrice simmetrica il numero di autovalori positivi (risp. negativi, nulli) coincide con l'indice di positività (risp. indice di negatività, di nullità), si ha la tesi.

Nota. Nel caso in cui B è definita negativa, dall'esercizio segue che AB ha tutti gli autovalori negativi. In particolare la traccia di AB, in quanto somma degli autovalori di AB, è negativa. Abbiamo così ritrovato il risultato dell'esercizio 137. □

Soluzione dell'Esercizio 140. Sia $W = \{X \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \mid \operatorname{tr} X = 0\}$. Osserviamo che se $X \in W$ allora $L(X) = (\det A)X$, quindi le matrici non nulle di W sono autovettori per L. Dato che $\dim W = n^2 - 1$, si ha che L è diagonalizzabile se e solo se esiste un autovettore $X_0 \notin W$.

Caso 1. Supponiamo che $\operatorname{tr} A \neq 0$, ossia che $A \notin W$. Dal fatto che $L(A) = (\det A - \operatorname{tr} A)A$ si ha che A è un autovettore e quindi, per quanto visto sopra, L è diagonalizzabile.

Caso 2. Supponiamo che $\operatorname{tr} A = 0$ e dimostriamo che in questo caso L non è diagonalizzabile. Se per assurdo esistesse un autovettore $X_0 \notin W$, allora si avrebbe

$$L(X_0) = (\det A)X_0 - (\operatorname{tr} X_0)A = \lambda X_0$$

da cui

$$(\det A - \lambda)X_0 = (\operatorname{tr} X_0)A\,. \qquad (1)$$

Poiché per ipotesi $A \neq 0$ e $\operatorname{tr} X_0 \neq 0$, allora $\det A - \lambda \neq 0$. D'altra parte, passando alla traccia nella (1), si ha

$$(\det A - \lambda)\operatorname{tr} X_0 = (\operatorname{tr} X_0)\operatorname{tr} A = 0,$$

che è assurdo. □

Soluzione dell'Esercizio 141. Essendo A invertibile, le colonne $A^1, \dots, A^n$ di A formano una base di $\mathbb{R}^n$. Applichiamo a tale base il processo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt rispetto al prodotto scalare ordinario di $\mathbb{R}^n$: otteniamo una base ortonormale $\{w_1, \dots, w_n\}$ di $\mathbb{R}^n$ in cui $w_i \in \operatorname{Span}(A^1, \dots, A^i)$. Più precisamente si ha

$$\begin{aligned} w_1 &= a_{11}A^1 \\ w_2 &= a_{12}A^1 + a_{22}A^2 \\ &\ \vdots \\ w_n &= a_{1n}A^1 + \dots + a_{nn}A^n \end{aligned}$$

con $a_{11} \cdots a_{nn} \neq 0$. La matrice N avente per colonna i vettori ortonormali $w_1, \dots, w_n$ è evidentemente ortogonale. Detta S la matrice triangolare superiore invertibile

$$S = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ & & a_{nn} \end{pmatrix},$$

è facile verificare che le relazioni scritte sopra dicono che $AS = N$ e dunque che $A = NS^{-1}$. Poiché l'inversa di S è ancora triangolare, basta prendere $T = S^{-1}$. □

Soluzione dell'Esercizio 142. Consideriamo la combinazione lineare nulla

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i^0 D^i + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^1 (xD^i) + \sum_{i=2}^{n} \lambda_i^2 (x^2 D^i) + \dots + \lambda_n^n (x^n D^n) = 0\,.$$

Riordinando gli addendi otteniamo

$$E = p_0(x)D^0 + p_1(x)D^1 + \dots + p_n(x)D^n = 0$$

con

$$p_i(x) = \sum_{j=0}^{i} \lambda_i^j x^j\,.$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned} E(1) &= p_0(x) \\ E(x) &= xp_0(x) + p_1(x) \\ E(x^2) &= x^2 p_0(x) + 2xp_1(x) + 2p_2(x) \\ &\ \vdots \qquad\qquad \ddots \\ E(x^n) &= x^n p_0(x) + \dots + \frac{n!}{(n-i)!} x^{n-i} p_i(x) + \dots + n! p_n(x) \end{aligned}$$

Poiché $E = 0$ in $\operatorname{Hom}(\mathbb{R}_n[x], \mathbb{R}_n[x])$, in particolare abbiamo che $E(1) = E(x) = \dots = E(x^n) = 0$, il che implica $p_0(x) = \dots = p_n(x) = 0$. Allora, dato che i polinomi x^j sono linearmente indipendenti in $\mathbb{R}_n[x]$, tutti i coefficienti λ_i^j della combinazione lineare devono essere nulli, e quindi le applicazioni lineari date sono linearmente indipendenti. □

Soluzione dell'Esercizio 143. Consideriamo su $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ il prodotto scalare non degenere $\langle X, Y \rangle = \operatorname{tr}(XY)$ (cfr. esercizio 13). L'ipotesi su A è equivalente a dire che $A \in W^\perp$. Dato che $\dim W = n^2 - 1$ e che $\langle\ ,\ \rangle$ è non degenere, si ha

$$\dim W^\perp = n^2 - \dim W = 1\,.$$

Poiché $I \in W^\perp$, si ha immediatamente la tesi. □

Soluzione dell'Esercizio 144. Chiaramente ogni applicazione $\mathbb{C}$-lineare è anche $\mathbb{R}$-lineare e d'altra parte, se f è $\mathbb{C}$-antilineare, allora per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ e $v \in V$ si ha

$$f(\lambda v) = \overline{\lambda} f(v) = \lambda f(v),$$

e quindi f è $\mathbb{R}$-lineare. Questo prova che $\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)$ ed $\overline{\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}}(V, W)$ sono sottoinsiemi di $\operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$; una verifica immediata mostra che sono in realtà dei sottospazi di $\operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$ come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

Verifichiamo che

$$\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W) \cap \overline{\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}}(V, W) = \{0\}\,.$$

Infatti se $f \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W) \cap \overline{\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}}(V, W)$, allora per ogni $v \in V$ si ha

$$if(v) = f(iv) = \overline{i} f(v) = -if(v)$$

e quindi $f(v) = 0$ per ogni $v \in V$, cioè $f = 0$.

Per dimostrare la relazione di somma diretta basta allora far vedere che ogni applicazione **R**-lineare si scrive come somma di una **C**-lineare e di una **C**-antilineare.

Procedendo come nella seconda soluzione dell'esercizio 11, si vede che, data $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(V, W)$,

$$\begin{aligned} f \text{ è } \mathbf{C}\text{-lineare} &\iff f(iv) = if(v) \quad \forall v \in V \\ f \text{ è } \mathbf{C}\text{-antilineare} &\iff f(iv) = -if(v) \quad \forall v \in V \end{aligned}$$

Ma allora, data $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(V, W)$, definiamo

$$\begin{aligned} f_1(v) &= \frac{f(v) - if(iv)}{2} \\ f_2(v) &= \frac{f(v) + if(iv)}{2} \end{aligned}$$

Evidentemente si ha

$$\begin{aligned} f_1(iv) &= \frac{f(iv) - if(i^2v)}{2} = \frac{f(iv) - if(-v)}{2} = \\ &= \frac{f(iv) + if(v)}{2} = i\,\frac{f(v) - if(iv)}{2} = if_1(v) \\ f_2(iv) &= \frac{f(iv) + if(i^2v)}{2} = \frac{f(iv) + if(-v)}{2} = \\ &= \frac{f(iv) - if(v)}{2} = -i\,\frac{f(v) + if(iv)}{2} = -if_2(v) \end{aligned}$$

per cui f_1 è **C**-lineare ed f_2 è **C**-antilineare. Poiché $f_1 + f_2 = f$, la tesi è provata. □

Soluzione dell'Esercizio 145. L'indice di nullità di b è la dimensione del sottospazio $V_b^\perp$ dei vettori ortogonali a tutto lo spazio rispetto al prodotto scalare b. Si ha

$$\begin{aligned} V_b^\perp &= \{x \in V \mid b(x, y) = 0 \quad \forall y \in V\} = \\ &= \{x \in V \mid \langle f(x), f(y)\rangle = 0 \quad \forall y \in V\} = \{x \in V \mid f(x) \in (\mathrm{Im}\, f)^\perp\} \end{aligned}$$

dove $(\mathrm{Im}\, f)^\perp$ è considerato rispetto al prodotto scalare $\langle\ ,\ \rangle$. Il sottospazio $V_b^\perp$ è quindi formato dai vettori $x \in V$ tali che $f(x) \in \mathrm{Im}\, f \cap (\mathrm{Im}\, f)^\perp$; visto che $\langle\ ,\ \rangle$ è definito positivo, $\mathrm{Im}\, f \cap (\mathrm{Im}\, f)^\perp = \{0\}$, da cui segue $V_b^\perp = \mathrm{Ker}\, f$. Di conseguenza l'indice di nullità di b è uguale a $\dim \mathrm{Ker}\, f$.

Dal fatto che $b(x, x) = \langle f(x), f(x)\rangle$, segue subito che b è semidefinito positivo, pertanto l'indice di negatività di b è 0 e quello di positività è $n - \dim \mathrm{Ker}\, f$. □

Soluzione dell'Esercizio 146. L'implicazione ($\Longleftarrow$) è immediata. Viceversa, supponiamo che $\mathrm{tr}\, A = 0$; in tal caso (cfr. esercizio 111) esiste una matrice invertibile N tale che la matrice $B = N^{-1}AN$ ha tutti zeri sulla diagonale principale.

Se D è la matrice diagonale $n \times n$ avente sulla diagonale i numeri $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, è facile verificare che $[DM - MD]_{i,j} = (\lambda_i - \lambda_j)[M]_{i,j}$ per ogni matrice M $n \times n$. Da ciò segue che, se $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sono elementi distinti di $\mathbb{K}$ e se C è la matrice definita da

$$[C]_{i,j} = \frac{[B]_{i,j}}{\lambda_i - \lambda_j} \qquad \text{se } i \neq j$$

e $[C]_{i,i}$ qualsiasi, allora $DC - CD = B$. Ne segue che $N(DC - CD)N^{-1} = NBN^{-1} = A$, per cui $X = NDN^{-1}$ e $Y = NCN^{-1}$ verificano la tesi. □

Soluzione dell'Esercizio 147. Consideriamo la matrice $D = ((1/n)\,\mathrm{tr}\, A)I$. La matrice $A - D$ ha traccia nulla, per cui (cfr. esercizio 111) esiste N invertibile tale che $N^{-1}(A - D)N = B$ ha tutti 0 sulla diagonale principale. D'altra parte $N^{-1}DN = D$, per cui

$$N^{-1}AN = B + N^{-1}DN = B + D,$$

dove $B + D$ ha tutti gli elementi sulla diagonale uguali a $(1/n)\,\mathrm{tr}\, A$. □

Soluzione dell'Esercizio 148. (1) Dato che $W \neq \{0\}$, si può trovare $A \in W$ con $A \neq 0$. Siano i e j tali che $\alpha = [A]_{i,j} \neq 0$. Per ogni h, $k = 1, \ldots, n$ si ha

$$E_{h,i}AE_{j,k} = \alpha E_{h,k}\,.$$

Per ipotesi $E_{h,i}AE_{j,k} \in W$, quindi $E_{h,k} \in W$. Questo significa che W contiene una base di $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ e pertanto $W = \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

(2) Osserviamo che se $B \in \mathrm{Ker}\, f$ ed $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, allora

$$\begin{aligned} f(AB) &= f(A)f(B) = 0 \implies AB \in \mathrm{Ker}\, f \\ f(BA) &= f(B)f(A) = 0 \implies BA \in \mathrm{Ker}\, f\,. \end{aligned}$$

Usando allora il risultato del punto (1), si ha che o $\mathrm{Ker}\, f = \{0\}$, e quindi f è invertibile, oppure $\mathrm{Ker}\, f = \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ e quindi f è l'applicazione nulla. □

Soluzione dell'Esercizio 149. Dato che f è non degenere, la matrice F risulta invertibile, ma allora osserviamo che

$$GF^{-1} = \begin{pmatrix} \mu_1/\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n/\lambda_n \end{pmatrix},$$

ossia la n-upla di cui si vuole dimostrare l'invarianza a meno dell'ordine è costituita dagli autovalori della matrice GF^{-1}.

Supponiamo allora che B' sia un'altra base in cui i due prodotti scalari assumono forma diagonale; siano

$$F' = \begin{pmatrix} \lambda'_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda'_n \end{pmatrix}, \qquad G' = \begin{pmatrix} \mu'_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu'_n \end{pmatrix}$$

le matrici associate ad f e g in questa base. Chiaramente anche F' risulta invertibile e

$$G'(F')^{-1} = \begin{pmatrix} \mu'_1/\lambda'_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu'_n/\lambda'_n \end{pmatrix},$$

cioè i numeri $\mu'_1/\lambda'_1, \dots, \mu'_n/\lambda'_n$ sono gli autovalori di $G'(F')^{-1}$.

Per avere la tesi bisogna quindi dimostrare che GF^{-1} e $G'(F')^{-1}$ hanno gli stessi autovalori. Per fare questo dimostriamo che in realtà le matrici GF^{-1} e $G'(F')^{-1}$ sono simili.

Detta M la matrice di cambiamento di base da B a B', risulta

$$F' = {}^tMFM, \qquad G' = {}^tMGM .$$

Ma allora

$$G'(F')^{-1} = {}^tMGMM^{-1}F^{-1}({}^tM)^{-1} = {}^tMGF^{-1}({}^tM)^{-1}$$

ossia la matrice $({}^tM)^{-1}$ realizza una similitudine tra GF^{-1} e $G'(F')^{-1}$. Come si è già osservato, da ciò segue immediatamente la tesi. $\square$

Soluzione dell'Esercizio 150. Ricordiamo che, se B è una matrice a blocchi del tipo

$$B = \begin{pmatrix} \boxed{B_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{B_s} \end{pmatrix},$$

allora $P_B(t) = P_{B_1}(t) \cdots P_{B_s}(t)$ (cfr. esercizio 6), mentre il polinomio minimo $m_B(t)$ di B è il minimo comune multiplo dei polinomi minimi

$$m_{B_1}(t), \dots, m_{B_s}(t)$$

dei vari blocchi che formano B (cfr. esercizio 17). In particolare, se B è una matrice formata da blocchi di Jordan relativi ad autovalori distinti, si ha $P_B(t) = m_B(t)$ (perché?).

Sia J la forma di Jordan di A e sia M una matrice invertibile tale che

$$M^{-1}AM = J = \begin{pmatrix} \boxed{J_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{J_s} \end{pmatrix},$$

dove $J_1, \dots, J_s$ sono i blocchi di Jordan di J.

Sia C una matrice del tipo

$$C = \begin{pmatrix} \boxed{C_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{C_s} \end{pmatrix},$$

dove $C_1, \dots, C_s$ sono blocchi di Jordan di ordine uguale all'ordine dei blocchi $J_1, \dots, J_s$ e relativi agli autovalori distinti $1, 2, \dots, s$. Per quanto detto sopra, il polinomio caratteristico e quello minimo di C coincidono. Inoltre J e C commutano: basta vedere che due blocchi J_h e C_h commutano, ma ciò è evidente visto che, posto

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix},$$

si ha $J_hC_h = (\lambda I + N)(hI + N) = (hI + N)(\lambda I + N) = C_hJ_h$.

Basta allora prendere $B = MCM^{-1}$: è immediato verificare che tale matrice verifica la proprietà richieste nella tesi. $\square$

Soluzione dell'Esercizio 151. Il polinomio caratteristico della matrice $A + hB$ è del tipo

$$P_{A+hB}(t) = (-1)^n t^n + a_{n-1}(h)t^{n-1} + \cdots + a_0(h),$$

dove $a_{n-1}(h), \dots, a_0(h)$ sono polinomi in h di grado minore o uguale a n (perché?).

Per ipotesi esistono $n+1$ valori distinti di h per cui $A + hB$ è nilpotente e quindi per cui $P_{A+hB}(t) = (-1)^n t^n$. Ciò significa che i polinomi $a_{n-1}(h), \dots, a_0(h)$ hanno $n+1$ radici distinte e quindi, essendo di grado $\leq n$, sono identicamente nulli.

Ne segue che $P_{A+hB}(t) = (-1)^n t^n$ per ogni $h \in \mathbb{K}$ e quindi $A + hB$ è nilpotente per ogni h; in particolare A è nilpotente.

Osserviamo ora che, per ogni $k \neq 0$, si ha

$$kA + B = k\left(A + \frac{1}{k}B\right).$$

Poiché $A + hB$ è nilpotente per ogni h, la matrice $kA + B$ risulta nilpotente per ogni $k \neq 0$. In particolare essa è nilpotente per almeno $n+1$ valori distinti di k; quindi, ragionando come sopra, $kA + B$ è nilpotente per ogni $k \in \mathbb{K}$. Prendendo $k = 0$, si ottiene che anche B è nilpotente. $\square$

Soluzione dell'Esercizio 152. Se per assurdo esistesse un W come in (1), la sua dimensione sarebbe diversa da 0 (f non è identicamente nulla) ed $f|_W : W \to W$ sarebbe un isomorfismo (dato che $\operatorname{Ker} f|_W = W \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}$). Ma allora, preso $v \in W - \{0\}$ si avrebbe che $f^k(v) \neq 0$ per ogni k, contro l'ipotesi di nilpotenza di f. Questo prova (1).

Per dimostrare (2), ricordiamo (cfr. esercizio A) che esiste un intero k tale che $\operatorname{Im} f^k = \operatorname{Im} f^{k+1}$ e che il sottospazio $W = \operatorname{Im} f^k$ è invariante e $V = W \oplus \operatorname{Ker} f^k$. Ma ora, dato che $\operatorname{Ker} f \subseteq \operatorname{Ker} f^k$, si ha che $W \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}$ e quindi $W = \{0\}$. Ma allora $V = \operatorname{Ker} f^k$ e quindi $f^k = 0$. $\square$

Alberto Facchini, ALGEBRA × INFORMATICA
Introduzione ai metodi della matematica discreta e all'algebra astratta, 1986, 1992[4], *pp.* VI-114

Alberto Facchini, SUSSIDIARIO DI ALGEBRA E DI MATEMATICA DISCRETA
Complementi, esempi ed esercizi per un corso semestrale di algebra per studenti di informatica, ingegneria, fisica e matematica, 1992, *pp.* VIII-280

Brunella Bruno, LEZIONI DI ALGEBRA LINEARE UNO
Sistemi di equazioni lineari e spazi vettoriali euclidei, 1992, 1994[1], *pp.* X-134

Luigi Salce, LEZIONI DI ALGEBRA LINEARE DUE
Teoria degli autosistemi e sue applicazioni (*edizione ridotta di* LEZIONI SULLE MATRICI), 1992, *pp.* XIII-115

Luigi Salce, LEZIONI SULLE MATRICI
Teoria degli autosistemi e sue applicazioni con argomenti avanzati di teoria delle matrici, 1993, *pp.* X-198, *rilegato*

Alessandro Bettini, MECCANICA
(in preparazione)

Alessandro Bettini, TERMODINAMICA
(in preparazione)

Alessandro Bettini, ELETTROMAGNETISMO
1991, *seconda edizione* 1994, *pp.* VI-394

Alessandro Bettini, LE ONDE E LA LUCE
1993, *pp.* VI-354

Giacomo Torzo, CAPIRE E SPERIMENTARE GLI AMPLIFICATORI OPERAZIONALI
Un approccio sperimentale all'elettronica analogica con una introduzione ai circuiti integrati digitali e ai trasduttori di grandezze fisiche, 1991, *pp.* XII-188

Carlo Di Bello, PRINCIPI DI CHIMICA ORGANICA
1993, *pp.* XVI-416, *rilegato*

Agostino Parise, SISTEMI BIOLOGICI
Un'introduzione all'ecologia, 1995, *pp.* VIII-274

Gianni Gilardi, IL TEX
Introduzione al linguaggio e complementi avanzati, 1993, *pp.* XIII-227, *rilegato*