

1.1 Introduzione

La meccanica riguarda lo studio del moto di un corpo: essa spiega la relazione che esiste tra le cause che generano il moto e le caratteristiche di questo e la esprime con leggi quantitative. Se il corpo è esteso, come lo sono tutti i corpi materiali, il moto può risultare notevolmente complicato.

Per questa ragione, seguendo un processo molto comune in Fisica, iniziamo lo studio del moto dal più semplice corpo, quello puntiforme, detto *punto materiale* o spesso anche *particella*: si tratta di un corpo privo di dimensioni ovvero che presenti dimensioni trascurabili rispetto a quelle dello spazio in cui può muoversi o degli altri corpi con cui può interagire.

L'introduzione di tale concetto rende innanzitutto più semplice la trattazione di alcuni aspetti di certi problemi. Per esempio, se siamo interessati a studiare il moto della luna intorno alla terra, possiamo considerare in prima approssimazione sia la terra che la luna come punti materiali, dato che le loro dimensioni sono trascurabili rispetto alla distanza. Inoltre, più in generale, lo studio del sistema *punto materiale* permette di definire nel modo più facile alcune grandezze meccaniche fondamentali e di capirne il significato con immediatezza, in assenza delle complicazioni che deriverebbero dalla struttura estesa del corpo.

D'altra parte un corpo esteso solo eccezionalmente si muove come un punto materiale (si parla in tal caso di *traslazione*, come vedremo in seguito); esso può compiere contemporaneamente altri tipi di moto, come *rotazioni* (ad esempio una ruota) o *vibrazioni* (una goccia di liquido che cade). Studieremo pertanto anche il moto dei corpi non puntiformi e capiremo allora l'utilità dello studio preliminare del punto materiale.

L'analisi completa del moto riguarda sia il collegamento del moto stesso alle interazioni del corpo con i corpi circostanti che la descrizione geometrica dell'evoluzione temporale del fenomeno di movimento. Questa parte della meccanica, descrittiva del moto di un corpo, indipendentemente dalle cause che lo determinano, viene detta *cinematica*, mentre il perché del moto viene studiato nella *dinamica*.

Noi cominceremo il nostro studio della meccanica dalla *cinematica del punto*, lo proseguiremo con la *dinamica del punto* e lo concluderemo con la trattazione più generale della *dinamica dei sistemi di punti*, che applicheremo a casi molto diversi tra loro, come i corpi solidi e i fluidi.

Il moto di un punto materiale è determinato se è nota la sua posizione in funzione del tempo in un determinato *sistema di riferimento*, ossia ad esempio

le sue coordinate $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ in un sistema di riferimento cartesiano. Questa scelta, anche se è la più comune, non è unica; in determinate situazioni fisiche possono essere più idonei altri sistemi di riferimento, come quelli basati su coordinate polari.

La *traiettoria* è il luogo dei punti occupati successivamente dal punto in movimento e costituisce una curva continua nello spazio. Lo studio delle variazioni di posizione lungo la traiettoria nel tempo porterà a definire il concetto di *velocità*, mentre lo studio delle variazioni della velocità con il tempo introdurrà la grandezza

accelerazione; si noti che l'occuparsi di variazioni comporterà necessariamente il collegamento con il concetto matematico di *derivata*.

Le *grandezze fondamentali* in cinematica sono pertanto lo *spazio*, la *velocità*, l'*accelerazione* e il *tempo*; quest'ultimo molto spesso viene usato come variabile indipendente, in funzione di cui si esprimono le altre grandezze.

La *quiete* è un particolare tipo di moto in cui le coordinate restano costanti e quindi velocità e accelerazione sono nulle. Dobbiamo però sottolineare, e riprenderemo in dettaglio questo aspetto successivamente, che è necessario specificare sempre il sistema di riferimento rispetto a cui si osserva il moto. Si osservi come un punto in quiete in un sistema di riferimento possa apparire in moto rispetto ad un altro. Oppure si pensi al volo di un uccello visto da una persona ferma o da un'altra persona in un'auto in movimento.

Di norma dunque la traiettoria di una particella in moto ha una forma diversa ed è rappresentata da un'equazione diversa in diversi sistemi di riferimento.

Nei paragrafi successivi svilupperemo i concetti di velocità e accelerazione, considerando in generale le funzioni $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ continue e derivabili. Più avanti, dopo aver trattato la dinamica del punto, ci occuperemo del problema del *moto relativo*, cioè delle relazioni che esistono tra le descrizioni di uno stesso moto visto da due sistemi di riferimento in movimento l'uno rispetto all'altro.

Traiettoria

1.2 Moto rettilineo

Il primo moto che prendiamo in considerazione, sempre iniziando dal caso più semplice, è quello rettilineo. Esso si svolge lungo una retta sulla quale vengono fissati arbitrariamente un'origine e un verso; il moto del punto è descrivibile tramite una sola coordinata $x(t)$. La geometria del moto rettilineo è rappresentata in figura 1.1.

Sperimentalmente $x(t)$ può essere determinata ponendo lungo la retta dei traguardi con dispositivi a cellula fotoelettrica collegati ad un cronometro o per via televisiva o per mezzo di fotografia rapida. Con questi sistemi possiamo ottenere coppie di valori x_i, t_i e ricercare una relazione tra x e t , cioè la funzione $x(t)$. Anche la scelta dell'origine dei tempi è arbitraria: $t = 0$ può coincidere con l'inizio della nostra osservazione, ma ciò non è assolutamente necessario.

Le misure ottenute possono essere rappresentate in un sistema con due assi cartesiani. Sull'asse delle ordinate riportiamo i valori di x e su quello delle ascisse i corrispondenti valori del tempo: la figura si chiama *diagramma orario*. È necessario ovviamente introdurre delle unità di riferimento nei due assi, ad esempio la lunghezza corrispondente ad un intervallo di tempo di un secondo nelle ascisse e quella relativa ad uno spostamento di un metro nelle ordinate.

Nelle figure 1.2, 1.3, 1.4, sono riportate le misure e i diagrammi orari corrispondenti a tre diversi moti di un punto materiale.

Si osservi che in una misura fisica reale ciascun dato è affetto da errori e pertanto i punti che rappresentano le varie misure non si dispongono esattamente su una retta, una parabola o su altri tipi di curve. L'espressione di $x(t)$ è ottenibile solo tramite opportuni metodi di ottimizzazione analitica.

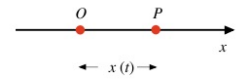


FIGURA 1.1

Diagramma orario

1.3 Velocità nel moto rettilineo

Introduciamo ora il concetto di *velocità media* e *velocità istantanea* nel moto rettilineo. Se al tempo $t = t_1$ il punto si trova nella posizione $x = x_1$ e al tempo $t = t_2$ nella posizione $x = x_2$, $\Delta x = x_2 - x_1$ rappresenta lo spazio percorso nell'intervallo di

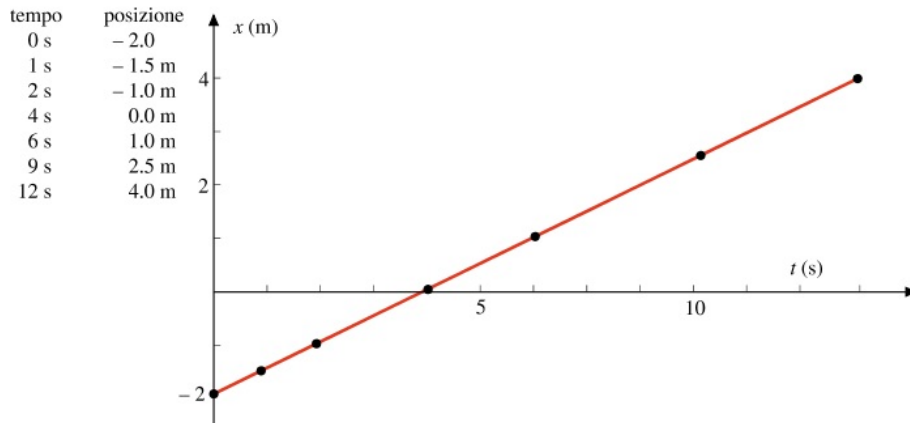


FIGURA 1.2 Al tempo $t = 4\text{ s}$ il punto passa per l'origine; il moto è rappresentabile tramite una relazione lineare tra x e t del tipo $x = at + b$, dove a e b sono due costanti che assumono i valori $a = 0.5\text{ ms}^{-1}$, $b = -2\text{ m}$.

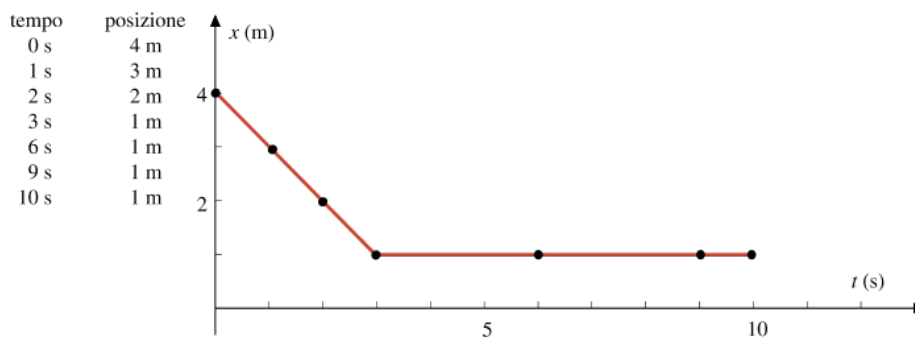


FIGURA 1.3 Il punto nel suo moto si avvicina all'origine con una relazione lineare tra x e t del tipo $x = at + b$, con $a = -1\text{ ms}^{-1}$, $b = 4\text{ m}$. Raggiunta la posizione $x = 1\text{ m}$ si ferma, restando in tale posizione.

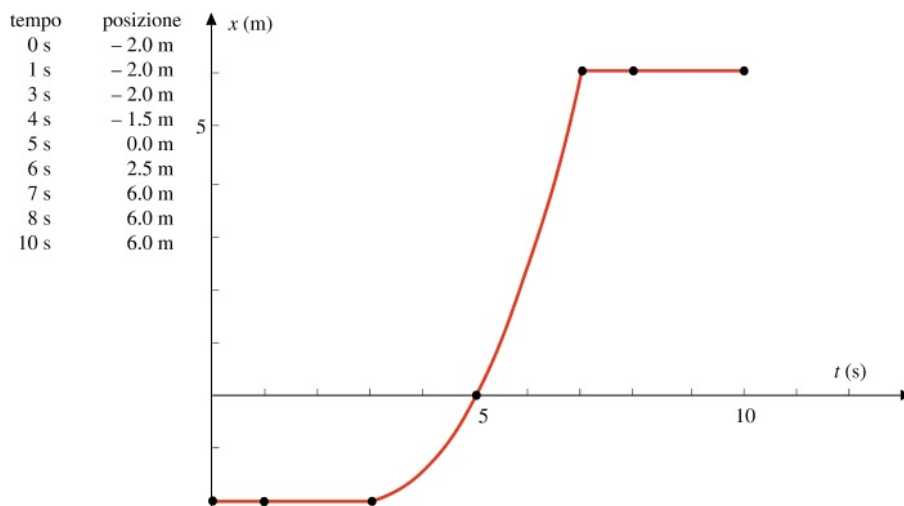


FIGURA 1.4 Nell'intervallo di tempo tra $t = 0$ e $t = 3$ s il punto rimane fermo nella posizione $x = -2$ m, successivamente si muove secondo il verso positivo della retta con una relazione quadratica tra x e t del tipo $x = a + b(t - t_0)^2$, in cui $a = -2$ m, $b = 0.5 \text{ ms}^{-2}$, $t_0 = 3$ s. Nella posizione $x = 6$ m il punto si ferma.

tempo $\Delta t = t_2 - t_1$. Possiamo caratterizzare la rapidità con cui avviene lo spostamento tramite la velocità media

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} .$$

Velocità media

Tale grandezza fornisce una informazione *complessiva*, ma non dà quasi nessuna indicazione sulle caratteristiche effettive del moto.

Per individuare la funzione $x(t)$ e le sue variazioni aumentiamo il numero di misure nell'intervallo di spazio Δx , cioè suddividiamo l'intervallo Δx in numerosi piccoli intervalli $(\Delta x)_1, (\Delta x)_2, \dots, (\Delta x)_i, \dots, (\Delta x)_n$ percorsi rispettivamente negli intervalli di tempo $(\Delta t)_1, (\Delta t)_2, \dots, (\Delta t)_i, \dots, (\Delta t)_n$. Le corrispondenti velocità medie sono $v_i = (\Delta x)_i / (\Delta t)_i$; in generale $v_1, v_2, \dots, v_i, \dots, v_n$ non sono eguali tra loro e a v_m . Infatti in un generico moto rettilineo la velocità non è costante nel tempo (ciò comporterebbe appunto $v_1 = v_2 = \dots = v_i = \dots = v_n = v_m$).

Il processo di suddivisione in spazi sempre più piccoli può essere continuato e il limite a tale procedura è posto dalla capacità di apprezzare piccoli intervalli da parte degli strumenti utilizzati per la misura degli intervalli di spazio e di tempo. In ogni caso se Δx risulta suddiviso in un numero elevatissimo di intervallini dx , ciascuno percorso nel tempo dt , si può definire la velocità istantanea, ad un istante t , del punto in movimento come il rapporto $v = dx/dt$, calcolato in quel determinato istante.

Il metodo che abbiamo descritto in un modo abbastanza semplice consiste matematicamente nel calcolare il limite per $\Delta t \rightarrow 0$ del rapporto incrementale $\Delta x/\Delta t$. Pertanto la velocità di un punto nel moto rettilineo è data dalla derivata dello spazio rispetto al tempo:

$$v = \frac{dx}{dt} ; \quad (1.1)$$

Velocità istantanea

la *velocità istantanea*, cioè, *rappresenta la rapidità di variazione temporale della posizione nell'istante t considerato*.

Il segno della velocità indica il verso del moto sull'asse x : se $v > 0$ la coordinata x cresce (nella figura 1.1 il punto va da sinistra verso destra), mentre se $v < 0$ il moto avviene nel verso opposto.

A sua volta la velocità può essere funzione del tempo $v(t)$; vedremo esempi specifici nei paragrafi 1.5, 1.6, 1.7. Nel caso particolare in cui sia $v = \text{costante}$ si parla di *moto rettilineo uniforme*.

In conclusione, se è nota, perché calcolata o misurata, la funzione $x(t)$ ovvero, come si dice, se è nota la legge oraria, si può ottenere la velocità

istantanea con l'operazione di derivazione (1.1).

Possiamo d'altra parte risolvere il problema inverso, cioè ricavare la funzione $x(t)$ se è nota la dipendenza dal tempo della velocità istantanea, $v(t)$. Supponiamo che il punto materiale si trovi nella posizione x al tempo t e nella posizione $x + dx$ al tempo $t + dt$; dalla (1.1) vediamo che lo spostamento infinitesimo dx è eguale al prodotto del tempo dt impiegato a percorrerlo per il valore della velocità al tempo t :

$$dx = v(t) dt ,$$

qualunque sia la dipendenza della velocità dal tempo. Lo spostamento complessivo sulla retta su cui si muove il punto, in un intervallo finito di tempo $\Delta t = t - t_0$, è dato dalla somma di tutti i successivi valori dx . Per fare il calcolo utilizziamo la operazione di integrazione: $\Delta x = \int_{x_0}^x dx = \int_{t_0}^t v(t) dt$

Il primo integrale è immediato e vale $x - x_0$; pertanto

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t v(t) dt . \quad (1.2)$$

Questa è la relazione generale che permette il calcolo dello spazio percorso nel moto rettilineo, qualunque sia il tipo di moto. Il termine x_0 rappresenta la *posizione iniziale* del punto, occupata nell'istante iniziale t_0 . Pertanto per calcolare $x(t)$, nota $v(t)$, è necessario conoscere la condizione iniziale del moto. Matematicamente la presenza della costante x_0 è la conseguenza del fatto che abbiamo risolto un'equazione differenziale del primo ordine, quale è la (1.1); si veda a questo proposito l'appendice A.

Osserviamo esplicitamente che Δx rappresenta lo spostamento complessivo e non lo spazio percorso, nel senso che ora precisiamo: se per esempio il punto avesse eseguito una serie di spostamenti che alla fine l'avessero riportato alla posizione iniziale, Δx risulterebbe nullo, anche se il punto nel suo movimento ha percorso vari spazi; Δx cioè non è la somma dei moduli degli spostamenti, bensì la somma algebrica (si veda l'importanza del segno della velocità).

Ricordando la definizione di velocità media, $v_m = (x - x_0)/(t - t_0)$, da (1.2) ricaviamo la relazione tra velocità media e velocità istantanea:

$$v_m = \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^t v(t) dt \quad . \quad (1.3)$$

La (1.3) coincide con la definizione matematica di valor medio di una funzione in un dato intervallo; pertanto la velocità media, pari al rapporto tra lo spazio complessivamente percorso e il tempo impiegato a percorrerlo, è eguale al valor medio della velocità istantanea nell'intervallo di tempo considerato. Nell'esempio visto sopra di un punto che parte da una certa posizione e vi ritorna dopo un certo tempo, la velocità media è nulla mentre la velocità istantanea deve avere valori diversi da zero e certamente cambia segno almeno una volta. Da questa e da simili situazioni deriva l'affermazione iniziale che la velocità media non dà informazioni sulle possibili varie fasi del moto effettivo; d'altra parte essa è utile per valutare globalmente la rapidità di uno spostamento.

Moto rettilineo uniforme

Come prima applicazione di (1.2) consideriamo il caso particolare del *moto rettilineo uniforme*, in cui $v = \text{costante}$. Si ha:

$$x(t) = x_0 + v \int_{t_0}^t dt = x_0 + v(t - t_0) \quad , \quad x(t) = x_0 + v t \quad . \quad (1.4)$$

La seconda espressione vale se $t_0 = 0$.

Le (1.4) si chiamano leggi orarie o equazioni del moto rettilineo uniforme; esse mostrano che in questo moto lo spazio è una funzione lineare del tempo: in tempi eguali sono percorsi spazi eguali (si rivedano le figure 1.2 e 1.3). La velocità istantanea, costante, coincide con la velocità media.

Esempio 1.1

Due punti materiali si trovano nell'istante iniziale $t = 0$ sullo stesso asse x , rispettivamente nella posizione x_1 con velocità v_1 e nella posizione $x_2 > x_1$ con velocità v_2 . Il moto dei punti è uniforme. Discutere quali sono le situazioni in cui i punti ad un certo istante si urtano e determinare dove e quando si urtano.

Soluzione

I punti si urtano in questi tre casi

1. $v_1 > 0, v_2 < 0$ (i punti si vengono incontro);
2. $v_1 > 0, v_2 > 0, v_1 > v_2$ (entrambi i punti si muovono nel verso positivo, il primo punto che è più indietro deve essere più veloce);

3. $v_1 < 0, v_2 < 0, v_1 > v_2$ (caso speculare rispetto al precedente).

La soluzione può essere impostata in modo generale. Le equazioni del moto dei due punti, che danno la posizione rispetto all'origine, sono secondo (1.4)

$$x = x_1 + v_1 t \quad , \quad x = x_2 + v_2 t \quad .$$

Nell'istante in cui i punti si urtano le loro coordinate devono essere eguali; imponendo questa condizione si ha il tempo dell'urto:

$$t = \frac{x_2 - x_1}{v_1 - v_2} \quad .$$

Sostituendo questo tempo in una qualsiasi delle due leggi orarie si trova la posizione nell'istante dell'urto:

$$x = \frac{v_1 x_2 - v_2 x_1}{v_1 - v_2} \quad .$$

Nelle figure 1.5 sono rappresentati i tre casi; le posizioni iniziali sono $x_1 = 3\text{m}$, $x_2 = 8\text{m}$, le velocità sono indicate accanto a ciascuna figura (per le unità di misura si veda la nota nel successivo paragrafo). Le rette rappresentano i diagrammi orari dei moti (grafici di $x(t)$ in funzione del tempo); la pendenza rispetto all'asse t è proprio la velocità, in base alla definizione (1.1) ovvero alla legge (1.4). Si noti come, utilizzando qualitativamente il diagramma orario, si potessero individuare subito i tre casi richiesti e gli altri tre in cui non si ha urto (rette divergenti nel semipiano $t \geq 0$).

Nascondi soluzione

1.4 Accelerazione nel moto rettilineo

Abbiamo detto che nel caso più generale di moto rettilineo la velocità è funzione del tempo, $v(t)$. Se in un determinato intervallo di tempo Δt essa varia di una quantità Δv , possiamo definire la grandezza *accelerazione media* come $a_m = \Delta v / \Delta t$. Con un procedimento analogo a quello utilizzato per passare dal concetto di velocità media a quello di velocità istantanea definiamo l'*accelerazione istantanea*, cioè la *rapidità di variazione temporale della velocità*, come

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad (1.5)$$

dove nel secondo passaggio abbiamo usato (1.1).

Se $a = 0$ la velocità è costante (moto rettilineo uniforme); quando a è positiva la velocità cresce nel tempo mentre per $a < 0$ la velocità decresce. Si faccia attenzione che è il segno algebrico della velocità istantanea e non quello dell'accelerazione a fornire il verso del moto.

Nota la dipendenza della velocità dal tempo abbiamo dunque visto come con l'operazione di derivazione si ottenga la funzione $a(t)$. Se invece conosciamo $a(t)$ possiamo ricavare $v(t)$ tramite l'integrazione dell'equazione differenziale (1.5):

da $dv = a(t) dt$ scriviamo $\Delta v = \int_{v_0}^v dv = \int_{t_0}^t a(t) dt$ e pertanto

$$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^t a(t) dt, \quad (1.6)$$

relazione generale che permette il calcolo della velocità se è nota l'accelerazione in funzione del tempo. Come visto precedentemente, dato che è stata risolta un'equazione differenziale del prim'ordine abbiamo nella soluzione una costante v_0 , che rappresenta la velocità del punto all'istante iniziale t_0 . Per calcolare esplicitamente $v(t)$ si devono conoscere la forma analitica di $a(t)$ e la *velocità iniziale* v_0 . Vale inoltre per Δv la stessa osservazione fatta per Δx calcolato con (1.2): si tratta sempre di variazioni algebriche complessive.

Anticipando quanto vedremo nel capitolo 2, osserviamo che l'accelerazione è una grandezza molto importante in quanto essa è legata dalla legge di Newton, $F = ma$, all'interazione del punto materiale di massa m con l'esterno, espressa dalla forza F . Quindi la conoscenza della legge oraria $x(t)$ ci permette di ricavare, derivando, $v(t)$ e $a(t)$ e conseguentemente la forza $F(t)$ che agisce sul punto. Viceversa se è nota la forza agente $F(t)$ determiniamo $a(t)$ e da questa, integrando, $v(t)$ e $x(t)$ purché siano note le condizioni iniziali, cioè i valori della velocità e della posizione del punto nell'istante iniziale t_0 .

Supponiamo ora di trovarci in una situazione fisica in cui sia nota la

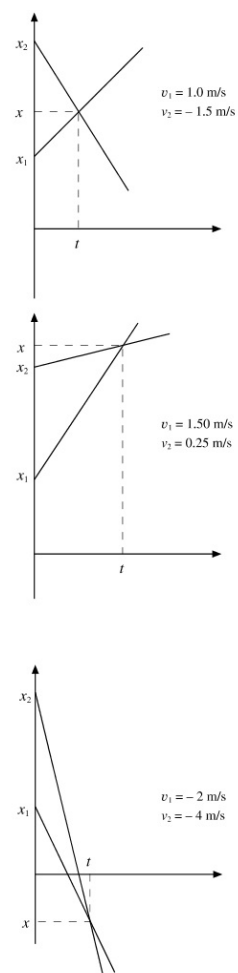


FIGURA 1.5
(Esempio 1.1)

dipendenza dell'accelerazione dalla posizione, cioè la funzione $a(x)$. In tal caso è possibile ricavare il valore della velocità in ogni posizione x , $v(x)$, utilizzando il concetto matematico di funzione di funzione.

Infatti se ad un certo istante t il punto occupa una determinata posizione x , con un valore v della velocità e a dell'accelerazione, queste si possono pensare come funzioni della posizione oltre che del tempo e si può scrivere $v(t) = v[x(t)]$, $a(t) = a[x(t)]$. Deriviamo la prima rispetto al tempo sfruttando la regola di derivazione delle funzioni di funzioni:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} v[x(t)] = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} .$$

Quindi $a = v \frac{dv}{dx}$ MathType@MTEF@5@5@+= feaagKart1ev2aaatCvAUfeBSjuyZL2yd9gzLbvyNv2CaerbuLwBLn hiov2DGi1BTfMBaeXatLxBI9gBaerbd9wDYLwzYbItLDharqqtubsr 4rNCHbGeaGqiVu0Je9sqqrpepCoxbbL8F4rqqrFfpeea0xe9Lq=Jc9 vqaqpepmoxbba9pwe9Q8fs0=yqaqpepae9pg0FirpepeKkFr0xfr=x fr=xb9adbaqaaeGaciGaaiaabeqaamaabaabaaGcbaGaamyiaiabg2 da9iaadAhadaWcaaqaiaadsgacaWG2baabaGaamizaiaadIhaaaaa aa@3CB7@

che scriviamo $a dx = v dv$: se dalla posizione x , dove il punto dx possiede la velocità v e l'accelerazione a , si ha uno spostamento dx , il punto subisce una variazione di velocità dv ; dx e dv sono legati dalla relazione data. Integrando $\int x$

$\int a(x) dx = \int v dv$ MathType@MTEF@5@5@+= feaagKart1ev2aaatCvAUfeBSjuyZL2yd9gzLbvyNv2CaerbuLwBLn hiov2DGi1BTfMBaeXatLxBI9gBaerbd9wDYLwzYbItLDharqqtubsr 4rNCHbGeaGqiVu0Je9sqqrpepCoxbbL8F4rqqrFfpeea0xe9Lq=Jc9 vqaqpepmoxbba9pwe9Q8fs0=yqaqpepae9pg0FirpepeKkFr0xfr=x fr=xb9adbaqaaeGaciGaaiaabeqaamaabaabaaGcbaWaa8qmaeaaca WGHbWaaeWaaeaacaWG4baacaGLOaGaayzkaaaaleaacaWG4bWaaSba aWqaaiaaicdaaeqaaaWcbaGaamiEaaqdcqGHRiI8aOGaaGPaVlaayk W7caWGKbGaamiEaiaaykW7cqGH9aqpdawDXbqaaiaadAhacaaMc8Ua amizaiaadAhaaSqaaiaadAhadaWgaaadbaGaaGimaaqabaaaleaaca

WG2baaniabgUIiYdaaaa@4FC9@ ed esplicitando il secondo integrale si ottiene:

$$\int_{x_0}^x a(x) dx = \frac{1}{2} v^2 - \frac{1}{2} v_0^2 ; \quad (1.7)$$

v_0 è la velocità del punto nella posizione x_0 .

La conoscenza della dipendenza dell'accelerazione dalla posizione, $a(x)$, cioè di come varia l'interazione del punto materiale con l'esterno, $F(x)$, permette il calcolo della variazione della velocità nel passaggio del punto dalla posizione x_0 alla posizione x . Poiché la relazione è quadratica non si ha l'informazione sul segno della velocità, che però è ricavabile considerando i segni di v_0 e di a .

Unità di misura

Quando si introduce una nuova grandezza fisica bisogna sempre precisare come si misura e in che unità è espresso il risultato numerico della misura. Trattiamo questo argomento nell'appendice B, che consigliamo di leggere subito per fissare le idee sulle grandezze assunte come fondamentali e sulla nozione di dimensioni di una grandezza fisica; essa servirà poi come quadro riassuntivo delle unità delle varie grandezze, che definiremo di volta in volta nel testo.

Il moto di un punto è espresso dalla conoscenza della posizione nel tempo e queste due grandezze si misurano, nel sistema internazionale delle unità di misura (S.I.), in metri (m) e in secondi (s) rispettivamente, come già detto nel paragrafo 1.2 a proposito dei diagrammi orari. La velocità e l'accelerazione si possono determinare con misure di spazi percorsi e di tempi impiegati a percorrerli, secondo le definizioni (1.1) e (1.5). Di conseguenza l'unità di misura della velocità è

$$\text{metro/secondo} = \text{m/s} = \text{ms}^{-1} \quad ,$$

dell'accelerazione è

$$(\text{metro/secondo})/\text{secondo} = \text{m/s}^2 = \text{ms}^{-2} \quad .$$

Le unità suddette, per quanto molto usate, non hanno un nome particolare. Per la velocità esiste l'unità pratica chilometro all'ora, km/h:

$$1 \frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{10^3}{3.6 \cdot 10^3} \text{ms}^{-1} = 0.278 \text{ms}^{-1} \Rightarrow 1 \text{ms}^{-1} = 3.6 \frac{\text{km}}{\text{h}} \quad .$$

Moto rettilineo uniformemente accelerato

Riassumendo, il moto rettilineo più generale è *vario*, intendendo con questo termine che l'accelerazione non è costante; se invece l'accelerazione è costante durante il moto, questo si dice *uniformemente accelerato* e la dipendenza della velocità dal tempo è lineare, come si ricava da (1.6):

$$v(t) = v_0 + a(t - t_0) \quad , \quad \text{se } t_0 = 0 \quad v(t) = v_0 + a t \quad . \quad (1.8)$$

Utilizzando (1.2) e (1.8) si calcola la posizione $x(t)$:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t [v_0 + a(t - t_0)] dt = x_0 + \int_{t_0}^t v_0 dt + \int_{t_0}^t a(t - t_0) dt \quad ,$$

$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2} a(t - t_0)^2 \quad ; \quad (1.9)$$

$$\text{se } t_0 = 0 \quad x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \quad .$$

Dunque nel moto rettilineo uniformemente accelerato la velocità è una funzione lineare del tempo mentre lo spazio è una funzione quadratica del tempo (si riveda la figura 1.4).

Se a è costante la (1.7) diventa

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0) \quad (1.10)$$

Esempio 1.2

Un punto passa per l'origine al tempo $t = 0$ con velocità $v_0 > 0$; per $t > 0$ la dipendenza dell'accelerazione dalla posizione è data da $a = -Ax - B$, con A e B costanti positive. Si determini la posizione in cui il punto si ferma.

Soluzione

Applichiamo la relazione (1.7) con $x_0 = 0$ e velocità finale $v = 0$, dato che il problema richiede la posizione in cui il punto si ferma.

Abbiamo

$$\int_0^x (-Ax - B) dx = -\frac{1}{2} v_0^2$$

e integrando

$$\frac{1}{2} Ax^2 + Bx = \frac{1}{2} v_0^2 \quad .$$

Dalla soluzione di questa equazione di secondo grado si ha la posizione cercata: $x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 + Av_0^2}}{A}$.
L'altra soluzione dà $x < 0$ e non ha significato fisico nel nostro problema.

In generale, per ogni x possiamo calcolare $v(x)$, appunto perché si conosce $a(x)$. Più difficile è calcolare posizione, velocità e accelerazione in funzione del tempo; vedremo nel capitolo 9 la soluzione di questo problema.

Nascondi soluzione

Esempio 1.3

Un'automobile è in grado di passare dalla quiete alla velocità di 100 km/h in t secondi, muovendosi con moto uniformemente accelerato. Esprimere il valore dell'accelerazione e calcolarlo per $t = t_1 = 5$ s e per $t = t_2 = 8$ s. Quanto vale lo spazio percorso nei due casi?

E la velocità media?

Soluzione

Utilizziamo la relazione (1.8) con $v_0 = 0$ per cui $a = v/t$. Trasformiamo la velocità finale nell'unità m/s, $100 \text{ km/h} = 27.8 \text{ m/s}$. Pertanto:

$$\text{con } t_1 = 5 \text{ s} \quad a_1 = \frac{27.8}{5} = 5.6 \text{ m/s}^2 \quad ,$$

$$\text{con } t_2 = 8 \text{ s} \quad a_2 = \frac{27.8}{8} = 3.5 \text{ m/s}^2 \quad .$$

Gli spazi necessari per raggiungere nel tempo dato la velocità voluta sono:

$$x_1 = \frac{1}{2} a_1 t_1^2 = 70 \text{ m} \quad , \quad x_2 = \frac{1}{2} a_2 t_2^2 = 112 \text{ m} \quad .$$

Nel moto uniformemente accelerato

$$v_m = \frac{x - x_0}{t} = \frac{1}{t} (v_0 t + \frac{1}{2} a t^2) = v_0 + \frac{1}{2} a t = v_0 + \frac{1}{2} (v - v_0) = \frac{v_0 + v}{2} \quad .$$

Per il caso in esame v_0 e v sono fissate e quindi si ottiene lo stesso risultato sia con t_1 che con t_2 : $v_m = 13.9 \text{ m/s} = 50 \text{ km/h}$.

Nascondi soluzione

Esempio 1.4

Un punto materiale parte dall'origine con velocità iniziale v_0 positiva ed è sottoposto ad un'accelerazione negativa $-a$ costante. Calcolare la massima distanza dall'origine raggiunta dal punto lungo il semiasse positivo, l'istante t_1 in cui si ferma, l'istante t_2 in cui ripassa per l'origine e la velocità che ha per $t = t_2$.

Soluzione

L'equazione del moto (1.9) è $x = v_0 t - \frac{1}{2} a t^2$ MathType@MTEF@5@5@+= feaagKart1ev2aaatCvAUfeBSjuyZL2yd9gzLbvyNv2CaerbuLwBLn hiov2DGi1BTfMBaeXatLxBI9gBaerbd9wDYLwzYbItLDharqqtubsr 4rNCHbGeaGqiVu0Je9sqqrpepCoxbbL8F4rqqrFfpeea0xe9Lq=Jc9 vqaqpepmoxbba9pwe9Q8fso=yqaqpepae9pg0FirpepeKkFroxfr=x fr=xb9adbaqaeeGaciGaaiaabeqaamaabaabaaGcbaGaamiEaiaayk W7caaMc8Uaeyypa0JaaGPaVlaaykW7caWG2bWaaSbaaSqaiaaica daaaGaamyiaaadshadaahaaWcbeqaiaaikaadaaaaaa@474B@ , la velocità varia nel tempo secondo (1.8), $v = v_0 - at$, e si annulla per $t = t_1 = v_0/a$; in questo istante il punto si ferma e torna verso l'origine; la distanza dall'origine è

$$x(t_1) = v_0 \left(\frac{v_0}{a} \right) - \frac{1}{2} a \left(\frac{v_0}{a} \right)^2 = \frac{v_0^2}{2a} \quad ;$$

lo stesso risultato si ottiene da (1.10) ponendo $v = 0$.

Il punto ripassa nell'origine quando $v_0 - at = 0$, che ammette la soluzione $t = 0$ (istante iniziale) e la soluzione

$$t = t_2 = \frac{2v_0}{a} = 2t_1 \quad ;$$

il tempo per andare dall'origine a $x = x(t_1)$ è lo stesso che per ritornare da questa posizione all'origine. Per $t > t_2$ il moto avviene lungo il semiasse negativo e il punto si allontana indefinitamente dall'origine.

La velocità per $t = t_2$ è

$$v(t_2) = v_0 - at_2 = v_0 - a\left(\frac{2v_0}{a}\right) = -v_0 \quad ,$$

eguale ed opposta alla velocità iniziale. Cioè il punto ripassa per l'origine con la stessa velocità in modulo.

Questi risultati erano prevedibili semplicemente considerando che nel tratto da $x = 0$ a $x = x_1$ e da x_1 a 0 l'accelerazione, in modulo, è la stessa; quindi, in modulo, la variazione di velocità è la stessa (da v_0 a zero e da zero a v_0), secondo (1.10); ne consegue che eguale è il tempo di percorrenza, da (1.8).

L'andamento in funzione del tempo di accelerazione, velocità e posizione è mostrato in figura, con $a = 1 \text{ m/s}^2$ e $v_0 = 2 \text{ m/s}$.

Nascondi soluzione

Esempio 1.5

Due punti materiali si muovono sullo stesso asse nello stesso verso con velocità costanti v_1 e v_2 ; il primo punto insegue il secondo e può raggiungerlo, in quanto $v_1 > v_2$. All'istante $t = 0$, quando la distanza tra i due punti è d , il primo punto inizia a frenare uniformemente (accelerazione costante e negativa, che scriviamo $-a$). Determinare quale relazione deve esistere tra v_1 , v_2 , d , a affinché il primo punto non tamponi il secondo e calcolare il tempo di frenata.

Soluzione

La condizione di non tamponamento implica che il primo punto raggiunga il secondo avendo proprio la velocità v_2 e non una velocità maggiore. Deve quindi essere:

$$v_1 - at = v_2 \Rightarrow t = \frac{v_1 - v_2}{a} \quad ,$$

durata della frenata uniforme. Nell'istante t in cui il primo punto raggiunge il secondo la coordinata di entrambi è

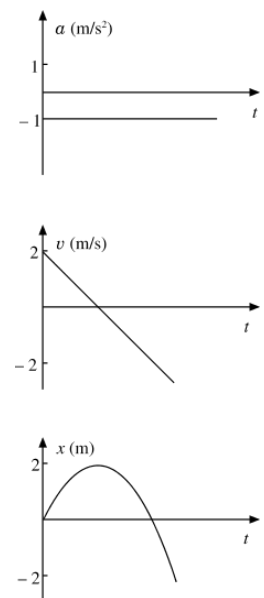


FIGURA 1.6
(Esempio 1.4)

$$x_1 + v_1 t - \frac{1}{2} a t^2 = x_2 + v_2 t \quad ,$$

dove x_1 e x_2 sono le posizioni al tempo $t = 0$. Dall'eguaglianza, ricordando che $x_2 - x_1 = d$, si ha

$$(v_1 - v_2)t - \frac{1}{2} a t^2 = d \quad ;$$

si inserisce il valore del tempo di frenata e si trova

$$d = \frac{(v_1 - v_2)^2}{2a} \quad .$$

Un'applicazione pratica è la seguente: un automobilista che procede ad una certa velocità (v_1) si accorge che più avanti c'è un'altra auto che procede a velocità minore (v_2). In linea di principio, se si inizia a frenare quando la distanza è d , c'è sempre una soluzione per a , però nella pratica se $v_1 - v_2$ è grande e d è piccola, la soluzione potrebbe corrispondere a una decelerazione che il sistema frenante di un'auto non può sviluppare. Un valore indicativo di a è 4 m/s^2 ; con $v_1 = 100 \text{ km/h}$ e $v_2 = 50 \text{ km/h}$, $v_1 - v_2 = 13.9 \text{ m/s}$ e $d = 24 \text{ m}$: se si inizia a frenare a distanza minore l'urto è inevitabile.

Nel caso di ostacolo fermo ($v_2 = 0$) la formula precedente dà lo spazio di arresto: $d = v_1^2 / 2a$. A 100 km/h e con $a = 4 \text{ m/s}^2$ risulta $d = 96.6 \text{ m}$.

Questi calcoli non tengono conto del tempo di reazione Δt (tra la percezione dell'ostacolo e l'azione sul freno), durante il quale i punti percorrono gli spazi $v_1 \Delta t$ e $v_2 \Delta t$, per cui la loro distanza diminuisce di $(v_1 - v_2) \Delta t$. Tale valore va aggiunto a d . Con $\Delta t = 1 \text{ s}$ la correzione, nei due casi visti, è di 13.9 m e 27.8 m .

Nascondi soluzione

Esempio 1.6

Un punto materiale parte dall'origine al tempo $t = 0$ con velocità iniziale di 2 m/s nel verso delle x negative. Esso è sottoposto ad un'accelerazione non costante $a = kt$ con $k = 0.1 \text{ m/s}^3$. Determinare l'istante t_1 e la posizione x_1 in cui il punto si ferma, l'istante t_2 in cui il punto ripassa nell'origine e la velocità v_2 in quell'istante, l'espressione generale della velocità media.

Soluzione

Applichiamo (1.6) con $a = kt$ e (1.2):

$$v = -v_0 + \frac{kt^2}{2} \quad , \quad x = -v_0 t + \frac{kt^3}{6} \quad ;$$

abbiamo tenuto conto della condizione iniziale $x = 0$ per $t = 0$ e del fatto che la velocità iniziale è negativa ($-v_0 = -2$ m/s). Il punto inizia a muoversi nel verso delle x negative e rallenta fino a fermarsi in quanto a è positiva. L'arresto si ha per

$$v = 0 \Rightarrow \frac{kt_1^2}{2} = v_0 \quad , \quad t_1 = \sqrt{\frac{2v_0}{k}} = 6.32 \text{ s} \quad ,$$

nella posizione

$$x_1 = -v_0 t_1 + \frac{kt_1^3}{6} = -\frac{8}{9k} v_0^{3/2} = -8.43 \text{ m} \quad .$$

Passando dall'origine a x_1 l'accelerazione aumenta da zero a $kt_1 = 0.63$ m/s².

Il punto ripassa nell'origine ($x = 0$) quando

$$\frac{kt_2^3}{6} = v_0 t_2 \Rightarrow t_2 = \sqrt{\frac{6v_0}{k}} = \sqrt{3} t_1 = 10.95 \text{ s} < 2 t_1 .$$

La velocità nell'origine vale

$$v = -v_0 + \frac{kt_2^2}{2} = 2v_0 > v_0 \quad .$$

Per $t = t_2$ l'accelerazione vale $kt_2 = 1.1$ m/s². È proprio il continuo aumento dell'accelerazione a far sì che il tempo di ritorno sia minore di quello di andata e che $v(t_2)$ sia maggiore di v_0 ; si confronti con i risultati dell'esempio 1.4, in cui l'accelerazione è costante. In figura sono riportati i grafici di $a(t)$, $v(t)$, $x(t)$. Le velocità media si calcola così:

$$v_m = \frac{x - x_0}{t} = \frac{v(0)t + kt^3/6}{t} = v(0) + \frac{kt^2}{6} = v(0) + \frac{1}{3} [v(t) - v(0)] = \frac{2v(0) + v(t)}{3} \quad .$$

Si noti la differenza con quanto calcolato nell'esempio 1.3 per il moto uniformemente accelerato.

Nascondi soluzione

Negli esempi appena visti abbiamo mostrato come si applicano le leggi del moto rettilineo e come si rappresentano graficamente i risultati. Viceversa, dall'esame di un diagramma orario siamo adesso in grado di dedurre le caratteristiche del moto. Rivedendo le figure 1.2, 1.3, 1.4 notiamo che le prime due rappresentano tratti di moto uniforme mentre la terza si riferisce ad un tratto di moto uniformemente accelerato.

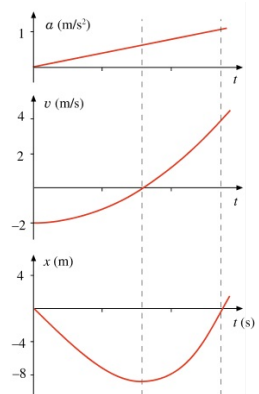


FIGURA 1.7

(Esempio 1.6)

1.5 Moto verticale di un corpo

Se trascuriamo l'attrito con l'aria, *un corpo lasciato libero di cadere in vicinanza della superficie terrestre si muove verso il basso con una accelerazione costante che vale in modulo $g = 9.8 \text{ ms}^{-2}$* : il moto osservato sperimentalmente è dunque rettilineo uniformemente accelerato.

Prendiamo un sistema di riferimento con origine al suolo e asse x rivolto verso l'alto, come in figura 1.8. In questo sistema $a = -g = -9.8 \text{ ms}^{-2}$: lo capiamo, per esempio, considerando che il corpo cadendo si muove lungo il verso negativo dell'asse x per cui la velocità è negativa e negativa deve essere l'accelerazione, in quanto la velocità nel tempo diventa sempre più negativa. Questi segni dipendono dalla scelta del verso dell'asse x ; se fosse orientato verso il basso a sarebbe positiva.

Esaminiamo alcune possibili situazioni, cominciando dalla caduta da un'altezza h con velocità iniziale nulla: le condizioni iniziali sono perciò $x_0 = h$ e $v_0 = 0$ per $t = t_0 = 0$. Ricorriamo alle formule (1.8, 1.9, 1.10), con $a = -g$, per scrivere le espressioni della velocità in funzione del tempo e della posizione, della posizione in funzione del tempo e del tempo in funzione della posizione:

$$v(t) = -gt \quad , \quad v(x) = \sqrt{2g(h-x)} \quad ,$$

$$x(t) = h - \frac{1}{2}gt^2 \quad , \quad t(x) = \sqrt{\frac{2(h-x)}{g}} \quad .$$

In particolare il tempo di caduta e la velocità al suolo sono:

$$t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad , \quad v_c = \sqrt{2gh} \quad .$$

Posto ad esempio $h = 10 \text{ m}$, si ha $t_c = 1.4 \text{ s}$ e $v_c = 14 \text{ m/s}$ ($= 38.9 \text{ km/h}$). Se invece il punto è lanciato verso il basso (condizioni iniziali $x_0 = h$ e $v_0 = -v_1$), si trovano le seguenti espressioni:

$$v(t) = -v_1 - gt \quad , \quad v(x) = \sqrt{v_1^2 + 2g(h-x)} \quad ,$$

$$x(t) = h - v_1t - \frac{1}{2}gt^2 \quad , \quad t(x) = -\frac{v_1}{g} + \sqrt{\frac{v_1^2}{g^2} + \frac{2(h-x)}{g}} \quad ,$$

$$t_c = -\frac{v_1}{g} + \sqrt{\frac{v_1^2}{g^2} + \frac{2h}{g}} \quad , \quad v_c = \sqrt{v_1^2 + 2gh} \quad .$$

Nel calcolo di $t(x)$, che comporta la risoluzione di un'equazione di secondo grado, si è scartata la soluzione negativa che in questo caso non ha significato. Osserviamo che t_c risulta minore di quello calcolato nella situazione precedente proprio perché il punto possiede una velocità iniziale rivolta verso il basso; per

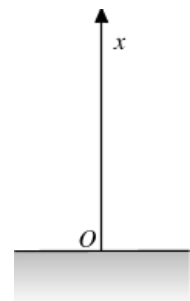


FIGURA 1.8

la stessa ragione v_c risulta maggiore. Ponendo $v_1 = 0$ ovviamente si ritrovano i risultati visti prima.

Infine lanciamo il punto verso l'alto, con velocità v_2 , ma partendo dal suolo: le condizioni iniziali sono $x_0 = 0$ e $v_0 = v_2 > 0$ per $t = 0$. Questa volta

$$v = v_2 - g t \quad , \quad x = v_2 t - \frac{1}{2} g t^2 \quad .$$

Il punto inizialmente sale verso l'alto con velocità che decresce progressivamente ($v > 0$, ma $a < 0$: il punto viene frenato): esso si ferma, cioè ha una velocità nulla, nell'istante $t_M = v_2 / g$ e nella posizione $x_M = x(t_M) = v_2^2 / 2g$. Per $t \geq t_M$ siamo nella stessa situazione del primo esempio, punto che cade da un'altezza x_M con velocità iniziale nulla; risulta $t_c = 2 x_M / g = 2 t_M$

MathType@MTEF@5@5@+=
 feaagKart1ev2aaatCvAUfeBSjuyZL2yd9gzLbvyNv2CaerbuLwBLn
 hiov2DGi1BTfMBaeXatLxBI9gBaerbd9wDYLwzYbItLDharqqtubsr
 4rNCHbGeaGqiVu0Je9sqqrpepCoxbbL8F4rqqrFfpeeaOxe9Lq=Jc9
 vqaqpepmoxbba9pwe9Q8fso=yqaqpepae9pg0FirpepeKkFroxfr=x
 fr=xb9adbaqaeeGaciGaaiaabeqaamaabaabaaGcbaGaamiDamaaBa
 aaleaacaWGJbaabeaakiabg2da9maakaaabaGaaGOMaiaadIhadaWg
 aaWcbaGaamytaaqaabaGccaGGVaGaam4zaaWcbaakiabg2da9iaads
 hadaWgaaWcbaGaamytaaqaabaaaaa@4095@ e la durata complessiva del moto è
 pertanto $2t_M = 2 v_2 / g$. Si noti che si tratta della stessa situazione vista
 nell'esempio 1.4.

Se ricaviamo $t(x)$ dalla legge oraria e $v(x)$ da (1.10) otteniamo:

$$t(x) = \frac{v_2}{g} \pm \sqrt{\frac{v_2^2}{g^2} - \frac{2x}{g}} = t_M \pm \sqrt{t_M^2 - \frac{2x}{g}} \quad , \quad v(x) = \pm \sqrt{v_2^2 - 2gx} \quad .$$

Il doppio segno è legato al fatto che il punto passa due volte nella stessa posizione, una volta salendo (segno negativo per il tempo, segno positivo per la velocità) e una volta scendendo (segni opposti). In particolare $x = 0$ è occupato alla partenza ($t = 0, v = v_2$) e all'arrivo ($t = 2 t_M, v = -v_2$): il punto ritorna nell'origine con velocità eguale in modulo a quella di partenza, ma ovviamente di segno opposto.

In conclusione, abbiamo utilizzato le due leggi generali

$$v(t) = v_0 - g t \quad , \quad x(t) = x_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \quad ,$$

valide per un moto uniformemente accelerato con accelerazione $-g$ e le abbiamo adattate a tre diverse situazioni, verificando che i termini v_0 e $x_0 + v_0 t$ dipendono dalle condizioni iniziali, mentre $-g t$ e $-\frac{1}{2} g t^2$

MathType@MTEF@5@5@+=

feagKart1ev2aaatCvAUfeBSjuyZL2yd9gzLbvyNv2CaerbuLwBLn
 hiov2DGi1BTfMBaeXatLxBI9gBaerbd9wDYLwzYbItLDharqqtubsr
 4rNCHbGeaGqiVu0Je9sqqrpepCoxbbL8F4rqqrFfpeea0xe9Lq=Jc9
 vqaqpepmoxbba9pwe9Q8fso=yqaqpepae9pg0FirpepeKkFroxfr=x
 fr=xb9adbaqaeeGaciGaaiaabeqaamaabaabaaGcbaGaeyOeIoIaam
 4zaiaaykW7caaMc8UaamiDaiaykW7caaMc8UaamyzaiaaygW7caaM
 c8UaaGPaVlabgkHiTmaalaabaGaaGymaaqaaiaaikdaaaGaaGPaVl
 aaykW7caWGNbGaaGPaVlaadshadaahaaWcbeqaaiaaikdaaaaaa@4E61@

si trovano in tutte le soluzioni, appunto perché caratteristici del moto uniformemente accelerato con accelerazione $-g$. Ripetiamo che con l'asse x orientato verso il basso accelerazione e velocità cambiano di segno, però i procedimenti e i risultati fisici sono gli stessi.

Esempio 1.7

Dato un corpo che cade liberamente partendo da fermo, si calcolino le posizioni x_0, x_1, x_2, \dots occupate a intervalli di tempo regolari $(0, t, 2t, 3t, \dots)$ e se ne facciano le differenze $x_{n+1} - x_n$. Che conclusione si può trarre?

Soluzione

Orientiamo l'asse x verso il basso; abbiamo le condizioni iniziali $x = 0$ e $v = 0$ per $t = 0$, quindi $x = \frac{1}{2} g t^2$

feagKart1ev2aaatCvAUfeBSjuyZL2yd9gzLbvyNv2CaerbuLwBLn
 hiov2DGi1BTfMBaeXatLxBI9gBaerbd9wDYLwzYbItLDharqqtubsr
 4rNCHbGeaGqiVu0Je9sqqrpepCoxbbL8F4rqqrFfpeea0xe9Lq=Jc9
 vqaqpepmoxbba9pwe9Q8fso=yqaqpepae9pg0FirpepeKkFroxfr=x
 fr=xb9adbaqaeeGaciGaaiaabeqaamaabaabaaGcbaGaamiEaiabg2
 da9maalaabaGaaGymaaqaaiaaikdaaaGaam4zaiaadshadaahaaWc
 beqaaiaaikdaaaaaa@3C4E@ . Scriviamo i tempi e le corrispondenti posizioni:

0	t	$2t$	$3t$	$4t$	$5t$...
0	$\frac{1}{2} g t^2$	$\frac{1}{2} g 4t^2$	$\frac{1}{2} g 9t^2$	$\frac{1}{2} g 16t^2$	$\frac{1}{2} g 25 t^2$...

Le successive differenze $x_1 - x_0, x_2 - x_1, \dots$ sono:

$$\frac{1}{2} g t^2, \frac{3}{2} g t^2, \frac{5}{2} g t^2, \frac{7}{2} g t^2, \frac{9}{2} g t^2, \dots$$

Si nota che esse valgono 3 volte, 5 volte, 7 volte, ecc. la prima: questa proprietà venne chiamata da Galileo *legge dei numeri dispari*. Essa è caratteristica del moto in cui lo spazio percorso cresce col quadrato del tempo, cioè del moto uniformemente accelerato.

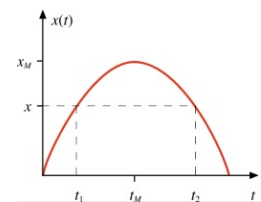


FIGURA 1.9

Esempio 1.8

Un punto materiale viene lasciato cadere all'istante $t = 0$ con velocità iniziale nulla. Un secondo punto materiale viene lanciato verso il basso all'istante $t = t_0 > 0$, con velocità iniziale v_0 : riuscirà a raggiungere il primo punto?

Soluzione

Le leggi orarie dei due moti sono:

$$x_1 = \frac{1}{2} g t^2 \quad , \quad x_2 = v_0 (t - t_0) + \frac{1}{2} g (t - t_0)^2 \quad ;$$

l'asse x è orientato verso il basso e ha l'origine nel punto di partenza dei due corpi. Eguagliamo le due espressioni trovando così il tempo in cui i due corpi occupano la stessa posizione:

$$t = \frac{t_0}{2} \frac{2 v_0 - g t_0}{v_0 - g t_0} = \frac{t_0}{2} \left(1 + \frac{v_0}{v_0 - g t_0} \right) \quad .$$

Se esiste una soluzione, deve essere $t > t_0$, ovvero il termine tra parentesi deve essere maggiore di 2 e quindi la frazione maggiore di 1: ciò è sempre vero se $v_0 > g t_0$.

Determinato t , conviene calcolare la coordinata x del punto di incontro e confrontarla con l'altezza h rispetto al suolo del punto di partenza. Solo se $x \leq h$ il secondo punto raggiunge effettivamente il primo; altrimenti questo tocca il suolo prima di essere raggiunto.

Nascondi soluzione

1.6 Moto armonico semplice

Il *moto armonico semplice* lungo un asse rettilineo è un moto *vario* la cui legge oraria è definita dalla relazione

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi) \quad (1.11)$$

A , ω , ϕ sono grandezze costanti: A è detta *ampiezza del moto*, $\omega t + \phi$ *fase del moto*, ϕ *fase iniziale*, ω *pulsazione*.

Discutiamo le caratteristiche spaziali di questo moto. I valori estremi assunti dalla funzione seno sono $+1$ e -1 : pertanto il punto che obbedisce alla (1.11) percorre un segmento di ampiezza $2A$ con centro nell'origine; il massimo spostamento dall'origine è pari ad A , donde il nome di ampiezza del moto. Al tempo $t = 0$ il punto occupa la posizione $x(0) = A \sin \phi$: note le costanti A e ϕ , possiamo determinare la posizione iniziale del punto (solo se $\phi = 0$ o $\phi = \pi$ il punto è nell'origine per $t = 0$).

Il moto armonico, considerando che la funzione seno è periodica con periodo 2π , risulta essere *periodico*: in effetti il punto descrive oscillazioni di ampiezza A rispetto al centro O , tutte eguali tra loro e caratterizzate dalla durata, detta *periodo* T del moto armonico. Ciò rientra nella definizione generale: il moto di un punto si dice periodico quando ad intervalli di tempo eguali il punto ripassa nella stessa posizione con la stessa velocità (e questo avviene per qualsiasi posizione). Si osservi che la realizzazione di moti o più in generale di fenomeni caratterizzati da una periodicità è fondamentale per la misura del tempo.

Per determinare il periodo T consideriamo due tempi t' e t , con $t' - t = T$; per definizione $x(t') = x(t)$ e quindi da (1.11), dovendo le fasi nei due istanti differire di 2π , periodo della funzione seno, abbiamo $\omega t' + \phi = \omega t + \phi + 2\pi$: ne segue che $T = t' - t$ vale

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{ovvero} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \quad (1.12)$$

Capiamo così il significato di ω : il moto si ripete velocemente (piccoli valori di T) quando la pulsazione è grande mentre il moto è lento (T grande) per bassi valori della pulsazione.

Si definisce *frequenza* ν del moto il numero di oscillazioni in un secondo:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

È molto importante osservare che *il periodo, e quindi la frequenza, di un moto armonico semplice sono indipendenti dall'ampiezza del moto*.

Fissato il valore della pulsazione abbiamo una classe di moti armonici, caratterizzati dallo stesso periodo, che differiscono tra loro per i diversi valori

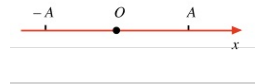


FIGURA 1.10

Periodo

Frequenza

dell'ampiezza e della fase iniziale, cioè, come vedremo, per le diverse condizioni iniziali.

La velocità del punto che si muove con moto armonico si ottiene derivando $x(t)$:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \omega A \cos(\omega t + \phi) \quad (1.13)$$

Con una ulteriore derivazione si ottiene l'accelerazione del punto:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \sin(\omega t + \phi) = -\omega^2 x \quad (1.14)$$

In figura 1.11 sono rappresentate le funzioni $x(t)$, $v(t)$, $a(t)$; si è posto $\Phi = 0$.

La velocità assume il valore massimo nel centro di oscillazione (preso come origine O) dove vale ωA e si annulla agli estremi ($x = A$ e $x = -A$) dove si inverte il senso del moto. L'accelerazione si annulla nel centro di oscillazione e assume il valore massimo in modulo ($\omega^2 A$) agli estremi, dove si inverte la velocità; inoltre essa è *sempre proporzionale ed opposta allo spostamento dal centro di oscillazione*.

A parte il valore dell'ampiezza, le tre funzioni $x(t)$, $v(t)$, $a(t)$ mostrano lo stesso andamento temporale: la forma e il periodo sono eguali, c'è solo uno spostamento di una rispetto all'altra lungo l'asse dei tempi.

Quest'ultima caratteristica viene indicata dicendo che le funzioni sono sfasate tra di loro. In particolare la velocità è sfasata di $\pi/2$ rispetto allo spostamento (è in *quadratura di fase*), mentre l'accelerazione è sfasata di π sempre rispetto allo spostamento (è in *opposizione di fase*).

Le costanti A e Φ individuano le condizioni iniziali:

$$x(0) = x_0 = A \sin \phi \quad , \quad v(0) = v_0 = \omega A \cos \phi \quad .$$

Viceversa, note le condizioni iniziali x_0 e v_0 , si calcolano A e Φ :

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{\omega x_0}{v_0} \quad , \quad A^2 = x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2} \quad .$$

Inserendo (1.14) in (1.7) si può calcolare la dipendenza della velocità dalla posizione, $v(x)$:

$$\int_{x_0}^x a(x) dx = -\omega^2 \int_{x_0}^x x dx = \frac{1}{2} \omega^2 (x_0^2 - x^2) = \frac{1}{2} v^2 - \frac{1}{2} v_0^2$$

e quindi $v^2 = v_0^2 + \omega^2 (x_0^2 - x^2)$. Con riferimento al centro, dove $x_0 = 0$ e $v_0 = \omega A$

$$v^2(x) = \omega^2 (A^2 - x^2) \quad (1.15)$$

Nel centro $v = \omega A$ oppure $v = -\omega A$ a seconda del verso di passaggio.

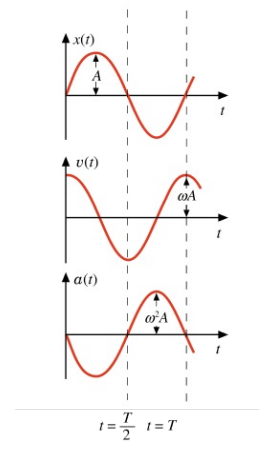


FIGURA 1.11

Dalla legge oraria (1.11) abbiamo ricavato che l'accelerazione è proporzionale allo spostamento, con segno negativo: $a = -\omega^2 x$. Se invece si trova che in un certo moto l'accelerazione risulta proporzionale allo spostamento con costante di proporzionalità negativa si dimostra che quel moto è armonico semplice. In altre parole, la condizione necessaria e sufficiente perché un moto sia armonico è data dall'equazione

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad (1.16)$$

Equazione differenziale del moto armonico

detta *equazione differenziale del moto armonico*. Le funzioni seno e coseno, e le loro combinazioni lineari, sono *tutte e sole* le funzioni che soddisfano alla condizione (1.16) nel campo reale.

Quest'ultimo fatto ci porta a osservare esplicitamente che le proprietà generali del moto armonico semplice restano eguali se invece della funzione seno utilizziamo la funzione coseno. Le due funzioni differiscono solo per un termine di sfasamento pari a $\pi/2$: $\sin(\omega t + \Phi) = \cos(\omega t + \psi)$ con $\psi = \Phi - \pi/2$. Ovvero, $x = A \sin(\omega t + \Phi)$ e $x = A \cos(\omega t + \Phi)$ rappresentano lo stesso moto, solo che per esempio il primo è visto a partire dall'istante t_0 e il secondo dall'istante $t_0 + T/4$.

In questo paragrafo abbiamo sempre parlato di moto; però se in un diverso fenomeno fisico si trova una grandezza f che obbedisce a un'equazione con la struttura di (1.16), $d^2 f / dz^2 + k^2 f = 0$ MathType@MTEF@5@5@+=feaagKart1ev2aaatCvAUfeBSjuyZL2yd9gzLbvyNv2CaerbuLwBLn hiov2DGi1BTfMBaeXatLxBI9gBaerbd9wDYLwzYbItLDharqqtubsr 4rNCHbGeaGqiVu0Je9sqqrpepC0xbbL8F4rqqrFfpeea0xe9Lq=Jc9 vqaqpepmoxbba9pwe9Q8fso=yqaqpepae9pgoFirpepeKkFroxfr=x fr=xb9adbaqaeeGaciGaaiaabeqaamaabaabaaGcbaWaaSaaaeaaca WGKbWaaWbaaSqabeaacaIYaaaaOGaamOzaaqaiaaadsgacaWG6bWa aWbaaSqabeaacaIYaaaaaakiabgUcaRiaadUgadaahaaWcbeqaai aaikdaaaGccaWGMbGaeyypa0JaaGimaaaa@4118@, la soluzione è sempre $f(z) = A \sin(kz + \Phi)$ cioè $dz f$ descrive un'oscillazione rispetto alla variabile z , il cui periodo dipende da k . Può trattarsi di oscillazioni elettriche in un circuito o di oscillazioni di pressione in un gas interessato da un fenomeno sonoro, però la base matematica è la stessa. Riprenderemo l'argomento nel capitolo nono dove trattiamo più in generale l'*oscillatore armonico semplice*, come si chiama un sistema che obbedisce a (1.16).

Unità di misura

Elenchiamo le nuove grandezze introdotte e le loro unità di misura:

ampiezza : stessa unità di x , metri

periodo : è un tempo, si esprime in secondi

frequenza : inverso del tempo, si esprime in s^{-1} ; questa unità ha un nome, hertz: $1 \text{ Hz} = 1 \text{ s}^{-1}$

fase : argomento del seno o del coseno, dimensionalmente è un angolo e si misura in radianti (rad)

pulsazione : $2\pi/T$ unità di misura $\text{rad/s} = \text{rad s}^{-1}$.

1.7 Moto rettilineo smorzato esponenzialmente

Consideriamo un altro esempio di moto *vario*, in cui l'accelerazione soddisfa alla condizione $a = -k v$, con k costante positiva (che si misura in s^{-1} essendo pari a un rapporto a/v). L'accelerazione in questo moto è sempre contraria alla velocità, che perciò deve necessariamente diminuire, e varia con la stessa legge con cui varia la velocità. La condizione si traduce nell'equazione differenziale t

$$\frac{dv}{dt} = -k v$$

che si integra col metodo della *separazione delle variabili*, vedi appendice A;

$$\frac{dv}{v} = -k dt \Rightarrow \int_{v_0}^v \frac{dv}{v} = -k \int_0^t dt \Rightarrow \ln \frac{v}{v_0} = -k t \quad ;$$

v_0 è la velocità del punto nell'istante iniziale $t = 0$ (deve essere $v_0 \neq 0$ altrimenti nell'istante iniziale si avrebbe $v = 0$, $a = 0$ e non potrebbe esserci moto). Passando agli esponenziali

$$v(t) = v_0 e^{-kt} \quad ;$$

la velocità decresce esponenzialmente nel tempo e quindi il punto alla fine si ferma.

Calcoliamo anche come varia la velocità con la posizione, con un metodo analogo a quello seguito nel paragrafo 1.4:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} v = -k v \Rightarrow \frac{dv}{v} = -k \frac{dx}{dx} \quad , \quad dv = -k dx \quad .$$

Integrando, $\int_{v_0}^v \frac{dv}{v} = -k \int_0^x dx \Rightarrow v(x) = v_0 e^{-kx}$

MathType@MTEF@5@5@+=
 feaagKart1ev2aaatCvAUfeBSjuyZL2yd9gzLbvyNv2CaerbuLwBLn
 hiov2DGi1BTfMBaeXatLxBI9gBaerbd9wDYLwzYbItLDharqqtubsr
 4rNCHbGeaGqiVu0Je9sqqrpepC0xbbL8F4rqqrFfpeea0xe9Lq=Jc9
 vqaqpepm0xbba9pwe9Q8fso=yqaqpepae9pg0FirpepeKkFroxfr=x
 fr=xb9adbaqaeeGaciGaaiaabeqaamaabaabaaGcbaWaa8qCaeaaca
 WGKbGaamODaiabg2da9iabgkHiTiaadUgadaWdXbqaaiaadsgacaWG
 4baaleaacaIIWaaabaGaamiEaaqdcqGHRiI8aaWcbaGaamODamaaBa
 aameaacaIIWaaabeaaaSqaaiiaadAhaaOGaey4kIipakiaaykW7caaM
 c8UaaGPaVlabgkDiElaaykW7caaMc8UaaGPaVlaadAhadaqadaqaai
 aadIhaaiaawIcacaGLPaaacqGH9aqpcaWG2bWaaSbaaSqaiaaicda
 aeqaaOGaeyOeIoIaam4AaiaadIhaaaa@5B09@

L'andamento della velocità con la posizione è lineare decrescente; la velocità si annulla per $x = v_0 / k$ e in questa posizione il punto si ferma.

La legge oraria si ricava per integrazione da $v(t)$ secondo (1.2):

$$x(t) = x_0 + \int_0^t v(t) dt = \int_0^t v_0 e^{-kt} dt = -\frac{v_0}{k} [e^{-kt}]_0^t = \frac{v_0}{k} (1 - e^{-kt}) ;$$

il punto tende asintoticamente alla posizione v_0 / k . La stessa espressione per $x(t)$ si ottiene eguagliando $v(t) = v_0 e^{-kt}$ e $v(x) = v_0 - k x$. In figura 1.12 sono mostrati gli andamenti di $v(t)$, $v(x)$, $x(t)$.

Osserviamo che la rapidità di variazione della funzione e^{-kt} è determinata dal valore di k . Posto $\tau = 1/k$, in un intervallo di tempo pari a τ la funzione si riduce di un fattore $e \cong 2.72$:

$$e^{-k(t+\tau)} / e^{-kt} = e^{-k\tau} = e^{-1} ;$$

τ si chiama *costante di tempo* e si misura ovviamente in secondi. Se k è grande τ è piccola e la decrescita è rapida; viceversa se k è piccola τ è grande e la decrescita è lenta. In pratica dopo un tempo di $\approx 5\tau$ il fenomeno si può considerare terminato. Analogamente, la funzione $1 - e^{-kt}$ si avvicina a 1 con rapidità che è sempre determinata da k . Nella figura 1.13 sono mostrati i grafici delle due funzioni, con il tempo misurato in unità di τ .

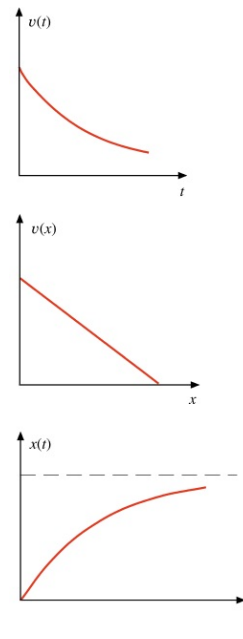


FIGURA 1.12

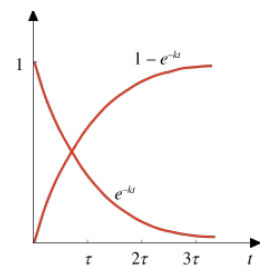


FIGURA 1.13

1.8 Paradosso di Zenone

Riprendiamo l'esempio 1.1 così formulato: all'istante $t = 0$ il punto P_1 passa nell'origine con velocità $v_1 > 0$ mentre P_2 si trova in $x_0 > 0$ con velocità positiva $v_2 < v_1$; dove e quando P_1 raggiungerà P_2 . Dall'esempio già visto abbiamo le risposte

$$x^* = \frac{v_1 x_0}{v_1 - v_2}, \quad t^* = \frac{x_0}{v_1 - v_2}.$$

La soluzione è molto semplice. Tuttavia possiamo affrontare il problema in modo più contorto come ha fatto Zenone, nel quinto secolo A.C.

Quando P_1 è giunto in x_0 al tempo t_0 , P_2 è avanzato di s_0 :

$$t_0 = \frac{x_0}{v_1}, \quad s_0 = t_0 v_2 = x_0 \frac{v_2}{v_1}.$$

Quando P_1 ha percorso il tratto ulteriore s_0 nel tempo t_1 , P_2 è avanzato di s_1 :

$$t_1 = \frac{s_0}{v_1} = x_0 \frac{v_2}{v_1^2}, \quad s_1 = t_1 v_2 = x_0 \frac{v_2^2}{v_1^2}.$$

E così via... Per raggiungere P_2 , P_1 deve percorrere

$$\text{lo spazio } x_0 + s_0 + s_1 + \dots = x_0 \left[1 + \frac{v_2}{v_1} + \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 + \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^3 + \dots \right]$$

$$\text{nel tempo } t_0 + t_1 + t_2 + \dots = \frac{x_0}{v_1} \left[1 + \frac{v_2}{v_1} + \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 + \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^3 + \dots \right].$$

Zenone non sapeva che la somma di un numero infinito di termini può avere un limite finito (del resto il calcolo infinitesimale è stato sviluppato da Leibniz e Newton nel settecento); così concludeva paradossalmente che Achille più veloce (P_1) non avrebbe mai raggiunto la tartaruga (P_2) o che una freccia non può raggiungere il bersaglio, pur sapendo che ciò è contrario all'evidenza sperimentale.

Invece noi sappiamo che, essendo $v_2/v_1 < 1$, la somma tra parentesi quadre vale $(1 - v_2/v_1)^{-1}$ e si ritrova $x = x_0 v_1 / (v_1 - v_2)$, $t = x_0 / (v_1 - v_2)$. Dividere un intervallo in un numero infinito di tratti non vuol dire che occorre un tempo infinito per percorrerlo.

Abbiamo ripreso questo esempio nella visuale di Zenone per esporre la soluzione corretta, basata sul calcolo infinitesimale (che in realtà non è nemmeno necessario nella soluzione semplice), e mettere quindi in evidenza come sia necessario ricorrere ai concetti dell'analisi matematica per una rappresentazione corretta dei fenomeni di movimento: del resto lo si capisce chiaramente se si riesaminano le connessioni tra spazio percorso, velocità e

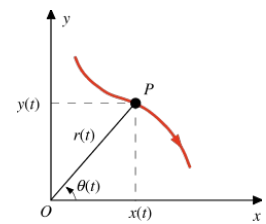


FIGURA 1.14

accelerazione nei vari casi trattati di moto rettilineo.

1.9 Moto nel piano. Posizione e velocità

Nel caso che il moto sia vincolato a svolgersi su di un piano la *traiettoria* del punto P , mostrata in figura 1.14, è in generale una *linea curva*. La descrizione del moto diventa subito più complessa e necessita di un numero maggiore di informazioni rispetto al caso del moto rettilineo. Pensando per esempio a come avviene lo spostamento di P ad un certo istante, non basta specificare il valore numerico dello spostamento, ma occorre precisare in quale direzione sta avvenendo il moto e con quale verso; e in generale questa direzione istantanea cambia continuamente lungo la traiettoria.

Grandezze con caratteristiche direzionali oltre che numeriche si chiamano *vettori*: la definizione è meglio precisata nell'appendice C insieme alle principali proprietà algebriche e alle operazioni di derivazione e integrazione fatte su vettori. Consigliamo di leggere attentamente questa appendice prima di proseguire nello studio del moto nel piano.

Vedremo tra poco che anche la velocità e l'accelerazione nel moto piano sono grandezze vettoriali e questa caratteristica è vera più in generale per qualsiasi tipo di moto in una, due o tre dimensioni; nel caso unidimensionale del moto rettilineo la direzione è fissata e la natura vettoriale, che non è stata messa esplicitamente in evidenza, si manifesta nel segno, cioè nel verso: infatti bisogna sempre precisare il verso del moto sulla retta (segno della velocità) e il segno dell'accelerazione.

Ritornando al moto su di un piano la posizione del punto viene individuata da due coordinate. Esse possono essere, con riferimento ad un sistema di assi cartesiani ortogonali, $x(t)$ e $y(t)$ oppure, in termini di coordinate polari nel piano, $r(t)$ e $\theta(t)$. Le relazioni che intercorrono tra le coordinate cartesiane e quelle polari sono, come si deduce subito dalla figura 1.14,

$$x = r \cos \theta \quad , \quad y = r \sin \theta \quad ; \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad , \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x} \quad .$$

La posizione del punto P può anche essere individuata per mezzo del *raggio vettore* (vedi appendice C)

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{OP} = x(t) \mathbf{u}_x + y(t) \mathbf{u}_y$$

Raggio vettore

dove \mathbf{u}_x e \mathbf{u}_y rappresentano i *versori degli assi cartesiani*, che si considerano fissi nel tempo. Se è nota la dipendenza dal tempo di \mathbf{r} , cioè la funzione $\mathbf{r}(t)$, è individuato il moto del punto P : conoscere $\mathbf{r}(t)$ significa ovviamente dare $x(t)$ e $y(t)$ oppure $r(t)$ e $\theta(t)$; ed è vero il viceversa.

La posizione del punto lungo la traiettoria può anche essere data da una coordinata curvilinea s , misurata a partire da un'origine arbitraria. Il valore di s esprime la lunghezza della traiettoria e varia nel tempo durante il moto: ds/dt indica la variazione temporale della posizione lungo la traiettoria cioè la velocità

istantanea del punto, come definita nel moto rettilineo. Se diamo la forma della traiettoria e la velocità con cui viene percorsa abbiamo fornito una descrizione completa del moto. Questa può essere riassunta nella grandezza *velocità vettoriale* che ora definiamo.

Consideriamo due posizioni occupate dal punto P al tempo t e al tempo $t + \Delta t$: esse sono individuate dai vettori $\mathbf{r}(t)$ e $\mathbf{r}(t + \Delta t) = \mathbf{r}(t) + \Delta \mathbf{r}$. Si costruisce il rapporto incrementale $\frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$ e si definisce velocità vettoriale il limite per $\Delta t \rightarrow 0$:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (1.17)$$

La velocità vettoriale è la derivata del raggio vettore rispetto al tempo. Osserviamo che al limite l'incremento $d\mathbf{r}$ del raggio vettore risulta in direzione tangente alla traiettoria nel punto P e in modulo eguale allo spostamento infinitesimo ds lungo la traiettoria, per cui possiamo scrivere $d\mathbf{r} = ds \mathbf{u}_T$ dove \mathbf{u}_T è il versore della tangente alla curva, variabile nel tempo man mano che il punto avanza lungo la traiettoria. In sostanza pensiamo il moto come una successione di spostamenti rettilinei infinitesimi con direzione variabile: la direzione istantanea del moto coincide con quella della tangente alla traiettoria nel punto occupato all'istante considerato. La (1.17) diventa più esplicita:

$$\mathbf{v} = \frac{ds}{dt} \mathbf{u}_T = v \mathbf{u}_T \quad ; \quad (1.18)$$

pertanto la velocità vettoriale \mathbf{v} individua in ogni istante con la sua direzione e verso la direzione e il verso del moto e con il suo modulo $v = ds/dt$ la velocità istantanea con cui è percorsa la traiettoria.

Abbiamo visto che a livello infinitesimo $d\mathbf{r} = ds \mathbf{u}_T$; però dalla figura 1.15 si vede che per uno spostamento finito l'incremento del raggio vettore $\Delta \mathbf{r}$ è ben diverso dallo spazio effettivamente percorso lungo la curva (uno è la corda, l'altro l'arco). Si faccia quindi attenzione a non confondere i due concetti, raggio vettore e suoi incrementi finiti da una parte, percorso effettivo dall'altra; per esempio un punto potrebbe percorrere un'orbita chiusa ritornando al punto di partenza e in tal caso il raggio vettore non cambia, ma il punto ha percorso una traiettoria finita ($\Delta \mathbf{r} = 0$, $\Delta s \neq 0$) con velocità vettoriale istantanea diversa da zero (semmai, con ovvia estensione dal moto rettilineo, risulta nulla la velocità vettoriale media).

Vogliamo ora sottolineare una proprietà fondamentale delle relazioni vettoriali come (1.18) con l'aiuto anche della figura 1.15. La traiettoria del moto e il fatto che la velocità si scrive $v\mathbf{u}_T$ sono caratteristiche *intrinseche*, che cioè non dipendono dalla scelta del sistema di riferimento. Si può spostare l'origine O in un'altra posizione, si possono ruotare gli assi, ma la curva (non la sua espressione analitica), la direzione, il verso, il modulo della velocità restano gli stessi. In figura 1.15 per esempio se si sposta l'origine cambia certamente \mathbf{r} , ma

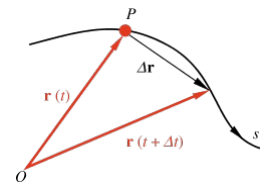


FIGURA 1.15

non $\Delta \mathbf{r}$ e quindi $d\mathbf{r}$. Si parla di *invarianza* delle relazioni vettoriali rispetto alla scelta del sistema di riferimento.

D'altra parte un vettore si scrive esplicitamente attraverso le sue componenti e queste si dipendono dal sistema di riferimento. Calcoliamo le componenti della velocità nelle due situazioni più comuni.

Componenti cartesiane

Poiché $\mathbf{r} = x \mathbf{u}_x + y \mathbf{u}_y$,

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \mathbf{u}_x + \frac{dy}{dt} \mathbf{u}_y = v_x \mathbf{u}_x + v_y \mathbf{u}_y .$$

La velocità del punto P , che si muove lungo la traiettoria, ha come componenti cartesiane le velocità v_x e v_y dei due moti rettilinei descritti dai punti proiezione di P sugli assi cartesiani. Quindi $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

MathType@MTEF@5@5@+= feaagKart1ev2aaatCvAUfeBSjuyZL2yd9gzLbvyNv2CaerbuLwBLn hiov2DGi1BTfMBaeXatLxBI9gBaerbd9wDYLwzYbItLDharqqtubsr 4rNCHbGeaGqiVu0Je9sqqrpepCoxbbL8F4rqqrFfppea0xe9Lq=Jc9 vqaqpepmoxbb9pwe9Q8fso=yqaqpepaep9pgoFirpepeKkFroxfr=x fr=xb9adbaqaeeGaciGaaiaabeqaamaabaabaaGcbaGaamODaiabg2 da9maakaabaGaamODamaaDaaaleaacaWG4baabaGaaGOMaaaakiab gUcaRiaadAhadaqhaaWcbaGaamyEaaqaaiaaikdaaaaabeaaaaa@3EB6@ e, detto Φ l'angolo tra il vettore \mathbf{v} e l'asse x , $\tan \Phi = v_y / v_x$: date le componenti possiamo ricostruire il vettore. Si osservi che se ruotiamo gli assi cambiano v_x e v_y .

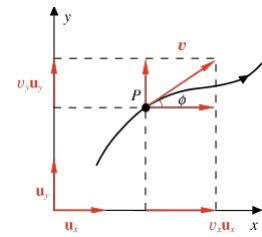


FIGURA 1.16

Componenti polari

Introduciamo i vettori \mathbf{u}_r e \mathbf{u}_θ , rispettivamente versore della direzione di \mathbf{r} e versore ortogonale alla stessa, come in figura 1.17; si noti che questi versori cambiano direzione (ruotano) durante il moto.

Il raggio vettore \mathbf{r} può essere espresso come $r \mathbf{u}_r$ e pertanto:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dr}{dt} \mathbf{u}_r + r \frac{d\mathbf{u}_r}{dt} \Rightarrow \mathbf{v} = \frac{dr}{dt} \mathbf{u}_r + r \frac{d\theta}{dt} \mathbf{u}_\theta = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_\theta . \quad (1.19)$$

Si è utilizzato per la derivata del vettore \mathbf{u}_r il risultato ricavato in appendice C.

La velocità che, si ricordi, è sempre tangente alla traiettoria si scompone in due componenti: la *velocità radiale* \mathbf{v}_r , diretta lungo \mathbf{r} e di modulo dr/dt e la *velocità trasversa* \mathbf{v}_θ , ortogonale a \mathbf{r} e di modulo $r d\theta/dt$; \mathbf{v}_r dipende dalle variazioni del modulo del raggio vettore, \mathbf{v}_θ è collegata alle variazioni di direzione dello stesso. Il risultato della scomposizione si può anche ottenere considerando che lo spostamento infinitesimo $d\mathbf{r}$ ha le componenti dr e $r d\theta$ (a meno di infinitesimi di ordine superiore): dividendo per dt si hanno le

Velocità radiale
Velocità trasversa

componenti della velocità.

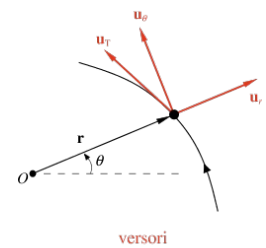
Il modulo della velocità è, con queste componenti,

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2} .$$

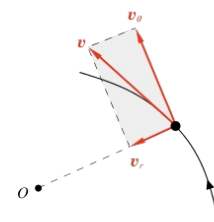
In definitiva abbiamo mostrato come si determina la velocità se è nota la posizione, in coordinate cartesiane o polari. Analogamente a quanto fatto per il moto rettilineo, ci poniamo il problema inverso e la soluzione si ricava da (1.17) integrando:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{v}(t) dt . \quad (1.20)$$

L'integrazione esplicita può essere effettuata ricorrendo alle componenti, per esempio cartesiane, e ricadiamo nella (1.2), applicata ai moti rettilinei *componenti*; calcolate $x(t)$ e $y(t)$ abbiamo $\mathbf{r}(t)$. Resta essenziale la conoscenza delle condizioni iniziali.



versori



velocità

FIGURA 1.17

1.10 Accelerazione nel moto piano

L'accelerazione nel moto piano deve esprimere le variazioni della velocità sia come modulo che direzione e quindi ci aspettiamo che abbia due componenti, una legata alla variazione del modulo della velocità e la seconda al cambiamento di direzione del moto. Nel moto rettilineo, dove la velocità mantiene sempre la stessa direzione, l'accelerazione è espressa da un solo termine.

Nella figura 1.18 è mostrata la situazione in modo qualitativo, ma già si capisce che l'accelerazione non è parallela alla velocità ed è diretta verso la concavità della curva che rappresenta la traiettoria.

Anche nel moto piano l'accelerazione si definisce come derivata della velocità rispetto al tempo (ed è una grandezza vettoriale):

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \quad (1.21)$$

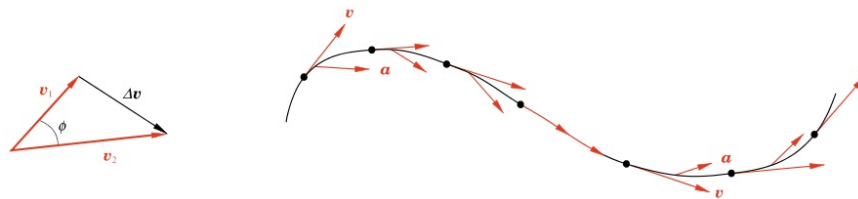


FIGURA 1.18

$$a = \sqrt{a_T^2 + a_N^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{v^4}{R^2}}$$

Utilizziamo (1.18) e la regola di derivazione di un vettore:

$$\mathbf{a} = \frac{d}{dt}(v \mathbf{u}_T) = \frac{dv}{dt} \mathbf{u}_T + v \frac{d\mathbf{u}_T}{dt} = \frac{dv}{dt} \mathbf{u}_T + v \frac{d\phi}{dt} \mathbf{u}_N$$

La prima componente, parallela alla velocità, esprime la variazione del modulo della velocità; il secondo termine, dipendente dalla variazione di direzione della velocità, è ortogonale a questa: \mathbf{u}_N è un vettore ortogonale a \mathbf{u}_T diretto verso la concavità della traiettoria, e $d\phi/dt$ dice quanto rapidamente cambia la direzione di \mathbf{u}_T e quindi di \mathbf{u}_N . Per esprimere in maniera più significativa la componente normale, ricorriamo alla figura 1.19 che mostra il moto durante un istante dt . Al limite per $\Delta t \rightarrow 0$ le rette normali alla traiettoria in due punti molto vicini tra loro si incontrano nel punto C , che coincide con il centro della circonferenza tangente alla traiettoria nel punto P (circonferenza osculatrice) e si chiama anche *centro di curvatura* della traiettoria nel punto P . L'arco di traiettoria ds è pari a $Rd\phi$ con $R = CP$ raggio di curvatura (da non

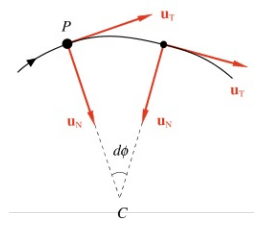


FIGURA 1.19

confondere con il raggio vettore). Al variare di P lungo la traiettoria variano sia il valore di R che la posizione di C , che può passare da una parte all'altra della curva come in figura 1.18 e andare all'infinito nei tratti rettilinei. Pertanto

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{1}{R} v$$

e sostituendo nell'espressione dell'accelerazione trovata prima

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt} \mathbf{u}_T + \frac{v^2}{R} \mathbf{u}_N = \mathbf{a}_T + \mathbf{a}_N, \quad (1.22)$$

Accelerazione
tangenziale
Accelerazione
centripeta

in modulo $a = a_T^2 + a_N^2 = \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{v^4}{R^2}$

MathType@MTEF@5@5@+=

feaagKart1ev2aaatCvAUfeBSjuyZL2yd9gzLbvyNv2CaerbuLwBLn
hiov2DGi1BTfMBaeXatLxBI9gBaerbd9wDYLwzYbItLDharqqtubsr
4rNCHbGeaGqiVu0Je9sqqrpepCoxbbL8F4rqqrFfppeaoxe9Lq=Jc9
vqaqpepmoxbba9pwe9Q8fs0=yqaqpepae9pg0FirpepeKkFroxfr=x
fr=xb9adbaqaaeGaciGaaiaabeqaamaabaabaaGcbaGaamyiaiabg2
da9maakaabaGaamyamaaDaaaleaacaWG4baabaGaaGOMaaaakiab
gUcaRiaadggadaqhaaWcbaGaamOBaaqaaiaaikdaaaaabeaakiabg2
da9maakaabaWaaeWaaeadaWcaaqaaiaadsgacaWG2baabaGaamiz
aiaadshaaaaacaGLOaGaayzkaaWaaWbaaSqabeaacaIYaaaaOGaey
4kaSYaaSaaaeacaWG2bWaaWbaaSqabeaacaIoaaaaGcbaGaamOu
amaaCaaaleqabaGaaGOMaaaaaaabeaaaaa@4A80@

Le due componenti si chiamano *accelerazione tangenziale* e *accelerazione normale* o *centripeta* (perché diretta sempre verso il centro di curvatura).

In un moto curvilineo vario entrambe le componenti sono diverse da zero; se però il moto curvilineo è uniforme è nulla a_T . Invece nel moto rettilineo vario è nulla a_N e solo nel moto rettilineo uniforme $a_T = a_N = 0$. In altre parole con $a_T \neq 0$ il moto è sempre vario, con $a_N \neq 0$ è sempre curvilineo.

Le proprietà discusse finora non hanno bisogno del supporto di un sistema di riferimento (sono invarianti). Determiniamo adesso le componenti cartesiane e polari dell'accelerazione, come fatto per la velocità.

Componenti cartesiane

Le componenti cartesiane dell'accelerazione sono le accelerazioni dei due moti rettilinei proiezioni sugli assi del moto di P lungo la traiettoria curva:

$$\mathbf{a} = \frac{dv_x}{dt} \mathbf{u}_x + \frac{dv_y}{dt} \mathbf{u}_y = \frac{d^2x}{dt^2} \mathbf{u}_x + \frac{d^2y}{dt^2} \mathbf{u}_y = a_x \mathbf{u}_x + a_y \mathbf{u}_y .$$

Se ϕ è l'angolo che \mathbf{u}_T forma con \mathbf{u}_x , si deduce dalla figura 1.20 che:

$$a_x = \frac{dv}{dt} \cos \phi - \frac{v^2}{R} \sin \phi ,$$

$$a_y = \frac{dv}{dt} \sin \phi - \frac{v^2}{R} \cos \phi .$$

Dalle componenti tangenziale e centripeta si ricavano subito quelle cartesiane; e viceversa, basta risolvere il sistema lineare nelle incognite dv/dt e v^2/R .

Componenti polari

Ci serviamo di (1.19) e ricordiamo che \mathbf{u}_r e \mathbf{u}_θ non sono fissi:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dr}{dt} \mathbf{u}_r + r \frac{d\theta}{dt} \mathbf{u}_\theta \right) = \\ &= \frac{d^2r}{dt^2} \mathbf{u}_r + \frac{dr}{dt} \frac{d\mathbf{u}_r}{dt} + \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \mathbf{u}_\theta + r \frac{d^2\theta}{dt^2} \mathbf{u}_\theta + r \frac{d\theta}{dt} \frac{d\mathbf{u}_\theta}{dt} . \end{aligned}$$

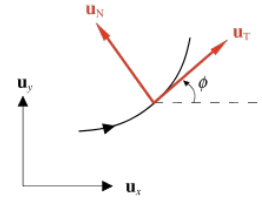


FIGURA 1.20

Considerando che $\frac{d}{dt} \mathbf{u}_r = \frac{d\theta}{dt} \mathbf{u}_\theta$ e che $\frac{d}{dt} \mathbf{u}_\theta = -\frac{d\theta}{dt} \mathbf{u}_r$ (infatti dalla figura 1.17 si vede che per una variazione positiva di θ $d\mathbf{u}_\theta$ è opposto a \mathbf{u}_r) si ha

$$\mathbf{a} = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] \mathbf{u}_r + \left[2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2\theta}{dt^2} \right] \mathbf{u}_\theta$$

da cui

$$\mathbf{a} = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] \mathbf{u}_r + \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) \right] \mathbf{u}_\theta . \quad (1.23)$$

Il primo termine rappresenta l'accelerazione radiale e il secondo

l'accelerazione trasversa. Anche a_r e a_θ si possono mettere in relazione con a_x e a_y o a_T e a_N .

In base al particolare problema fisico da affrontare si utilizzerà una delle rappresentazioni trovate. Comunque sia, l'effettiva presenza di una delle componenti dell'accelerazione implica l'esistenza di una forza, agente sul punto materiale, con componente non nulla parallela a quella dell'accelerazione.

Come già fatto in relazione a (1.17) e (1.20), da (1.21) si deduce in generale che, nota l'accelerazione e il valore della velocità all'istante t_0 , la velocità in un istante t è data da

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{a}(t) dt \quad (1.24)$$

e valgono le stesse considerazioni fatte in proposito di (1.20) per il calcolo effettivo dell'integrale.

Accelerazione radiale
Accelerazione
trasversa

1.11 Moto circolare

Si chiama *moto circolare* un moto piano la cui traiettoria è rappresentata da una circonferenza. Considerando che la velocità varia continuamente in direzione l'*accelerazione centripeta è sempre diversa da zero* (e quindi agisce una forza, detta centripeta, diretta verso il centro della circonferenza). Nel moto circolare uniforme la velocità è costante in modulo e l'accelerazione tangente è nulla per cui $\mathbf{a} = \mathbf{a}_N$; se invece il modulo della velocità cambia nel tempo il moto circolare non è uniforme e \mathbf{a}_T è diversa da zero; in questo caso la direzione dell'accelerazione non passa per il centro della circonferenza (oltre alla forza centripeta agisce anche una forza tangenziale).

Il moto circolare può essere descritto facendo riferimento allo spazio percorso sulla circonferenza $s(t)$ oppure utilizzando l'angolo $\theta(t)$ sotteso dall'arco $s(t)$, con $\theta(t) = s(t) / R$.

L'assumere come variabile l'angolo $\theta(t)$ significa in sostanza porsi in un sistema di coordinate polari di centro in O in cui il moto avviene con $r(t) = R =$ costante e $\theta(t)$ variabile. Anche la rappresentazione in coordinate cartesiane è legata come sappiamo a $\theta(t)$: $x(t) = R \cos \theta(t)$, $y(t) = R \sin \theta(t)$.

Siamo naturalmente interessati alle variazioni dell'angolo nel tempo e pertanto definiamo la *velocità angolare* come la derivata dell'angolo rispetto al tempo:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{R} \frac{ds}{dt} = \frac{v}{R} \quad (1.25)$$

Risulta che la velocità angolare è proporzionale alla velocità con cui è descritta la circonferenza; se v è variabile lo è anche ω .

Ricollegandoci a (1.19), nel moto circolare la velocità radiale è identicamente nulla perché il raggio vettore è costante in modulo e la velocità trasversa coincide con la velocità: da $v \theta = r \frac{d\theta}{dt}$ ritroviamo $v = R\omega$ (tutto ciò è vero se l'origine coincide col centro della circonferenza).

Il moto circolare più semplice è quello uniforme: v e ω sono costanti e le leggi orarie, con riferimento alle due variabili utilizzate, si scrivono

$$\begin{aligned} s(t) &= s_0 + vt & s &= s_0 \quad \text{per} \quad t = 0 \\ \theta(t) &= \theta_0 + \omega t & \theta &= \theta_0 \quad \text{per} \quad t = 0 \end{aligned} .$$

Ripetiamo che il termine uniforme significa esclusivamente costanza del modulo della velocità; *il moto circolare uniforme è un moto accelerato con accelerazione costante, ortogonale alla traiettoria,*

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_N = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R \quad (1.26)$$

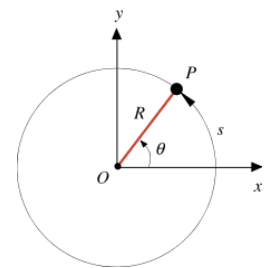


FIGURA 1.21

Velocità angolare

Si tratta inoltre di un moto periodico con periodo $T = 2\pi R v = 2\pi \omega$

MathType@MTEF@5@5@+=
feaagKart1ev2aaatCvAUfeBSjuyZL2yd9gzLbvyNv2CaerbuLwBLn
hiov2DGi1BTfMBaeXatLxBI9gBaerbd9wDYLwzYbItLDharqqtubsr
4rNCHbGeaGqiVu0Je9sqqrpepCoxbbL8F4rqqrFfpeea0xe9Lq=Jc9
vqaqpepmoxbba9pwe9Q8fs0=yqaqpepae9pg0FirpepeKkFroxfr=x
fr=xb9adbaqaeeGaciGaaiaabeqaamaabaabaaGcbaGaamivaiabg2
da9maalaabaGaaGOMaiabec8aWjaadkfaaeaacaWG2baaaiaabg2da
9maalaabaGaaGOMaiabec8aWbqaaiabeM8a3baaaaa@418C@ , corrispondente
al tempo necessario per compiere un giro completo. I moti proiettati sugli assi
cartesiani sono

$$x = R \cos \theta = R \cos (\omega t + \theta_0) \quad , \quad y = R \sin \theta = R \sin (\omega t + \theta_0) \quad ,$$

cioè due moti armonici di eguale ampiezza e fase iniziale, sfasati tra loro di $\pi/2$, e con periodo coincidente con quello del moto circolare uniforme. Numericamente la velocità angolare è eguale alla pulsazione, anche se il significato fisico delle due grandezze è diverso.

Nel caso del moto circolare non uniforme oltre all'accelerazione centripeta, che è variabile perché la velocità varia anche in modulo, dobbiamo considerare anche l'accelerazione tangenziale $a_T = dv/dt$. Siccome è variabile anche ω definiamo l'accelerazione angolare

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{1}{R} \frac{dv}{dt} = \frac{a_T}{R} \quad . \quad (1.27)$$

Accelerazione
angolare

Se è nota la legge oraria angolare $\theta(t)$ con le due derivazioni successive (1.25) e (1.27) determiniamo le variazioni dell'angolo e della velocità angolare. Viceversa, nota la funzione $\alpha(t)$, possiamo integrare ottenendo:

$$\omega(t) = \omega_0 + \int_{t_0}^t \alpha(t) dt \quad , \quad (1.28)$$

$$\theta(t) = \theta_0 + \int_{t_0}^t \omega(t) dt \quad . \quad (1.29)$$

Qualora in un particolare problema sia nota la funzione $\alpha(\theta)$, invece di $\alpha(t)$, possiamo calcolare l'incremento della velocità angolare in corrispondenza all'incremento angolare $\theta - \theta_0$. Infatti

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \omega \frac{d\omega}{d\theta} \Rightarrow \alpha d\theta = \omega d\omega \Rightarrow \int_{\theta_0}^{\theta} \alpha(\theta) d\theta = \frac{1}{2} \omega^2 - \frac{1}{2} \omega_0^2 \quad . \quad (1.30)$$

Si noti ancora una volta come siano importanti, quando si integra, le condizioni iniziali, cioè i valori di ω e θ nell'istante iniziale o di ω nella posizione

iniziale.

Un caso particolare di moto circolare non uniforme è costituito dal moto circolare uniformemente accelerato in cui $\alpha = \text{costante}$ ovvero $a_T = \text{costante}$. Da (1.28) e (1.29) abbiamo, posto $t_0 = 0$,

$$\omega = \omega_0 + \alpha t, \quad \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2.$$

L'accelerazione centripeta vale $a_N = \omega^2 R = (\omega_0 + \alpha t)^2 R$.

Si sarà certamente notata la completa analogia matematica tra la trattazione del moto rettilineo e quella del moto circolare fatta tramite $\theta(t)$: il significato fisico e la geometria sono diversi, ma le equazioni a cui si arriva hanno la stessa struttura. Ciò deriva dal fatto che con la scelta della descrizione angolare abbiamo ridotto un problema bidimensionale a un problema unidimensionale. Mentre però nel moto rettilineo la descrizione unidimensionale è ovviamente completa, nel moto circolare con $\omega(t)$ e $\alpha(t)$ descriviamo solo l'evoluzione temporale del moto, che è legato esclusivamente al modulo della velocità, e non rendiamo conto delle variazioni di direzione che portano all'accelerazione centripeta. E infatti $\mathbf{a}_N = \frac{v^2}{R} \mathbf{u}_N$ è stata calcolata con un ragionamento giustamente bidimensionale nel paragrafo 1.9.

Ad ogni modo, la comodità dell'uso di $\theta(t)$ è innegabile, perché si risolvono i problemi di moto circolare con formule analoghe a quelle del moto rettilineo; basta poi ricordare che istante per istante ad $\mathbf{a}_T = \alpha R \mathbf{u}_T$ bisogna sommare vettorialmente $\mathbf{a}_N = \omega^2 R \mathbf{u}_N$ per avere il corretto valore dell'accelerazione (e quindi il corretto legame con le forze agenti).

Esempio 1.9

Descrivere il moto circolare in cui $\alpha = -k\omega$, con k costante positiva.

Soluzione

È un moto circolare vario, con equazione differenziale

$$\frac{d\omega}{dt} = -k\omega \Rightarrow \frac{d\omega}{\omega} = -k dt \Rightarrow \omega = \omega_0 e^{-kt}.$$

Il moto è smorzato esponenzialmente (vedi paragrafo 1.7). Da (1.30) si ricava inoltre $\omega(\theta) = \omega_0 - k\theta$ e si calcola l'angolo di arresto $\theta = \omega_0/k$.

Visualizza soluzione

Esempio 1.10

Descrivere il moto circolare in cui $\alpha = -k^2\theta$.

Soluzione

È ancora un moto vario, che obbedisce all'equazione $d^2\theta/dt^2 + k^2\theta = 0$.
la soluzione è $\theta = \theta_0 \sin(kt + \Phi)$. Il punto descrive un arco di circonferenza di ampiezza angolare $2\theta_0$ con moto armonico semplice. La velocità angolare di questo moto è $\omega = d\theta/dt = k\theta_0 \cos(kt + \Phi)$.
variabile nel tempo; la pulsazione è , costante.

Visualizza soluzione

Esempio 1.11

Un punto materiale si muove lungo una circonferenza di raggio $R = 1.8$ m con accelerazione angolare $\alpha_1 = 2.39$ rad/s²; all'istante $t = 0$ $\theta = 0$ e $\omega = 0$. Dopo aver percorso mezzo giro il moto del punto diventa uniformemente decelerato ed esso si ferma dopo aver percorso un altro mezzo giro. Calcolare l'accelerazione angolare α_2 durante il secondo mezzo giro e il tempo totale impiegato a percorrere il giro completo. Se nello stesso intervallo di tempo il moto fosse uniforme, quale sarebbe l'accelerazione centripeta del punto?

Soluzione

Alla fine del primo mezzo giro ($\theta = \pi$), secondo (1.30) si ha

$$2\pi\alpha_1 = \omega_1^2 .$$

Nel secondo mezzo giro, da π a 2π , alla fine del quale il punto si ferma, analogamente si ha

$$2\pi\alpha_2 = -\omega_1^2$$

e quindi $\alpha_2 = -\alpha_1 = -2.39$ rad/s², com'era intuibile.

Il tempo impiegato a percorrere il primo mezzo giro si ricava da

$$\pi = \frac{1}{2} \alpha_1 t_1^2 \Rightarrow t_1 = 1.62 \text{ s} .$$

Il tempo totale è $2 t_1 = 3.24 \text{ s}$.

Se il moto fosse uniforme sarebbe $\omega = \pi / t_1 = 1.94 \text{ rad/s}$, $a_N = \omega^2 R = 6.77 \text{ m/s}^2$.

Visualizza soluzione

Notazione vettoriale

Ampliamo il concetto di velocità angolare del moto circolare mostrando come le si possono associare caratteristiche vettoriali. Si definisce velocità angolare il vettore $\boldsymbol{\omega}$ che ha queste proprietà: il modulo è $\omega = d\theta/dt$, la direzione è perpendicolare al piano in cui giace la circonferenza e il verso è tale che dall'estremo del vettore $\boldsymbol{\omega}$ il moto appaia antiorario (vedi figura 1.22). In base alla definizione risulta evidente che

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} . \quad (1.31)$$

Di norma $\boldsymbol{\omega}$ si pensa applicata nel centro della circonferenza, nel qual caso $r = R$. La (1.31) resta però valida se $\boldsymbol{\omega}$ è applicata in un qualsiasi altro punto dell'asse di rotazione (retta ortogonale al piano del moto e passante per il centro della circonferenza); infatti direzione e verso di \mathbf{v} restano eguali e il modulo vale ancora $v = \omega r \sin \Phi = \omega R$.

Se diamo $\boldsymbol{\omega}$, individuiamo pertanto l'asse di rotazione e il piano del moto circolare, con quale verso è percorsa la circonferenza e come varia l'angolo nel tempo. Da $\boldsymbol{\omega}$, per derivazione rispetto al tempo, si ottiene il vettore accelerazione angolare $\boldsymbol{\alpha}$ che risulta parallelo a $\boldsymbol{\omega}$, dato che questa ha direzione costante, e ha verso determinato dalla variazione del modulo di $\boldsymbol{\omega}$ e modulo $\alpha = d\omega/dt$.

Tramite $\boldsymbol{\alpha}$ e $\boldsymbol{\omega}$ si può esprimere l'accelerazione del moto circolare:

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \Rightarrow \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} . \quad (1.32)$$

Il primo termine $\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}$ è l'accelerazione tangenziale $\boldsymbol{\alpha}_T$ (modulo αR), il secondo $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$ è l'accelerazione centripeta $\boldsymbol{\alpha}_N$ (modulo $\omega^2 R$).

Nel moto circolare uniforme $\boldsymbol{\omega}$ è un vettore costante anche in modulo, $\boldsymbol{\alpha}$ è nulla e $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}_N = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$.

Osservando la figura 1.22 notiamo una proprietà importante: il vettore \mathbf{r} applicato in O' ha modulo costante e descrive un moto rotatorio attorno all'asse di rotazione, ovvero alla direzione di $\boldsymbol{\omega}$, formando un angolo Φ costante con l'asse stesso; la sua derivata $d\mathbf{r}/dt$ si può scrivere $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$. Anche il vettore \mathbf{v} , che nel moto circolare uniforme ha modulo costante, descrive una rotazione attorno ad $\boldsymbol{\omega}$, con cui forma l'angolo $\Phi = \pi / 2$, e la sua derivata $d\mathbf{v}/dt$ si può scrivere $\boldsymbol{\omega}$

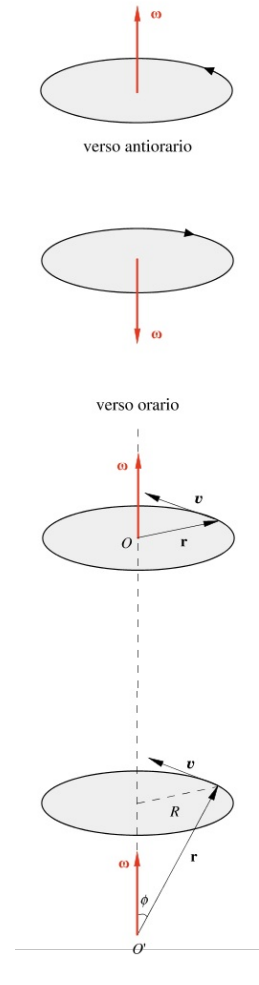


FIGURA 1.22

$\times \mathbf{v}$. A questo tipo di moto, rotazione di un asse rispetto ad un altro asse fisso, con cui forma un angolo costante e ha un punto in comune, si dà il nome di *moto di precessione*.

La proprietà importante è la seguente: dato un vettore di modulo costante \mathbf{A} , che descrive un moto di precessione con velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$, la sua derivata temporale può sempre essere scritta

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A} \quad (1.33)$$

Vediamo che $d\mathbf{A}/dt$ risulta ortogonale ad \mathbf{A} come deve essere per un vettore di dt modulo costante (vedi appendice C); inoltre, per quanto riguarda direzione e verso, la (1.33) si verifica subito guardando la figura 1.23; in modulo, $dA = A \sin\Phi d\theta$ e $dA/dt = A \sin\Phi d\theta/dt = \omega A \sin\Phi = |\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}|$.

Abbiamo considerato finora solo un moto circolare che si svolge sempre nello stesso piano; più in generale può avvenire che per un tempo dt la rotazione avvenga rispetto ad un certo asse e in un istante successivo rispetto ad un altro asse, cioè che $\boldsymbol{\omega}$ sia funzione del tempo anche in direzione; pure in tal caso (1.33) resta valida.

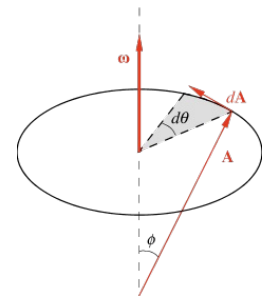


FIGURA 1.23

Unità di misura

velocità angolare $\text{rad/s} = \text{rad s}^{-1}$ accelerazione angolare $\text{rad/s}^2 = \text{rad s}^{-2}$

1.12 Moto parabolico dei corpi

Studiamo, come estensione di quanto trattato nel paragrafo 1.5, il moto (nel vuoto) di un punto P lanciato dall'origine O con velocità iniziale \mathbf{v}_0 formante un angolo θ con l'asse delle ascisse (asse orizzontale). In particolare vogliamo calcolare la traiettoria, la massima altezza raggiunta e la posizione G in cui il punto ricade sull'asse x ovvero la *gittata* OG . Il moto è caratterizzato da un'accelerazione costante $\mathbf{a} = \mathbf{g} = -g \mathbf{u}_y$ e le condizioni iniziali sono $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0$ al tempo $t = 0$, istante di lancio.

Secondo (1.24)

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \int_0^t \mathbf{a}(t) dt = \mathbf{v}_0 - g t \mathbf{u}_y \quad .$$

Vediamo innanzitutto che la velocità sta sempre nel piano individuato dai vettori costanti \mathbf{v}_0 e \mathbf{g} , che è il piano x, y della figura 1.24. Poiché $\mathbf{v}_0 = v_0 \cos\theta \mathbf{u}_x + v_0 \sin\theta \mathbf{u}_y$,

$$\mathbf{v}(t) = v_0 \cos\theta \mathbf{u}_x + (v_0 \sin\theta - g t) \mathbf{u}_y \quad .$$

Le velocità dei moti proiettati sugli assi sono $v_x = v_0 \cos\theta$, costante, e $v_y = v_0 \sin\theta - g t$. Quindi le leggi orarie dei moti proiettati sono

$$x = v_0 \cos\theta t \quad , \quad y = v_0 \sin\theta t - \frac{1}{2} g t^2 \quad ;$$

sull'asse x il moto è uniforme, sull'asse y uniformemente accelerato (eguale a quello del terzo caso del paragrafo 1.5). Si noti che abbiamo applicato (1.20) integrando direttamente sulle componenti della velocità per ottenere le componenti x e y di $\mathbf{r}(t)$.

La traiettoria viene ricavata eliminando il tempo tra $x(t)$ e $y(t)$ e ottenendo così la funzione $y(x)$; $t = x/v_0 \cos\theta$ e

$$y(x) = x \operatorname{tg}\theta - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2\theta} x^2 \quad ,$$

che è l'equazione di una *parabola*.

La direzione del moto, in funzione del tempo o della coordinata x , può essere caratterizzata dall'angolo Φ che il vettore velocità forma con l'asse orizzontale:

$$\operatorname{tg}\phi = \frac{v_y}{v_x} = \operatorname{tg}\theta - \frac{g}{v_0 \cos\theta} t = \operatorname{tg}\theta - \frac{g}{v_0^2 \cos^2\theta} x \quad .$$

Per calcolare la *gittata* OG imponiamo $y(x) = 0$ e otteniamo due soluzioni: $x = 0$ ovviamente e

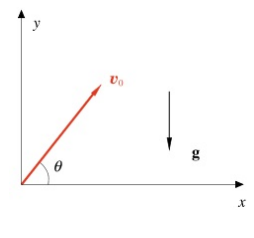


FIGURA 1.24

$$x_G = \frac{2 v_0^2 \cos^2 \theta \operatorname{tg} \theta}{g} = \frac{2 v_0^2 \cos \theta \operatorname{sen} \theta}{g} = 2 x_M$$

con $x_M = v_0^2 \cos \theta \operatorname{sen} \theta / g$ coordinata del punto di mezzo del segmento OG e quindi, per la simmetria della parabola, ascissa del punto di massima altezza. L'altezza massima raggiunta è pertanto

$$y(x_M) = y_M = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{2 g} .$$

L'angolo di lancio per cui si ha la gittata massima si ottiene con la condizione

$$\frac{d x_G}{d \theta} = 0, \text{ cioè } \frac{2 v_0^2}{g} (-\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta) = 0 : \text{ risulta } \theta = 45^\circ \text{ e } (x_G)_{\max} = v_0^2 / g .$$

L'altezza massima y_M può ottenersi anche in altri modi: per esempio si annulla dy/dx , cioè si impone $\operatorname{tg} \theta - (g/v_0^2 \cos^2 \theta) x = 0$, si ricava l'ascissa del massimo x_M e si calcola $y(x_M)$; oppure si sfrutta il fatto che nel punto di massima altezza la velocità è orizzontale e quindi $v_y = 0$, cioè $t = t_M = v_0 \operatorname{sen} \theta / g$: sostituendo in $x(t)$ e $y(t)$ si ritrovano x_M e y_M .

Il tempo totale di volo t_G è pari al tempo impiegato a percorrere OG con velocità costante $v_x = v_0 \cos \theta$:

$$t_G = 2 x_M / v_0 \cos \theta = 2 v_0 \operatorname{sen} \theta / g = 2 t_M ;$$

evidentemente t_G coincide con il tempo necessario per salire all'altezza y_M e ritornare al suolo. Notiamo infine che nella posizione G la velocità è la stessa in modulo che alla partenza, ma è posta simmetricamente rispetto all'asse x :

$$v_x(t_G) = v_0 \cos \theta \quad , \quad v_y(t_G) = -v_0 \operatorname{sen} \theta \quad , \quad \operatorname{tg} \phi = -\operatorname{tg} \theta .$$

Le caratteristiche geometriche del moto parabolico di un corpo vicino alla superficie terrestre si comprendono chiaramente nel sistema cartesiano adottato che è in definitiva il più naturale in questo problema in cui c'è una direzione di particolare importanza, quella di \mathbf{g} , a 90° con una direzione di uso pratico molto comune, quella orizzontale. Invece, per esempio, nella trattazione del moto circolare è certamente più semplice servirsi di un sistema di coordinate polari con centro nel centro di simmetria del sistema, mentre non hanno particolare significato gli assi x e y . È la situazione fisica a suggerire la scelta del sistema di riferimento più adatto; se non ci sono motivi di preferenza di un dato sistema, conviene scegliere un sistema cartesiano.

Altezza massima

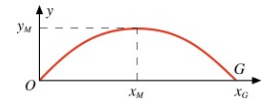


FIGURA 1.25

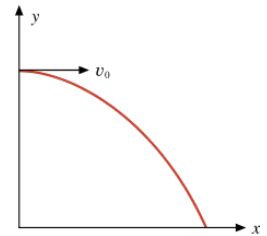


FIGURA 1.26
(Esempio 1.12)

Esempio 1.12

Un punto materiale viene fatto cadere da un'altezza h rispetto al suolo lanciandolo orizzontalmente con velocità iniziale v_0 (Fig. 1.26). Descrivere il moto e confrontare con la caduta verticale del paragrafo 1.5.

Soluzione

Poniamoci nel sistema di riferimento della figura 1.26 e adattiamo il calcolo appena visto. Le componenti iniziali della velocità sono $v_x = v_0$ e $v_y = 0$, l'accelerazione è $-g \mathbf{u}_y$. Pertanto le proiezioni del moto del punto sugli assi sono

$$x = v_0 t \quad , \quad y = h - \frac{1}{2} g t^2 \quad .$$

La traiettoria è un arco di parabola di equazione

$$y(x) = h - \frac{g}{2 v_0^2} x^2 \quad .$$

Il tempo di caduta e la gittata valgono rispettivamente

$$t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad , \quad x_G = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}} = v_0 t_c \quad .$$

Il modulo della velocità finale

$$v = \sqrt{v_0^2 + (g t_c)^2} = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$$

è ed essa forma con l'asse x l'angolo Φ il cui valore si ricava da $\text{tg}\Phi = v_y / v_x = 2gh / v_0$. Notiamo alcuni fatti. Il tempo di caduta è lo stesso che nel caso di caduta verticale con partenza da fermo; infatti il moto lungo l'asse y è lo stesso. Quindi, se contemporaneamente al nostro punto ne cadesse un altro verticalmente, le loro posizioni a intervalli di tempo eguali sarebbero quelle mostrate in figura 1.27. La velocità finale invece è diversa e la formula trovata coincide con quella della caduta verticale con velocità iniziale v_0 ; è chiaro che la presenza di una velocità iniziale è importante

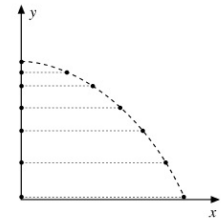


FIGURA 1.27
(Esempio 1.12)

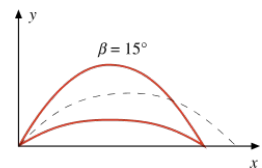


FIGURA 1.28
(Esempio 1.13)

indipendentemente dalla direzione di lancio. Capiremo questo punto quando studieremo il concetto di energia applicato alla caduta dei corpi.

Visualizza soluzione

Esempio 1.13

Un corpo viene lanciato nelle condizioni viste all'inizio del paragrafo e sappiamo che la gittata è massima se $\theta = 45^\circ$. Dimostrare che se l'angolo di lancio è $45^\circ + \beta$ o $45^\circ - \beta$ la gittata è la stessa ($\beta < 45^\circ$).

Soluzione

Applichiamo la formula della gittata ricorrendo all'identità $2 \sin\theta \cos\theta = \sin 2\theta$ e scriviamo:

$$x_{G,1} = \frac{v_0^2}{g} \sin 2(45^\circ + \beta) = \frac{v_0^2}{g} \sin (90^\circ + 2\beta) = \frac{v_0^2}{g} \cos 2\beta,$$
$$x_{G,2} = \frac{v_0^2}{g} \sin 2(45^\circ - \beta) = \frac{v_0^2}{g} \sin (90^\circ - 2\beta) = \frac{v_0^2}{g} \cos 2\beta = x_{G,1}.$$

Ricordiamo che la gittata a 45° è v_0^2 / g . Si verifichi che invece sono diversi per le due traiettorie l'altezza massima e il tempo di volo.

Visualizza soluzione

1.13 Moto nello spazio. Composizione di moti

Nel caso più generale il punto P descrive una traiettoria curva nello spazio; questo moto tridimensionale può essere rappresentato, in coordinate cartesiane, come la somma di tre moti rettilinei lungo gli assi di riferimento per cui scriviamo:

$$\mathbf{r}(t) = x(t) \mathbf{u}_x + y(t) \mathbf{u}_y + z(t) \mathbf{u}_z$$

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \mathbf{u}_x + \frac{dy}{dt} \mathbf{u}_y + \frac{dz}{dt} \mathbf{u}_z = v_x \mathbf{u}_x + v_y \mathbf{u}_y + v_z \mathbf{u}_z$$

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2} \mathbf{u}_x + \frac{d^2y}{dt^2} \mathbf{u}_y + \frac{d^2z}{dt^2} \mathbf{u}_z = a_x \mathbf{u}_x + a_y \mathbf{u}_y + a_z \mathbf{u}_z.$$

Secondo la procedura già nota da $\mathbf{a}(t)$ risaliamo a $\mathbf{r}(t)$ con due successive integrazioni, note le condizioni iniziali \mathbf{r}_0 e \mathbf{v}_0 . La velocità \mathbf{v} è sempre tangente alla traiettoria, indica il verso del moto e in modulo vale ds/dt , l'accelerazione \mathbf{a} non è parallela a \mathbf{v} e indica, fisicamente, la direzione e il verso della forza agente che incurva la traiettoria.

Non sviluppiamo ulteriormente la cinematica nello spazio perché non ne avremo bisogno nel seguito della trattazione. Ci occupiamo invece, con vari esempi, della composizione di moti. Richiamiamo i due casi già visti: nel paragrafo 1.11 abbiamo mostrato che un moto circolare uniforme si scompone in due moti armonici semplici su assi ortogonali, di eguale ampiezza e periodo, sfasati di $\pi/2$, nel paragrafo 1.12 che il moto di un punto lungo un arco di parabola ha come moti componenti un moto rettilineo lungo l'asse orizzontale e un moto uniformemente accelerato lungo l'asse verticale. Adesso impostiamo il problema inverso: prendiamo due moti lungo gli assi x , y e calcoliamo il moto risultante nel piano.

a) Se i due moti sono uniformi con velocità v_x e v_y , il moto risultante è un moto uniforme lungo una retta che forma un angolo Φ con l'asse delle x , tale che $\text{tg } \Phi = v_y / v_x$.

b) I due moti sono uniformemente accelerati con accelerazioni a_x e a_y : allora $\mathbf{a} = a_x \mathbf{u}_x + a_y \mathbf{u}_y$ è un vettore costante. La velocità si scrive $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a} t$: se \mathbf{v}_0 è nulla oppure parallela ad \mathbf{a} , \mathbf{v} risulta costante in direzione e verso in quanto parallela all'accelerazione. Il moto è quindi uniformemente accelerato lungo una retta che forma con l'asse x un angolo tale che $\text{tg } \Phi = a_y / a_x = v_y / v_x$. Si noti che il risultato dipende dalle condizioni iniziali; in effetti negli altri casi il moto risultante è più complesso.

c) Il moto lungo l'asse x è armonico semplice, $x = A \text{ sen } (\omega t + \Phi)$, lungo l'asse y è uniforme, $y = vt$. Eliminando il tempo tra $x(t)$ e $y(t)$ si ottiene l'equazione della traiettoria che è una sinusoidale, figura 1.29, avente come asse l'asse delle ordinate:

$$x(y) = A \operatorname{sen} \left(\frac{\omega}{v} y + \phi \right) .$$

d) Il moto lungo l'asse x ha l'espressione $x = R \operatorname{sen} \omega t + \omega R t$, somma di un moto armonico semplice e di un moto uniforme con velocità ωR ; lungo l'asse y abbiamo $y = R \cos \omega t + R$, moto armonico semplice con centro in $y = R$ (invece che in $y = 0$).

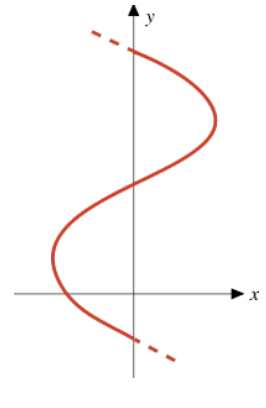


FIGURA 1.29

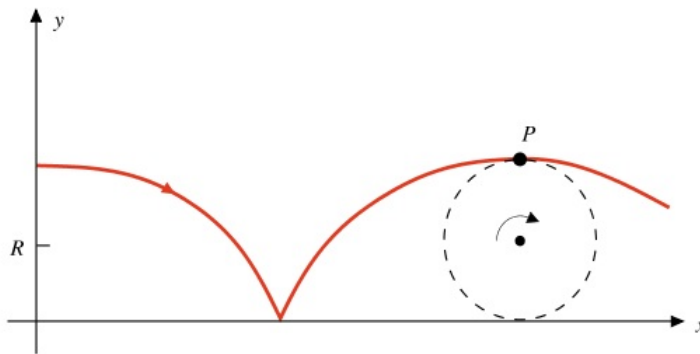


FIGURA 1.30

La traiettoria del punto che descrive il moto risultante è mostrata in figura 1.30: si tratta di una cicloide. Questo moto è descritto, ad esempio, da un punto posto sul bordo di una ruota di raggio R che rotola senza strisciare lungo l'asse x con velocità costante $v = \omega R$ (argomento che verrà ripreso nel capitolo 6). Si può anche dire sinteticamente che il moto risultante è la somma di un moto circolare e di un moto rettilineo uniforme del centro della circonferenza.

e) In coordinate polari le equazioni del moto sono $r = vt$, $\theta = \omega t$: un moto rettilineo uniforme lungo un asse che ruota rispetto all'origine con velocità angolare costante (disco che ruota rispetto al centro con una scanalatura radiale lungo cui si muove il punto). In coordinate cartesiane

$$x = r \cos \theta = vt \cos \omega t \quad , \quad y = r \operatorname{sen} \theta = vt \operatorname{sen} \omega t .$$

I due moti non sono armonici semplici perché l'ampiezza è funzione del tempo.

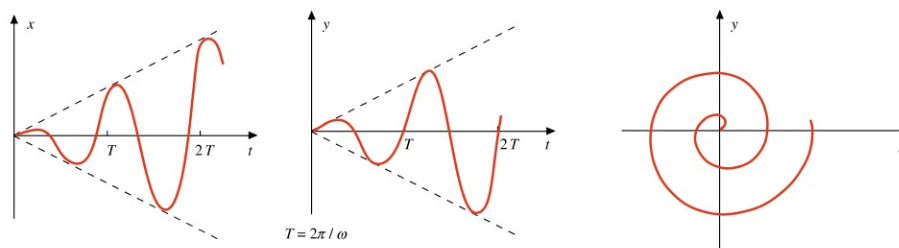


FIGURA 1.31

La traiettoria è la spirale mostrata in figura 1.31 insieme ai grafici di $x(t)$ e $y(t)$.

Dopo questi esempi nel piano trattiamo un solo caso in tre dimensioni, il moto di un punto somma di un moto armonico lungo l'asse x , $x = R \cos \omega t$, di un moto armonico lungo l'asse y con le caratteristiche del precedente, ma sfasato di $\pi / 2$, $y = R \sin \omega t$, e di un moto uniforme lungo l'asse z , $z = v_z t$. Abbiamo cioè la somma di un moto circolare uniforme nel piano x, y e di un moto rettilineo uniforme lungo l'asse z .

Il moto risultante è un *moto elicoidale* uniforme la cui traiettoria è costituita da un'elica cilindrica con passo costante, figura 1.32. Le componenti della velocità sono:

$$v_x = -\omega R \sin \omega t \quad , \quad v_y = \omega R \cos \omega t \quad , \quad v_z \text{ (costante)}.$$

Da esse si può determinare la direzione istantanea del moto e il modulo della velocità

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\omega^2 R^2 + v_z^2} \quad , \quad \text{costante} .$$

L'accelerazione ha solo le componenti a_x e a_y , vale in modulo $\omega^2 R$ e in qualsiasi istante del moto è diretta verso l'asse z .

Dall'esame degli esempi che abbiamo descritto risulta l'utilità del procedimento di composizione: infatti spesso è più semplice studiare le caratteristiche di un moto attraverso l'analisi delle componenti. Inoltre ci rendiamo conto che componendo opportunamente due o tre moti rettilinei lungo gli assi possiamo descrivere qualsiasi moto nel piano o nello spazio e ciò ha importanti conseguenze pratiche per la progettazione di particolari tipi di moto.

D'altra parte bisogna fare attenzione a non perdere di vista la situazione fisica e quindi ricordare sempre che il moto reale è quello che il punto descrive nel piano o nello spazio e non quello proiettato sugli assi.

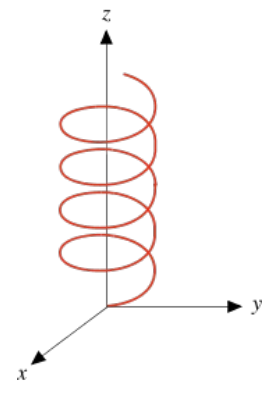


FIGURA 1.32

1.14 Riepilogo

Ripercorriamo gli argomenti presentati nel capitolo per mettere in evidenza i concetti più importanti e le procedure più significative.

Lo scopo iniziale del nostro studio della meccanica è di fissare il quadro della descrizione cinematica del moto di un punto precisando quali sono le grandezze fondamentali e come sono legate tra loro; per sviluppare questo programma risultano subito necessari strumenti forniti dall'analisi matematica e dal calcolo vettoriale. Elenchiamo in maniera schematica i punti salienti:

- La descrizione del moto consiste nel determinare *come varia la posizione del punto in funzione del tempo*; se conosciamo la posizione ad un certo istante possiamo sapere come si sviluppa il moto se abbiamo la direzione istantanea del moto e la rapidità con cui avviene lo spostamento: ciò porta al concetto di *velocità* e possiamo concepire il moto come una successione di spostamenti infinitesimi $d\mathbf{r} = \mathbf{v} dt$.
- La *velocità* a sua volta *può cambiare durante il moto e le sue variazioni sono espresse dall'accelerazione*: $d\mathbf{v} = \mathbf{a} dt$.
- La *traiettoria* è il luogo dei punti occupati in funzione del tempo dalla punta del vettore $\mathbf{r}(t)$: questo dà la posizione del punto, ma non la direzione del moto espressa, come detto sopra, da $d\mathbf{r}$ e quindi da \mathbf{v} .
- La *velocità* \mathbf{v} è *dunque sempre tangente alla traiettoria*; *l'accelerazione in generale non è parallela alla velocità*. La componente di \mathbf{a} ortogonale a \mathbf{v} descrive le variazioni della direzione del moto e non ha alcun legame con le variazioni del modulo di \mathbf{v} . Nel moto curvilineo c'è sempre una componente dell'accelerazione ortogonale alla traiettoria, nel moto rettilineo questa componente è sempre nulla.
- Da $\mathbf{r}(t)$ si passa a $\mathbf{v}(t)$ e ad $\mathbf{a}(t)$ derivando rispetto al tempo; se invece è data $\mathbf{a}(t)$ il passaggio inverso si fa integrando ed è essenziale la conoscenza delle condizioni iniziali.
- Le *grandezze cinematiche fondamentali* sono dunque *posizione, velocità, accelerazione* e sono legate tra loro da operazioni di derivazione e di integrazione, conseguenza del fatto che lo studio dell'evoluzione del moto comporta il concetto di variazione che è espresso matematicamente dall'operazione di derivazione.
- \mathbf{r} , \mathbf{v} , \mathbf{a} sono *grandezze vettoriali*: nella loro definizione oltre ad un numero bisogna dare una direzione e un verso; pertanto le variazioni di posizione e di velocità sono espresse completamente solo se si tiene conto sia della variazione del modulo che della variazione della direzione.
- È necessario specificare sempre in quale sistema di riferimento si descrive il moto: le coordinate del punto, le componenti di \mathbf{v} e \mathbf{a} , l'espressione analitica della traiettoria dipendono dal sistema di riferimento. Però le *relazioni più generali tra le grandezze cinematiche sono relazioni vettoriali* e in quanto

tali sono *invarianti rispetto alla scelta del sistema di riferimento*, cioè *valgono in qualsiasi sistema di riferimento*. Quindi, se $\mathbf{b} = \mathbf{c}$, questo comporta sempre $b_x = c_x$, $b_y = c_y$, $b_z = c_z$, ma i valori (b_x, b_y, b_z) e (c_x, c_y, c_z) cambiano col sistema di riferimento.

Questo è il quadro generale. Si vede così che parallelamente all'introduzione delle grandezze fisiche citate abbiamo dovuto richiamare i concetti matematici che ne permettono la spiegazione. Per non appesantire la trattazione i richiami matematici sono contenuti nelle appendici A e C che vanno lette e studiate adesso e saranno utilizzate per tutto il resto del volume.

Gli argomenti esposti sono stati chiariti con vari esempi; tra questi rivestono particolare importanza il *moto armonico semplice* e il *moto circolare* che ritroveremo rispettivamente nello studio dei fenomeni di oscillazione e di rotazione. Sempre a scopo di chiarezza e di semplicità abbiamo iniziato lo studio dal moto rettilineo che in realtà è un caso abbastanza particolare; però, a parte l'utilità didattica, vediamo che la sua conoscenza è essenziale nella composizione di moti.

Infine vogliamo attirare l'attenzione su un argomento di carattere diverso dai precedenti. Se da una parte la cinematica ha una struttura analitica che permette di calcolare le caratteristiche del moto, dall'altra alla base del calcolo devono esserci state delle *misure* che, tanto per fissare due estremi, o hanno permesso di determinare $\mathbf{r}(t)$ oppure hanno fornito $\mathbf{a}(t)$ e le condizioni iniziali. La procedura di misura produce dei valori numerici (con un certo errore) ai quali bisogna associare una *unità di misura*. Per questa ragione ogni qual volta introduciamo nuove grandezze diciamo subito in che unità di misura vanno espresse. Il quadro completo delle grandezze e delle relative unità si trova in appendice B.

2.1 Principio d'inerzia. Introduzione al concetto di forza

All'inizio del primo capitolo ci eravamo proposti di studiare il moto indipendentemente dalle cause che lo determinano. Adesso abbiamo imparato come avviene il moto e come lo si caratterizza. La questione fondamentale è perché avviene il moto, quali sono le cause fisiche per cui un corpo entra in movimento e descrive un certo tipo di moto invece che un altro.

La formulazione quantitativa della legge del moto per un punto materiale e le sue più importanti conseguenze sono sviluppate in questo capitolo. Tale parte della meccanica si chiama *dinamica del punto* e contiene in particolare anche il caso dell'equilibrio statico, cioè lo studio delle condizioni per cui un punto resta in quiete.

Un'osservazione fondamentale è che la variazione dello stato di moto di un punto è determinata dall'interazione del punto con l'ambiente circostante, espressa come abbiamo già anticipato dal concetto di forza. La prima prova è contenuta nel *principio d'inerzia*: *un corpo non soggetto a forze non subisce cambiamenti di velocità, ovvero resta in uno stato di quiete se era in quiete ($v = 0$) oppure si muove di moto rettilineo uniforme (v costante non nulla).* L'assenza di forza non implica che non ci sia moto, bensì comporta che la velocità non vari.

Questo risultato, notevolissimo se messo in relazione con i mezzi di indagine allora assai limitati, venne formulato da Galileo a seguito dei suoi esperimenti sul moto dei corpi. In esso è implicitamente contenuta l'idea che sarebbe stata esplicitata da Newton e posta sotto forma di legge quantitativa: la variazione di velocità, in modulo o in direzione o in entrambi, è dovuta all'azione di una forza.

Dato che il principio d'inerzia richiede, in caso di moto, che questo sia rettilineo uniforme, un moto accelerato segnala la presenza di una forza agente. Un esempio è costituito dal moto circolare uniforme, nel quale la velocità rimane costante in modulo, ma varia in direzione a ciascun istante per effetto dell'accelerazione centripeta, e quindi di una forza. Se improvvisamente si annullasse tale forza il punto cesserebbe il moto circolare uniforme e inizierebbe un moto rettilineo uniforme con direzione secondo la tangente alla circonferenza nella posizione ove è cessata l'azione della forza.

La nozione primordiale di forza era legata alla sensazione di sforzo muscolare e successivamente allo sforzo esercitato da sistemi meccanici semplici, come ad esempio per effetto di una molla compressa o estesa o di una leva. In seguito tale concetto si è affinato con la constatazione che non è

Principio d'inerzia

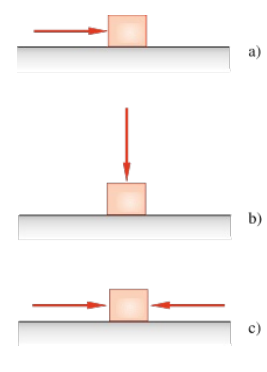


FIGURA 2.1

necessario un contatto per esercitare una forza, come avviene attraverso una interazione a distanza per le forze di attrazione gravitazionale o per quelle elettrostatiche, che si manifestano tra corpi carichi elettricamente.

La forza dunque è la grandezza che esprime e misura l'interazione tra sistemi fisici. Intuitivamente possiamo affermare che alla forza è associata la nozione di intensità e di direzionalità. L'effetto di una forza cambia con la direzione, come viene evidenziato in figura 2.1. Nel caso a) si ha in generale un moto, nella situazione b) non si ha moto, ma solamente una deformazione del corpo e del supporto, nel caso c) infine non si manifesta alcun moto.

Quest'ultimo caso introduce la nozione di eguaglianza di due forze e di equilibrio. Anche nel caso b) possiamo supporre che il piano orizzontale deformandosi produca una forza che fa equilibrio a quella applicata dall'esterno (tale reazione del supporto è indicata come *reazione vincolare*, vedi paragrafo 2.4).

La forza può essere misurata staticamente tramite un *dinamometro*. Una molla estesa esercita una forza di richiamo che entro certi limiti di allungamento (limiti di elasticità) è proporzionale all'allungamento stesso (vedi paragrafo 2.9). Se appendiamo ad una estremità della molla un corpo di massa m , che risente della forza di attrazione della terra mg (vedi paragrafo 2.7), in condizioni di equilibrio la forza F sviluppata dalla molla eguaglia quella esercitata dalla terra, che attira il corpo. Supponiamo ora di sospendere alla molla (dinamometro) un corpo campione e di misurare l'allungamento x_c della molla in condizioni di equilibrio. Indicata come forza campione F_c quella che produce l'allungamento x_c , per ogni altra forza, sia dovuta all'attrazione terrestre che ad un qualsiasi altro meccanismo applicabile al dinamometro col risultato di provocare l'allungamento x , si ha $F/F_c = x / x_c$. È possibile quindi misurare il modulo della forza F in termini della forza campione F_c e il dinamometro può essere tarato direttamente in unità di forza.

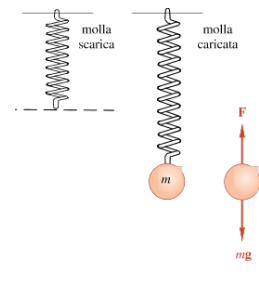


FIGURA 2.2

2.2 Leggi di Newton

La formulazione quantitativa del legame tra la forza e lo stato del moto è data dalla *legge di Newton*

$$\mathbf{F} = m \mathbf{a} \quad . \quad (2.1)$$

Seconda legge di
Newton

L'interazione del punto con l'ambiente circostante, espressa tramite la forza \mathbf{F} , determina l'accelerazione del punto ovvero la variazione della sua velocità nel tempo; m rappresenta la massa inerziale del punto.

Il termine *massa inerziale* è legato al fatto che la massa esprime l'inerzia del punto, cioè la sua resistenza a variare il proprio stato di moto, ossia a modificare la velocità (in modulo, direzione e verso). Fissata una determinata forza \mathbf{F} , l'effetto dinamico è tanto maggiore quanto minore è la massa del punto. Per un punto materiale che si muove con una determinata accelerazione \mathbf{a} , la forza necessaria a mantenere tale moto è tanto maggiore quanto maggiore è il valore di m .

Si giustifica così anche il nome *punto materiale*: per descrivere il comportamento dinamico del punto occorre conoscere la sua massa; si può cioè semplificare al massimo concependo un corpo privo di struttura, ma non si può rinunciare alla massa che è un concetto dinamico fondamentale per qualsiasi corpo.

In assenza di interazione con l'esterno la forza è nulla e quindi $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, $\mathbf{v} =$ costante: la legge di Newton contiene, come caso particolare, il principio d'inerzia. Spesso la (2.1) viene indicata come *seconda legge di Newton*, mentre ci si riferisce al principio d'inerzia come *prima legge di Newton*.

La legge (2.1), che si può anche scrivere

$$\mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \quad ,$$

esprime la legge fondamentale della dinamica del punto; da essa vengono ricavate tutte le proprietà relative al moto di un punto materiale e in particolare, attraverso (1.24) e (1.20), la legge oraria $\mathbf{r}(t)$, qualora naturalmente si conoscano la funzione $\mathbf{F}(t)$ e le condizioni iniziali del moto. In breve, dalle caratteristiche della forza si deducono quelle del moto: in (2.1) è noto il termine di sinistra e incognita \mathbf{a} . Si può però anche applicare la procedura inversa, cioè calcolare $\mathbf{a}(t)$ e quindi la forza agente, nota la massa del punto, a partire da misure sul moto che forniscono la traiettoria, ovvero $\mathbf{r}(t)$ e $\mathbf{v}(t)$; nella (2.1) è noto il termine di destra e incognita \mathbf{F} . Si realizza in tal modo una misura dinamica della forza. Concettualmente è stato con tale metodo che si sono ricavate le proprietà della forza di gravitazione universale (capitolo 5).

Avremo modo nel seguito di applicare la legge di Newton a svariate situazioni fisiche, arrivando così a capirne bene il significato. Vogliamo ora

completare la presentazione con alcune osservazioni.

La (2.1) è una legge sperimentale dedotta dall'analisi del moto di un punto soggetto ad una determinata forza. Bisogna dire che, a posteriori, la sua migliore verifica è costituita dalla correttezza di tutte le deduzioni fatte a partire da essa. Sempre l'esperienza conferma che (2.1) è una *legge vettoriale*, fatto che va in ogni caso tenuto presente. Nella pratica ciò vuol dire che essa equivale a tre equazioni relative ai tre moti proiettati sugli assi.

Sotto l'aspetto matematico (2.1) appare come una relazione algebrica tra forza e accelerazione; però l'accelerazione è legata a velocità e posizione da relazioni non algebriche e quindi (2.1) è in realtà un'equazione differenziale tra \mathbf{F} e \mathbf{v} o tra \mathbf{F} e \mathbf{r} . Ad esempio, in un caso unidimensionale (moto lungo l'asse x e forza lungo l'asse x), la seconda legge di Newton fissa la condizione $d^2x/dt^2 = F(t)/m$. A parte situazioni semplici, la soluzione può presentare notevoli difficoltà.

Oltre che come equazione la (2.1) va anche intesa come la vera definizione della grandezza forza. In sostanza, seguendo Newton, noi chiamiamo forza ciò che causa una variazione dello stato di moto di un corpo e la (2.1) ci dice come misurarla, una volta che abbiamo scelto (arbitrariamente) una massa campione. Pure in relazione alla massa la (2.1) è importante, in quanto ne fissa il significato fisico, rendendo quantitativo il concetto d'inerzia come detto all'inizio del paragrafo.

È naturale chiedersi di fronte a una relazione così fondamentale se ci siano limiti di validità. Innanzitutto anticipiamo un risultato del capitolo 3: la legge di Newton, nella forma (2.1) o in quella (2.2) che vedremo tra poco, è valida solo se il moto è studiato in una particolare classe di sistemi di riferimento, i cosiddetti sistemi di riferimento inerziali; altrimenti compaiono nelle formule termini correttivi. Inoltre, anche in un sistema di riferimento inerziale, la legge di Newton è applicabile solo se la velocità dei punti considerati è molto minore della velocità della luce. Anche su questo aspetto ritorneremo nel capitolo 3.

Infine un breve commento per imparare ad assegnare alle varie leggi la giusta importanza. La (2.1) è una legge di carattere generale che si applica ad un punto materiale di massa m qualunque sia il tipo di forza agente. In ogni caso particolare, in presenza di una certa forza ben definita, si avrà un corrispondente moto, con una sua legge oraria. Questa, che sia $x = vt$, $x = \frac{1}{2}gt^2$, $x = A \sin(\omega t + \Phi)$ o altro, si applica solo a quel moto e non ha validità generale. In altre parole, le leggi dei vari moti, pur importanti nel caso specifico, sono tutte il risultato particolare di un metodo di calcolo generale, che si basa su (2.1) e sulla definizione delle grandezze cinematiche. Per la comprensione della materia e per la soluzione dei problemi è essenziale cogliere queste differenze e quindi essere in grado di applicare correttamente le leggi appropriate.

Terza legge di Newton

La (2.1) è la legge dinamica in base alla quale spieghiamo perché un moto

avviene con certe caratteristiche. Newton scoprì anche una proprietà generale delle forze, che si può enunciare in questa forma: *se un corpo A esercita una forza $\mathbf{F}_{A, B}$ su un corpo B, il corpo B reagisce esercitando una forza $\mathbf{F}_{B, A}$ sul corpo A. Le due forze hanno la stessa direzione, lo stesso modulo e verso opposto, esse cioè sono eguali e contrarie,*

$$\mathbf{F}_{A, B} = -\mathbf{F}_{B, A} \quad ;$$

inoltre esse hanno la stessa retta d'azione, come mostrato nella figura 2.3 nei due casi possibili di forze attrattive e di forze repulsive. Tale legge è detta terza legge di Newton o, più spesso, principio di azione e reazione.

Il fatto che non esista una forza isolata, ma che le forze vadano considerate sempre in coppie, secondo il principio di azione e reazione, chiarisce che l'interazione tra due corpi è sempre un'azione mutua. Avremo modo di discutere più avanti aspetti concettuali e limiti della terza legge, nel capitolo 3 in relazione alla teoria della relatività ristretta, nel capitolo 4 che tratta la dinamica dei sistemi di punti materiali e anche nel secondo volume. In questo capitolo indicheremo con esempi dove sono applicate le reazioni di un punto alle forze cui è soggetto, per cominciare a capire nella pratica l'uso della terza legge.

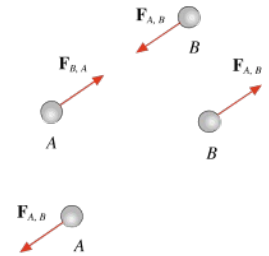


FIGURA 2.3

2.3 Quantità di moto. Impulso

Si definisce *quantità di moto* di un punto materiale il vettore

$$\mathbf{p} = m \mathbf{v} \quad ;$$

se la massa è costante la (2.1) si può allora scrivere

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad . \quad (2.2)$$

In realtà questa relazione è la forma più generale della legge di Newton, utilizzabile anche se la massa non è costante. Essa va intesa in questo senso: lo stato dinamico del punto è individuato dalla quantità di moto, in cui compaiono la massa e la velocità; l'azione di una forza determina la variazione nel tempo della quantità di moto ovvero di qualcuna o di tutte queste quantità, massa, direzione, verso, modulo della velocità.

Un punto materiale in senso stretto, cioè privo di struttura, ha massa costante, qualunque sia la sua velocità (argomento molto importante, che riprenderemo parlando della teoria della relatività nel capitolo 3). Invece quando con un punto approssimiamo un sistema materiale esteso, la massa può variare durante il moto: si pensi ad un veicolo a motore che brucia carburante o ad un nastro trasportatore. Noi non tratteremo esplicitamente questi problemi con massa variabile; vi faremo solo un cenno alla fine del capitolo 4, nel paragrafo 4.16. Pertanto nel seguito la massa sarà sempre considerata costante e (2.1) e (2.2) equivalenti.

Dalla (2.2) si ha $\mathbf{F} dt = d\mathbf{p}$: vediamo che l'azione di una forza durante un tempo dt provoca una variazione infinitesima della quantità di moto del punto. In termini finiti si ha

$$\mathbf{J} = \int_0^t \mathbf{F} dt = \int_{\mathbf{p}_0}^{\mathbf{p}} d\mathbf{p} = \mathbf{p} - \mathbf{p}_0 = \Delta\mathbf{p} \quad . \quad (2.3)$$

Teorema dell'impulso

Il termine vettoriale \mathbf{J} , integrale della forza nel tempo, è chiamato *impulso della forza* e la relazione (2.3) esprime il *teorema dell'impulso*: *l'impulso di una forza applicata ad un punto materiale provoca la variazione della sua quantità di moto; con m costante si ha ovviamente :*

$$\mathbf{J} = m (\mathbf{v} - \mathbf{v}_0) = m \Delta\mathbf{v} \quad .$$

La (2.3) è la *forma integrale della seconda legge di Newton*: mentre (2.1) o (2.2) valgono in ciascun istante in cui si considera l'applicazione della forza, (2.3) dice qual è l'effetto complessivo in un intervallo di tempo finito. Abbiamo così trovato in termini quantitativi la relazione tra forza e variazione di velocità (se la massa è costante). Il legame si esprime attraverso un integrale, a meno che la forza non sia costante nel qual caso è semplicemente

$$\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_0 = \frac{\mathbf{F}t}{m} \quad .$$

Il teorema dell'impulso è utilizzabile per calcolare effettivamente $\Delta \mathbf{p}$ solo se si conosce la funzione $\mathbf{F}(t)$, in particolare se \mathbf{F} è costante come appena detto. Se invece t misuriamo $\Delta \mathbf{p}$, applicando il teorema della media all'integrale $\int_0^t \mathbf{F} dt$, possiamo sempre calcolare il valore medio \mathbf{F}_m della forza agente nell'intervallo di tempo t : $\mathbf{F}_m = \Delta \mathbf{p}/t$.

Quando \mathbf{F} è nulla, $\Delta \mathbf{p} = 0$ e pertanto $\mathbf{p} = \text{costante}$: *in assenza di forza applicata la quantità di moto di un punto materiale rimane costante* o, come si dice utilizzando una terminologia propria della Fisica, *la quantità di moto si conserva*. Si tratta evidentemente di un'altra formulazione del principio di inerzia.

Conservazione della
quantità di moto

Unità di misura

Ricordiamo che la *massa* è assunta come *grandezza fondamentale* e che la relativa unità di misura è il chilogrammo kg (appendice B).

L'unità di forza secondo (2.1) è il kg m s^{-2} : questa unità, molto importante, si chiama newton e ha il simbolo N. Una forza di 1 N provoca su un punto di massa 1 kg un'accelerazione di 1 m s^{-2} .

Quantità di moto e impulso hanno la stessa unità di misura:

$$\text{kg m s}^{-1} = (\text{kg m s}^{-2}) \text{ s} = \text{N s} \quad .$$

Non c'è un nome particolare per il *newton per secondo*.

Esempio 2.1

Un punto materiale che si muove con velocità \mathbf{v} costante urta contro un muro, posto a 90° rispetto alla traiettoria, e rimbalza ripercorrendo l'iniziale traiettoria rettilinea con velocità $-\mathbf{v}$, cioè eguale ed opposta alla velocità prima dell'urto. Calcolare la variazione di quantità di moto e, se l'urto ha durata Δt , il valor medio della forza agente durante l'urto. Si ponga $v = 2 \text{ m/s}$, $m = 0.05 \text{ kg}$, $\Delta t = 10^{-3} \text{ s}$.

Soluzione

Nell'urto contro la parete la velocità cambia soltanto di verso e la variazione di quantità di moto è

$$\mathbf{p}_{\text{fin}} - \mathbf{p}_{\text{in}} = -m\mathbf{v} - m\mathbf{v} = -2m\mathbf{v} \quad .$$

Per il teorema dell'impulso

$$\mathbf{J} = \int \mathbf{F} dt = \mathbf{F}_m \Delta t = -2m\mathbf{v}$$

$$\mathbf{F}_m = -\frac{2m}{\Delta t} \mathbf{v} \quad .$$

La forza media, che agisce durante l'urto e causa la variazione del verso del moto, ha verso contrario a quello della velocità iniziale e concorde a quello della velocità finale.

Numericamente

$$J = \Delta p = 2 mv = 2 \cdot 5 \cdot 10^{-2} \cdot 2 = 0,2 \text{ Ns}$$

$$F_m = \frac{2 mv}{\Delta t} = \frac{0,2}{10^{-3}} = 200 \text{ N} \quad .$$

Secondo il principio di azione e reazione, il punto durante l'urto esercita una forza di 200 N sul muro. Questo però ha una massa così grande da non risentire in pratica di alcun effetto dinamico.

Visualizza Soluzione

2.4 Risultante delle forze. Equilibrio. Reazioni vincolari

Abbiamo già rilevato che la forza è una grandezza vettoriale e come tale l'abbiamo rappresentata nelle figure. Un'importante verifica di questa affermazione si ha quando su un punto materiale agiscono contemporaneamente più forze: si constata che il moto del punto ha luogo come se agisse una sola forza, la *risultante vettoriale delle forze* applicate al punto

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_n = \sum_i \mathbf{F}_i \quad ;$$

in effetti l'accelerazione del punto è pari alla somma vettoriale delle accelerazioni che il punto avrebbe se agisse ciascuna forza da sola:

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{R}}{m} = \sum_i \frac{\mathbf{F}_i}{m} = \sum_i \mathbf{a}_i \quad .$$

Questo fondamentale risultato sperimentale fa capire che in presenza di più forze ciascuna agisce indipendentemente dalle altre, comunicando sempre al punto l'accelerazione $\mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i / m$; si parla a tale proposito di *indipendenza delle azioni simultanee*. D'altra parte tutto ciò implica che dallo studio del moto di un punto materiale otteniamo informazioni solo sulla risultante delle forze agenti sul punto stesso, \mathbf{R} , e non sulle singole forze che concorrono a formare la forza risultante.

In particolare, affermare che la forza agente su un punto è nulla non significa necessariamente che sul punto non agiscono forze, ma spesso indica che la somma delle forze agenti su di esso, cioè la risultante, è nulla.

Se $\mathbf{R} = \mathbf{0}$ e il punto ha inizialmente velocità nulla, esso rimane in quiete: sono realizzate le condizioni di *equilibrio statico* del punto. Devono quindi essere nulle le componenti stesse della risultante ovvero, con riferimento ad un sistema di assi cartesiani,

$$\begin{aligned} \mathbf{R} = \sum_i \mathbf{F}_i = \mathbf{0} & \quad \Rightarrow \quad R_x = R_y = R_z = 0 \\ \Rightarrow \sum_i F_{ix} = 0 & \quad \sum_i F_{iy} = 0 \quad \sum_i F_{iz} = 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

essendo F_{ix}, F_{iy}, F_{iz} le componenti lungo gli assi della forza i-esima.

In figura 2.4 è mostrata la condizione di equilibrio statico con due forze, che devono essere necessariamente uguali ed opposte, e con tre forze, che devono essere complanari e disposte secondo i lati di un triangolo; ciascuna forza deve infatti essere opposta e, in modulo, eguale alla risultante delle altre due. Se le forze agenti sono in numero superiore a tre, esse devono poter essere disposte, in base alla regola di somma vettoriale, in modo tale da formare una poligonale chiusa.

Gli esempi mostrati, corrispondenti tutti a situazioni sperimentalmente

Risultante delle forze

Equilibrio statico

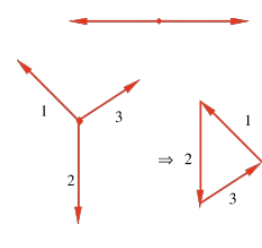


FIGURA 2.4

semplici da realizzare, confermano anche nel caso dell'equilibrio statico la natura vettoriale delle forze. In generale, dato un insieme di forze applicate ad un punto e aventi risultante \mathbf{R}' , l'equilibrio statico si ottiene applicando al punto una forza eguale ed opposta a \mathbf{R}' , così da realizzare appunto la condizione $\mathbf{R} = 0$.

Esempio 2.2

Un punto P è sottoposto ad una forza $F_1 = 34$ N lungo il verso negativo dell'asse y e ad una forza $F_2 = 25$ N che forma un angolo $\theta = 30^\circ$ con l'asse y (vedi figura 2.5). Calcolare modulo, direzione e verso della forza \mathbf{F}_3 che occorre applicare al punto P per mantenerlo in equilibrio statico.

Soluzione

In equilibrio deve valere la relazione

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 = 0 \quad ,$$

che equivale alle due equazioni

$$F_{2,x} + F_{3,x} = 0 \quad , \quad F_{1,y} + F_{2,y} + F_{3,y} = 0 \quad .$$

Infatti $F_{1,x} = 0$ e non ci sono componenti lungo l'asse z : \mathbf{F}_3 deve stare nel piano x, y individuato da \mathbf{F}_1 e \mathbf{F}_2 dato che sommata ad esse deve dare risultante nulla. Pertanto, detto ϕ l'angolo formato da \mathbf{F}_3 con l'asse y , si ha:

$$\begin{aligned} -F_2 \operatorname{sen}\theta + F_3 \operatorname{sen}\phi &= 0 \quad , \\ -F_1 + F_2 \operatorname{cos}\theta + F_3 \operatorname{cos}\phi &= 0 \quad . \end{aligned}$$

Risolvendo si trova:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\phi &= \frac{F_2 \operatorname{sen}\theta}{F_1 - F_2 \operatorname{cos}\theta} \quad , \quad \phi = 45.4^\circ \quad , \\ F_3 &= F_2 \frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\phi} = 17.6 \text{ N} \quad . \end{aligned}$$

La soluzione è mostrata in figura 2.6; qualitativamente era evidente che \mathbf{F}_3 doveva giacere nel primo quadrante.

Come verifica del risultato trovato per il modulo di \mathbf{F}_3 si provi a calcolare il modulo della risultante di \mathbf{F}_1 e \mathbf{F}_2 applicando il teorema del coseno (appendice C).

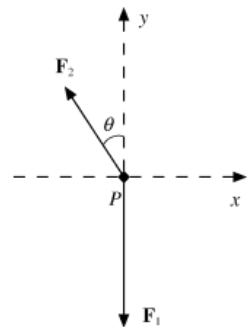


FIGURA 2.5
(Esempio 2.2)

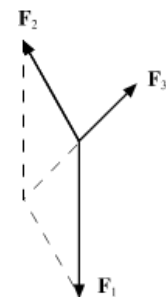
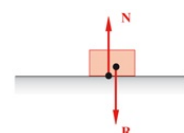


FIGURA 2.6
(Esempio 2.2)

Visualizza Soluzione

Reazioni vincolari

Se un corpo, soggetto all'azione di una forza o della risultante non nulla di un'insieme di forze, rimane fermo, dobbiamo dedurre da quanto detto sopra che



l'azione della forza provoca una reazione dell'ambiente circostante (*reazione vincolare*) che si esprime tramite una forza, eguale e contraria alla forza o alla risultante delle forze agenti, applicata al corpo stesso in modo tale che esso rimanga in quiete. Illustriamo questa circostanza con alcuni esempi.

Il caso del corpo posato su di un tavolo, con il piano di appoggio orizzontale, lo abbiamo già incontrato nel paragrafo 2.1, figura 2.1 caso b). Il corpo è soggetto all'azione di attrazione della terra, perpendicolarmente al piano; la reazione del corpo a tale forza è applicata alla terra e non ci interessa. Però, per effetto dell'attrazione terrestre, il corpo preme sulla superficie del tavolo deformandola. Il tavolo deve produrre, viste le condizioni di quiete del corpo, una forza uguale e contraria alla forza di attrazione terrestre che chiamiamo reazione vincolare \mathbf{N} . Se applichiamo ulteriori forze al corpo, normali al piano del tavolo, la reazione vincolare deve equilibrare la risultante \mathbf{R} di tali forze: $\mathbf{R} + \mathbf{N} = \mathbf{0}$.

Assumendo positivo il verso della forza verso l'alto, qualora per soddisfare la condizione di equilibrio \mathbf{N} risultasse negativa (cioè rivolta verso il basso) significherebbe che il tavolo per mantenere il corpo fermo dovrebbe esercitare una forza di attrazione sul corpo. Tale situazione si presenta quando altre forze applicate al corpo, con risultante diretta verso l'alto, hanno in modulo un valore superiore a quello della forza di attrazione terrestre. In queste condizioni il corpo non rimane appoggiato sul tavolo e non ha senso parlare di reazione vincolare del piano in quanto non esiste più una superficie di contatto tra corpo e piano di appoggio.

Un altro esempio di reazione vincolare è quello che si manifesta nella situazione fisica di un corpo appeso tramite un filo. Il corpo è in condizioni di equilibrio statico, soggetto all'attrazione terrestre e alla reazione del sistema filo-punto di aggancio (vedi più avanti paragrafo 2.14).

In generale la reazione vincolare non è determinabile a priori, utilizzando una data formula, ma deve essere calcolata caso per caso dall'esame delle condizioni fisiche.

Il concetto di reazione vincolare ossia, come detto, di reazioni dell'ambiente circostante (tavolo o sistema filo-punto di aggancio nei due esempi discussi) non è tipico soltanto dell'equilibrio statico, ma, come vedremo, si estende anche al caso di corpi in moto lungo una superficie. E se durante il moto risultasse che ad un certo istante la reazione vincolare si annulla per diventare poi una forza attrattiva, nel senso appena discusso, vorrebbe dire che in quell'istante avviene il distacco del corpo dalla superficie.

FIGURA 2.1 B

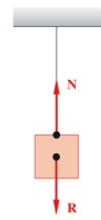


FIGURA 2.7

2.5 Classificazione delle forze

Se consideriamo le forze responsabili di gran parte dei fenomeni studiati nella fisica classica, o anche in altre discipline quali la biologia, la chimica, l'ingegneria, esse sono tutte riconducibili a poche interazioni fondamentali, l'*interazione gravitazionale* e l'*interazione elettromagnetica*.

A livello nucleare e subnucleare si presentano altri due tipi di interazione, l'*interazione forte* e l'*interazione debole*, ma tali argomenti esulano dai contenuti di questo testo.

La scoperta che l'apparente grande varietà di tipi di forze è il manifestarsi, in fenomeni anche molto differenti, di poche interazioni fondamentali assume una grande rilevanza concettuale ed è il risultato di una lunga indagine sperimentale e teorica rivolta all'unificazione delle interazioni. Già nel 1800 si arrivò a dimostrare che i fenomeni elettrici e magnetici, di cui ci occuperemo nel secondo volume, potevano essere unificati in un'unica teoria, che permetteva anche la spiegazione della propagazione della luce. Più recentemente si è compreso che è possibile operare un'ulteriore unificazione, a livello microscopico, tra interazione elettromagnetica e interazione debole (interazione elettrodebole).

Dell'altra *interazione fondamentale classica*, quella *gravitazionale*, daremo una descrizione in seguito, nel capitolo 5.

Il nostro studio però è ora rivolto ad individuare il tipo di moto di un punto o più in generale di un sistema di punti in interazione tra loro e col resto del mondo. L'interazione sarà esprimibile tramite una o più forze, la conoscenza della cui origine non rientra nei nostri scopi e non influenza per ora il nostro studio. Sarà invece essenziale poter esprimere queste forze con opportune espressioni analitiche da introdurre nella (2.1).

2.6 Azione dinamica delle forze

Nel capitolo 1, dedicato alla cinematica del punto, abbiamo esaminato alcuni tipi di moto. Vediamo ora di individuare quali forze possono produrre tali moti.

Nel caso del moto rettilineo uniforme ($\mathbf{v} = \text{costante}$, $\mathbf{a} = \mathbf{0}$) si ha ovviamente $\mathbf{F} = \mathbf{0}$; ripetiamo che questa situazione si può ottenere anche se agiscono varie forze purché la loro risultante sia nulla.

Se il moto è uniformemente accelerato ($\mathbf{a} = \text{costante}$) la forza agente è vettorialmente costante (quindi in direzione, verso e modulo). Più in generale, se agisce una forza $\mathbf{F} = \text{costante}$, la componente del moto nella direzione parallela alla forza è uniformemente accelerata con $a = F/m$. Lungo le altre due direzioni (ortogonali tra loro e alla forza) non c'è moto se le relative velocità iniziali sono nulle oppure si ha un moto rettilineo uniforme se le velocità iniziali lungo tali direzioni sono diverse da zero. Il moto risultante viene ottenuto componendo i moti sui tre assi ortogonali; un esempio particolare è il moto parabolico del paragrafo 1.12.

Quando \mathbf{F} è variabile si ha un moto vario. Come abbiamo visto nel caso specifico del moto piano curvilineo (paragrafo 1.10), l'accelerazione presenta due componenti \mathbf{a}_T e \mathbf{a}_N . Pertanto da (1.22)

$$\mathbf{F} = m \mathbf{a}_T + m \mathbf{a}_N = m \frac{dv}{dt} \mathbf{u}_T + m \frac{v^2}{R} \mathbf{u}_N .$$

La risultante delle forze agenti sul punto materiale deve avere una componente ortogonale alla traiettoria, \mathbf{F}_N , per provocare la variazione di direzione della velocità. La componente tangenziale \mathbf{F}_T della forza determina invece la variazione del modulo della velocità.

\mathbf{F}_N si chiama *forza centripeta* ed è sempre diversa da zero in un moto curvilineo. Si faccia attenzione al fatto che la *forza centripeta non è un tipo particolare di forza*, come lo sono la forza peso, la forza elastica, le forze di attrito (che studieremo nei prossimi paragrafi), ma è *semplicemente il nome che si dà alla componente ortogonale alla traiettoria della risultante delle varie forze agenti*.

Forza centripeta

Tratteremo alcuni esempi di forze centripete nel successivo paragrafo 2.12. Vediamo adesso qualche caso dinamico in presenza di forze costanti.

Esempio 2.3

Un punto di massa $m = 0.8$ kg, inizialmente in quiete, è sottoposto all'azione di una forza costante \mathbf{F}_1 , avente la direzione e il verso dell'asse x e modulo $F_1 = 16$ N. Dopo un tempo $t_1 = 3$ s cessa l'azione di \mathbf{F}_1 e si osserva che il punto rallenta uniformemente, fermandosi all'istante $t_2 = 9$ s. Calcolare la forza \mathbf{F}_2 parallela all'asse x che agisce durante la frenata e lo spazio totale percorso.

Soluzione

Sotto l'azione di \mathbf{F}_1 il punto accelera con $a_1 = F_1/m = 20 \text{ m/s}^2$ e all'istante t_1 ha velocità $v_1 = a_1 t_1 = 60 \text{ m/s}$ e ha percorso lo spazio $x_1 = \frac{1}{2} a_1 t_1^2 = 90 \text{ m}$. Nella fase di decelerazione, alla fine della quale $v = 0$, si ha

$$v = v_1 - a_2 (t - t_1) \Rightarrow a_2 = \frac{v_1}{t_2 - t_1} = 10 \text{ m/s}^2 \quad ,$$

e quindi la forza frenante vale $F_2 = m a_2 = 8 \text{ N}$, discorde all'asse x . Lo spazio percorso durante la frenata è

$$x_2 = v_1 (t_2 - t_1) - \frac{1}{2} a_2 (t_2 - t_1)^2 = 180 \text{ m}$$

o, alternativamente, da $v^2 = v_1^2 - 2 a_2 x$ con $v = 0$,

$$x_2 = \frac{v_1^2}{2 a_2} = 180 \text{ m} \quad .$$

In totale $x_1 + x_2 = 270 \text{ m}$.

Per il calcolo di F_2 si può anche usare il teorema dell'impulso, tenendo conto che le forze sono costanti. In modulo

$$F_1 t_1 = m v_1 \quad , \quad F_2 (t_2 - t_1) = m v_1 = F_1 t_1 \quad ,$$

$$F_2 = \frac{F_1 t_1}{t_2 - t_1} = 8 \text{ N} \quad .$$

Ovvero: l'impulso \mathbf{J}_1 di \mathbf{F}_1 porta il punto ad assumere la quantità di moto $m \mathbf{v}_1$ e l'impulso \mathbf{J}_2 di \mathbf{F}_2 riporta la quantità di moto a zero, per cui in modulo $J_1 = J_2$.

Si noti come nella fase iniziale abbiamo dedotto l'accelerazione dalla forza nota e invece nella fase finale dall'accelerazione misurata abbiamo calcolato la forza frenante; in ogni caso abbiamo utilizzato le relazioni cinematiche sviluppate nel primo capitolo. Si rivedano a questo proposito gli esempi del paragrafo 1.4, cercando di capire quali forze debbano agire nelle varie situazioni.

Visualizza Soluzione

Esempio 2.4

Un punto materiale di massa $m = 2 \text{ kg}$ parte dall'origine di un sistema di riferimento x, y con velocità $v_0 = 5 \text{ m/s}$ diretta lungo il verso positivo dell'asse y ; esso è sottoposto soltanto alla forza costante \mathbf{F} , parallela e concorde all'asse x e di modulo $F = 4 \text{ N}$. Determinare la traiettoria del punto.

Soluzione

Lungo x il moto è uniformemente accelerato, con $a = F/m$, lungo y è

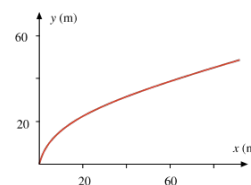


FIGURA 2.8
(Esempio 2.4)

uniforme ($F_y = 0$). Pertanto

$$x = \frac{1}{2} \frac{F}{m} t^2 \quad , \quad y = v_0 t \quad ,$$
$$y = \sqrt{\frac{2 m v_0^2}{F} x} = 5 \sqrt{x} \quad , \quad x = 4 \cdot 10^{-2} y^2 \text{ (in metri) .}$$

Asintoticamente la traiettoria tende a diventare parallela all'asse x (c'è qualche somiglianza con l'esempio 1.12?).

Visualizza Soluzione

2.7 Forza peso

Iniziamo l'esame dei tipi più comuni di forze che incontreremo nell'ambito del corso occupandoci della *forza peso*.

Sperimentalmente si osserva che in uno stesso luogo tutti i corpi, qualunque sia la massa inerziale, assumono se lasciati liberi la stessa *accelerazione*, detta di *gravità*, diretta verticalmente verso il suolo il cui modulo, che varia leggermente da posto a posto sulla terra, vale in media $g = 9.8 \text{ ms}^{-2}$. Tale accelerazione è conseguenza della forza di attrazione terrestre, cioè dell'interazione gravitazionale tra la terra e il corpo.

Accelerazione di gravità

Dalla (2.1) se agisce solo la forza peso \mathbf{P} abbiamo $\mathbf{P} = m \mathbf{a} = m \mathbf{g}$ visto che $\mathbf{a} = \mathbf{g}$. Pertanto *la forza peso risulta proporzionale alla massa* e si scrive sempre

$$\mathbf{P} = m \mathbf{g} .$$

Forza peso

Si tratta di una *forza costante* e in assenza di altre forze il moto ha una componente uniformemente accelerata nella direzione parallela a \mathbf{g} (vedi paragrafi 1.5 e 1.12).

Se invece agiscono anche altre forze in generale si ha $\mathbf{a} \neq \mathbf{g}$. In particolare un corpo che cade nell'aria presenta un'accelerazione minore di quella di gravità a causa dell'attrito con l'aria (si veda il paragrafo 2.10).

La proporzionalità tra forza peso e massa suggerisce che il confronto tra due masse possa essere effettuato confrontando le rispettive forze peso; è su questa idea che si basa il metodo di misura delle masse tramite la bilancia. Tale fatto, di grande importanza pratica, non deve però portare a confondere i due concetti di massa e di forza peso. La massa di un corpo ha il significato dinamico che si deduce da (2.1) e che è indipendente dalla particolare forza agente; inoltre vedremo nel capitolo 4 come si possano confrontare due masse anche in assenza di qualsiasi forza. La forza peso risulta dall'interazione di un corpo con la terra; sulla superficie di un altro pianeta essa sarebbe, a parità di massa, diversa a causa del diverso valore di g (un esperimento diretto è stato fatto sulla luna); non è cioè una caratteristica del corpo come lo è la massa.

La sensazione di peso

Un corpo di massa m , poggiato su un pavimento e in equilibrio statico, esercita una forza sul pavimento e risente di una reazione \mathbf{N} che in modulo vale mg (vedi paragrafo 2.4). È questa reazione applicata per esempio al nostro corpo che ci dà la sensazione di peso.

Consideriamo ora il corpo posato su una piattaforma che può muoversi verticalmente con una accelerazione \mathbf{a} . Finché il corpo resta sulla piattaforma la sua accelerazione è \mathbf{a} e l'equazione (2.1) si scrive

$$\mathbf{N} + \mathbf{P} = m\mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{N} + m\mathbf{g} = m\mathbf{a} ,$$

in quanto al corpo sono applicate sia la forza peso che la reazione dovuta al contatto con la piattaforma. Tale reazione è incognita; solo se fosse $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ sarebbe in modulo $N = P = mg$, come detto sopra (risulta peraltro che la reazione vincolare è eguale alla forza peso anche se la piattaforma si muove con velocità costante).

Risolvendo troviamo

$$\mathbf{N} = m(\mathbf{a} - \mathbf{g})$$

e abbiamo quattro casi da esaminare; come asse di riferimento prendiamo un asse z verticale orientato verso l'alto, per cui $\mathbf{g} = -g\mathbf{u}_z$.

1) \mathbf{a} discorde a \mathbf{g} , piattaforma che accelera verso l'alto (o perché sale accelerando o perché scende frenando):

$$\mathbf{N} = m[a\mathbf{u}_z - (-g\mathbf{u}_z)] = m(a + g)\mathbf{u}_z \Rightarrow N > mg \quad ;$$

si ha una sensazione di aumento di peso, una bilancia pesapersona darebbe una lettura maggiore di quando la piattaforma è ferma.

2) \mathbf{a} concorde a \mathbf{g} , ma minore in modulo:

$$\mathbf{N} = m[-a\mathbf{u}_z - (-g\mathbf{u}_z)] = m(g - a)\mathbf{u}_z \Rightarrow N < mg \quad ;$$

la sensazione è di diminuzione di peso, la bilancia dà una lettura minore di quando la piattaforma è ferma.

3) $\mathbf{a} = \mathbf{g} \Rightarrow \mathbf{N} = \mathbf{0}$: non c'è reazione e non c'è sensazione di peso (ciò si realizzerebbe con la piattaforma in caduta libera).

4) \mathbf{a} concorde a \mathbf{g} , ma maggiore in modulo: si ha il distacco del corpo dalla piattaforma; infatti la soluzione darebbe \mathbf{N} discorde all'asse z , la reazione dovrebbe attirare il corpo verso la piattaforma, il che è privo di senso.

Si noti che i casi 2, 3, 4 non richiedono necessariamente un moto della piattaforma verso il basso: questa potrebbe salire, ma frenando.

Nota. Il chilogrammo-forza

Il valore convenzionale dell'accelerazione di gravità sulla superficie terrestre è $g = 9.80665 \text{ ms}^{-2}$, per cui la forza peso applicata ad un corpo di massa 1 kg è 9.80665 N. In alcuni sistemi di unità di misura questo valore è stato assunto come unità di misura delle forze e chiamato chilogrammo-forza (kgf) o chilogrammo peso. Quindi:

$$1 \text{ kgf} = 9.80665 \text{ N} \quad , \quad 1 \text{ N} = 0.101972 \text{ kgf} \quad .$$

Numericamente, la forza peso di una massa di x kg è x kgf.

Abbiamo citato il chilogrammo-forza perché si sappia come convertire in newton il valore di forze espresse in tale unità; l'uso del kgf è però vietato per legge, così come quello delle altre unità non appartenenti al sistema internazionale, in base a una direttiva della Comunità Europea del 1971.

2.8 Forza di attrito radente

Applichiamo ad un corpo appoggiato su un tavolo, con il piano di appoggio orizzontale, una forza \mathbf{F} tale da presentare una componente \mathbf{F}_1 normale al piano di appoggio e una \mathbf{F}_2 parallela al piano stesso. Si osserva sperimentalmente che il corpo non entra in movimento, per effetto della componente \mathbf{F}_2 della forza applicata, fino a che il modulo di \mathbf{F}_2 non superi il valore $\mu_s N$, dove μ_s è il *coefficiente di attrito statico* ed N , come già indicato nel paragrafo 2.4, è il modulo della componente normale al piano di appoggio della reazione vincolare. La condizione perché il corpo possa essere messo in movimento per effetto della forza applicata è quindi data da $F_2 > \mu_s N$.

Supponiamo che la forza \mathbf{F} formi un angolo θ con il piano di appoggio (direzione orizzontale: si veda la figura 2.9, in cui \mathbf{P} è la forza peso del corpo). Pertanto $F_1 = F \sin\theta$, $F_2 = F \cos\theta$. La reazione \mathbf{R} del piano, in condizioni di equilibrio statico del corpo, è tale che

$$\mathbf{R} + \mathbf{P} + \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad (2.5)$$

Proiettiamo la (2.5) secondo le due direzioni ortogonali tra loro, quella normale al piano di appoggio assunta positiva verso l'alto e quella parallela al piano stesso (positiva nel verso di \mathbf{F}_2); chiamiamo N e F_{as} le corrispondenti componenti di \mathbf{R} . La (2.5) fornisce

$$\begin{aligned} N - P + F_1 &= 0 \Rightarrow N = P - F_1 = P - F \sin\theta \quad , \\ F_{as} + F_2 &= 0 \Rightarrow F_{as} = -F_2 = -F \cos\theta \quad . \end{aligned}$$

La condizione di appoggio del corpo è data da $N > 0$ cioè $P > F \sin\theta$; se questa è soddisfatta (cioè la forza non solleva il corpo) la componente parallela al piano di appoggio della reazione vincolare controbilancia, quando il corpo è in quiete, la componente orizzontale della forza applicata. Dovendo essere, come detto sopra, $F_2 \leq \mu_s N$, la condizione di quiete si scrive

$$F \cos\theta \leq \mu_s (P - F \sin\theta) \Rightarrow F \leq \frac{\mu_s mg}{\cos\theta + \mu_s \sin\theta} \quad .$$

In particolare, se $\theta = 0$ $F_1 = 0$, $F_2 = F$ e le componenti di \mathbf{R} sono:

$$N = P = mg \quad , \quad F_{as} = -F_2 = -F \quad .$$

La condizione di quiete si scrive

$$F \leq \mu_s N = \mu_s mg \quad .$$

Riassumendo, a causa della forza che preme il corpo contro il piano, si sviluppa una forza di attrito statico F_{as} che è capace di equilibrare la forza

Coefficiente di attrito statico

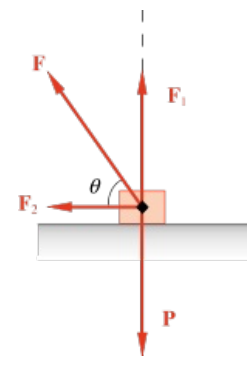


FIGURA 2.9

orizzontale applicata F_2 ; F_{as} non ha un valore prefissato, ma è eguale a F_2 per valori di questa compresi tra zero e $\mu_s N$.

Quando F_2 supera $\mu_s N$ il corpo entra in movimento lungo il piano e si osserva che si oppone al moto la *forza di attrito radente dinamico* $F_{ad} = \mu_d N$ dove μ_d rappresenta il *coefficiente di attrito dinamico*; risulta sempre $\mu_d < \mu_s$.

L'equazione del moto è pertanto

$$F \cos \theta - \mu_d N = ma$$

La componente normale della reazione N è sempre data da $P - F \sin \theta$ in quanto ortogonalmente al piano non c'è moto, non c'è accelerazione e la risultante delle forze è nulla.

La forza di attrito dinamico non dipende dalla velocità del corpo rispetto al piano di appoggio ed ha verso contrario alla direzione del moto e quindi al versore della velocità, \mathbf{u}_v . Vettorialmente

$$\mathbf{F}_{ad} = -\mu_d N \mathbf{u}_v \quad (2.6)$$

Le forze di attrito radente hanno origine dalle *forze di coesione* tra due materiali; il valore del coefficiente di attrito dipende dallo stato delle superficie a contatto e dalla loro composizione chimica. Una eccessiva levigatura fa aumentare la coesione e quindi l'attrito; se le superficie vengono invece bagnate come si realizza nel caso di organi meccanici in movimento mediante l'utilizzazione di lubrificanti, la forza di attrito diminuisce notevolmente. Un altro metodo per ridurre l'attrito radente consiste nel creare un sottile strato d'aria tra superficie che devono scorrere l'una rispetto all'altra.

Si consideri però che le forze di attrito radente sono sempre presenti, per quanto si possa tentare di ridurle. Quindi se vogliamo realizzare un moto uniforme dobbiamo applicare una forza eguale e contraria alla forza di attrito in modo che la risultante sia nulla. È questa la condizione pratica che deve essere realizzata in ogni moto uniforme al fine di ottenere una situazione di equilibrio dinamico. Soltanto per esaminare casi limite semplificati porremo eguale a zero la forza di attrito; diremo allora che la superficie di scorrimento è *liscia*.

Esempio 2.5

Un corpo di massa $m = 2$ kg è appoggiato su di un piano orizzontale. I coefficienti di attrito statico e dinamico relativi alle due superfici di contatto valgono rispettivamente 0.5 e 0.3. Si applica al corpo una forza \mathbf{F} di modulo pari a 20 N. Determinare le componenti della reazione vincolare e il modulo della stessa nei due casi mostrati nella figura 2.10, con $\theta = 60^\circ$.

Soluzione

Nel caso a) la componente della reazione vincolare normale al piano vale in modulo $N = m g + F \sin 60^\circ = 36.9$ N per cui $\mu_s N = 18.5$ N; la componente parallela al piano della forza applicata è $F \cos 60^\circ = 10$ N. Il corpo pertanto

Coefficiente di attrito
dinamico

Forze di coesione

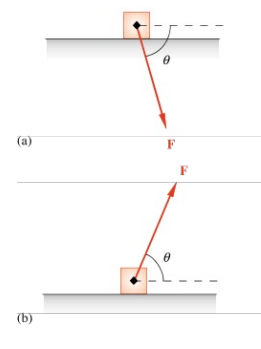


FIGURA 2.10

(Esempio 2.5)

rimane in quiete e la componente della reazione vincolare parallela al piano vale in modulo 10 N; abbiamo

$$R = \sqrt{36.9^2 + 10^2} = 38.2 \text{ N} .$$

Nel caso b) $N = m g - F \sin 60^\circ = 2.3 \text{ N}$ (c'è appoggio), valore minore del precedente in quanto ora la componente normale di \mathbf{F} è opposta al peso e si ha un alleggerimento del peso del corpo sul piano. Il corpo entra in moto perché $\mu_s N = 1.2 \text{ N}$ è minore di $F \cos 60^\circ = 10 \text{ N}$; l'accelerazione vale

$$a = \frac{F \cos 60^\circ - \mu_d N}{m} = 4.7 \text{ ms}^{-2}$$

con $\mu_d N = 0.7 \text{ N}$. Quindi il modulo della reazione vincolare è

$$R = \sqrt{2.3^2 + 0.7^2} = 2.4 \text{ N}.$$

Questo esempio insegna che se vogliamo spostare una cassa non conviene spingerla

Visualizza Soluzione

Esempio 2.6

Una forza \mathbf{F} è applicata ad un corpo di massa $m = 3 \text{ kg}$, come mostrato nella figura 2.9; in presenza di un coefficiente di attrito dinamico $\mu_d = 0.4$ essa deve imprimere al corpo l'accelerazione $a = 1.2 \text{ m/s}^2$. Determinare qual è l'angolo θ per cui \mathbf{F} è minima in modulo.

Soluzione

L'equazione del moto è

$$F \cos \theta - \mu_d (mg - F \sin \theta) = ma$$

$$\Rightarrow F = \frac{ma + \mu_d mg}{\cos \theta + \mu_d \sin \theta} = \frac{15.4}{\cos \theta + \mu_d \sin \theta} \text{ N} .$$

Il modulo di \mathbf{F} è funzione di θ ; per verificare l'eventuale esistenza di un minimo si calcola $dF/d\theta$ e la si pone eguale a zero. Si trova la condizione

$$\text{tg} \theta = \mu_d \Rightarrow \theta = 21.8^\circ .$$

Il valore della forza per $\theta = \arctg \mu$ è

$$F_{\min} = \frac{ma + \mu_d mg}{1 + \mu_d^2} = \frac{15.4}{1.08} = 14.3 \text{ N} ;$$

si verifica direttamente che si tratta di un minimo, senza dover eseguire il calcolo della derivata seconda.

Abbiamo così completato l'esercizio precedente. Non solo è conveniente

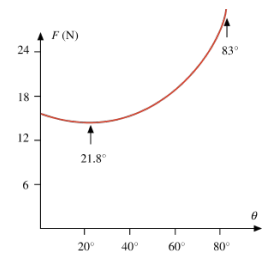


FIGURA 2.11
(Esempio 2.6)

che la forza tenda a sollevare il corpo, ma esiste un angolo particolare per il quale la forza è minima. Il valore minimo non si ha per $\theta = 0$: infatti, se è vero che aumentando l'angolo diminuisce la componente della forza parallela al piano, è anche vero che per $\theta \neq 0$ diminuisce la componente della reazione normale e quindi diminuisce la forza di attrito dinamico. I due effetti, uno tendente a far diminuire l'accelerazione e l'altro tendente a farla aumentare, si compensano e la condizione ottimale si raggiunge quando $\operatorname{tg}\theta = \mu_d$.

Al crescere dell'angolo θ bisogna però verificare che la forza non sollevi il corpo, facendo venir meno il contatto; bisogna verificare cioè se avviene, per $\theta < 90^\circ$, che

$$N = mg - F \operatorname{sen}\theta = 0$$

$$\Rightarrow \frac{ma + \mu_d mg}{\cos\theta + \mu_d \operatorname{sen}\theta} \operatorname{sen}\theta = mg \quad .$$

La soluzione è $\operatorname{tg}\theta = g/a$, nel nostro caso $\theta = 83.0^\circ$ (a tale angolo $F = 29.7$ N). Il valore di F , tale da dare alla massa m la voluta accelerazione a , è mostrato in funzione di θ nella figura 2.11. Si verifichi che se si mantiene costante il valore della forza al variare dell'angolo θ l'accelerazione del corpo è massima quando $\operatorname{tg}\theta = \mu_d$.

Visualizza Soluzione

Esempio 2.7

Due blocchetti, di massa $m_1 = 3$ kg e $m_2 = 2$ kg, si muovono su di un piano orizzontale liscio sotto l'azione della forza \mathbf{F} costante, di modulo $F = 12$ N, applicata come in figura 2.12. Calcolare le forze F_1 e F_2 che agiscono sui blocchetti. Supponiamo invece che ci sia attrito, con coefficienti dinamici $\mu_1 = 0.3$ e μ_2 rispettivamente per il blocchetto m_1 e m_2 , e che, a parità di forza applicata, il moto sia uniforme. Calcolare il valore di μ_2 .

Soluzione

Sotto l'azione di \mathbf{F} i due blocchetti si muovono come un unico corpo e l'accelerazione di ciascuno di essi è

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2} = 2.4 \text{ m/s}^2 \quad ;$$

Allora la forza applicata al blocchetto m_2 deve valere

$$F_2 = m_2 a = 4.8 \text{ N} \quad ,$$

parallela e concorde a \mathbf{F} , come lo è \mathbf{a} . Questa forza è dovuta al contatto con

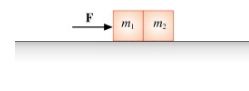


FIGURA 2.12
(Esempio 2.7)

il corpo m_1 che spinge m_2 : si noti pertanto che a m_2 non è applicata \mathbf{F} , ma una forza minore in modulo. Il corpo m_2 reagisce applicando a m_1 la forza $-\mathbf{F}_2$, per cui la seconda legge di Newton per m_1 è

$$F - F_2 = m_1 a$$

e si verifica subito che questa equazione è soddisfatta dal valore trovato prima per F_2 . La forza applicata a m_1 è quindi

$$F_1 = F - F_2 = 7.2 \text{ N}$$

Anche \mathbf{F}_1 è parallela e concorde a \mathbf{F} ed è minore in modulo; a differenza di m_2 , è vero che a m_1 è applicata \mathbf{F} , però non si tratta dell'unica forza, c'è anche $-\mathbf{F}_2$. Quando c'è attrito si ha, tenuto conto del dato che il moto risulta uniforme ($a = 0$):

$$\begin{aligned} \text{per } m_1 \quad F - F_2 - \mu_1 m_1 g &= m_1 a = 0 \quad , \\ \text{per } m_2 \quad F_2 - \mu_2 m_2 g &= m_2 a = 0 \quad . \end{aligned}$$

La risultante delle forze applicate a ciascun punto deve essere cioè nulla. Abbiamo scritto esplicitamente le equazioni lungo l'asse orizzontale, dando per scontato che lungo l'asse verticale si ha $N_1 - m_1 g = 0$, $N_2 - m_2 g = 0$.

Si somma membro a membro e si ottiene:

$$\begin{aligned} F - \mu_1 m_1 g - \mu_2 m_2 g &= 0 \\ \Rightarrow \mu_2 &= \frac{F - \mu_1 m_1 g}{m_2 g} = 0.16 \quad . \end{aligned}$$

Possiamo calcolare anche $F_2 = \mu_2 m_2 g = 3.1 \text{ N}$, diversa che nel caso precedente.

Visualizza Soluzione

2.9 Piano inclinato

Consideriamo un corpo, assimilabile ad un punto materiale di massa m , che possa muoversi sotto l'azione del suo peso e di eventuali altre forze, compresa la forza di attrito radente, su una superficie piana inclinata di un angolo θ rispetto ad un piano orizzontale.

Se agisce solo la forza peso \mathbf{P} , in assenza perciò di attrito tra corpo e piano inclinato, si ha secondo la legge di Newton

$$\mathbf{P} + \mathbf{R} = m \mathbf{a} \quad ,$$

dove \mathbf{R} è la reazione vincolare del piano di appoggio che ha un'unica componente normale al piano stesso (*vincolo liscio*). Scomponendo lungo le direzioni ortogonale e parallela al piano inclinato si ottiene

$$mg \cos\theta - N = 0 \quad , \quad mg \sin\theta = m a \quad ,$$

dato che il corpo è vincolato a muoversi lungo il piano inclinato. Dalla prima condizione si calcola il valore della reazione vincolare, $N = mg \cos\theta$, dalla seconda il valore dell'accelerazione, $a = g \sin\theta < g$: il corpo scende con moto uniformemente accelerato e l'accelerazione è minore di quella di gravità.

Se esiste un attrito radente tra il piano inclinato e il corpo, il moto lungo il piano non può iniziare se $mg \sin\theta \leq \mu_s N = \mu_s mg \cos\theta$; la componente normale di \mathbf{R} vale ancora $N = mg \cos\theta$, però c'è ora anche una componente parallela al piano inclinato che vale, in equilibrio statico, $-mg \sin\theta$. Pertanto la condizione per l'equilibrio statico è $\tan\theta \leq \mu_s$.

Per avere moto occorre aumentare l'angolo di inclinazione θ in modo da non soddisfare la condizione suddetta; vale allora l'equazione

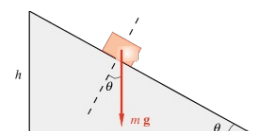
$$mg \sin\theta - \mu_d mg \cos\theta = ma$$

$$a = (\sin\theta - \mu_d \cos\theta) g .$$

Dovendo essere il termine tra parentesi positivo, si ha per il coefficiente di attrito dinamico $\mu_d < \tan\theta$; in particolare, se $\mu_d = \tan\theta$ $a = 0$: il moto è uniforme e si tratta di un esempio di equilibrio dinamico (vedi paragrafo 2.12).

Riassumendo, se il corpo è fermo sul piano inclinato esso resta fermo per tutti gli angoli di inclinazione compresi tra zero e θ_s tale che $\tan\theta_s = \mu_s$; per $\theta > \theta_s$ il corpo non può restare fermo e scende lungo il piano inclinato. Però, una volta che il corpo si è messo in movimento, poiché la forza di coesione in queste condizioni è minore di quella in quiete ($\mu_d < \mu_s$), si può avere moto anche per angoli minori di θ_s precisamente compresi tra θ_s e $\theta_d < \theta_s$ tale che $\tan\theta_d = \mu_d$.

Se invece il corpo all'istante iniziale sta scendendo lungo il piano con velocità v_0 , esso si ferma se $mg \sin\theta < \mu_d mg \cos\theta$, cioè se $\tan\theta < \mu_d$, si muove di moto uniformemente accelerato se $\tan\theta > \mu_d$ e prosegue con velocità v_0 se $\tan\theta = \mu_d$.



L'unica differenza rispetto alla partenza da fermo è che si può avere moto (uniformemente decelerato) anche se $\operatorname{tg}\theta < \mu_d$ proprio perché c'è una velocità iniziale (si veda l'esempio 2.8).

La misura degli angoli θ_s , a cui un corpo comincia a scivolare, e θ_d , per cui il moto è uniforme, è utile per determinare i coefficienti μ_s e μ_d .

Storicamente l'utilizzazione del piano inclinato è stata di grande aiuto per lo studio del moto uniformemente accelerato. La possibilità di sperimentare con accelerazioni inferiori a g e regolabili a piacere regolando θ , ha consentito di allungare la durata del moto e quindi di studiarne le caratteristiche in modo significativo pur disponendo di strumentazione imprecisa.

Esempio 2.8

Calcolare, per un piano inclinato di altezza h e angolo θ (figura 2.13), la velocità con cui arriva alla base un punto lanciato dal vertice con velocità iniziale v_0 . Si consideri il caso senza attrito e con attrito (coefficiente dinamico μ_d).

Soluzione

Nel caso di vincolo liscio l'accelerazione è $a = g \operatorname{sen}\theta$; per il calcolo della velocità utilizziamo (1.10):

$$v^2 = v_0^2 + 2 g \operatorname{sen}\theta d = v_0^2 + 2 gh \quad ;$$

d è la lunghezza del piano inclinato e si ha appunto $d \operatorname{sen}\theta = h$. Troviamo che la velocità finale non dipende dall'angolo di inclinazione: essa è la stessa che si avrebbe per la caduta verticale (paragrafo 1.5). In presenza di attrito l'accelerazione è $a = g \operatorname{sen}\theta - \mu_d g \operatorname{cos}\theta$ per cui

$$v^2 = v_0^2 + 2 g (\operatorname{sen}\theta - \mu_d \operatorname{cos}\theta) d \quad ;$$

$d \operatorname{sen}\theta$ vale h ed è costante, invece $d \operatorname{cos}\theta$ è la lunghezza della base e varia con θ , a parità di h . Pertanto la velocità finale dipende dall'angolo di inclinazione e precisamente diminuisce al diminuire di questo, cioè al crescere di d . Riprendendo la discussione svolta prima, vediamo che possiamo distinguere tre casi:

1. v è maggiore di v_0 (moto accelerato), quando $\operatorname{sen}\theta - \mu_d \operatorname{cos}\theta > 0$, cioè $\operatorname{tg}\theta > \mu_d$.
2. v è eguale a v_0 (moto uniforme) se $\operatorname{tg}\theta = \mu_d$.
3. v è minore di v_0 (moto decelerato) se $\operatorname{tg}\theta < \mu_d$. In questo caso il punto alla fine si ferma e, in effetti, potrebbe anche non arrivare fino in fondo. Fissato h , ciò dipende dai valori di v_0 , θ e μ_d . Indicando con x la generica distanza percorsa lungo il piano che consideriamo indefinito, scriviamo

$$v^2(x) = v_0^2 + 2 g (\operatorname{sen}\theta - \mu_d \operatorname{cos}\theta) x$$

e imponiamo $v(x) = 0$. Troviamo così il valore della distanza alla fine della quale il punto si ferma e

dal confronto con $d = h/\text{sen}\theta$ capiamo se il punto arriva in fondo o se si ferma prima.

Visualizza Soluzione

Esempio 2.9

Un punto materiale viene lanciato, con velocità iniziale v_0 nel punto A , lungo un piano inclinato ($\theta = 40^\circ$). Il coefficiente di attrito dinamico è $\mu_d = 0.4$. In B il punto si distacca dal piano e, nel vuoto, arriva in C , che è alla stessa quota di B . Si sa che $AB = BC = d = 1.43$ m. Calcolare il valore di v_0 .

Soluzione

Nella salita sia la forza peso che la forza di attrito si oppongono al moto e questo risulta uniformemente decelerato. La velocità in B è

$$v^2 = v_0^2 - 2 d g (\text{sen}\theta + \mu_d \cos\theta) \quad .$$

La traiettoria da B a C è parabolica e la gittata d è legata alla velocità in B e all'angolo θ dalla relazione del paragrafo 1.12:

$$d = \frac{2 v^2 \text{sen}\theta \cos\theta}{g} \quad .$$

Si ricava v^2 da questa (il valore di v è 3.77 m/s) e si sostituisce nella prima equazione ottenendo

$$v_0^2 = d g \left[\frac{1}{2 \text{sen}\theta \cos\theta} + 2 (\text{sen}\theta + \mu_d \cos\theta) \right] = 40.83 \text{ m}^2/\text{s}^2 \quad , \quad v_0 = 6.39 \text{ m/s} \quad .$$

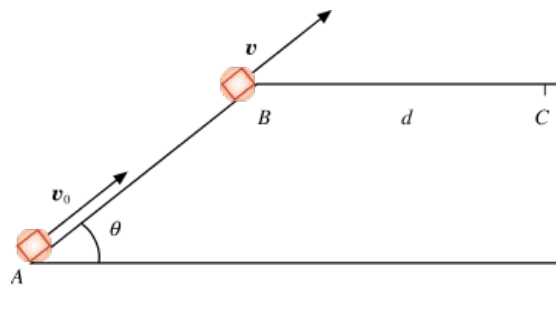


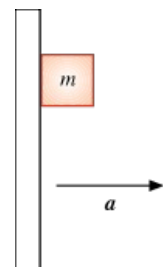
FIGURA 2.14

Visualizza Soluzione

Esempio 2.10

Un blocco di massa m è fermo rispetto ad una parete verticale che avanza con accelerazione $a = 11.4 \text{ m/s}^2$. Calcolare il coefficiente di attrito tra blocco e parete. Come cambia la risposta se invece il blocco scende lungo la parete con moto uniforme?

Soluzione



La parete spinge il blocco che quindi ha anch'esso accelerazione \mathbf{a} : la parete cioè esercita sul blocco la forza $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ (e il blocco reagisce applicando alla parete la forza $-\mathbf{F}$). In questo caso F ha il ruolo di componente normale della reazione vincolare. Se il blocco non si muove rispetto alla parete, vuol dire che la forza peso è equilibrata dalla forza di attrito statico:

$$mg = \mu_s F = \mu_s ma \Rightarrow \mu_s = \frac{g}{a} = 0.86 \quad .$$

Se invece il corpo scivola con moto uniforme lungo l'asse verticale scriviamo

$$mg - \mu_d ma = 0 \Rightarrow \mu_d = \frac{g}{a} = 0.86 \quad .$$

Tra i due risultati non c'è contraddizione, in quanto per una data coppia parete-corpo può verificarsi o la prima situazione (e allora $\mu_d < 0.86$) oppure la seconda (e allora $\mu_s > 0.86$), ma non entrambe.

Visualizza Soluzione

2.10 Forza elastica

Si definisce *forza elastica* (unidimensionale) una forza di direzione costante, con verso rivolto sempre ad un punto O , chiamato centro, e con modulo proporzionale alla distanza da O . Se assumiamo come asse x la direzione della forza e come origine il centro, possiamo scrivere

$$\mathbf{F} = -k x \mathbf{u}_x ,$$

dove k è una costante positiva, detta *costante elastica*, e \mathbf{u}_x è il versore dell'asse x .

Il moto risultante per effetto di una forza elastica è rettilineo, qualora la velocità iniziale sia nulla o diretta come \mathbf{u}_x . L'accelerazione vale

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m} = -\frac{k}{m} x = -\omega^2 x$$

e quindi, secondo quanto visto nel paragrafo 1.6, il moto è armonico semplice con pulsazione ω e periodo T determinati dal rapporto tra la costante elastica e la massa del punto materiale a cui è applicata la forza elastica:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} , \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} . \quad (2.7)$$

Una forza elastica viene praticamente applicata tramite una molla; questa presenta in genere una lunghezza a riposo, cioè quando non si trova in condizioni di compressione o di estensione, di valore finito l_0 (caso a della figura 2.16). Se la molla viene estesa (caso b), assumendo una lunghezza $l > l_0$, essa sviluppa una forza \mathbf{F} che tende a riportarla alla condizione di riposo

$$F = -k(l - l_0) = -k x ,$$

dove $x > 0$ rappresenta la deformazione. Se invece la molla viene compressa alla lunghezza $l < l_0$, la forza ha la stessa espressione, con $x < 0$. In ogni caso possiamo scrivere la forza, come già detto, $\mathbf{F} = -kx\mathbf{u}_x$.

Il modulo di questa *forza di richiamo* è proporzionale alla deformazione fino a che non si supera il limite di elasticità della molla. Se vogliamo mantenere la molla deformata con una determinata lunghezza l dobbiamo applicare alla molla una forza eguale ed opposta alla forza esercitata dalla molla. Discutiamo tale situazione di equilibrio con la molla deformata ($l - l_0 = x > 0$) osservando la figura 2.17, in cui la molla estesa è fissata nell'estremo Q ad una parete. I punti P e Q sono fermi e pertanto le forze applicate a ciascun punto devono essere eguali ed opposte. Nel punto P la forza elastica \mathbf{F}_2 dovuta alla deformazione della molla (in modulo kx) viene bilanciata da una forza esterna $\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2$. Nel punto Q la situazione è analoga, solo che la forza elastica \mathbf{F}_3 è bilanciata dalla reazione

Forza elastica

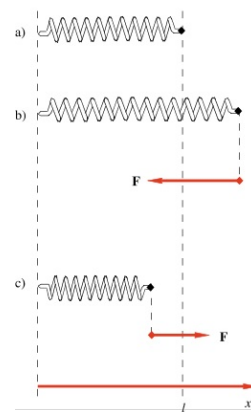


FIGURA 2.16

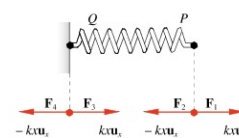


FIGURA 2.17

vincolare, che si sviluppa nel punto di aggancio, $\mathbf{F}_4 = -\mathbf{F}_3$ (le relazioni tra \mathbf{F}_1 e \mathbf{F}_2 , \mathbf{F}_3 e \mathbf{F}_4 soddisfano alla terza legge di Newton). Considerando che la molla, nel suo insieme, è ferma, deve essere nulla la risultante delle forze applicate alla molla, deve cioè essere $\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_4$ da cui segue $\mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_3$; i valori espliciti sono mostrati in figura 2.17.

Da questo risultato deduciamo che se abbiamo una molla libera ad entrambi gli estremi e vogliamo deformarla di una quantità x , dobbiamo applicare ai due estremi due forze eguali e contrarie di modulo kx .

Supponiamo ora di avere la molla bloccata nell'estremo Q , deformata di x_0 , e che in P sia fissato alla molla un punto materiale di massa m (la massa della molla è trascurabile rispetto a m). Se all'istante $t = 0$ il punto viene lasciato libero con velocità nulla (condizioni iniziali $x = x_0$ e $v = 0$ per $t = 0$), esso si muove di moto armonico per effetto della forza elastica agente su di esso. La soluzione dell'equazione del moto

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

è quella nota, $x = A \sin(\omega t + \Phi)$ con ω dato da (2.7). I valori delle costanti A e Φ si calcolano dalle condizioni iniziali

$$x_0 = A \sin \phi, \quad 0 = \omega A \cos \phi,$$

dato che $v = \omega A \cos(\omega t + \Phi)$. Per Φ compreso tra 0 e 2π sono possibili le due soluzioni $A = x_0$, $\Phi = \pi/2$ e $A = -x_0$, $\Phi = 3\pi/2$; in ogni caso si hanno per la legge oraria e per la velocità le espressioni

$$x = x_0 \cos \omega t, \quad v = -\omega x_0 \sin \omega t.$$

Se le condizioni iniziali sono diverse si ottiene sempre un moto armonico con la medesima ω , però il valore dell'ampiezza è in generale diverso da x_0 . Per esempio, con $x = x_0$ e $v = v_0$ per $t = 0$, si ottiene

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}, \quad \text{tg } \phi = \omega \frac{x_0}{v_0}.$$

A è maggiore di x_0 a causa della velocità iniziale diversa da zero. Se poniamo $v_0 = 0$ ritroviamo il risultato precedente.

Nel caso dinamico la reazione vincolare in Q è variabile nel tempo con modulo sempre uguale a $kx(t)$.

Esempio 2.11

Un corpo di massa m , posato sopra un piano orizzontale, viene tirato da una forza \mathbf{F} che estende una molla, come mostrato in figura 2.18, e si muove con accelerazione \mathbf{a} , senza oscillare. Calcolare l'allungamento della molla se il piano è liscio e se tra corpo e piano c'è un coefficiente di attrito

dinamico μ_d . Si trascuri la massa della molla.

Soluzione

L'accelerazione a della massa m è dovuta alla forza esercitata dalla molla, che vale kx (a sua volta la massa esercita sulla molla la forza $-kx$). La molla, tirata dalla forza F , si muove anch'essa con accelerazione a , però la sua massa è trascurabile e quindi la forza totale applicata alla molla deve essere nulla; ne segue $F - kx = 0$, $F = kx$. Siccome è anche $kx = ma$, abbiamo:

$$x = \frac{F}{k} = \frac{ma}{k} .$$

In sostanza la molla, estendendosi, trasmette la forza F alla massa m . Se c'è attrito, l'equazione del moto della massa m è

$$kx - \mu_d mg = ma \Rightarrow x = \frac{ma + \mu_d mg}{k} > \frac{ma}{k} .$$

La molla si allunga di più, per vincere l'attrito; anche F deve essere corrispondentemente maggiore per comunicare la stessa accelerazione a : $F = ma + \mu_d mg$.

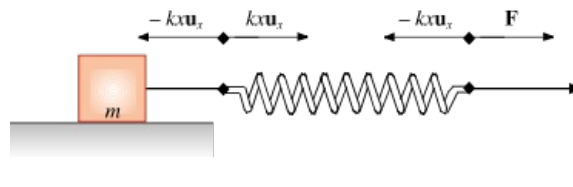


FIGURA 2.18

Visualizza Soluzione

Esempio 2.12

Un carrello sale lungo un piano inclinato ($\theta = 20^\circ$) con accelerazione costante $a_1 = 2 \text{ m/s}^2$. Sul carrello si trova un corpo di massa $m = 0.25 \text{ kg}$, fissato ad una parete del carrello da una molla di costante elastica $k = 12 \text{ N/m}$. Non ci sono attriti e il corpo non oscilla. Calcolare di quanto è deformata la molla rispetto alla posizione di riposo e in che verso. Ripetere il calcolo supponendo che lo stesso sistema scenda lungo il piano con accelerazione costante $a_2 = 5 \text{ m/s}^2$.

Soluzione

Al corpo sono applicate, lungo il piano inclinato, la forza elastica e la componente $mg \sin\theta$ della forza peso. Visto che il corpo accelera verso l'alto, la molla deve essere estesa così che

$$kx - mg \sin\theta = ma_1 \Rightarrow x = \frac{m}{k} (a_1 + g \sin\theta) = 0.111 \text{ m} .$$

Nel secondo caso rileviamo innanzitutto che $a_2 > g \sin\theta$, quindi la forza elastica concorre con la forza peso nell'accelerare la massa; la molla deve essere compressa così che

$$kx + mg \operatorname{sen}\theta = ma_2 \Rightarrow x = \frac{m}{k} (a_2 - g \operatorname{sen}\theta) = 0.034 \text{ m} .$$

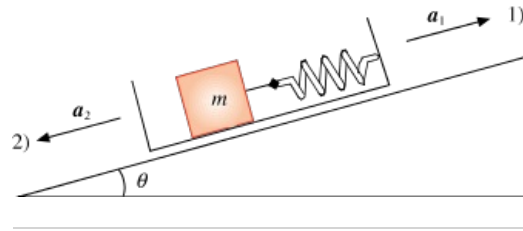


FIGURA 2.19

Visualizza Soluzione

Esempio 2.13

Un punto di massa m è collegato a due molle, di costanti elastiche k_1 e k_2 , ed è in equilibrio statico con le molle non deformate. Si sposta il punto dalla posizione di equilibrio, ad esempio verso destra, e lo si lascia oscillare. Qual è la pulsazione dell'oscillazione?

Soluzione

Spostando il punto verso destra di una quantità x , esso è sottoposto alle due forze elastiche $-k_1 x$, $-k_2 x$, aventi lo stesso verso, da destra verso sinistra. Pertanto

$$-k_1 x - k_2 x = ma = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k_1 + k_2}{m} x = 0 \quad , \quad \omega = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}} .$$

In particolare se le molle fossero eguali $\omega = \sqrt{2k/m}$.



FIGURA 2.20
(Esempio 2.13)

Visualizza Soluzione

2.11 Forza di attrito viscoso

La *forza di attrito viscoso* è una forza che si oppone al moto ed è proporzionale alla velocità del corpo soggetto a tale forza:

$$\mathbf{F} = -b \mathbf{v} \quad (2.8)$$

L'accelerazione risulta $\mathbf{a} = -b \mathbf{v}/m$; abbiamo studiato la cinematica di un moto con una accelerazione di questo tipo nel paragrafo 1.7, in cui \mathbf{v} aveva direzione costante e \mathbf{v}_0 era parallela a \mathbf{v} . Il risultato è analogo anche se il moto non è rettilineo e, in particolare, si ricava che il modulo della velocità presenta una decrescita esponenziale nel tempo.

In presenza di una forza di attrito viscoso non si può realizzare una condizione di equilibrio statico (come invece è possibile con l'attrito radente) poiché se $\mathbf{v} = 0$ la forza si annulla.

Forze di attrito viscoso sono esercitate, in certe condizioni, su un corpo che si muove in un fluido (liquido o gas).

Consideriamo allora, per esempio, un punto materiale di massa m lasciato cadere in un fluido e assumiamo che le uniche forze agenti siano la forza peso $\mathbf{F}_1 = m \mathbf{g}$ e la forza di attrito viscoso \mathbf{F}_2 che scriviamo $-m k \mathbf{v}$, evidenziando per comodità la massa cioè ponendo la costante b di (2.8) pari a $m k$. Le condizioni iniziali del moto sono $x = 0$ e $v = 0$ per $t = 0$.

Applicando la legge di Newton (2.1) si ha

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = m \mathbf{g} - m k \mathbf{v} = m \mathbf{a} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad .$$

Dato che la velocità iniziale è nulla il moto ha luogo soltanto lungo l'asse verticale z (che orientiamo verso il basso). Proiettiamo su z l'equazione del moto ottenendo

$$\frac{dv}{dt} = g - k v \Rightarrow \frac{dv}{g - kv} = dt$$

per separazione delle variabili (appendice A). Integriamo e risolviamo nella velocità:

$$\int_0^v \frac{dv}{g - kv} = \int_0^t dt \Rightarrow -\frac{1}{k} [\ln(g - kv)]_0^v = t$$

$$\Rightarrow \ln \frac{g - kv}{g} = -kt \Rightarrow v(t) = \frac{g}{k} (1 - e^{-kt}) .$$

Partendo da zero la velocità cresce, però sempre più lentamente: per $t \gg 1/k$, v assume praticamente il valore costante g/k ; $1/k$ è la costante di tempo τ , introdotta nel paragrafo 1.7. Il grafico della funzione $v(t)$ è mostrato in figura 2.22.

Forza di attrito viscoso

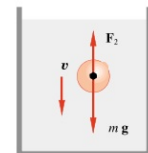


FIGURA 2.21

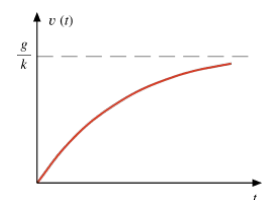


FIGURA 2.22

Sotto l'azione della sola forza peso il moto sarebbe uniformemente accelerato; la forza di attrito viscoso si oppone all'aumento della velocità, *rendendo al limite il moto uniforme*. In effetti si vede che per $v = g/k$ l'accelerazione $a = g - k v$ diventa nulla. Questo risultato asintotico si ottiene anche considerando come varia con la velocità il modulo delle forze agenti (figura 2.23): la forza peso è costante, mentre quella di attrito viscoso cresce linearmente con la velocità. Quando v assume il valore g/k si ha l'equilibrio dinamico tra le due forze e la loro risultante si annulla: di conseguenza la velocità non può più cambiare e si instaura un moto uniforme.

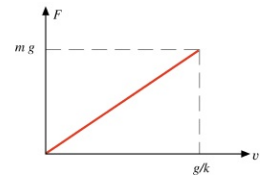


FIGURA 2.23

2.12 Forze centripete

Supponiamo che la risultante \mathbf{R} delle forze agenti su un punto materiale presenti una componente F_N ortogonale alla traiettoria, che risulta pertanto curvilinea (si riveda la parte finale del paragrafo 2.6). F_N determina l'accelerazione centripeta secondo la relazione $F_N = m a_N = m v^2/r$ essendo r il raggio di curvatura della traiettoria.

In generale \mathbf{R} ha anche una componente tangente alla traiettoria, F_T , responsabile della variazione del modulo della velocità. Se $F_T = 0$ il moto lungo la traiettoria è uniforme e l'unica accelerazione è a_N .

Forze centripete sono generalmente prodotte da rotaie, pneumatici, fili che collegano il corpo ad un punto fisso ovvero vincoli che consentono di incurvare la traiettoria oppure da azioni a distanza come quelle gravitazionali.

Esempio 2.14 Curve sopraelevate

Si vuole determinare quale condizione deve essere soddisfatta affinché un punto materiale, lanciato con velocità \mathbf{v} orizzontale lungo una curva sopraelevata, come quelle presenti in un velodromo, percorra a velocità costante un arco di circonferenza, in un piano orizzontale, con centro in O . La situazione è mostrata in figura 2.25a; la traiettoria è indicata dalla linea punteggiata nella vista in pianta.

Soluzione

Per ottenere un moto circolare uniforme la risultante delle forze applicate \mathbf{R} deve essere ortogonale alla traiettoria e diretta verso il centro. Le forze agenti sono il peso del punto materiale $m\mathbf{g}$ e la reazione vincolare della pista \mathbf{N} , normale alla superficie se il vincolo è liscio come supponiamo; esse devono essere disposte come nella figura 2.25b. La componente orizzontale di \mathbf{N} , $N \sin\theta$, rivolta verso il centro della traiettoria circolare seguita dal punto fornisce la forza centripeta: $N \sin\theta = m v^2/r$; d'altra parte per la condizione di equilibrio nella direzione verticale $N \cos\theta = mg$. Ricavando N da questa e sostituendo nella prima si ottiene

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{v^2}{g r} .$$

Per realizzare la condizione voluta devono soddisfare questa relazione la velocità con cui si affronta la curva, il raggio di curvatura e l'angolo di inclinazione della curva. Per esempio se $\theta = 30^\circ$ e $r = 30$ m il punto resta a quota fissa percorrendo la curva con $v \cong 13$ m/s = 46.8 Km/h. A velocità minori il punto scende verso il basso, a velocità maggiori sbanda verso

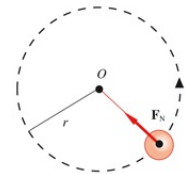


FIGURA 2.24

l'alto.

La reazione N ha il valore $mg/\cos\theta$, maggiore del valore $mg \cos\theta$ trovato nel piano inclinato. In effetti, oltre a dover reagire alla componente $mg \cos\theta$ del peso, il suolo deve fornire la forza centripeta necessaria perché il moto sia circolare: la quantità di moto del punto cambia continuamente in direzione per effetto dell'interazione col suolo.

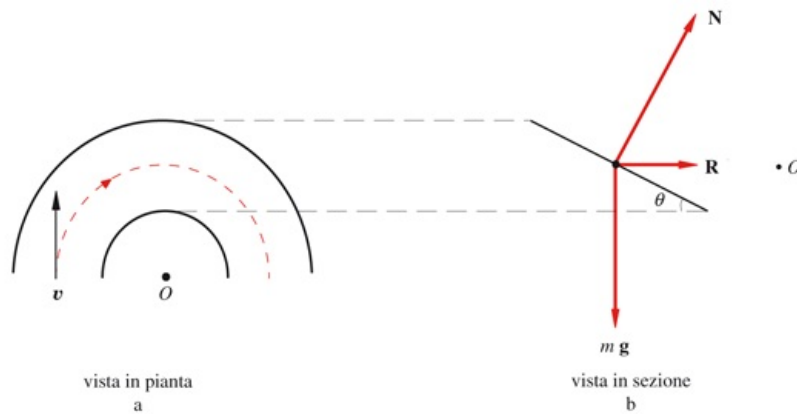


FIGURA 2.25

Visualizza Soluzione

Esempio 2.15 Curva su strada piana

Vogliamo adesso studiare la velocità massima con cui un'auto può affrontare in una strada piana una curva di raggio r .

Soluzione

La forza centripeta necessaria è fornita dall'attrito tra pneumatici e terreno; poiché la traiettoria è un arco di circonferenza di raggio r non c'è spostamento lungo r e il coefficiente di attrito rilevante per il problema è quello statico. Pertanto il caso limite si ha per il valore massimo della forza di attrito, cioè per $F_N = \mu_s N = \mu_s m g$, e deve essere $\mu_s m g = m v^2/r$. La velocità massima con cui può essere affrontata la curva è

$$v = \sqrt{\mu_s g r} \quad .$$

Con $\mu_s = 0.5$ e $r = 30$ m si trova $v = 12.1$ m/s = 43.6 Km/h. Se invece la curva è su rotaia, la forza centripeta è fornita dal sistema che tiene fisse le rotaie al suolo.

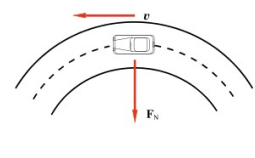


FIGURA 2.26
(Esempio 2.15)

Visualizza Soluzione

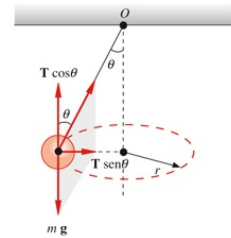


FIGURA 2.27
(Esempio 2.16)

Esempio 2.16 Pendolo conico

Si abbia un punto materiale di massa m appeso in O (vedi fig. 2.27) tramite un filo inestensibile di massa trascurabile lungo L . Vogliamo determinare le condizioni per cui P descriva un moto circolare uniforme.

Soluzione

Sul punto P agiscono la forza peso $m \mathbf{g}$ e la forza \mathbf{T} , dovuta al filo e diretta come questo (trascuriamo ogni attrito). Come nel primo esempio

$$T \sin \theta = m \frac{v^2}{r} \quad , \quad T \cos \theta = m g$$

da cui si ricava $\tan \theta = v^2 / g r$. Ponendo $r = L \sin \theta$ e $v = \omega r$ si ha

$$\cos \theta = g / \omega^2 L \quad ,$$

relazione che deve sussistere tra velocità angolare, lunghezza del filo e angolo rispetto alla verticale dello stesso affinché il punto P descriva un moto circolare uniforme. Al crescere di ω cresce il valore di θ ; in ogni caso deve sussistere la condizione $\omega^2 \geq g / L$. Il valore della forza dovuta al filo, detta tensione del filo, è

$$T = mg / \cos \theta = m \omega^2 L .$$

Visualizza Soluzione

Una caratteristica comune agli esempi trattati è l'indipendenza dalla massa del punto delle varie condizioni trovate, come $\tan \theta = v^2 / g r$, $v = \omega r$, $\cos \theta = g / \omega^2 L$. Questo perché in tutti gli esempi è presente soltanto la forza peso, che è proporzionale alla massa, e le reazioni vincolari, determinate dall'azione del peso e quindi anch'esse proporzionali alla massa del punto; eguagliando la risultante di tutte le forze a $m \mathbf{a}$ la massa viene semplificata e quindi il risultato *cinematico* è indipendente dalla massa (mentre, come detto, non lo sono le forze).

Dopo questi esempi possiamo anche chiarire cosa intendiamo per *equilibrio dinamico*; a differenza dell'equilibrio statico descritto nel paragrafo 2.4 (risultante delle forze applicate al punto eguale a zero, velocità nulla), ci

Equilibrio dinamico

riferiamo a quei particolari casi in cui *in presenza di forze il moto avviene con velocità costante in modulo*. Se si tratta di moto rettilineo ciò è possibile solo se la risultante delle forze è nulla e abbiamo visto appunto i casi di moto uniforme in presenza di forze di attrito radente o di attrito viscoso, che bilanciano l'effetto della forza peso (paragrafi 2.8, 2.9, 2.11). Se invece il moto è curvilineo basta che sia nulla \mathbf{F}_T , come deve essere se vogliamo che la velocità sia costante in modulo, ovvero che la risultante delle forze agenti sia puramente centripeta. Qualora \mathbf{F}_N sia anche costante in modulo il moto è circolare uniforme, come negli esempi appena considerati.

2.13 Pendolo semplice

Il *pendolo semplice* è costituito da un punto materiale appeso tramite un filo inestensibile e di massa trascurabile. La posizione di equilibrio statico è quella verticale, con il punto fermo ed il filo teso; la forza esercitata dal filo (tensione del filo) vale in modulo $T_F = mg$.

Se spostiamo il punto dalla verticale esso inizia ad oscillare attorno a questa, lungo un arco di circonferenza di raggio L , pari alla lunghezza del filo, in un piano verticale. Vogliamo studiare, in assenza di attrito, questo moto oscillatorio.

Le forze agenti sul punto P sono il peso $m \mathbf{g}$ e la tensione del filo \mathbf{T}_F per cui il moto è regolato da $m \mathbf{g} + \mathbf{T}_F = m \mathbf{a}$.

Consideriamo le componenti lungo la traiettoria, orientata come in figura 2.28, e ortogonalmente alla traiettoria (verso positivo da P a O):

$$R_T = -mg \operatorname{sen} \theta = m a_T, \quad R_N = T_F - mg \cos \theta = m a_N.$$

Il segno negativo della componente lungo la traiettoria è dovuto al fatto che la forza ha segno opposto rispetto a quello della coordinata s sulla traiettoria. Infatti per $s < 0$, posizioni sull'arco di circonferenza a sinistra della verticale, la forza è diretta secondo il verso assunto positivo, mentre per $s > 0$ la forza è diretta secondo il verso negativo (e il risultato non dipende dalla scelta del verso di s). Fisicamente R_T è una *forza di richiamo* che tende a riportare il punto sulla verticale, anche se non è di direzione costante come nel caso delle forze elastiche.

Secondo (1.27)

$$a_T = L \frac{d^2 \theta}{dt^2}, \quad a_N = \frac{v^2}{L}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{g}{L} \operatorname{sen} \theta, \quad m \frac{v^2}{L} = T_F - mg \cos \theta.$$

La prima è l'equazione differenziale del moto del pendolo, la cui soluzione ci fornisce la legge oraria del moto $\theta(t)$; però, per θ qualunque, la soluzione è analiticamente complicata.

Consideriamo allora piccoli valori di θ e sviluppiamo in serie $\operatorname{sen} \theta$:

$$\operatorname{sen} \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \dots$$

Quantitativamente, per $\theta \leq 0.122 \text{ rad} = 7^\circ$, $\operatorname{sen} \theta$ si può approssimare con θ commettendo un errore relativo che è sempre minore di 10^{-3} . Quindi per *piccole oscillazioni* l'equazione differenziale diventa

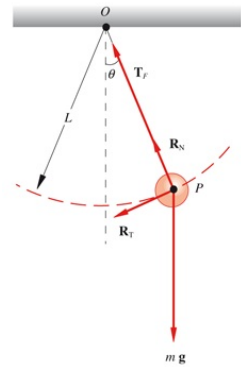


FIGURA 2.28

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \theta = 0 \quad (2.9)$$

e coincide con quella del moto armonico semplice (1.16), posto $\omega^2 = g/L$.

In conclusione il moto del pendolo è oscillatorio armonico quando l'ampiezza delle oscillazioni è piccola così che $\sin\theta \approx \theta$. La legge oraria del moto è

$$\theta = \theta_0 \sin(\omega t + \phi) ;$$

l'ampiezza θ_0 dell'oscillazione e la fase iniziale Φ dipendono dalle condizioni iniziali del moto, come discusso nei paragrafi 1.6 e 2.9.

Il periodo del moto T è dato da

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \quad (2.10)$$

ed è *indipendente dall'ampiezza* (isocronismo delle piccole oscillazioni). La legge oraria dello spostamento lungo l'arco di circonferenza è dato da

$$s = L\theta = L\theta_0 \sin(\omega t + \phi)$$

mentre la velocità angolare e la velocità lineare hanno le espressioni

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega \theta_0 \cos(\omega t + \phi) ,$$

$$v = \frac{ds}{dt} = L \frac{d\theta}{dt} = L \omega \theta_0 \cos(\omega t + \phi) .$$

La velocità è massima quando il punto passa per la verticale ($\theta = 0$) e nulla agli estremi delle oscillazioni ($\theta = \theta_0$) dove il verso del moto si inverte. Notiamo che i risultati cinematici non dipendono dalla massa del pendolo, per le stesse ragioni esposte alla fine del paragrafo 2.12.

Quando l'ampiezza delle oscillazioni non è piccola il moto è ancora periodico, ma non armonico, e il periodo T' dipende dall'ampiezza; detta $\Delta T = T' - T$ la differenza tra il periodo vero e quello calcolato con (2.10), in figura 2.29 è riportata $\Delta T/T$ in funzione di θ_0 fino al valore $\theta_0 = 90^\circ$, dove $T' \approx 1.16 T$.

Risolto il problema del moto, e quindi note $\theta(t)$ e $v(t)$, possiamo ritornare all'equazione del moto proiettata sulla normale alla traiettoria e calcolare la *tensione del filo* che sostiene il punto:

$$T_F = m \left[g \cos\theta(t) + \frac{v^2(t)}{L} \right] . \quad (2.11)$$

La tensione è massima nella posizione verticale, dove sia $\cos\theta(t)$ che $v(t)$ assumono i valori massimi, ed è minima nei punti di inversione. Sia (2.11) che queste conclusioni valgono qualunque sia il valore dell'ampiezza; per piccole oscillazioni la tensione si calcola inserendo in (2.11) le espressioni analitiche

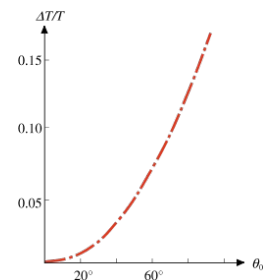


FIGURA 2.29

trovate per $\theta(t)$ e $v(t)$.

Il pendolo semplice che abbiamo descritto e il pendolo conico dell'esempio 2.16 sono eguali come composizione, punto materiale sospeso con un filo, però i tipi di moto sono completamente diversi. Il moto del pendolo conico si svolge in un piano orizzontale ed è circolare uniforme; le forze sono ortogonali alla traiettoria e costanti ed è necessario comunicare al punto una velocità iniziale appropriata, che poi resta costante in modulo. Il moto del pendolo semplice si svolge in un piano verticale e la risultante delle forze ha sia componente tangente che normale alla traiettoria, entrambe non costanti; il moto può avvenire anche con velocità iniziale nulla, purché sia $\theta \neq 0$, ed è armonico semplice lungo un arco di circonferenza (per piccole oscillazioni).

2.14 Tensione dei fili

Nel pendolo, semplice o conico, il filo di sostegno serve per applicare una certa forza al punto in movimento: il filo risulta teso e la forza, con direzione lungo il filo teso, che questo esercita sul punto viene chiamata *tensione del filo*. Il filo può essere fissato in un estremo ad un punto fisso e nell'altro ad un punto materiale oppure può collegare due punti materiali. Supporremo sempre che il filo sia *inestensibile*, cioè che la sua lunghezza sia costante, e di *massa trascurabile* rispetto alle altre masse.

Per chiarire il concetto di tensione consideriamo un filo teso in quiete e prendiamo in esame un elemento infinitesimo di esso. Tale elemento è *tirato* dalle due parti restanti di filo e l'equilibrio statico richiede che le due forze, agenti sull'elemento di filo, siano eguali in modulo e direzione e di verso opposto (figura 2.30a). Ciò vale per qualunque elemento di filo e il valore della tensione è lo stesso ovunque (altrimenti non ci sarebbe equilibrio). In particolare ad un estremo $\mathbf{T} = -\mathbf{F}$ (figura 2.30b). Per il filo AB nel suo insieme si ha la situazione della figura 2.3 c e deve essere in modulo $F_A = F_B = T$: per tendere il filo si applicano le forze \mathbf{F} e $-\mathbf{F}$ e la tensione, in modulo, è eguale al modulo di \mathbf{F} .

Consideriamo adesso un filo teso in movimento. L'ipotesi che il filo sia inestensibile comporta che tutti i punti del filo, compresi gli estremi, abbiano la stessa accelerazione; pertanto due corpi in movimento collegati da un filo teso, come nell'esempio 2.19, devono avere la stessa accelerazione. L'ipotesi che il filo abbia massa trascurabile fa sì che il prodotto ma risulti nullo per il filo (e per qualsiasi porzione di esso): di conseguenza il valore della tensione durante il moto è lo stesso in qualunque punto del filo, come nel caso statico. Lo stesso ovviamente succede se il moto è uniforme ($a = 0$). Vedremo nella nota alla fine del paragrafo cosa cambia se la massa del filo non è trascurabile.

Riassumendo, il filo teso esercita agli estremi la tensione \mathbf{T} , il cui valore dipende dalle forze applicate, e che deve essere pensata come la reazione del filo alla

forza che lo tende. Per un filo reale la tensione non può superare un valore massimo T_{\max} , oltre il quale il filo si spezza; T_{\max} dipende dalla sostanza con cui è fatto il filo e dalle dimensioni geometriche. Se ad un estremo è collegato un punto materiale, la tensione \mathbf{T} va inserita nella legge di Newton (2.1) come le altre forze agenti sul punto.

Non è necessario che il filo sia completamente rettilineo; esso può scorrere attorno ad un perno o essere parzialmente avvolto attorno ad un disco mobile (carrucola), allo scopo di cambiare la direzione della forza. Con riferimento alla figura 2.31, un tratto di filo curvo è sottoposto alle due tensioni \mathbf{T}_1 e \mathbf{T}_2 e alla forza \mathbf{F} reazione del perno, ortogonale al perno se questo è liscio (la carrucola è più conveniente proprio in vista della riduzione dell'attrito). In questa situazione le due tensioni, che per simmetria formano lo stesso angolo con la tangente alla

Tensione del filo

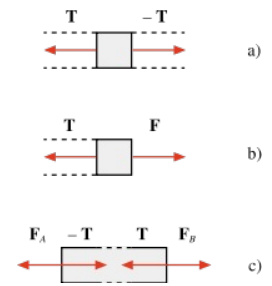


FIGURA 2.30

circonferenza, hanno componenti tangenti eguali ed opposte per soddisfare alla relazione $F_T = ma_T = 0$ (ricordiamo che $m = 0$). \mathbf{T}_1 e \mathbf{T}_2 sono dunque eguali in modulo ed eguali sono le componenti normali la cui somma vale F_N (modulo della risultante di \mathbf{T}_1 e \mathbf{T}_2). Ortogonalmente alla traiettoria si ha quindi $F_N - F = ma_N = 0$, ovvero in modulo la reazione normale è eguale alla risultante delle tensioni.

Oltre ai fili rettilinei si possono utilizzare, per lo stesso scopo, bacchette solide con queste differenze:

- a) mentre il filo funziona in *trazione*, la bacchetta può funzionare in *trazione* e in *compressione*; per esempio, con un filo si può solo tirare un corpo mentre con una bacchetta si può anche spingerlo;
- b) un filo può esercitare solo forze che hanno la direzione del filo stesso, cioè non può sopportare una sollecitazione ortogonale, una bacchetta non presenta questa limitazione.

Un modo semplice per mettere in evidenza la tensione di un filo e misurarne il valore consiste nel tagliare il filo e inserire una molla di costante elastica nota k . Quando si tende il filo ai capi della molla sono applicate le forze \mathbf{T} e $-\mathbf{T}$ e si misura la deformazione x (paragrafo 2.10); in modulo è $T = kx$.

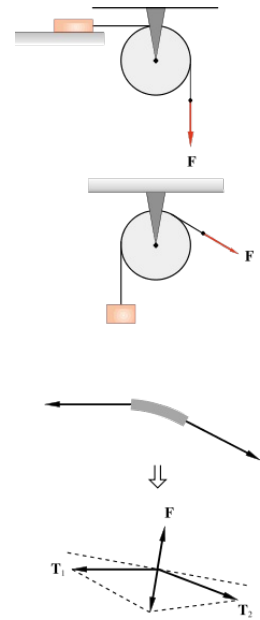


FIGURA 2.31

Esempio 2.17 Punto appeso in quiete

È un caso statico. Le forze applicate al filo sono la forza peso $m\mathbf{g}$ del corpo appeso e la reazione vincolare \mathbf{R} nel punto di aggancio O ; il filo teso sviluppa ai suoi estremi le forze \mathbf{T} e $-\mathbf{T}$. In P si ha $\mathbf{T} = -m\mathbf{g}$; la tensione del filo vale quindi in modulo mg . Nel punto O la tensione è $-\mathbf{T} = m\mathbf{g}$ e la reazione vincolare, opposta alla tensione, è $\mathbf{R} = -m\mathbf{g}$. Il filo trasmette integralmente al punto di aggancio la forza peso da bilanciare ovvero la reazione vincolare da O a P .

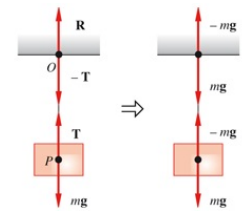


FIGURA 2.32

(Esempio 2.17)

Esempio 2.18 Moto circolare

Un punto materiale, collegato ad un centro O da un filo, si muove su un piano orizzontale senza attrito di moto circolare uniforme con velocità angolare ω ; la velocità lineare è $v = \omega r$. Il filo permette che abbia luogo il moto circolare uniforme applicando al punto P la forza centripeta $T = m v^2/r = m \omega^2 r$. Nel centro O la reazione vincolare bilancia in ogni istante la tensione ed è pari in modulo a $m v^2/r$; il filo trasmette da O a P la forza necessaria perché il moto sia circolare.

Analogamente, durante il moto di un pendolo semplice (paragrafo 2.13) la reazione nel punto di aggancio del filo è eguale in modulo alla tensione del

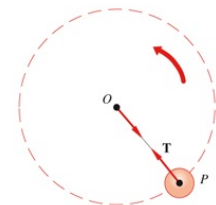


FIGURA 2.33

(Esempio 2.18)

filo.

Osserviamo che nelle figure 2.33 e 2.34 avviene un moto del filo ancora diverso da quelli considerati in precedenza, rettilineo o attorno ad un perno. Qui il filo resta rettilineo, ma il moto di ciascun elemento di filo è circolare attorno all'estremo fisso del filo. Le tensioni, parallele al filo, applicate ai capi di un elemento di filo sono eguali ed opposte, O cioè la loro risultante F_N è nulla in quanto $ma_N = 0$ nell'ipotesi di massa trascurabile. Quindi anche in questo caso la tensione ha un unico valore lungo tutto il filo.

È poi interessante rendersi conto perché il filo in figura 2.33 è teso. Il punto materiale P in assenza di filo proseguirebbe in linea retta e così facendo aumenterebbe la propria distanza dal centro O ; il filo, che è bloccato in O e non può allungarsi, si oppone ed esercita la forza \mathbf{T} sul punto P , il quale a sua volta reagisce sul filo. Agli estremi del filo sono dunque applicate la reazione del meccanismo che tiene fermo il punto O , $\mathbf{R}_O = (mv^2/r) \mathbf{u}_N$, e la reazione del punto P $\mathbf{R}_P = - (mv^2/r) \mathbf{u}_N$, non disegnate in figura 2.33. Il filo applica al punto P la tensione $\mathbf{T} = (mv^2/r) \mathbf{u}_N$ e al punto O la tensione $-\mathbf{T}$. Come risultato il punto O resta fermo, il filo è teso e il punto P si muove di moto circolare.

Notiamo infine ancora una volta che la reazione del filo, esplicitata dalla tensione, come le altre reazioni, non ha un valore prefissato, ma si adatta alle condizioni dinamiche, almeno finché $mv^2/r \leq T_{\max}$.

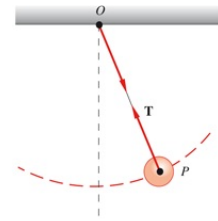


FIGURA 2.34
(Esempio 2.18)

Esempio 2.19 Filo che collega due punti in movimento

Si considerino due punti materiali P e Q , collegati tramite un filo, in movimento su un piano orizzontale liscio per effetto di una forza \mathbf{F} applicata nel punto P . Le equazioni del moto per i due punti sono:

$$\begin{array}{ll} \text{punto } P & F - T = m_P a_P \\ \text{punto } Q & T = m_Q a_Q \end{array}$$

Se il filo è teso le accelerazioni dei due punti, come le loro velocità, sono eguali: $a_P = a_Q = a$. Pertanto

$$a = \frac{F}{m_P + m_Q} \quad , \quad T = \frac{m_Q}{m_P + m_Q} F < F \quad .$$

La forza applicata a Q non è F , ma T che risulta minore di F . T assume un valore prossimo a F solo se $m_Q \gg m_P$, cioè quando, in pratica, è come se P non ci fosse. In presenza di attrito le equazioni del moto diventano

$$F - T - \mu_P m_P g = m_P a \quad , \quad T - \mu_Q m_Q g = m_Q a \quad ,$$

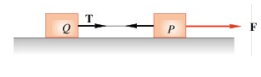


FIGURA 2.35
(Esempio 2.19)

dove i coefficienti di attrito sono quelli dinamici; si ricava

$$a = \frac{F - (\mu_P m_P + \mu_Q m_Q) g}{m_P + m_Q} ,$$

$$T = \frac{m_Q}{m_P + m_Q} [F + (\mu_Q - \mu_P) m_P g].$$

Notiamo che se, in assenza di attrito, annulliamo F ad un certo istante, il moto diviene uniforme, la distanza tra P e Q resta la stessa, ma la tensione si annulla. Invece se agiscono le forze di attrito il moto è uniforme quando sono soddisfatte le condizioni

$$F - T - \mu_P m_P g = 0 \quad , \quad T - \mu_Q m_Q g = 0 ;$$

pertanto la forza agente deve essere pari a $(\mu_P m_P + \mu_Q m_Q) g$. Il filo risulta teso e la tensione vale $\mu_Q m_Q g$.

I risultati sono indipendenti dalla velocità, purché questa sia diversa da zero; se $v = 0$ le formule sono le stesse, ma con i coefficienti statici al posto di quelli dinamici, e danno il valore massimo della forza che si può applicare senza avere movimento e il corrispondente valore massimo della tensione del filo.

Esempio 2.20 Esperienza di Varignon

Consideriamo il sistema costituito da tre masse disposte come in figura 2.36a. Il punto O risulta essere in equilibrio statico se le tre masse soddisfano alla relazione

$$m_3^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2 m_1 m_2 \cos\theta \quad . \quad (2.12)$$

Fissate per esempio le masse m_1 e m_2 si può trovare sperimentalmente il valore di m_3 per cui si ha equilibrio e misurare l'angolo corrispondente θ . In tal modo si verifica la (2.12), che ora dimostriamo.

Nel punto O sono applicate le tensioni dei tre fili di sostegno, che valgono rispettivamente in modulo $m_1 g$, $m_2 g$, $m_3 g$ con direzioni fissate dalla configurazione di equilibrio (Figura 2.36b). In equilibrio, lungo la direzione verticale deve essere

$$m_3 g = m_1 g \cos\alpha_1 + m_2 g \cos\alpha_2$$

con $\alpha_1 + \alpha_2 = \theta$, mentre lungo la direzione orizzontale

$$m_1 g \sin\alpha_1 = m_2 g \sin\alpha_2 .$$

Dalla somma dei quadrati delle due relazioni di equilibrio e tenendo conto dell'eguaglianza

$$\cos(\alpha_1 + \alpha_2) = \cos\theta = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 - \sin\alpha_1 \sin\alpha_2$$

si ottiene (2.12). La verifica sperimentale di questa conferma il carattere vettoriale delle forze.

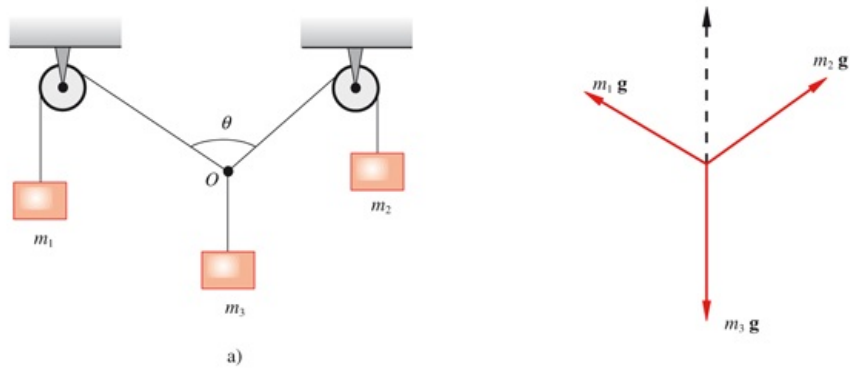


FIGURA 2.36

Esempio 2.21 Macchina di Atwood

Il dispositivo della figura 2.37, detto *macchina di Atwood*, consta di una carrucola e di due corpi di massa m_1 e m_2 , connessi da un filo. Qualitativamente, è evidente che il corpo di massa maggiore, ad esempio m_1 , scende e l'altro corpo sale; durante questo moto il filo non slitta rispetto alla carrucola, che gira accompagnando il filo, e in prima approssimazione assumiamo che non ci sia attrito che frena la rotazione della carrucola. Supponiamo inoltre che la massa della carrucola, come quella del filo, sia trascurabile così da non dover tener conto del suo moto (il caso completo è trattato in un problema relativo al capitolo 6). In pratica è come se il filo scivolasse su un perno circolare liscio, per cui la tensione lungo il filo è la stessa ovunque. Orientiamo l'asse z verso il basso e scriviamo le equazioni del moto:

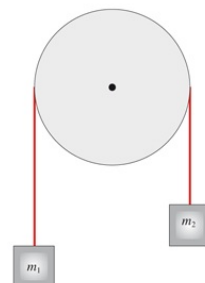


FIGURA 2.37
(Esempio 2.21)

$$\begin{array}{ll} \text{corpo } m_1 & m_1 g - T = m_1 a \quad , \\ \text{corpo } m_2 & m_2 g - T = -m_2 a \quad ; \end{array}$$

il modulo delle accelerazioni è eguale se il filo è inestensibile. Sottraiamo la seconda equazione dalla prima e risolviamo:

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g \quad , \quad T = \frac{2 m_1 m_2}{m_1 + m_2} g \quad .$$

La tensione si colloca tra i valori $m_1 g$ e $m_2 g$, l'accelerazione può assumere valori molto minori di g se $m_1 \approx m_2$ (se le masse sono eguali il moto è uniforme o non si ha moto).

Con questo sistema, che è alternativo rispetto al piano inclinato e consente di ridurre notevolmente gli effetti dell'attrito, Atwood poté agevolmente studiare, verso la fine del 1700, il moto uniformemente accelerato.

Nota. Fili inestensibili con massa non trascurabile

Quando si rilascia l'ipotesi di trascurabilità della massa, la tensione non può più essere la stessa lungo il filo. Preso un piccolo tratto di filo in movimento, abbiamo $\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2 = m\mathbf{a} \neq 0$, per cui $\mathbf{T}_1 \neq -\mathbf{T}_2$. Riprendiamo in esame l'esempio 2.19, supponendo che il filo abbia massa m_F . Le forze applicate ai corpi e al filo sono rappresentate in figura 2.38; le equazioni del moto sono **F**

$$F - T_P = m_P a \quad , \quad T_P - T_Q = m_F a \quad , \quad T_Q = m_Q a$$

e hanno la soluzione

$$a = \frac{F}{m_P + m_F + m_Q} \quad , \quad T_P = \frac{m_F + m_Q}{m_P + m_F + m_Q} F \quad , \quad T_Q = \frac{m_Q}{m_P + m_F + m_Q} F \quad .$$

Vediamo che la tensione varia lungo il filo, dal valore T_Q al valore $T_P > T_Q$. Se la massa è egualmente distribuita lungo il filo, cioè se la massa per unità di lunghezza è costante la tensione varia linearmente da T_Q a T_P : detta d la lunghezza del filo e x la distanza del generico punto del filo dall'estremo Q , si ha

$$T(x) = T_Q + \frac{m_F F}{m_P + m_F + m_Q} \frac{x}{d}$$

e si verifica subito che $T(d) = T_P$. Dimostreremo questo risultato nel capitolo 6, quando parleremo di densità lineare di massa.

Rivediamo anche l'esempio 2.17 nel caso che il filo abbia massa $m_F \neq 0$. Possiamo disegnare subito la figura 2.39: nel punto di aggancio corpo-filo deve essere bilanciata la forza peso del corpo, nel punto di aggancio al supporto deve essere bilanciata la forza peso totale del corpo e del filo. La tensione è massima nell'estremo superiore e minima nell'estremo inferiore. Anche in questo caso, se la massa per unità di lunghezza è costante, la tensione varia linearmente lungo il filo.

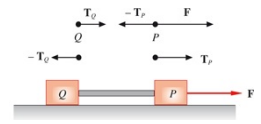


FIGURA 2.38 (Nota)

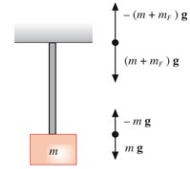


FIGURA 2.39 (Nota)

2.15 Lavoro. Potenza. Energia cinetica

Abbiamo visto come la legge di Newton (2.1) si esprime in termini integrali attraverso il teorema dell'impulso (2.3), rilevando che si arriva a determinare la *variazione finita di quantità di moto solo se si può calcolare esplicitamente l'integrale* $\int_0^t \mathbf{F}(t) dt$. Affrontiamo adesso il problema dell'integrazione della legge di \int o Newton quando si considera la forza come funzione della posizione occupata dal punto, ampliando il ragionamento già fatto nel paragrafo 1.4 a proposito di $a(x)$ e $a(t)$ nel moto rettilineo.

Consideriamo un punto materiale che si muove lungo una generica traiettoria curvilinea e sia \mathbf{F} la risultante delle forze agenti sul punto. Si definisce *lavoro della forza* \mathbf{F} , compiuto durante lo spostamento del punto dalla posizione A alla posizione B , la quantità scalare

$$W = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_A^B F \cos\theta ds = \int_A^B F_T ds \quad (2.13)$$

Il lavoro è l'integrale di linea della forza (appendice C), cioè è dato dalla somma di infiniti contributi infinitesimi $dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = F_T ds$. Si osservi che in generale lungo la traiettoria sia \mathbf{F} che θ sono variabili.

Si possono presentare tre casi. \mathbf{F} forma con $d\mathbf{s}$ un angolo minore di $\pi/2$, per cui l'accelerazione tangente è concorde con la velocità e la fa aumentare: dW risulta positivo e viene chiamato lavoro motore. Oppure \mathbf{F} forma con $d\mathbf{s}$ un angolo maggiore di $\pi/2$, il punto viene frenato e dW risulta negativo (lavoro resistente). Infine se \mathbf{F} è ortogonale alla traiettoria, $\theta = \pi/2$ e il lavoro è nullo: in questo caso \mathbf{F} ha azione puramente centripeta e non fa variare il modulo della velocità. Lungo un arco finito di traiettoria può presentarsi sempre la stessa situazione, così che la velocità finale è maggiore di quella iniziale se $\theta < \pi/2$, minore se $\theta > \pi/2$ e eguale se $\theta = 0$; oppure le varie situazioni possono alternarsi e il risultato dipende da quale situazione è predominante.

Quando \mathbf{F} è effettivamente la somma di n forze $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_n$, per ciascuna si può calcolare il corrispondente lavoro W_i e risulta $W = \sum_i W_i$:

$$W = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_A^B (\mathbf{F}_1 + \dots + \mathbf{F}_n) \cdot d\mathbf{s} = \int_A^B \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{s} + \dots + \int_A^B \mathbf{F}_n \cdot d\mathbf{s} = W_1 + \dots + W_n.$$

Il lavoro è pari alla somma dei lavori delle singole forze agenti, ciascuno dei quali può essere positivo, negativo o nullo.

Secondo quanto detto sopra il lavoro totale può essere nullo in quanto somma di lavoro motore lungo un arco di traiettoria e di lavoro resistente lungo un successivo arco. Certamente però possiamo affermare che $W = 0$ quando non agisce nessuna forza oppure agiscono forze la cui risultante o è nulla o è sempre ortogonale alla traiettoria (condizioni di equilibrio dinamico, paragrafo 2.12).

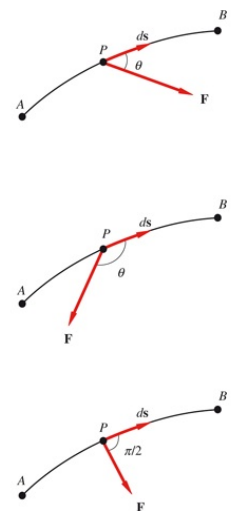


FIGURA 2.40

Un esempio di moto con risultante nulla delle forze è il moto rettilineo uniforme in presenza di attrito radente: occorre applicare una forza eguale e contraria alla forza di attrito e quindi fornire un lavoro motore eguale ed opposto al lavoro resistente dell'attrito. Invece un moto con risultante delle forze sempre ortogonale alla traiettoria è il moto curvilineo uniforme: se c'è attrito, oltre alla forza normale deve essere presente una forza tangente, che svolge un lavoro motore, per bilanciare l'effetto dell'attrito.

Potenza

La *potenza* corrisponde al *lavoro per unità di tempo*:

$$P = \frac{dW}{dt} = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = F_T v \quad . \quad (2.14)$$

Potenza

Questa è la *potenza istantanea*, in generale variabile durante il moto, e caratterizza la rapidità di erogazione del lavoro.

La *potenza media* è il rapporto W/t , cioè il lavoro totale diviso per il tempo durante cui il lavoro è stato svolto. Tale grandezza risulta particolarmente importante per qualificare le prestazioni di un dispositivo o macchina che fornisce lavoro. A parità di lavoro totale svolto, ha maggiore potenza quella macchina che lo eroga in minore tempo.

Energia cinetica

Riprendiamo la relazione relativa al lavoro infinitesimo associato ad uno spostamento ds :

$$dW = F_T ds = m a_T ds = m \frac{dv}{dt} ds = m \frac{ds}{dt} dv = m v dv \quad .$$

Abbiamo trovato così il legame esplicito tra il lavoro infinitesimo e la variazione infinitesima del modulo della velocità rendendo quantitativa la discussione fatta in precedenza. Per un percorso finito dalla posizione A a quella B abbiamo

$$W = \int_A^B m v dv = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = E_{k,B} - E_{k,A} = \Delta E_k \quad . \quad (2.15)$$

Energia cinetica

Il lavoro è eguale alla variazione della quantità $\frac{1}{2} m v^2$ che si chiama *energia cinetica* del punto materiale. Il simbolo Δ indica *valore finale meno valore iniziale*. La (2.15), nota come *teorema dell'energia cinetica*, è stata ricavata utilizzando la legge di Newton e pertanto ha validità generale, qualunque sia la forza che agisce.

Se $W > 0$, l'energia cinetica finale è maggiore di quella iniziale mentre se $W < 0$ l'energia cinetica finale è minore di quella iniziale. Questo è il caso del lavoro delle forze di attrito e pertanto, se agiscono solo tali forze, la velocità diminuisce. Infine, se $W = 0$, l'energia cinetica resta costante; ciò si verifica, per esempio, nel

moto circolare uniforme: il lavoro della forza centripeta, unica forza agente, è nullo e quindi la velocità rimane costante in modulo.

Sottolineiamo che W rappresenta il lavoro totale. Se è noto come varia la forza lungo la traiettoria, possiamo calcolare il lavoro e quindi il modulo della velocità in ciascun punto (se conosciamo quella iniziale). Viceversa, se misuriamo le velocità iniziale e finale, possiamo tramite (2.15) dedurre il lavoro compiuto dalle forze agenti.

Si faccia attenzione al fatto che la nozione di lavoro, e quindi di variazione di energia cinetica, è necessariamente legata a quella di spostamento, secondo la definizione (2.13). Se non c'è spostamento non può esserci lavoro, qualunque sia la forza applicata (mentre può esserci spostamento senza lavoro). Quando si spinge un corpo e questo non si sposta perché è presente un attrito statico, non c'è lavoro né motore né resistente, così come non si compie lavoro quando si spinge con una mano contro un muro. In questi casi la sensazione di fatica è legata allo stato di tensione dei muscoli che richiede un consumo di energia chimica, ma, ripetiamo, il lavoro meccanico è nullo.

Unità di misura

Il lavoro è il prodotto di una forza per uno spostamento e quindi l'unità di misura del lavoro, e dell'energia cinetica come di ogni altra forma di energia, è newton · metro. Si tratta di una unità molto importante che si chiama joule (pronuncia corretta *giul!*) ed è espressa dal simbolo $J = N \cdot m$.

L'unità di misura della potenza è il watt, simbolo W ; per definizione $W = J/s = N \cdot m \cdot s^{-1}$, $J = Ws$.

Multipli comunemente usati sono il kilojoule, $kJ = 10^3 J$, megajoule $MJ = 10^6 J$, chilowatt $kW = 10^3 W$, megawatt $MW = 10^6 W$.

Per il lavoro, soprattutto elettrico, è in uso anche l'unità chilowattora: $1 kWh = 10^3 W \cdot 3600 s = 3.6 \cdot 10^6 J$.

Storicamente, una unità di potenza assai usata in passato e ora proibita è il cavallo-vapore, esistente in due versioni, quello tecnico ($1 cv = 735.5 W$) e quello britannico ($1 hp = 745.7 W$).

Se riprendiamo le definizioni di energia cinetica e di quantità di moto,

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 \quad , \quad \mathbf{p} = m \mathbf{v} \quad ,$$

vediamo che tra energia cinetica e modulo della quantità di moto sussistono le relazioni

$$E_k = \frac{p^2}{2m} \quad , \quad p = \sqrt{2mE_k} \quad .$$

In questo paragrafo abbiamo introdotto per la prima volta il concetto di energia, nel caso particolare quella cinetica; in seguito troveremo altre forme di

energia (energia potenziale legata ai vari tipi di forze). Tutte le leggi con cui vengono definite le varie forme di energia contengono sempre la *variazione di energia* e pertanto tali quantità possono essere definite a meno di una costante. Per esempio l'energia cinetica di un punto potrebbe essere scritta come $\frac{1}{2} m v^2 + \text{costante}$, senza modificare la (2.15) in quanto nella differenza la costante scompare. Però si avrebbe che questa forma di energia, legata al movimento, sarebbe non nulla anche se $v = 0$, il che non ha molto senso. Poniamo dunque, in questo caso, la costante eguale a zero.

Il lavoro è la manifestazione dell'azione di una forza ed è quindi conseguenza dell'interazione con l'ambiente circostante. Si parla pertanto di lavoro *scambiato* e non si dice mai che un sistema possiede lavoro.

Si parla invece di *energia posseduta* dal sistema, che viene modificata dall'interazione con l'ambiente esterno. Un effetto misurabile dell'interazione è la variazione di energia.

2.16 Lavoro della forza peso

Calcoliamo il lavoro della forza peso $m\mathbf{g}$ per uno spostamento generico dalla posizione A a quella B (figura 2.41). L'asse z è orientato dal suolo verso l'alto ed ha quindi verso opposto a \mathbf{g} . Da (2.13)

$$W = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \mathbf{F} \cdot \int_A^B d\mathbf{s} = m\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}_{AB};$$

infatti \mathbf{F} è costante e l'integrale vale $\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A = \mathbf{r}_{AB}$.

Poiché il peso ha una sola componente diversa da zero, quella secondo l'asse z che vale $-mg$, e la componente di \mathbf{r}_{AB} lungo l'asse z è $z_B - z_A$, il prodotto scalare si scrive semplicemente $(m\mathbf{g})_z (\mathbf{r}_{AB})_z = -mg(z_B - z_A)$ e pertanto il lavoro della forza peso vale

$$W = -(mgz_B - mgz_A) = -(E_{p,B} - E_{p,A}) = -\Delta E_p.$$

Con $E_p = mgz$ indichiamo una funzione della coordinata z del punto (misurata lungo un asse parallelo e di verso opposto alla forza peso) che ha questa proprietà: *il lavoro è eguale all'opposto della variazione di questa funzione durante lo spostamento da A a B e pertanto non dipende dalla particolare traiettoria che collega A e B* . La funzione E_p si chiama *energia potenziale della forza peso*.

Se il punto B si trova in una posizione più bassa di A il lavoro della forza peso è positivo; andando da A a B , E_p diminuisce: possiamo osservare che questo è lo spostamento *naturale* di un punto P sottoposto alla sola forza peso. Se il punto B è invece in una posizione più alta di A , $W < 0$, E_p aumenta: per fare avvenire questo spostamento bisogna che il punto abbia una sufficiente velocità iniziale così che la diminuzione di energia cinetica eguagli il lavoro oppure bisogna applicare al punto un'altra forza il cui lavoro motore superi in modulo il lavoro resistente della forza peso.

La figura 2.42 illustra queste due situazioni con riferimento al problema di far salire un punto materiale lungo un piano inclinato.

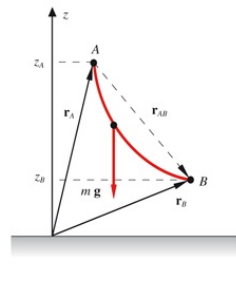


FIGURA 2.41

Lavoro della forza peso

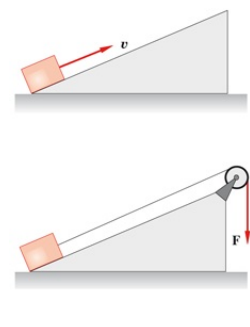


FIGURA 2.42

Esempio 2.22

Un punto di massa m si trova alla base di un piano inclinato liscio; se la velocità iniziale vale v_A ed è diretta come nella prima della figura 2.42, calcolare qual è l'altezza rispetto alla base della posizione in cui il punto si ferma.

Soluzione

Durante la salita la componente della forza peso parallela al piano inclinato si oppone al moto del punto, sviluppando il lavoro resistente

$$W = -(mgz_B - mgz_A) = -mgh_B \quad ,$$

con $h_B = z_B - z_A$ quota della posizione generica rispetto alla base (si provi a verificare il risultato utilizzando la definizione (2.13) e l'espressione della componente della forza peso). Per il teorema dell'energia cinetica

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} mv_B^2 - \frac{1}{2} mv_A^2 &= W = -mgh_B \\ \Rightarrow \frac{1}{2} mv_B^2 &= \frac{1}{2} mv_A^2 - mgh_B \quad . \end{aligned}$$

Il punto dunque riesce a salire alla quota h_B in quanto possiede un'energia cinetica iniziale: durante la salita l'energia cinetica diminuisce e la diminuzione è eguale al lavoro resistente della forza peso, ovvero all'aumento della funzione E_p da mgz_A a mgz_B . Il punto si ferma quando la sua energia cinetica è nulla, alla quota

$$h_B = \frac{v_A^2}{2g} \quad ,$$

indipendente dall'angolo di inclinazione del piano. Abbiamo già trovato questo risultato per via cinematica ($x = v_A t - \frac{1}{2} at^2$, $v = v_A - at$, con $a = g \sin\theta$ e $h_B = x \sin\theta$). Il metodo appena visto è certamente più semplice.

Visualizza Soluzione

Lavoro di una forza costante

La trattazione fatta per la forza peso si estende a qualsiasi altra forza costante \mathbf{F} . Prendendo come asse z un asse parallelo e discorde a \mathbf{F} , il lavoro di \mathbf{F} per uno spostamento tra due punti, le cui coordinate z sono z_A e z_B , vale

$$W = -(Fz_B - Fz_A) = -\Delta E_p \quad ,$$

dove ora $E_p = Fz$. Se invece si scegliesse l'asse z concorde a \mathbf{F} , sarebbe sempre $W = -\Delta E_p$, con $E_p = -Fz$ ($= -mgz$ nel caso del peso).

2.17 Lavoro di una forza elastica

Il lavoro della forza elastica $\mathbf{F} = -kx\mathbf{u}_x$ per uno spostamento lungo l'asse x vale

$$W = \int_A^B -kx \mathbf{u}_x \cdot dx \mathbf{u}_x = -k \int_A^B x dx = \frac{1}{2} k x_A^2 - \frac{1}{2} k x_B^2 = -\Delta E_p :$$

$E_p = \frac{1}{2} k x^2$, funzione solo della posizione, è l' *energia potenziale elastica*.

Se la coordinata iniziale è maggiore di quella finale, cioè se il punto si muove verso il centro della forza, il lavoro compiuto dalla forza elastica è positivo, E_p diminuisce (spostamento *naturale*). Nel caso contrario di allontanamento dal centro $W < 0$, E_p aumenta: per eseguire tale spostamento il punto deve possedere una velocità iniziale oppure si deve applicare una forza opportuna.

Esempio 2.23

Un punto materiale fissato ad una molla di costante elastica k è in quiete nell'origine (figura 2.43). Si applica al punto una forza $\mathbf{F} = F\mathbf{u}_x$, costante in modulo, direzione e verso, e il punto si porta nella posizione di coordinata $x > 0$. Calcolare la velocità del punto in funzione di x e la posizione in cui il punto si ferma.

Soluzione

Il lavoro motore compiuto dalla forza \mathbf{F} per uno spostamento x è semplicemente Fx , mentre il lavoro resistente della forza elastica vale

$$W_{el} = -\Delta E_p = \frac{1}{2} kx_A^2 - \frac{1}{2} kx_B^2 = -\frac{1}{2} kx^2 \quad ,$$

essendo $x_A = 0$ e $x_B = x$. Quindi, dato che la velocità iniziale è nulla,

$$Fx - \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} mv^2 \Rightarrow v(x) = \sqrt{\frac{x}{m} (2F - kx)} \quad .$$

Il punto si ferma quando la sua velocità è nulla, il che avviene nell'origine, secondo l'ipotesi, e nella posizione

$$x = \frac{2F}{k} \quad .$$

Questa è la massima deformazione della molla (purché x sia inferiore alla lunghezza a riposo della molla). Si osservi che non si tratta della posizione di equilibrio statico ($F = kx_s$, $x_s = F/k$): tale situazione si otterrebbe ad esempio comprimendo la molla con altri mezzi fino alla deformazione x_s ,

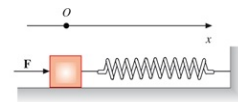


FIGURA 2.43
(Esempio 2.23)

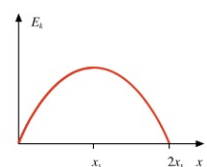
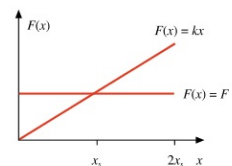


FIGURA 2.44
(Esempio 2.23)

mantenendola ferma e applicando poi la forza F . Invece, nel nostro caso, da $x = 0$ a $x = x_s$ F è maggiore del modulo della forza elastica e il punto acquista energia cinetica, che poi perde nel successivo tratto da $x = x_s$ a $x = 2x_s = 2F/k$, in cui F è minore del modulo della forza elastica. Nella figura 2.44 sono mostrati i moduli delle forze in funzione di x . L'area sotto ciascuna curva $F(x)$ è data dallo integrale $\int F(x)dx$ ed è quindi eguale al lavoro : si vede subito che da zero a x_s il lavoro motore è maggiore di quello resistente e che il contrario succede da x_s a $2x_s$; alla fine le due aree sono eguali, cioè i due lavori sono eguali, e dato che in realtà sono di segno opposto si annullano. Sotto il grafico delle forze è mostrata l'energia cinetica, pari alla somma algebrica dei lavori. Si verifichi che essa è massima in x_s con valore $F^2/2k$; si verifichi anche come la formula di $v(x)$ si ottenga applicando la (1.7).

Visualizza Soluzione

2.18 Lavoro di una forza di attrito radente

La forza di attrito radente è data da (2.6); ricordando che il vettore \mathbf{u}_v è parallelo e concorde allo spostamento $d\mathbf{s}$, il lavoro corrispondente si scrive

$$W = \int_A^B \mathbf{F}_{ad} \cdot d\mathbf{s} = \int_A^B -\mu_d N \mathbf{u}_v \cdot d\mathbf{s} = -\mu_d N \int_A^B ds ,$$

Lavoro della forza di attrito radente

dove l'integrale scalare $\int_A^B ds$ è la lunghezza del percorso da A a B , misurata lungo *la traiettoria effettiva del punto materiale*. Pertanto, a parità dei fattori μ_d e N , abbiamo un lavoro diverso a seconda della forma della traiettoria: il lavoro della forza di attrito radente dipende dal percorso e non è esprimibile come differenza dei valori di una funzione delle coordinate nei punti A e B , diversamente da quanto avviene per la forza peso e per la forza elastica. Il risultato resta vero in generale, anche se la reazione normale non è costante.

Il lavoro della forza di attrito radente è sempre negativo, cioè è lavoro resistente (si noti che se cambia il verso del moto, cambia anche quello della forza di attrito, sempre opposta alla velocità).

Perché possa verificarsi il moto o deve agire un'altra forza che produca un lavoro motore oppure, in assenza di questa, il punto deve possedere una certa velocità iniziale ovvero una certa energia cinetica $E_{k, A}$. L'energia cinetica diminuisce lungo il percorso e in B la velocità è minore che in A . In particolare, data $E_{k, A}$ e se N è costante, il punto si ferma dopo un percorso $s_{AB} = E_{k, A} / \mu_d N$.

Esempio 2.24

Un punto materiale di massa m passa nell'origine di un asse x orizzontale con velocità v_0 , concorde all'asse. Per $x > 0$ agisce una forza di attrito dinamico, con coefficiente μ_d . Calcolare dopo quanto tempo il punto si ferma e in quale posizione.

Soluzione

La forza agente è $-\mu_d mg \mathbf{u}_x$, costante nel tempo; dal teorema dell'impulso (2.3)

$$mv - mv_0 = -\mu_d mgt \Rightarrow \text{se } v = 0 \quad t = \frac{v_0}{\mu_d g} .$$

Dal teorema dell'energia cinetica (2.15)

$$\frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_0^2 = -\mu_d mgx$$

$$\Rightarrow \text{se } v = 0 \quad x = \frac{v_0^2}{2\mu_d g} = \frac{1}{2} \mu_d g t^2 .$$

Invece delle leggi integrali si possono naturalmente usare le leggi del moto,

$$a = -\mu_d g \quad , \quad v = v_0 + at \quad , \quad x = v_0 t + \frac{1}{2} at^2 .$$

Visualizza Soluzione

Esempio 2.25 Stima del tempo di durata di un urto

Un punto di massa m con velocità v urta contro un ostacolo fisso e vi penetra fermandosi in uno spazio Δx . Calcolare il tempo di arresto Δt .

Soluzione

Durante l'urto agisce una forza che frena il punto; indichiamo con F_m il valore medio della forza durante il tempo di arresto. Appliciamo (2.3) e (2.15), passando direttamente ai moduli:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} mv^2 &= F_m \Delta x \quad , \quad mv = F_m \Delta t \quad , \\ \Delta t &= \frac{mv}{F_m} = \frac{mv \Delta x}{F_m \Delta x} = \frac{mv \Delta x}{\frac{1}{2} mv^2} = \frac{2 \Delta x}{v} . \end{aligned}$$

Ad esempio, con $m = 0.02$ kg e $v = 100$ m/s, se si misura $\Delta x = 1$ cm si ha

$$\Delta t = \frac{2 \cdot 10^{-2}}{10^2} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ s}, \quad F_m = \frac{2 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 10^{-4}} = 10^4 \text{ N} .$$

Tipicamente il tempo di arresto è molto breve e, in questo intervallo, la forza frenante è molto intensa.

Visualizza Soluzione

2.19 Forze conservative. Energia potenziale

I tre esempi di calcolo di lavoro (paragrafi 2.16, 2.17, 2.18) presentano una differenza sostanziale: nei primi due (forza peso e forza elastica) il lavoro viene a dipendere solo dalle coordinate delle posizioni A e B e non dal particolare percorso che congiunge A a B , nel terzo (forza di attrito) invece il lavoro dipende dalla traiettoria.

Le forze del primo tipo, quelle per cui il lavoro non dipende dal percorso, si chiamano *forze conservative*. Per il calcolo del lavoro possiamo utilizzare qualsiasi percorso che colleghi A a B :

$$\int_A^B (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s})_I = \int_A^B (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s})_{II} = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \quad .$$

Il lavoro lungo il percorso I coincide con quello lungo il percorso II o lungo qualsiasi altro (e per eseguire il calcolo pratico possiamo così scegliere il percorso analiticamente più comodo).

Il lavoro è pertanto esprimibile come differenza dei valori che una funzione delle coordinate assume in A e in B (l'abbiamo visto negli esempi e ci ritorneremo più in generale nel paragrafo 2.21). Ciò comporta che se si inverte il senso di percorrenza, cioè si va da B a A , cambia solo il segno del lavoro:

$$\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = - \int_B^A \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \quad .$$

Per un percorso chiuso ABA lungo la traiettoria I e la traiettoria $-II$ (cioè la traiettoria II percorsa in senso inverso) si ha

$$\int_A^B (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s})_I + \int_B^A (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s})_{-II} = \int_A^B (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s})_I - \int_A^B (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s})_{II} = 0 \quad .$$

Di conseguenza *lungo un qualsiasi percorso chiuso il lavoro è nullo*:

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad .$$

Questa proprietà si può assumere come definizione di forza conservativa (perfettamente equivalente alla precedente definizione). Per chiarezza precisiamo che in tutti gli integrali scritti finora la forza in generale è diversa da punto a punto lungo ciascuna traiettoria e quindi è diversa da traiettoria a traiettoria; però l'integrale di linea non dipende dalla traiettoria.

La funzione delle coordinate di cui abbiamo parlato finora si chiama *energia potenziale* e per tutte le forze conservative vale la relazione

$$W = E_{p,A} - E_{p,B} = -\Delta E_p \quad . \quad (2.16)$$

Non esiste una formula generale per l'energia potenziale, ma l'espressione

Forze conservative

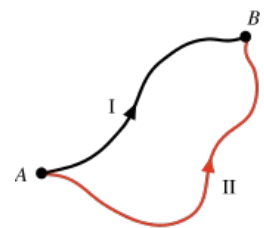


FIGURA 2.45

Energia potenziale

esplicita dipende dalla particolare forza conservativa cui essa si riferisce. Nei due casi che abbiamo discusso si è ottenuto per la forza peso $E_p = mgz$ e per la forza elastica $E_p = \frac{1}{2} k x^2$, come abbiamo già evidenziato.

Bisogna sottolineare che la (2.16), la quale in sostanza permette di esprimere il valore del lavoro direttamente tramite la variazione dell'energia potenziale, non ha il carattere generale di (2.15): quest'ultima è utilizzabile sempre, con qualsiasi tipo di forza agente. In altre parole, per il calcolo del lavoro vale (2.16) se le forze sono conservative, altrimenti bisogna usare la definizione (2.13); però, comunque si sia arrivati a W , vale sempre (2.15).

La (2.16) permette il calcolo esplicito dell'espressione dell'energia potenziale e ne precisa il significato fisico, legandolo alla capacità di fornire lavoro. Infatti quando durante il moto l'energia potenziale diminuisce ($\Delta E_p < 0$), il lavoro compiuto dalla forza è positivo e può essere utilizzato. Se invece l'energia potenziale aumenta ($\Delta E_p > 0$) il lavoro è negativo e ciò in pratica vuol dire che bisogna fornire lavoro dall'esterno per fare avvenire quel determinato processo. Per un percorso chiuso $E_{p,A} = E_{p,B}$ e $W = 0$, come si è detto: se si spende lavoro per fare aumentare E_p nel passaggio da A a B , quando si torna da B ad A si ricava esattamente quanto speso e, viceversa, se si ricava lavoro nel passaggio da A a B bisogna spenderne altrettanto per riportare il punto da B ad A . *Da una forza conservativa non si può ricavare lavoro se il percorso è chiuso ovvero, come si dice, se il processo è ciclico.*

L'energia potenziale viene definita a meno di una costante additiva, che è ininfluente nella valutazione del lavoro. Consideriamo infatti, nel caso dell'energia potenziale associata alla forza peso, di assumere il livello zero su un piano passante per l'origine dell'asse z e ortogonale a questo: $E_p = m g z$. Se scegliamo una diversa origine delle coordinate (nella figura 2.46 gli assi z e z' sono disegnati distinti per chiarezza), $E_p' = mgz' = mg(z + z_0)$ essendo appunto le coordinate di P rispetto a O' e a O legate dalla $z' = z + z_0$. Quindi

$$E_p' = E_p + m g z_0 = E_p + \text{costante.}$$

Nella (2.16) compare la variazione dell'energia potenziale e la costante viene eliminata: pur dipendendo il valore di E_p dalla scelta dell'origine, non ne dipende il lavoro della forza peso per gli spostamenti del punto materiale P .

Ritornando a quanto visto all'inizio del paragrafo, sappiamo che ci sono forze per le quali non vale la proprietà di invarianza del lavoro rispetto al percorso e non è quindi possibile esprimere il lavoro tramite le differenze dei valori di una funzione delle coordinate. Queste forze si chiamano *non conservative* e per esse non si può introdurre l'energia potenziale. Il lavoro di una forza non conservativa si calcola con (2.13) ed è sempre eguale, come per qualsiasi forza, alla variazione di energia cinetica.

Una classe particolare di forze non conservative sono le forze di attrito, dette

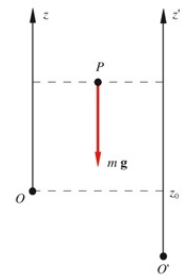


FIGURA 2.46

Forze non conservative

Forze dissipative

anche forze *dissipative*.

2.20 Conservazione dell'energia meccanica

Se agiscono solo forze conservative valgono sia (2.15) che (2.16):

$$W = \Delta E_k = E_{k,B} - E_{k,A} \quad , \quad W = -\Delta E_p = E_{p,A} - E_{p,B} \quad .$$

Eguagliando le due relazioni si ha

$$E_{k,A} + E_{p,A} = E_{k,B} + E_{p,B} \quad :$$

la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale di un punto materiale che si muove sotto l'azione di forze conservative resta costante durante il moto, ossia si conserva. Tale somma si chiama *energia meccanica* e vale pertanto, in presenza di forze conservative, il *principio di conservazione dell'energia meccanica*:

$$E_m = E_k + E_p = \text{costante} \quad . \quad (2.17)$$

Principio di
conservazione
dell'energia
meccanica

Possiamo adesso completare la discussione iniziata nel paragrafo precedente a proposito della (2.16). Il lavoro ottenuto a spese della diminuzione di energia potenziale causa un aumento dell'energia cinetica e viceversa, in accordo con (2.17), cioè col fatto che la somma delle energie sia costante. Durante il moto avviene una trasformazione da una forma di energia all'altra, per tramite di lavoro compiuto e assorbito, ma il contenuto energetico totale, dato dall'energia meccanica, non cambia.

Discuteremo alcune applicazioni del principio di conservazione dell'energia negli esempi successivi. Se però esaminiamo l'esempio 2.22, riconosciamo un'applicazione di (2.17): il punto possiede inizialmente una certa energia cinetica (pertanto su di esso era stato compiuto lavoro) e alla fine della salita si verifica che $\Delta E_k = -\Delta E_p$, il lavoro è andato in aumento dell'energia potenziale. Analogamente, si riveda sotto questo aspetto l'esempio 2.23: ci si accorgerà che la soluzione corrisponde alla condizione che l'energia meccanica sia la stessa all'inizio e alla fine (avendo posto $E_p = -Fx + \frac{1}{2}kx^2$).

Quando agiscono, come avviene in generale, sia forze conservative che non conservative, il lavoro complessivo è dato dalla somma del lavoro delle forze conservative W_c e di quello delle forze non conservative W_{nc} e, secondo (2.15),

$$W = W_c + W_{nc} = E_{k,B} - E_{k,A} \quad .$$

Esprimendo W_c tramite (2.16) si ha

$$\begin{aligned} E_{p,A} - E_{p,B} + W_{nc} &= E_{k,B} - E_{k,A} \\ \Rightarrow W_{nc} &= (E_{k,B} + E_{p,B}) - (E_{k,A} + E_{p,A}) = E_{m,B} - E_{m,A} \quad . \end{aligned} \quad (2.18)$$

Lavoro delle forze non
conservative

In presenza di forze non conservative l'energia meccanica non resta costante e la sua variazione è eguale al lavoro delle forze non conservative.

In qualunque processo meccanico si osserva sperimentalmente che è sempre presente una forza di attrito che si oppone al moto. Se tutte le altre forze sono conservative, nella (2.18) $W_{nc} = W_{diss} < 0$ e quindi l'energia meccanica diminuisce durante il processo. A questa situazione si può porre rimedio con l'intervento di altre forze non conservative e l'energia meccanica del punto può essere mantenuta costante o anche aumentare. Tali variazioni sono sempre regolate da (2.18). Se però si considera un sistema più vasto, costituito dal punto e dal meccanismo che ha fornito il lavoro non conservativo, si trova sempre che l'energia meccanica complessiva non si conserva, ma diminuisce a causa di effetti dissipativi. Nei fenomeni macroscopici questa appare una legge naturale; vedremo in termodinamica come si possa ristabilire una legge più generale di conservazione dell'energia.

Esempio 2.26 Conservazione dell'energia. Forza peso

Consideriamo un sistema meccanico formato da un punto materiale che può muoversi lungo il piano inclinato PB , il piano orizzontale BC e il piano inclinato CQ ; tutti i piani sono lisci. Abbandoniamo il punto in A con velocità iniziale nulla e determiniamo dove arriva.

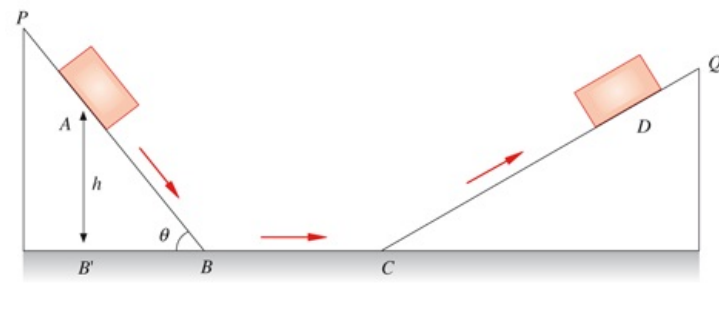


FIGURA 2.47

Soluzione

In assenza di attrito la reazione vincolare è sempre normale alla traiettoria. Pertanto la sola forza che determina il moto è la forza peso, forza conservativa. Applichiamo per risolvere il problema la conservazione dell'energia meccanica (2.17):

$$\text{in } A \quad E_{p,A} = m g h, \quad E_{k,A} = 0, \quad E_{m,A} = m g h$$

$$\text{in } B \quad E_{p,B} = 0, \quad E_{k,B} = \frac{1}{2} m v^2, \quad E_{m,B} = \frac{1}{2} m v^2 \quad ;$$

deve essere

$$E_{m,A} = E_{m,B} \Rightarrow m g h = \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow v = v_B = \sqrt{2 g h} \quad .$$

Nel tratto AB l'energia potenziale si è trasformata in energia cinetica. Osserviamo che si è ritrovato il risultato del paragrafo 1.5: è come se il punto cadesse lungo la verticale, infatti ai fini della variazione dell'energia potenziale conta solo la differenza di quota $h = z_A - z_B = z_A - z_{B'}$. La velocità di arrivo

sul piano orizzontale passante per B è la stessa sia per una caduta lungo la verticale AB' che lungo il piano inclinato AB o qualsiasi altro percorso simile. Quello che è diverso è il tempo impiegato; per AB' sappiamo dal paragrafo 1.5 che vale $t' = \sqrt{2h/g}$. Nel moto lungo il tratto AB , essendo l'accelerazione $g \sin \theta$ lo spazio percorso $h/\sin \theta$, si ha $h/\sin \theta = \frac{1}{2} g \sin \theta t^2$

$$t = \sqrt{2 h/g \sin^2 \theta} = t' / \sin \theta > t' .$$

Da B a C il moto è rettilineo uniforme e quindi $v_C = v_B$. Il punto affronta il secondo piano inclinato avendo l'energia cinetica $\frac{1}{2} m v_B^2$ e si ferma nella posizione D in cui l'energia cinetica si è trasformata integralmente in energia potenziale: pertanto D si trova alla stessa quota di A , qualunque sia l'inclinazione del piano CD . Successivamente il punto tornerebbe indietro arrestandosi in A e così via: in assenza di attrito avremmo un'oscillazione perpetua. Se il punto ha una velocità iniziale $v_A > 0$ (diretta verso B), scriviamo per l'energia

$$\text{in } A \quad E_{m,A} = m g h + \frac{1}{2} m v_A^2$$

$$\text{in } B \quad E_{m,B} = \frac{1}{2} m v_B^2 \Rightarrow v_B = \sqrt{v_A^2 + 2 g h}$$

$$\text{in } C \quad E_{m,C} = E_{m,B} = \frac{1}{2} m v_B^2$$

$$\text{in } D' \quad E_{m,D'} = m g h'$$

e dall'eguaglianza $mgh + \frac{1}{2} m v_A^2 = mgh'$ si ricava

$$h' = h + \frac{v_A^2}{2g} \quad ;$$

il punto D' è ad una quota più alta rispetto ad A .

Visualizza Soluzione

Esempio 2.27

Conservazione dell'energia. Forza elastica

Abbiamo un punto materiale fermo all'estremità di una molla a riposo posta in un piano orizzontale

liscio e fissata all'altro estremo ad un vincolo fisso. Comunichiamo al punto, in un tempo estremamente breve, un impulso \mathbf{J} , parallelo e concorde all'asse x e determiniamo di quanto si comprime la molla.

Per effetto dell'impulso il punto materiale inizia a muoversi con velocità \mathbf{v}_0 , parallela e concorde all'asse x , pari a \mathbf{J}/m secondo (2.3). La reazione vincolare del piano è normale al piano stesso e l'unica forza che determina il moto è quella elastica della molla, conservativa, per cui possiamo applicare (2.17). Nella posizione iniziale la molla è a riposo, l'energia potenziale elastica è nulla e $E_{m,A} = \frac{1}{2} m v_0^2$ nella posizione finale il punto è fermo, la molla è deformata dalla quantità x_0 e $E_{m,B} = \frac{1}{2} k x_0^2$. Da $E_{m,A} = E_{m,B}$ segue $x_0 = v_0 m/k$.

Nel moto da A a B si ha una *trasformazione dell'energia cinetica in energia potenziale elastica*. Il punto non può restare fermo in B , dato che la molla si trova in uno stato di compressione, e quindi, per effetto della forza elastica diretta verso A , esso ritorna nella posizione iniziale dove passa con velocità

$$v_0 \left(\frac{1}{2} k x_0^2 \text{ si è trasformata in } \frac{1}{2} m v_0^2 \right).$$

Di qui il punto prosegue e, frenato dalla forza elastica, si ferma nel punto C di coordinata $-x_0$, dove l'energia cinetica si è trasformata integralmente in energia potenziale elastica. Da C il punto ritorna in A e inizia una nuova oscillazione identica alla precedente: si tratta di oscillazioni armoniche di ampiezza x_0 e pulsazione k/m , che continuerebbero indefinitamente in assenza di attrito.

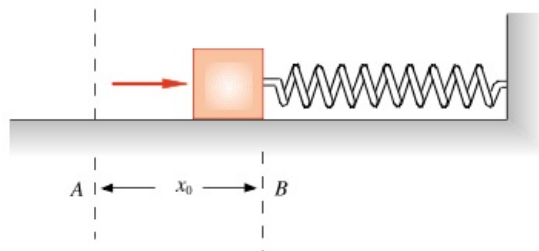


FIGURA 2.48

Esempio 2.28 Conservazione dell'energia. Pendolo semplice

Nello studio del moto di un pendolo semplice possiamo applicare la conservazione dell'energia dato che, in assenza di attrito, agiscono la forza peso, forza conservativa, e la tensione del filo, che non compie lavoro essendo sempre normale alla traiettoria. Assumiamo nulla l'energia potenziale nel punto più basso, dove il punto P passa per la verticale; dalla figura 2.49 si vede che l'altezza di P , rispetto al livello zero, è $L - L \cos\theta = L(1 - \cos\theta)$. Scriviamo le energie in tre posizioni diverse: a) nel punto di inversione (il più alto)

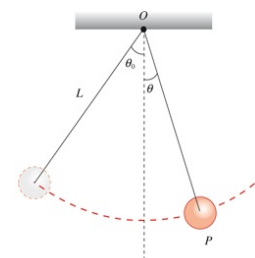


FIGURA 2.49 (Esempio 2.28)

$$E_p = m g L (1 - \cos\theta_0) \quad , \quad E_k = 0$$

b) in un punto generico

$$E_p = m g L (1 - \cos\theta) \quad , \quad E_k = \frac{1}{2} m v^2$$

2 c) nel punto più basso

$$E_p = 0 \quad , \quad E_k = \frac{1}{2} m v_0^2$$

Da a) e b), in base a (2.17),

$$m g L (1 - \cos\theta) + \frac{1}{2} m v^2 = m g L (1 - \cos\theta_0) \quad ,$$

da cui si ricava la velocità in funzione della posizione angolare

$$v = \sqrt{2 g L (\cos\theta - \cos\theta_0)} \quad ;$$

in particolare, nel punto più basso la velocità è massima e vale

$$v_0 = \sqrt{2 g L (1 - \cos\theta_0)} \quad .$$

Se $\theta_0 = \pi/2$, $v_0 = \sqrt{2gL}$: in ogni caso il risultato per v è quello che si otterrebbe se il punto cadesse liberamente.

Anche la tensione del filo può essere calcolata in funzione dell'angolo inserendo nella (2.11) l'espressione della velocità:

$$T = m g (3 \cos\theta - 2 \cos\theta_0) \quad .$$

Sottolineiamo che le relazioni ottenute valgono per qualsiasi valore di θ_0 e non solo per le piccole oscillazioni.

Esempio 2.29

Un punto si muove su un asse orizzontale liscio con velocità v_0 . Quando passa nella posizione A esso inizia a salire lungo una guida circolare liscia di raggio R , che giace in un piano verticale. Calcolare la velocità del punto e la reazione della guida in B e in C . Qual è il valore minimo di v_0 affinché il punto arrivi in C mantenendo il contatto con la guida?

Soluzione

La velocità nei vari punti della guida si ricava applicando il principio di conservazione dell'energia meccanica:

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v^2 + m g h \Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 - 2gh} \quad ,$$

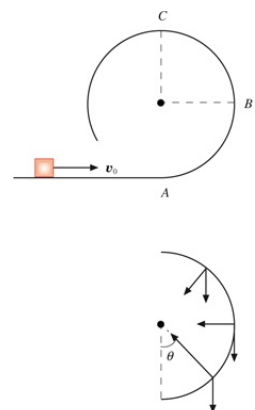


FIGURA 2.50
(Esempio 2.29)

essendo h la quota rispetto alla base A . Pertanto

$$\begin{aligned} \text{in } B \quad h &= R, \quad v_B = \sqrt{v_0^2 - 2gR} \quad , \\ \text{in } C \quad h &= 2R, \quad v_C = \sqrt{v_0^2 - 4gR} \quad . \end{aligned}$$

La reazione normale della guida si somma alla componente della forza peso normale alla guida per dare la necessaria forza centripeta:

$$N - mg \cos\theta = m \frac{v^2}{R} \quad .$$

In A la reazione è massima, per poi decrescere con continuità fino a C . Abbiamo:

$$\begin{aligned} \text{in } A \quad N - mg &= m \frac{v_0^2}{R} \quad \Rightarrow \quad N_A = m \frac{v_0^2}{R} + mg \quad , \\ \text{in } B \quad N &= m \frac{v_B^2}{R} \quad \Rightarrow \quad N_B = m \frac{v_0^2}{R} - 2mg \quad , \\ \text{in } C \quad N + mg &= m \frac{v_C^2}{R} \quad \Rightarrow \quad N_C = m \frac{v_0^2}{R} - 5mg \quad . \end{aligned}$$

In questo calcolo si suppone che il punto sia sempre a contatto con la guida; dato che N non può mai essere negativa, il valor minimo possibile in C è $N_C = 0$, da cui segue

$$m \frac{v_0^2}{R} = 5mg \quad \Rightarrow \quad v_0 = \sqrt{5gR} = v_{\min} \quad .$$

Se v_0 è inferiore a questo limite il punto si stacca dalla guida prima di arrivare in C e segue una traiettoria parabolica. Con $v_0 = v_{\min}$ si ha $v_B = 3gR$, $N_B = 3mg$, $v_C = gR$.

Visualizza Soluzione

Esempio 2.30 Non conservazione dell'energia

Un punto materiale si trova sopra un piano non liscio, ad una quota h e con velocità iniziale nulla. Supponiamo che sia $\tan\theta > \mu_s$ (paragrafo 2.9) e determiniamo con che velocità il punto arriva in fondo.

Soluzione

Il lavoro della forza di attrito lungo il tratto PO è

$$W_{\text{diss}} = -\mu_d N |PO| = -\mu_d m g \cos\theta \frac{h}{\sin\theta} ;$$

applicando (2.18)

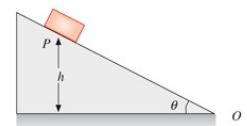


FIGURA 2.51
(Esempio 2.30)

$$-\mu_d m g \frac{h}{\operatorname{tg}\theta} = \frac{1}{2} m v_0^2 - m g h$$

da cui si ricava la velocità finale

$$v_0 = \sqrt{2 g h \left(1 - \frac{\mu_d}{\operatorname{tg}\theta}\right)} .$$

Vediamo che dell'energia potenziale iniziale mgh solo la frazione $1 - \mu_d / \operatorname{tg}\theta$ si è trasformata in energia cinetica, mentre la frazione $\mu_d / \operatorname{tg}\theta$ è stata dissipata a causa dell'attrito.

Altri casi di non conservazione dell'energia a causa di fenomeni dissipativi sono stati trattati negli esempi 2.24 e 2.25. Si rivedano sotto questo aspetto anche gli esempi 2.8 e 2.9.

Visualizza Soluzione

Esempio 2.31

Un corpo di massa $m = 8 \text{ kg}$ è fermo al suolo. Esso viene sollevato ad un'altezza $h = 2 \text{ m}$ e acquista una velocità $v = 5 \text{ m/s}$. Calcolare il lavoro che occorre spendere in questo processo. Si supponga poi che il moto avvenga lungo una guida verticale, contro cui il corpo è premuto da una forza $N = 100 \text{ N}$, in presenza di attrito radente con coefficiente $\mu_d = 0.4$. Determinare il lavoro necessario in questo secondo caso, a parità di condizioni finali.

Soluzione

L'energia meccanica del corpo passa dal valore $E_{m,A} = 0$ al valore

$$E_{m,B} = \frac{1}{2} m v^2 + m g h = 256.8 \text{ J} .$$

In assenza di attrito il lavoro che occorre fornire si ricava da (2.18):

$$W = E_{m,B} - E_{m,A} = 256.8 \text{ J} .$$

Nel caso con attrito

$$W_{\text{diss}} = -\mu_d N h = -80 \text{ J}$$

e quindi, sempre secondo (2.18),

$$W + W_{\text{diss}} = E_{m,B} - E_{m,A} \Rightarrow W = 336.8 \text{ J} .$$

Visualizza Soluzione

2.21 Relazione tra energia potenziale e forza

Riprendiamo in considerazione le relazioni (2.13) e (2.16), a livello infinitesimo:

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = F_x dx + F_y dy + F_z dz = -dE_p,$$

dove F_x , F_y , F_z sono le componenti della forza conservativa \mathbf{F} . Per un percorso chiuso si ha

$$\oint (F_x dx + F_y dy + F_z dz) = 0$$

Si dimostra che la validità di tale proprietà per qualsiasi linea chiusa è la condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di una funzione delle coordinate E_p tale che

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z}. \quad (2.19)$$

Le quantità $\partial E_p / \partial x$, $\partial E_p / \partial y$, $\partial E_p / \partial z$ sono le derivate parziali della funzione E_p rispetto alle variabili x , y , z (si vedano le appendici A e C per queste nozioni e quella successiva di gradiente). In modo compatto le (2.19) si scrivono

$$\mathbf{F} = -\mathbf{grad} E_p = -\nabla E_p \quad ; \quad (2.20)$$

la forza è l'opposto del gradiente dell'energia potenziale ed è perciò diretta secondo il verso di massima diminuzione di E_p .

Il luogo dei punti nello spazio nei quali l'energia potenziale assume lo stesso valore si chiama *superficie equipotenziale*. Per uno spostamento lungo una tale superficie il lavoro è nullo, secondo (2.16), e pertanto la forza associata all'energia potenziale è normale, in ogni punto, alla superficie equipotenziale passante per quel punto e indica, con il suo verso, quello di diminuzione di E_p .

L'energia potenziale associata alla forza peso è $E_p = m g z$, se l'asse z è orientato verso l'alto. Da (2.19) la forza peso è

$$\mathbf{F} = -\frac{dE_p}{dz} \mathbf{u}_z = -m g \mathbf{u}_z,$$

di verso opposto a quello dell'asse z . Nel caso della forza elastica, $E_p = \frac{1}{2} k x^2$ e la forza elastica vale

$$\mathbf{F} = -\frac{dE_p}{dx} \mathbf{u}_x = -k x \mathbf{u}_x,$$

con verso opposto a quello della crescita dell'energia potenziale. Entrambi gli esempi sono unidimensionali e non è necessario usare il simbolo di derivata

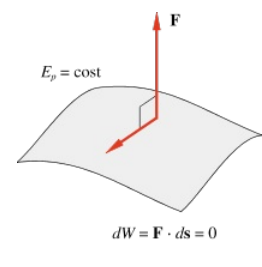


FIGURA 2.52

parziale.

Esempio 2.32

Determinare la forza che corrisponde all'energia potenziale $E_p = 1/2 k (x^2 + y^2)$.

Soluzione

Le componenti della forza si calcolano con (2.19):

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x} = -k x \quad , \quad F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y} = -k y \quad , \quad F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z} = 0$$

$$\Rightarrow \mathbf{F} = -\mathbf{grad} E_p = F_x \mathbf{u}_x + F_y \mathbf{u}_y = -k (x \mathbf{u}_x + y \mathbf{u}_y) = -k \mathbf{r}.$$

\mathbf{F} è pertanto una forza elastica nel piano x, y diretta verso l'origine con modulo proporzionale alla distanza dal centro:

$$F = k \sqrt{x^2 + y^2} = k r.$$

Si tratta dell'estensione bidimensionale del concetto di forza elastica unidimensionale $-kx \mathbf{u}_x$; il moto di un punto sotto l'azione di tale forza sarà trattato nel paragrafo 9.5.

Visualizza Soluzione

2.22 Momento angolare. Momento della forza

Nella trattazione dei vettori in appendice C è discusso il concetto di momento di un vettore rispetto ad un punto. Vediamone le due applicazioni più comuni in meccanica, riferite alla quantità di moto e alla forza.

Si definisce come *momento angolare il momento del vettore quantità di moto*

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times m \mathbf{v} \quad .$$

Nella figura 2.53 il punto O è il *polo* rispetto a cui è calcolato \mathbf{L} ; sappiamo dall'appendice C che se si cambia polo vale la relazione

$$\mathbf{L}_{O'} = \mathbf{L}_O + \mathbf{O'O} \times m \mathbf{v} \quad .$$

In generale il momento angolare è una funzione del tempo, $\mathbf{L}(t)$.

Nel moto curvilineo piano si può esprimere la velocità tramite le sue componenti radiale e trasversa, secondo (1.19), per cui

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m \mathbf{v} = \mathbf{r} \times m (\mathbf{v}_r + \mathbf{v}_\theta) = \mathbf{r} \times m \mathbf{v}_\theta$$

in quanto i vettori \mathbf{r} e \mathbf{v}_r sono paralleli e il loro prodotto vettoriale è nullo. Se il polo O sta nel piano del moto \mathbf{L} risulta ortogonale a tale piano e vale in modulo

$$L = m r v_\theta = m r^2 \frac{d\theta}{dt} \quad . \quad (2.21)$$

dt In particolare, se il moto è circolare $\mathbf{L} = m r^2 \boldsymbol{\omega}$, con riferimento al centro della circonferenza.

Il *momento della forza* è definito come $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$. Se si cambia polo

$$\mathbf{M}_{O'} = \mathbf{M}_O + \mathbf{O'O} \times \mathbf{F}.$$

Quando ad un punto sono applicate più forze con risultante $\mathbf{R} = \sum_i \mathbf{F}_i$ si ha

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_1 + \dots + \mathbf{r} \times \mathbf{F}_n = \mathbf{r} \times (\mathbf{F}_1 + \dots + \mathbf{F}_n) = \mathbf{r} \times \mathbf{R};$$

il momento complessivo è eguale al momento della forza risultante.

Pertanto un sistema di forze applicate nello stesso punto può sempre essere sostituito, nel calcolo dell'accelerazione, del lavoro e del momento complessivi, dalla forza risultante. Tale proprietà non può evidentemente essere utilizzata se le forze sono applicate in punti diversi.

Teorema del momento angolare

Se calcoliamo la variazione nel tempo del momento angolare di un punto materiale P in movimento abbiamo

Momento angolare

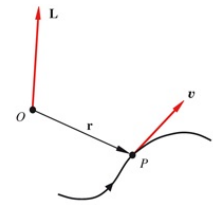


FIGURA 2.53

Momento della forza

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times m \frac{d\mathbf{v}}{dt} ,$$

dove \mathbf{r} è il raggio vettore che congiunge P al polo O . Supponiamo che il polo O sia fermo (nel sistema di riferimento da cui osserviamo il moto); allora $d\mathbf{r}/dt$ coincide con la velocità di P , che è la stessa sia rispetto all'origine che a qualsiasi altro punto fermo, e il primo prodotto vettoriale si annulla. Nel secondo termine, $dv/dt = m\alpha$ coincide con la forza \mathbf{F} applicata al punto P purché il sistema di riferimento sia inerziale (vedi capitolo 3) e quindi $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ è il momento della forza rispetto allo stesso polo O .

In conclusione

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M} , \quad (2.22)$$

Teorema del momento angolare

relazione che rappresenta il *teorema del momento angolare per un punto materiale*: la derivata temporale del momento angolare è eguale al momento della forza se entrambi i momenti sono riferiti allo stesso polo *fisso in un sistema di riferimento inerziale*.

Il momento della forza può essere nullo sia perché la forza è nulla sia quando \mathbf{r} e \mathbf{F} sono paralleli; in tal caso da (2.22)

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0 \quad \text{e quindi} \quad \mathbf{L} = \text{costante.}$$

Conservazione del momento angolare

Il momento angolare di un punto materiale rimane costante nel tempo (si conserva) se il momento delle forze è nullo.

Da (2.22) si ha $\mathbf{M} dt = d\mathbf{L}$ e integrando tra l'istante iniziale e l'istante t (finale)

$$\int_0^t \mathbf{M} dt = \Delta\mathbf{L} = \mathbf{L}_{\text{fin}} - \mathbf{L}_{\text{in}} . \quad (2.23)$$

Per produrre una variazione finita del momento angolare di un punto materiale occorre l'azione, per un certo tempo, del momento di una forza. Tale proprietà è analoga al teorema dell'impulso (2.3), con analoghe considerazioni per quanto riguarda il calcolo effettivo dell'integrale.

Se la forza viene applicata al punto per un tempo molto breve \mathbf{r} è praticamente costante e (2.23) diventa

$$\int_0^t \mathbf{M} dt = \int_0^t (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) dt = \mathbf{r} \times \int_0^t \mathbf{F} dt = \mathbf{r} \times \mathbf{J} = \Delta\mathbf{L} , \quad (2.24)$$

Teorema del momento dell'impulso

detto *teorema del momento dell'impulso*: la variazione di momento angolare è eguale al momento dell'impulso applicato al punto.

Osserviamo infine, con riferimento al moto circolare, che anche il lavoro può essere espresso tramite il modulo del momento della forza. Infatti

$$W = \int_A^B F_T ds = \int_{\theta_A}^{\theta_B} r F_T d\theta = \int_{\theta_A}^{\theta_B} M d\theta \quad (2.25)$$

Lavoro in un moto
circolare

avendo tenuto conto che $ds = r d\theta$ e che la componente normale della forza ha momento nullo rispetto al centro della circonferenza. Vedremo che (2.25) è di grande utilità nello studio del moto di rotazione di un corpo rigido (capitolo 6).

Il teorema del momento angolare è una diretta conseguenza della legge di Newton e l'utilizzazione del momento angolare e del momento della forza e delle loro proprietà, anche se rilevante in alcuni casi specifici, non fornisce nessuna informazione che non sia già ricavabile direttamente con la legge di Newton. Nei problemi di dinamica del punto l'unica legge fondamentale è la seconda legge (2.1). La situazione è diversa, come vedremo, per la dinamica dei sistemi di punti in cui è necessario servirsi, oltre che di forza e accelerazione, anche del momento della forza e del momento angolare. Ci sarà allora di aiuto il formalismo adesso sviluppato per un punto.

Unità di misura

L'unità di misura del momento angolare è m kg ms^{-1} cioè $\text{kg m}^2 \text{s}^{-1}$ ovvero Nms ; l'unità del momento della forza è Nm . Questa unità è formalmente identica al joule, però lavoro e momento della forza sono grandezze con significato fisico molto diverso e quindi si mantengono diverse come nome e simbolo le unità di misure.

2.23 Forze centrali

Si definisce *forza centrale* una forza agente in una certa regione dello spazio con le seguenti proprietà: in qualsiasi punto la sua direzione passa sempre per un punto fisso, detto centro della forza, e il modulo è funzione soltanto della distanza dal centro stesso.

Se \mathbf{u}_r è il vettore della direzione $\mathbf{OP} = \mathbf{r}$, $\mathbf{F} = F(r) \mathbf{u}_r$, con $F(r) > 0$ se la forza è repulsiva e $F(r) < 0$ per una forza attrattiva.

La presenza di una forza, funzione della posizione, che agisce in una certa regione dello spazio, costituisce una modifica dello spazio stesso e stabilisce quello che si chiama un *campo di forza*. Questo campo agisce su ogni particella che si trovi in esso. Il concetto di campo è indispensabile per capire, ad esempio, le forze elettrodinamiche che si esercitano tra cariche elettriche in movimento; in effetti esso fu sviluppato da Faraday per l'elettromagnetismo e applicato successivamente alla gravitazione.

In un campo di forze centrali il momento della forza rispetto al centro è ovunque nullo, dato che i vettori \mathbf{r} e \mathbf{F} sono paralleli. Pertanto da (2.22)

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0 \quad \text{e} \quad \mathbf{L} = \text{costante},$$

in direzione, verso e modulo.

Per definizione \mathbf{L} è sempre ortogonale al piano contenente \mathbf{r} e \mathbf{v} (e su cui stanno O e P). Se \mathbf{L} è costante in direzione tale piano è fisso, cioè \mathbf{r} e \mathbf{v} devono stare sempre nello stesso piano. Pertanto il moto di P è un moto (in generale curvilineo) che avviene in un piano fisso contenente O e determinato dai valori iniziali di \mathbf{r} e \mathbf{v} . La costanza del verso di \mathbf{L} fissa un verso di percorrenza sulla traiettoria.

Dato che il moto è piano il modulo di \mathbf{L} è dato da (2.21): esso rimane costante nel tempo; si noti però che è costante il prodotto $r^2 d\theta/dt$, ma non, in generale, r e $d\theta/dt$ separatamente. In un tempo dt il raggio vettore congiungente O e P spazza l'area infinitesima tratteggiata in figura 2.55, approssimabile a un triangolo di base $r d\theta$ e altezza r e quindi di area $dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta$ (a meno di infinitesimi di ordine superiore). La quantità

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt},$$

detta *velocità areale*, esprime la rapidità con cui viene spazzata l'area dal vettore \mathbf{r} . Da (2.21) risulta

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m} :$$

la costanza del modulo di \mathbf{L} comporta la costanza della velocità areale.

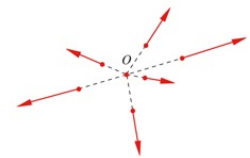


FIGURA 2.54

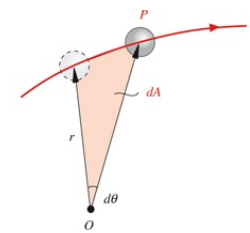


FIGURA 2.55

Velocità areale

Riassumendo, la traiettoria di un punto che si muove in un campo di forze centrali giace in un piano fisso passante per il centro ed è percorsa in modo tale che la velocità areale rimanga costante.

Keplero aveva stabilito sperimentalmente che i pianeti descrivono le loro orbite attorno al sole con velocità areale costante (*seconda legge di Keplero*). Da tale risultato, vedi capitolo 5, Newton dedusse che la forza gravitazionale è una forza centrale (altro esempio di forze centrali sono le forze elastiche).

Seconda legge di Keplero

Se la traiettoria è chiusa, come nel caso dei pianeti, la costanza della velocità areale, $dA/dt = C$, implica che la costante C sia eguale a A/T , dove A rappresenta l'area totale racchiusa dalla traiettoria e T il tempo totale impiegato a percorrerla, cioè il periodo; allora $A/T = L/2m$ e quindi

$$T = \frac{2m}{L} A \quad . \quad (2.26)$$

Formula di Binet

Esprimiamo l'accelerazione del punto P tramite le componenti polari (1.23). In un campo di forze centrali la componente trasversa deve essere nulla: e infatti

$$a_\theta = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) = 0$$

essendo $r^2 d\theta/dt$ costante. L'accelerazione è puramente radiale e in modulo vale

$$a = \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \quad .$$

Vediamo di trasformare questa espressione in funzione delle coordinate polari eliminando la dipendenza esplicita dal tempo. Ricordiamo che $r^2 d\theta/dt = L/m$ e calcoliamo dr/dt e $d^2 r/dt^2$:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{mr^2} \frac{dr}{d\theta} = -\frac{L}{m} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \right) \quad ,$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d}{d\theta} \left(\frac{dr}{dt} \right) \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{mr^2} \frac{d}{d\theta} \left[-\frac{L}{m} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \right) \right] = -\frac{L^2}{m^2 r^2} \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) \quad .$$

Sostituendo nell'espressione dell'accelerazione

$$a = -\frac{L^2}{m^2 r^2} \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) - r \left(\frac{L}{mr^2} \right)^2$$

e quindi, ritornando all'espressione vettoriale,

$$\mathbf{a} = -\frac{L^2}{m^2 r^2} \left[\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right] \mathbf{u}_r \quad . \quad (2.27)$$

Formula di Binet

Questa relazione si chiama *formula di Binet* ed è di particolare utilità nello studio del moto in un campo di forza gravitazionale, come vedremo nel capitolo

Concludiamo questo paragrafo sulle forze centrali dimostrando che tali forze sono *conservative*. Abbiamo detto che il modulo di una forza centrale dipende solo dalla distanza r dal centro, $\mathbf{F} = F(r) \mathbf{u}_r$. Il lavoro di questa forza si scrive

$$W = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_A^B F(r) \mathbf{u}_r \cdot d\mathbf{s} \quad .$$

Il prodotto scalare $\mathbf{u}_r \cdot d\mathbf{s}$ vale $ds \cos\theta$ e dalla figura 2.56 si vede che $ds \cos\theta$ è pari a dr , variazione del modulo di \mathbf{r} durante lo spostamento $d\mathbf{s}$. Quindi

$$W = \int_A^B F(r) dr = f(r_B) - f(r_A) \quad :$$

il lavoro è dato dalla variazione di una funzione delle coordinate di A e B , condizione perché la forza sia conservativa.

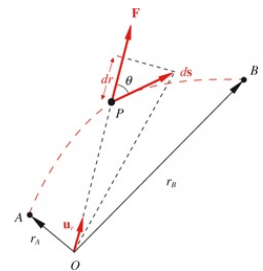


FIGURA 2.56

2.24 Riepilogo

Rivediamo le nozioni più importanti di dinamica del punto, con lo scopo di chiarirne ulteriormente il significato e di consigliarne il modo di applicazione nella soluzione di problemi.

La *legge fondamentale* da utilizzare per lo studio del moto di un punto materiale è $\mathbf{F} = m \mathbf{a} = m d\mathbf{v}/dt$. A tal fine *si devono identificare le forze che effettivamente agiscono sul punto, non dimenticando reazioni vincolari, tensioni di fili o eventuali attriti*. Si deve inoltre valutare lungo quali direzioni può essere più conveniente scomporre le forze, facendo particolare attenzione a non commettere errori di segno proiettando.

Negli esempi discussi si sono considerate forze costanti, come il peso, oppure di tipo elastico o viscoso. L'equazione differenziale che deriva dalla legge di Newton risulta facilmente risolvibile, con le cognizioni a nostra disposizione. Nei casi più generali, peraltro, dobbiamo conoscere la forma di $\mathbf{F}(t)$ se vogliamo calcolare la velocità e di qui lo spostamento, secondo le procedure viste nel primo capitolo.

Un argomento sul quale è opportuno riflettere bene per evitare errori è il seguente: la legge di Newton permette di calcolare l'accelerazione $\mathbf{a} = \mathbf{F}/m$ e quindi la velocità, secondo (1.24):

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \int_0^t \mathbf{a} dt \quad .$$

In generale velocità e accelerazione non sono parallele e *il moto avviene nella direzione e verso della velocità*, non dell'accelerazione e quindi della forza (qui giocano un ruolo essenziale le condizioni iniziali). Si consideri ad esempio il moto circolare uniforme dove \mathbf{a} e \mathbf{v} sono ortogonali. La forza è diretta verso il centro della circonferenza (forza centripeta), ma il moto avviene lungo la circonferenza. Un satellite è attratto dalla terra, ma, se ha un'opportuna velocità, può descrivere un'orbita circolare senza cadere sulla terra. Ancora, nello studio del moto di un corpo sottoposto alla forza peso abbiamo osservato che la traiettoria è parabolica mentre la forza è verticale.

Se nella (1.24) inseriamo la legge di Newton abbiamo

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \int_0^t \frac{\mathbf{F}}{m} dt$$

e ritroviamo il teorema dell'impulso (2.3), con un passaggio che porta dalla cinematica alla dinamica. Il teorema dell'impulso trova un'interessante e comune applicazione nello studio delle conseguenze dell'applicazione di una percossa a un punto fermo. Se \mathbf{F}_m è la forza media esercitata dalla percossa nel tempo Δt , di norma molto breve così che durante Δt si può assumere che il punto sia rimasto nella posizione iniziale, $\mathbf{F}_m \Delta t = m \mathbf{v}$ e si può calcolare la

velocità acquistata dal punto. Successivamente il punto si muoverà in dipendenza delle eventuali altre forze agenti, quali peso, attrito, ecc. ma non di F_m che è già cessata.

Discutendo il lavoro di una forza abbiamo dimostrato che, qualsiasi sia la forza agente, esso è eguale alla variazione dell'energia cinetica del punto su cui agisce la forza. Una categoria particolare di forze, a cui appartengono per esempio le forze costanti vettorialmente e le forze centrali, è costituita dalle forze conservative. Per tali forze il lavoro è esprimibile tramite la variazione di una funzione delle coordinate del punto, l'energia potenziale, e si ha la conservazione dell'energia meccanica.

Il significato dell'energia, sia cinetica che potenziale, è *la capacità di un sistema di scambiare lavoro* ovvero essa va intesa come *serbatoio di lavoro*. Il fatto che un punto materiale possieda una certa energia potenziale o cinetica implica che con opportuni processi si può ricavare lavoro, parzialmente o integralmente a seconda che ci siano o non ci siano attriti.

Un'applicazione molto comune del *principio di conservazione dell'energia meccanica* sfrutta il legame stabilito da (2.17) tra l'energia cinetica, funzione della velocità, e l'energia potenziale, funzione delle coordinate, per esprimere la velocità in funzione della posizione. Questa via normalmente è da preferire nei problemi in cui non è richiesta la dipendenza dal tempo (purché, naturalmente, sia lecito applicare la conservazione dell'energia). Se invece è richiesta esplicitamente la legge oraria conviene applicare la legge di Newton.

Però, anche da (2.17) si può arrivare alla legge oraria. Infatti, limitandoci al caso unidimensionale,

$$E_p(x) + \frac{1}{2} m v^2 = E_m \Rightarrow v(x) = \sqrt{\frac{2}{m} (E_m - E_p)} .$$

Da $\frac{dx}{dt} = v(x)$ scriviamo $dx = v(x) dt$ e integriamo: $\int \frac{dx}{v(x)} = t$. Svolgendo l'integrale si ha $x(t)$ e derivando $v(t)$. È chiaro che il calcolo può presentarsi complicato.

Infine, vedremo che il *teorema del momento angolare*, opportunamente modificato, troverà applicazione nella dinamica dei sistemi di punti e che le proprietà delle forze centrali saranno utili nello studio della forza di gravitazione universale.

Riprendendo quanto detto nel paragrafo 1.1, dobbiamo sempre tener presente che le leggi viste valgono per il moto di un punto materiale che certamente è un'astrazione in quanto non esistono corpi macroscopici privi di

struttura geometrica. Tuttavia ripetiamo che, per questa sua estrema semplicità, il punto materiale ha una notevole importanza concettuale nel senso che lo studio del suo moto permette di comprendere le leggi dei fenomeni dinamici nel caso più elementare, senza le complicazioni dovute alla struttura del sistema in esame. Come vedremo, in pratica dobbiamo trattare con corpi estesi in moto, però se il moto è *traslatorio*, cioè il corpo non ruota e non si deforma, tutti i punti si muovono nello stesso modo, ciascuno come se fosse un punto materiale. Riprenderemo questi argomenti nei capitoli 4 e 6 introducendo il centro di massa e studiando il moto di un corpo rigido.

3.1 Sistemi di riferimento. Velocità e accelerazione relative

Sperimentalmente è provato con estrema accuratezza che *le leggi fisiche non dipendono dalla scelta del sistema di riferimento*. Fissato un sistema di riferimento e stabilita una certa proprietà, questa resta vera anche se cambiano l'origine e l'orientazione degli assi coordinati, ovvero se ci riferiamo ad un altro sistema ottenuto dal primo con una traslazione (spostamento dell'origine, conservando la stessa direzione degli assi) o con una rotazione (stessa origine, cambio della direzione degli assi) o con una operazione combinata. Non esiste pertanto un punto privilegiato dello spazio e nemmeno un'orientazione privilegiata: *lo spazio appare omogeneo e isotropo*.

La caratteristica sostanziale di invarianza acquista un aspetto formale se le leggi fisiche vengono espresse come relazioni tra entità che godono anch'esse delle suddette proprietà di invarianza, come le grandezze scalari o quelle vettoriali o altre più complesse, come ad esempio i tensori.

La situazione si presenta diversa quando un fenomeno viene osservato da due sistemi di riferimento in moto l'uno rispetto all'altro. Nel caso del moto di un corpo abbiamo già rilevato come il concetto stesso di moto sia relativo; un esempio semplice è quello di una persona seduta in un mezzo di trasporto in movimento: essa è in quiete rispetto al mezzo, ma è in movimento rispetto al suolo con la velocità che ha il mezzo. Più in generale, il moto viene descritto con leggi diverse in due sistemi di riferimento in moto relativo, a meno che questo moto non abbia certe caratteristiche che tra breve specificheremo. Non sussiste cioè invarianza delle leggi fisiche rispetto a due sistemi di riferimento in moto qualsiasi l'uno rispetto all'altro.

Teorema delle velocità relative

Nella figura 3.1 è rappresentato un punto P in movimento lungo una generica traiettoria. Il suo moto viene osservato da una terna cartesiana con centro in O che,

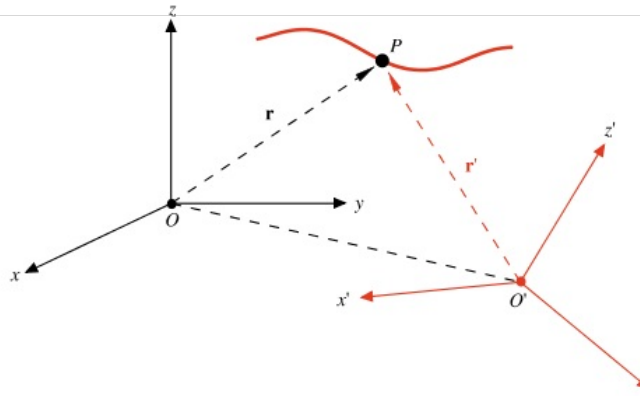


FIGURA 3.1

per convenzione, chiamiamo *sistema fisso* e da una terna cartesiana con centro O' che, sempre per convenzione, chiamiamo *sistema mobile*.

Vogliamo ricavare una relazione tra la posizione, la velocità e l'accelerazione del punto P , misurate da un osservatore solidale con il sistema fisso, e le corrispondenti grandezze misurate da un osservatore solidale con il sistema mobile. Cercheremo poi di stabilire come la nozione di invarianza possa eventualmente estendersi appunto al caso in cui i sistemi di riferimento siano in moto l'uno rispetto all'altro. Ripetiamo che la dizione sistema fisso e sistema mobile è solo una questione di convenzioni. Vedremo in seguito che esiste una maniera più fisica per distinguere i sistemi di riferimento in due classi ben diverse.

La relazione tra le posizioni del punto P , misurate rispetto ai due sistemi di riferimento, è la seguente:

$$\mathbf{r} = \mathbf{OO}' + \mathbf{r}' \quad , \quad (3.1)$$

con

$$\mathbf{r} = x\mathbf{u}_x + y\mathbf{u}_y + z\mathbf{u}_z \quad , \quad \mathbf{r}' = x'\mathbf{u}_{x'} + y'\mathbf{u}_{y'} + z'\mathbf{u}_{z'} \quad , \quad \mathbf{OO}' = x_{O'}\mathbf{u}_x + y_{O'}\mathbf{u}_y + z_{O'}\mathbf{u}_z \quad .$$

Assumiamo, in accordo con la convenzione che il primo sistema sia fisso, che i versori $\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y, \mathbf{u}_z$ siano indipendenti dal tempo; tali non sono invece i versori degli assi del sistema mobile.

La velocità del punto P rispetto al sistema fisso, che chiamiamo *velocità assoluta*, è data da

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \mathbf{u}_x + \frac{dy}{dt} \mathbf{u}_y + \frac{dz}{dt} \mathbf{u}_z \quad ,$$

Velocità assoluta

mentre quella misurata da un osservatore solidale al sistema mobile, che indichiamo come *velocità relativa*, è

$$\mathbf{v}' = \frac{dx'}{dt} \mathbf{u}_{x'} + \frac{dy'}{dt} \mathbf{u}_{y'} + \frac{dz'}{dt} \mathbf{u}_{z'} \quad .$$

Velocità relativa

La velocità dell'origine O' del sistema di riferimento mobile misurata da un

osservatore nel sistema fisso è data da

$$\mathbf{v}_{O'} = \frac{d\mathbf{OO}'}{dt} = \frac{dx_{O'}}{dt} \mathbf{u}_x + \frac{dy_{O'}}{dt} \mathbf{u}_y + \frac{dz_{O'}}{dt} \mathbf{u}_z \quad .$$

La derivata rispetto al tempo della (3.1) fornisce

$$\begin{aligned} \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \frac{d\mathbf{OO}'}{dt} + \frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \frac{dx_{O'}}{dt} \mathbf{u}_x + \frac{dy_{O'}}{dt} \mathbf{u}_y + \frac{dz_{O'}}{dt} \mathbf{u}_z + \\ &+ \frac{dx'}{dt} \mathbf{u}_x + \frac{dy'}{dt} \mathbf{u}_y + \frac{dz'}{dt} \mathbf{u}_z + x' \frac{d\mathbf{u}_x}{dt} + y' \frac{d\mathbf{u}_y}{dt} + z' \frac{d\mathbf{u}_z}{dt} \end{aligned}$$

ovvero

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{O'} + \mathbf{v}' + x' \frac{d\mathbf{u}_x}{dt} + y' \frac{d\mathbf{u}_y}{dt} + z' \frac{d\mathbf{u}_z}{dt} \quad . \quad (3.2)$$

Osserviamo che $d\mathbf{r}'/dt$ non coincide con \mathbf{v}' in quanto nella variazione di \mathbf{r}' compaiono non solo le derivate delle coordinate, ma anche quelle dei versori degli assi del sistema mobile, che forniscono gli ultimi tre termini della (3.2).

Da (1.33) abbiamo che la derivata di un versore \mathbf{u} , in quanto vettore con modulo costante, si può scrivere $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}$; pertanto per le derivate dei tre versori \mathbf{u}_x' , \mathbf{u}_y' , \mathbf{u}_z' , si hanno le seguenti *formule*, dette *di Poisson*:

$$\frac{d\mathbf{u}_x'}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}_x' \quad , \quad \frac{d\mathbf{u}_y'}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}_y' \quad , \quad \frac{d\mathbf{u}_z'}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}_z' \quad .$$

Formule di Poisson

I tre versori \mathbf{u}_x' , \mathbf{u}_y' , \mathbf{u}_z' , che individuano la terna mobile, sono rigidamente legati l'uno all'altro, nel senso che le loro mutue orientazioni non possono cambiare. Alla rotazione di uno, con velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$, corrisponde la rotazione degli altri due con la stessa velocità angolare, come se essi fossero parte di un unico corpo indeformabile (questo risultato sarà più chiaro dopo lo studio del corpo rigido, nel capitolo 6; ad ogni modo le formule di Poisson sono dimostrate per esteso nel paragrafo 3.7).

Possiamo adesso riscrivere gli ultimi tre termini di (3.2) come

$$x'(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}_x') + y'(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}_y') + z'(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}_z') = \boldsymbol{\omega} \times (x'\mathbf{u}_x' + y'\mathbf{u}_y' + z'\mathbf{u}_z') = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \quad ; \quad (3.3)$$

dato che x' , y' , z' sono numeri, li abbiamo trasportati a secondo membro in ciascun prodotto vettoriale. Sostituendo (3.3) in (3.2) otteniamo

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{O'} + \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \quad . \quad (3.4)$$

Teorema delle velocità relative

In particolare

$$\frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \quad . \quad (3.5)$$

La (3.4) esprime il *teorema delle velocità relative*; le misure di velocità compiute nei due sistemi sono diverse, ma non sono scorrelate, in quanto legate

appunto dalla (3.4).

La differenza \mathbf{v}_t tra le velocità misurate nei due sistemi di riferimento è chiamata *velocità di trascinamento*:

$$\mathbf{v}_t = \mathbf{v} - \mathbf{v}' = \mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \quad . \quad (3.6)$$

Velocità di trascinamento

Essa è pari alla velocità rispetto al sistema fisso di quel punto P^* , solidale con il sistema mobile, che coincide nell'istante considerato con punto P ; per tale punto P^* infatti $\mathbf{v}' = 0$, proprio in quanto esso è solidale con il sistema mobile. In altre parole, se P fosse fermo rispetto al sistema mobile, la sua velocità misurata dal sistema fisso coinciderebbe con la velocità di trascinamento. Se invece P si muove rispetto al sistema mobile, la (3.4) afferma che la velocità assoluta è la somma della velocità relativa e di quella di trascinamento.

Il moto di trascinamento, legato in pratica al moto del sistema mobile, può essere considerato in ogni istante come la somma di un termine traslatorio con velocità istantanea $\mathbf{v}_{O'}$ e di un termine rotatorio con velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$, variabile in generale sia in modulo che in direzione.

Teorema delle accelerazioni relative

Consideriamo ora la relazione tra le accelerazioni del punto P misurate rispetto ai due sistemi di riferimento. Rispetto al sistema fisso l'*accelerazione assoluta* è data da

$$\mathbf{a} = \frac{d^2x}{dt^2} \mathbf{u}_x + \frac{d^2y}{dt^2} \mathbf{u}_y + \frac{d^2z}{dt^2} \mathbf{u}_z \quad ,$$

Accelerazione assoluta

mentre rispetto al sistema mobile l'*accelerazione relativa* è

$$\mathbf{a}' = \frac{d^2x'}{dt^2} \mathbf{u}_{x'} + \frac{d^2y'}{dt^2} \mathbf{u}_{y'} + \frac{d^2z'}{dt^2} \mathbf{u}_{z'} \quad .$$

L'accelerazione dell'origine del sistema mobile O' rispetto a O è data da $\mathbf{a}_{O'}$, = $d\mathbf{v}_{O'}/dt$. Derivando (3.4) rispetto al tempo otteniamo:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_{O'}}{dt} + \frac{d\mathbf{v}'}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}'}{dt} \quad .$$

Calcoliamo $d\mathbf{v}'/dt$:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}'}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{dx'}{dt} \mathbf{u}_{x'} + \frac{dy'}{dt} \mathbf{u}_{y'} + \frac{dz'}{dt} \mathbf{u}_{z'} \right) = \frac{d^2x'}{dt^2} \mathbf{u}_{x'} + \frac{d^2y'}{dt^2} \mathbf{u}_{y'} + \\ &+ \frac{d^2z'}{dt^2} \mathbf{u}_{z'} + \frac{dx'}{dt} \frac{d\mathbf{u}_{x'}}{dt} + \frac{dy'}{dt} \frac{d\mathbf{u}_{y'}}{dt} + \frac{dz'}{dt} \frac{d\mathbf{u}_{z'}}{dt} = \mathbf{a}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' \quad . \end{aligned}$$

Abbiamo di nuovo utilizzato le formule di Poisson per il calcolo delle derivate dei vettori degli assi mobili. Da (3.5) si ha inoltre

$$\boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')$$

e pertanto

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \mathbf{a}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}' + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' \quad . \quad (3.7)$$

Teorema delle
accelerazioni relative

Le accelerazioni del punto P misurate nei due sistemi non coincidono, ma sono messe in relazione tramite la (3.7), detta *teorema delle accelerazioni relative*.

Per valutare l'*accelerazione di trascinamento* \mathbf{a}_t riprendiamo la discussione fatta per la velocità di trascinamento. L'accelerazione di trascinamento è quella del punto P^* , solidale col sistema mobile, che coincide nell'istante considerato col punto P . Per P^* \mathbf{a}' e \mathbf{v}' sono nulle e da (3.7)

$$\mathbf{a}_t = \mathbf{a}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}' \quad . \quad (3.8)$$

Accelerazione di
trascinamento

Possiamo pertanto riscrivere (3.7) come

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_c \quad ;$$

l'ultimo termine

$$\mathbf{a}_c = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' \quad (3.9)$$

Accelerazione di
Coriolis

è chiamato *accelerazione complementare o di Coriolis*; esso dipende dal moto di P rispetto al sistema mobile tramite la velocità relativa \mathbf{v}' .

La complessa struttura della (3.7) fa comprendere quanto possa essere diversa la descrizione del moto di uno stesso punto visto da due sistemi diversi. Conseguentemente saranno diverse le forze che vengono *ipotizzate* per spiegare il determinato tipo di moto da parte degli osservatori solidali a differenti sistemi di riferimento. Passeremo quindi ad esaminare, dopo le relazioni cinematiche, gli aspetti dinamici del moto relativo. Prima trattiamo però un particolare caso cinematico di moto relativo.

Velocità e accelerazione di un punto rispetto ad un altro

Oltre al moto di un punto visto da due diversi sistemi di riferimento, è necessario talvolta considerare il moto di un punto rispetto ad un altro punto. Per discutere questo argomento ci serviamo dei risultati appena trovati, anche se si potrebbe arrivare alla soluzione in modo più diretto.

Abbiamo due punti che si muovono in un sistema O , con posizione, velocità e accelerazione date da:

$$\text{punto } P_1 \quad \mathbf{r}_1 = \mathbf{OP}_1 \quad , \quad \mathbf{v}_1 = \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} \quad , \quad \mathbf{a}_1 = \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} \quad ,$$

$$\text{punto } P_2 \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{OP}_2 \quad , \quad \mathbf{v}_2 = \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} \quad , \quad \mathbf{a}_2 = \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} \quad .$$

La posizione relativa di P_2 rispetto a P_1 è individuata dal raggio vettore che va da P_1 a P_2 ,

$$\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_{1,2} \quad .$$

Per calcolare la velocità di P_2 relativa a P_1 immaginiamo un secondo sistema di riferimento O' , con origine in P_1 e assi che non ruotano rispetto a quelli di O ($\boldsymbol{\omega} = 0$): la velocità di P_2 vista da O' è appunto la velocità di P_2 rispetto a P_1 , che indichiamo con $\mathbf{v}_{2,1}$. Con riferimento a (3.4), la velocità assoluta \mathbf{v} è \mathbf{v}_2 , la velocità relativa \mathbf{v}' è $\mathbf{v}_{2,1}$ e la velocità di trascinamento $\mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$ è solo $\mathbf{v}_{O'} = \mathbf{v}_1$ in quanto $\boldsymbol{\omega} = 0$. Pertanto

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_{2,1} + \mathbf{v}_1 \Rightarrow \mathbf{v}_{2,1} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 \quad .$$

Allo stesso modo si dimostra che l'accelerazione di P_2 rispetto a P_1 è

$$\mathbf{a}_{2,1} = \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1 \quad .$$

In conclusione, posizione, velocità e accelerazione di un punto in moto rispetto ad un altro punto in moto sono date dalla differenza tra le posizioni, le velocità e le accelerazioni dei due punti, in un dato sistema di riferimento.

Il risultato può essere enunciato in modo diverso. Il vettore $\mathbf{r}_{1,2}$ può essere pensato come un segmento in movimento, di cui variano nel tempo modulo e direzione. La derivata rispetto al tempo di tale segmento mobile è data da

$$\frac{d\mathbf{r}_{1,2}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} - \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_{2,1} \quad ,$$

cioè dalla differenza delle velocità dei due estremi. Analogamente

$$\frac{d\mathbf{v}_{1,2}}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} - \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} = \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_{2,1} \quad .$$

Ci serviremo di queste formule nella dimostrazione del teorema del momento angolare (paragrafo 4.4). Esse vanno sempre tenute presenti nei problemi in cui si considerano moti relativi tra due corpi (ad esempio, un corpo che scivola sopra un altro, a sua volta in movimento). Implicitamente le abbiamo già usate in alcuni esempi e problemi relativi al capitolo 2.

3.2 Sistemi di riferimento inerziali. Relatività galileiana

Definiamo come *sistema di riferimento inerziale* un sistema in cui valga rigorosamente la legge di inerzia, in cui cioè un punto *non soggetto a forze* lanciato con velocità arbitraria in qualunque direzione si muova con moto rettilineo uniforme o, se è in quiete, resti in quiete.

Sistema di riferimento
inerziale

È evidente che la definizione di sistema di riferimento inerziale ha significato solo se siamo in grado di verificare in modo diverso che il punto non è soggetto a forze. È ragionevole supporre che questa situazione si verifichi sia quando il punto è sufficientemente lontano da ogni altro corpo in modo da poter trascurare ogni interazione, sia quando è possibile bilanciare le forze agenti in modo che la risultante sia nulla. Assumiamo pertanto di poter disporre di un punto materiale non soggetto a forze e quindi di poter verificare se il sistema di riferimento in cui si osserva il moto sia inerziale o no (una simile ammissione è stata implicitamente fatta quando abbiamo introdotto il principio di inerzia).

In un sistema di riferimento inerziale la legge di Newton (2.1) ha l'espressione più semplice: le forze che compaiono a primo membro sono le *forze vere* cioè quelle che sappiamo derivare dalle interazioni fondamentali, classificate nel paragrafo 2.5, e la risultante è proporzionale all'accelerazione misurata in quel sistema di riferimento.

Consideriamo ora un altro sistema di riferimento che si muove di moto traslatorio rettilineo uniforme rispetto ad un certo sistema inerziale. Pertanto si ha

$$\mathbf{v}_{O'} = \text{costante} \quad , \quad \mathbf{a}_{O'} = 0 \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\omega} = 0 \quad .$$

Da (3.7) ricaviamo $\mathbf{a} = \mathbf{a}'$: le accelerazioni di un punto misurate nei due sistemi di riferimento sono eguali. Se $\mathbf{a} = 0$ anche $\mathbf{a}' = 0$ e quindi pure il secondo sistema è inerziale.

Abbiamo così ottenuto questo risultato fondamentale: *definito un sistema di riferimento inerziale, tutti gli altri sistemi in moto rettilineo uniforme rispetto a questo sono anch'essi inerziali*. Per tali sistemi la legge di Newton si scrive allo stesso modo, ossia con gli stessi valori di \mathbf{F} e di \mathbf{a} : se cioè nel sistema inerziale O si misura \mathbf{a} e si deduce che la forza agente è $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, nel sistema inerziale O' si misura la stessa \mathbf{a} e si ricava la stessa forza $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$.

Conseguenza importante è che, essendo la dinamica la stessa, non è possibile stabilire, tramite misure effettuate in questi diversi sistemi di riferimento, se uno di essi è in quiete o in moto. Non ha cioè senso il concetto di moto assoluto. Tale situazione fisica viene descritta anche con il termine di *relatività galileiana*.

Se il moto del secondo sistema è accelerato rispetto al sistema inerziale, sia perché $\mathbf{a}_{O'} \neq 0$ oppure $\boldsymbol{\omega} \neq 0$ o per entrambe le ragioni, si osserva che la legge di

Newton non è più valida, la *forza vera* che agisce sul punto considerato non è proporzionale all'accelerazione del punto, misurata nel sistema accelerato.

Tale risultato appare chiaro da (3.7): infatti, se $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ nel sistema inerziale, nel sistema mobile in moto accelerato non può sussistere la relazione $\mathbf{F} = m\mathbf{a}'$ poiché $\mathbf{a}' \neq \mathbf{a}$. D'altra parte, se moltiplichiamo i termini di (3.7) per la massa del punto e teniamo conto che $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, abbiamo:

$$\mathbf{F} - m\mathbf{a}_t - m\mathbf{a}_c = m\mathbf{a}' \quad , \quad (3.10)$$

dove \mathbf{a}_t e \mathbf{a}_c sono le accelerazioni di trascinamento e di Coriolis come definite rispettivamente da (3.8) e (3.9).

La (3.10) rappresenta una forma modificata dalla legge di Newton: in un sistema non inerziale il prodotto della massa del punto materiale per l'accelerazione misurata in quel sistema è eguale alla *forza vera* agente sul punto più le *forze apparenti*. Queste ultime forze, che sono sempre proporzionali alla massa del punto e vengono pertanto chiamate anche *forze di inerzia*, appaiono agenti solo nel sistema non inerziale, dove costituiscono il termine correttivo che permette di ritornare ad una espressione $\mathbf{F}' = m\mathbf{a}'$. È chiaro che *le forze apparenti non derivano dalle interazioni fondamentali e non esistono in un sistema di riferimento inerziale*.

Forze apparenti o forze di inerzia

Riteniamo che ora sia evidente l'importanza di riferire le misure ad un sistema inerziale. In tale sistema infatti la descrizione di un fenomeno dinamico è più semplice e più aderente a quelli che supponiamo siano i meccanismi fisici di base. Se osserviamo in un sistema inerziale un punto materiale che descrive una traiettoria curva possiamo affermare che su di esso agisce una forza (vera); se $\mathbf{F} = 0$ sappiamo che il moto è rettilineo uniforme e viceversa.

In un sistema accelerato vediamo da (3.10) che $\mathbf{F} = 0$ non comporta $\mathbf{a}' = 0$ e quindi l'osservazione di un moto rettilineo uniforme. Questo risultato giustifica il nome di sistema *non inerziale* per un sistema accelerato. Analogamente, una traiettoria curva non presuppone necessariamente l'azione di una forza (vera), ma può essere un effetto *apparente*, conseguenza del moto accelerato del sistema in cui si trova l'osservatore, e così via.

Sistema non inerziale

Sottolineamo che tutto ciò non significa che la descrizione nel sistema inerziale è corretta, mentre quella nel sistema non inerziale è sbagliata. In entrambi i sistemi, note le condizioni iniziali del moto e le forze agenti, facciamo previsioni corrette per il moto di un punto tramite (2.1) o (3.10). Però nel sistema non inerziale la descrizione è più complicata, dovendosi introdurre termini correttivi non provenienti dalle interazioni fondamentali. Un osservatore che visse sempre in un sistema non inerziale potrebbe avere difficoltà a comprendere che agiscono delle forze con una struttura complessa come quella nella (3.10) e non soltanto un'unica forza \mathbf{F}' .

Nei prossimi paragrafi presenteremo vari esempi di moti osservati da due sistemi di riferimento diversi, di cui almeno uno inerziale. Utilizzeremo le reazioni (3.1), (3.4), (3.7) e (3.10) valide per qualsiasi coppia di sistemi.

Assumeremo come inerziale il sistema con origine O , mentre l'altro avrà origine in O' e metteremo in evidenza cosa misurano due osservatori, detti per brevità O e O' , solidali con i due sistemi.

Questi due osservatori, che possono comunicare tra loro, sono esperti nella Fisica e cercano di cogliere il significato delle loro misure. Dall'esame di queste comprenderemo la diversità della cinematica e la differente interpretazione dinamica che si possono avere per uno stesso fenomeno visto da due sistemi in moto relativo tra loro.

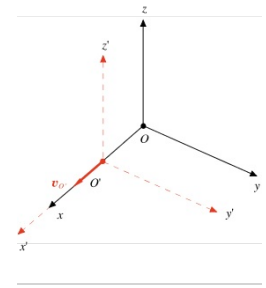


FIGURA 3.2

3.3 Moto di trascinamento rettilineo uniforme

Consideriamo due sistemi inerziali in moto rettilineo uniforme l'uno rispetto all'altro e mettiamoci nel caso semplice, che non è però limitativo, rappresentato in figura 3.2. Gli assi dei due sistemi sono paralleli ed il sistema di origine O' si sposta con velocità costante $\mathbf{v}_{O'}$ parallela all'asse x . Inoltre all'istante $t = 0$ le origini coincidono così che $\mathbf{OO}' = \mathbf{v}_{O'} t$.

Proiettando sugli assi la relazione $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{OO}'$, che lega le posizioni di un punto P nei due sistemi di riferimento otteniamo

$$x' = x - v_{O'} t \quad , \quad y' = y \quad , \quad z' = z \quad . \quad (3.11)$$

Analogamente per le velocità, utilizzando (3.4), si ha $\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{v}_{O'}$ e quindi

$$v'_x = v_x - v_{O'} \quad , \quad v'_y = v_y \quad , \quad v'_z = v_z \quad . \quad (3.12)$$

Infine per le accelerazioni è $\mathbf{a}' = \mathbf{a}$, dato che ambedue i sistemi sono inerziali.

Le relazioni (3.11), che permettono di calcolare le coordinate del punto in un sistema inerziale note quelle nell'altro sistema inerziale, esprimono una *trasformazione galileiana* tra i due sistemi; analogamente (3.12) è la trasformazione galileiana delle velocità.

Negli esempi seguenti esaminiamo alcuni casi particolari di moto del punto P . La figura di riferimento per il moto relativo dei due sistemi è sempre la 3.2, con $\mathbf{v}_{O'}$ costante.

ESEMPIO 3.1

Un punto P descrive nel piano x, y un moto rettilineo uniforme con velocità \mathbf{v} , di componenti v_x e v_y , partendo all'istante $t = 0$ dalla posizione di coordinate x_0, y_0 . Determinare il moto visto dal sistema O' .

Soluzione

Scriviamo le equazioni dei moti proiettati sugli assi servendoci di (3.11):

$$\begin{aligned} x &= x_0 + v_x t \quad , & x' &= x - v_{O'} t = x_0 + (v_x - v_{O'}) t \quad , \\ y &= y_0 + v_y t \quad , & y' &= y = y_0 + v_y t \quad , \\ z &= 0 \quad , & z' &= z = 0 \quad . \end{aligned}$$

Anche nel sistema O' le componenti della velocità del punto sono costanti e quindi il moto è rettilineo uniforme (come ci aspettiamo essendo i due sistemi inerziali: se $\mathbf{a} = 0$ anche $\mathbf{a}' = 0$). Però l'inclinazione della traiettoria rispetto all'asse $x \equiv x'$ è diversa nei due sistemi, così come è diverso il modulo della velocità:

Trasformazione galileiana

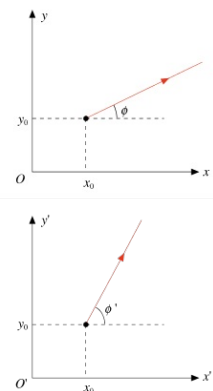


FIGURA 3.3 (Esempio 3.1)

$$\operatorname{tg}\phi = \frac{v_y}{v_x} \quad , \quad \operatorname{tg}\phi' = \frac{v_y'}{v_x'} = \frac{v_y}{v_x - v_{O'}} \quad ,$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad , \quad v' = \sqrt{(v_x - v_{O'})^2 + v_y^2} \quad .$$

Nella figura 3.3 è mostrato un caso particolare in cui $v_{O'}$ è positiva e minore di v_x (si ricordi che nell'istante iniziale le origini dei due sistemi coincidono).

Se fosse $v_{O'} = v_x$, cioè se il sistema O' si muovesse con velocità eguale alla componente v_x della velocità del punto, sarebbe $v_x' = 0$ e il moto visto da O' risulterebbe parallelo all'asse $y \equiv y'$. Solo quando il moto in O è parallelo all'asse x , cioè all'asse della traslazione tra i due sistemi, anche in O' si osserva un moto parallelo all'asse x' .

Riassumendo, entrambi gli osservatori vedono un moto rettilineo uniforme e concordano sul fatto che l'accelerazione è nulla e che quindi non ci sono forze agenti; le traiettorie appaiono diverse, e percorse con velocità diverse, perché nei due sistemi sono diverse le condizioni iniziali ($v_x \neq v_x'$).

Visualizza soluzione

ESEMPIO 3.2

Un punto P compie nel piano x, y un moto rettilineo uniformemente accelerato con accelerazione \mathbf{a} , di componenti a_x e a_y , partendo con velocità iniziale nulla dall'origine. Determinare il moto visto nel sistema O' .

Soluzione

Ricorriamo di nuovo a (3.11) e anche a (3.12):

$$x = \frac{1}{2} a_x t^2 \quad , \quad x' = x - v_{O'} t = \frac{1}{2} a_x t^2 - v_{O'} t \quad ,$$

$$y = \frac{1}{2} a_y t^2 \quad , \quad y' = y = \frac{1}{2} a_y t^2 \quad ,$$

$$v_x = a_x t \quad , \quad v_x' = v_x - v_{O'} = a_x t - v_{O'} \quad ,$$

$$v_y = a_y t \quad , \quad v_y' = v_y = a_y t \quad .$$

O vede una traiettoria rettilinea con pendenza $v_y / v_x = a_y / a_x$. Invece O' vede una traiettoria curva: infatti la pendenza

$$\frac{v_y'}{v_x'} = \frac{a_y t}{a_x t - v_{O'}}$$

dipende dal tempo; la velocità iniziale è negativa, pari a $-v_{O'}$. In figura 3.4 è mostrato un caso particolare.

Per entrambi gli osservatori l'accelerazione è la stessa e quindi la forza è la

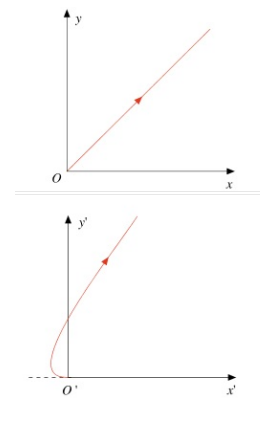


FIGURA 3.4
(Esempio 3.2)

stessa, parallela e concorde alla traiettoria vista da O ; O' vede una traiettoria curva in quanto la forza e la velocità iniziale non sono parallele. Solo se $a_y = 0$, cioè se in O la traiettoria coincide con l'asse x , anche O' vede un moto rettilineo uniformemente accelerato.

Visualizza soluzione

ESEMPIO 3.3

Nel sistema O un punto viene lasciato cadere lungo l'asse z , da un'altezza h . Cosa vede O' ?

Soluzione

Le equazioni del moto nel sistema O sono:

$$\begin{aligned} x &= 0 & , & & y &= 0 & , & & z &= h - \frac{1}{2}gt^2 & , \\ v_x &= 0 & , & & v_y &= 0 & , & & v_z &= -gt & . \end{aligned}$$

Invece in O' abbiamo:

$$\begin{aligned} x' &= -v_{O'}t & , & & y' &= 0 & , & & z' &= h - \frac{1}{2}gt^2 & , \\ v_x' &= -v_{O'} & , & & v_y' &= 0 & , & & v_z' &= -gt & . \end{aligned}$$

Quindi in O' il moto è composto da un moto rettilineo uniforme lungo l'asse x' con velocità $-v_{O'}$ e da un moto uniformemente accelerato lungo l'asse z : la traiettoria è un arco di parabola, e si verifica facilmente che il punto cade a distanza $-v_{O'} \sqrt{2h/g}$ dall'origine O' . Come nell'esempio 3.2, entrambi gli osservatori misurano la stessa accelerazione, ma vedono traiettorie diverse perché sono diverse le condizioni iniziali.

Se invece il punto inizialmente è in quiete rispetto ad O' (e si muove quindi con velocità $v_{O'}$ rispetto ad O), durante la caduta esso continua a muoversi orizzontalmente con la stessa velocità di O' e pertanto in O' cade verticalmente. Per O il punto ha la velocità iniziale $v_{O'}$ e cadendo descrive un arco di parabola, con uno spostamento dall'origine eguale a quello prima calcolato (figure 3.5 e 3.6). La caduta appare verticale nel sistema in cui il punto è in quiete e appare parabolica nell'altro sistema. Dalla forma della traiettoria l'osservatore non può dedurre se è in quiete o in moto rettilineo uniforme.

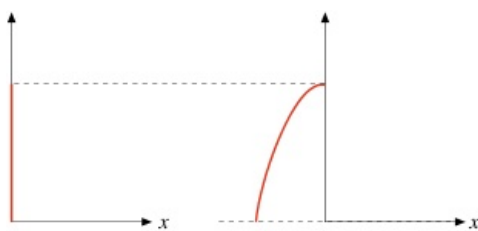


FIGURA 3.5

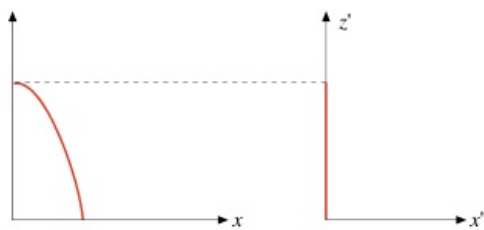


FIGURA 3.6

Visualizza soluzione

3.4 Moto di trascinamento rettilineo accelerato

Assumendo la stessa condizione geometrica del sistema O' rispetto al sistema O vista nel precedente paragrafo, supponiamo ora che O' abbia una accelerazione costante $\mathbf{a}_{O'} = \mathbf{a}_t$ e una velocità iniziale \mathbf{v}_{in} , ambedue parallele e concordi all'asse $x \equiv x'$. La posizione e la velocità di O' sono quindi espresse da

$$x_{O'} = v_{in} t + \frac{1}{2} a_t t^2 \quad , \quad v_{O'} = v_{in} + a_t t \quad .$$

Le formule di trasformazione (3.11) e (3.12) diventano

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= \mathbf{r} - \mathbf{OO}' & x' &= x - v_{in} t - \frac{1}{2} a_t t^2 \quad , & y' &= y \quad , & z' &= z \quad , \\ \mathbf{v}' &= \mathbf{v} - \mathbf{v}_{O'} & v'_x &= v_x - v_{in} - a_t t \quad , & v'_y &= v_y \quad , & v'_z &= v_z \quad , \\ \mathbf{a}' &= \mathbf{a} - \mathbf{a}_{O'} & a'_x &= a_x - a_t \quad , & a'_y &= a_y \quad , & a'_z &= a_z \quad . \end{aligned}$$

Come nel caso del moto di trascinamento rettilineo uniforme, anche ora illustriamo con esempi alcune semplici situazioni. Caratteristica distintiva è la diversità delle accelerazioni nei due sistemi, O inerziale e O' non inerziale, e quindi la diversità delle forze agenti, con conseguente comparsa delle forze d'inerzia secondo (3.10).

ESEMPIO 3.4

Il sistema O' è solidale ad un carrello che si muove con accelerazione a_t positiva rispetto al sistema O (nella situazione geometrica della figura 3.2). All'istante $t = 0$, quando O e O' coincidono, un punto materiale viene lasciato cadere da una piattaforma alta h solidale al carrello. Descrivere il moto di caduta visto da O e da O' , calcolando in particolare dove cade il punto.

Soluzione

Consideriamo prima cosa vede l'osservatore inerziale. All'istante $t = 0$ il punto materiale è ad altezza h e possiede la velocità iniziale del carrello, cioè v_{in} , parallela all'asse x ; negli istanti successivi esso è sottoposto soltanto alla forza di gravità. La traiettoria osservata è parabolica e valgono le seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} x &= v_{in} t \quad , & y &= 0 \quad , & z &= h - \frac{1}{2} g t^2 \quad , \\ v_x &= v_{in} \quad , & v_y &= 0 \quad , & v_z &= -g t \quad , \\ a_x &= 0 \quad , & a_y &= 0 \quad , & a_z &= -g \quad . \end{aligned}$$

Il tempo di caduta è $t_c = 2h/g$ e lo spazio percorso lungo l'asse x è $x_c = v_{in} t_c$. Nello stesso tempo il carrello è avanzato di $x_{O'} = v_{in} t_c + \frac{1}{2} a_t t_c^2$. Pertanto il punto materiale tocca il pavimento del carrello più indietro rispetto a O' della quantità

$$d = x_{O'} - x_c = \frac{1}{2} a_t t_c^2 = \frac{a_t h}{g} .$$

Nella figura 3.7 è rappresentata la distanza tra il punto e O' nell'istante in cui il punto tocca il pavimento; la linea punteggiata è la traiettoria vista da O , mentre gli assi tratteggiati danno la posizione iniziale del sistema O' (coincidente con O).

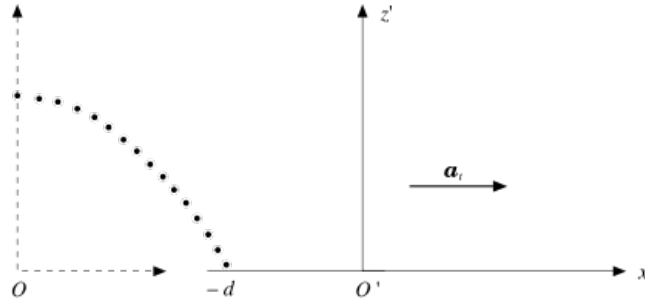


FIGURA 3.7

Se fosse $v_{in} = 0$, l'osservatore O vedrebbe una caduta rettilinea, ma la distanza d sarebbe la stessa, essendo questa indipendente da v_{in} .

Applicando le formule di trasformazione scritte all'inizio del paragrafo possiamo dedurre cosa vede O' :

$$\begin{aligned} x' &= -\frac{1}{2} a_t t^2 & , & \quad y' = 0 & \quad , & \quad z' = h - \frac{1}{2} g t^2 & \quad , \\ v_x' &= -a_t t & \quad , & \quad v_y' = 0 & \quad , & \quad v_z' = -g t & \quad , \\ a_x' &= -a_t & \quad , & \quad a_y' = 0 & \quad , & \quad a_z' = -g & \quad . \end{aligned}$$

Il risultato, indipendente da v_{in} , mostra come anche in O' l'accelerazione sia costante, ma diversa da \mathbf{g} . Essa vale

$$\mathbf{a}' = -a_t \mathbf{u}_{x'} - g \mathbf{u}_{z'} = \mathbf{g} - \mathbf{a}_t .$$

La velocità è proporzionale all'accelerazione, $\mathbf{v}' = \mathbf{a}'t$. Pertanto O' osserva un moto di caduta rettilineo uniformemente accelerato nel piano x', z' lungo la retta di equazione

$$z' = h + \frac{g}{a_t} x' .$$

Il punto materiale tocca il pavimento del carrello ($z' = 0$) nella posizione

$$x' = -\frac{a_t h}{g} ,$$

cioè all'indietro rispetto a O' della stessa quantità calcolata in O . L'angolo formato dalla linea di caduta con l'asse z' è

$$\theta = \text{arctg} \frac{a_t}{g} ,$$

come mostrato nella figura 3.8.

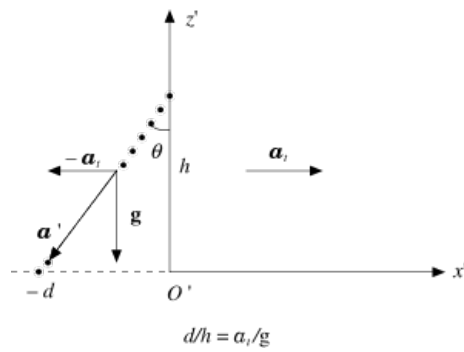


FIGURA 3.8

Secondo O l'osservazione di O' si spiega semplicemente col fatto che O' si muove di moto accelerato. Invece O' per spiegare il moto deve aggiungere alla forza peso $m\mathbf{g}$ la forza apparente $-m\mathbf{a}_t$; la somma delle due forze è eguale a $m\mathbf{a}'$. Se identifichiamo con la verticale la linea di caduta libera dei corpi, nel sistema O' c'è una verticale apparente che forma l'angolo θ con la verticale inerziale; un filo a piombo sul carrello si disporrebbe ad angolo θ rispetto all'asse z' . Dalla misura di θ si può dedurre il valore di a_t e determinare che il moto di trascinamento è accelerato; se fosse $a_t = 0$, sarebbe anche $\theta = 0$ e $d = 0$, il punto cadrebbe lungo l'asse z' , come nella figura 3.6 dell'esempio 3.3.

Visualizza soluzione

ESEMPIO 3.5

Un punto materiale di massa m è posto sul pavimento liscio di un carrello che avanza con accelerazione \mathbf{a}_t rispetto al sistema inerziale O (figura 3.9). Ad un estremo del carrello è fissata una molla di costante elastica k . Descrivere le osservazioni di O e O' .

Soluzione

Nel sistema inerziale si osserva la seguente successione di eventi. Il punto resta fermo mentre il carrello gli scorre sotto (non c'è attrito) fino a quando l'estremo libero della molla lo raggiunge. La molla inizia allora a comprimersi e il punto a muoversi; a regime il punto è fermo rispetto al carrello e si muove con accelerazione a_t rispetto a O , la molla è compressa della quantità $x_c = ma_t/k$: infatti è la forza elastica della molla che applicata al punto gli comunica l'accelerazione a_t ($kx_c = ma_t$).

Per l'osservatore O' , solidale al carrello, inizialmente il punto è in moto con accelerazione $-\mathbf{a}_t$ (in effetti $\mathbf{a}' = \mathbf{a} - \mathbf{a}_t = -\mathbf{a}_t$ dato che $\mathbf{a} = 0$). Ad un certo istante il punto raggiunge la molla che inizia a comprimersi e alla fine il punto è fermo, con la molla compressa della quantità x_c . O' conclude che sul punto, apparentemente libero, agisce invece la forza $-m\mathbf{a}_t$ che viene bilanciata, raggiunto l'equilibrio statico, dalla forza elastica della molla: $kx_c = ma_t$.

Notiamo che dalla misura di x_c si può dedurre il valore di a_t . La molla di questo esempio, come il filo a piombo del precedente, costituisce in sostanza un *accelerometro*, che misura l'accelerazione del sistema non inerziale.

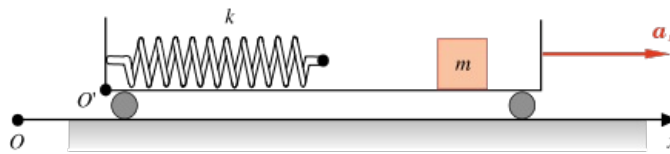


FIGURA 3.9

Visualizza soluzione

ESEMPIO 3.6

Un sistema con origine O' e asse z' verticale è solidale ad un ascensore che si muove lungo l'asse $z \equiv z'$ di un sistema inerziale con origine in O . L'ascensore inizia a salire con accelerazione \mathbf{a}_t , parallela e concorde all'asse z' , descrive poi un moto uniforme e infine decelera con accelerazione $-\mathbf{a}_t$ fino a fermarsi. Se nell'ascensore si compiono esperimenti di caduta libera dei corpi, che accelerazioni \mathbf{a}' si misurano nelle tre fasi del moto?

Soluzione

Nel sistema inerziale $\mathbf{a} = \mathbf{g}$ e quindi la relazione tra le accelerazioni è

$$\mathbf{g} = \mathbf{a}' + \mathbf{a}_t \Rightarrow \mathbf{a}' = \mathbf{g} - \mathbf{a}_t \quad .$$

Proiettando sull'asse z' abbiamo:

$$a_t > 0 \quad a' = -g - a_t = -(g + a_t) \quad ,$$

$$a_t = 0 \quad a' = -g \quad ,$$

$$a_t < 0 \quad a' = -g - (-a_t) = -(g - a_t) \quad .$$

Nella fase di accelerazione O' constata che i corpi cadono con un'accelerazione maggiore di quella di gravità (aumento apparente di peso), nella fase uniforme anche O' misura g , nella fase di decelerazione i corpi cadono con un'accelerazione minore di g (diminuzione apparente di peso). Si riveda a questo proposito la discussione sulla sensazione di peso nel paragrafo 2.7.

Se fosse $\mathbf{a}_t = \mathbf{g}$, come potrebbe accadere nella fase di decelerazione, oppure se l'ascensore scendesse in caduta libera, si troverebbe $\mathbf{a}' = \mathbf{0}$: un corpo abbandonato nell'ascensore con velocità iniziale nulla resta fermo rispetto ad O' . È la cosiddetta assenza di peso, avvertita da chi sta dentro l'ascensore e dovuta ovviamente non a una scomparsa reale dell'attrazione terrestre, ma al fatto che se tutto il sistema sta scendendo con la stessa accelerazione dei corpi che ad esso si riferiscono non c'è più accelerazione relativa e, tra l'altro, vengono a mancare le sensazioni ad essa connesse. Un effetto analogo, come è ben noto, si manifesta nei satelliti artificiali che ruotano intorno alla terra.

La spiegazione dell'assenza di accelerazione di gravità è quella data da O che misura in ogni caso g e ragiona in base a (3.10), attribuendo le variazioni all'accelerazione di trascinamento di O' . Ma O' , se non ha a priori questo tipo di informazioni, ragiona in modo diverso. Egli vede che in certe situazioni l'accelerazione di un corpo che cade è g , in accordo con quanto gli può essere comunicato

dall'esterno, ma sperimenta anche situazioni diverse. Se si costruisce un accelerometro e lo tara opportunamente, constata che la misura fornitagli dallo strumento è proprio la correzione da apportare a g . O' postula pertanto che in certe situazioni, che è capace di mettere in evidenza, ha origine un'accelerazione supplementare che si compone con \mathbf{g} per dare i risultati osservati ovvero che alla forza peso va aggiunto il termine $-m \mathbf{a}_{\text{suppl}}$; sulle cause del fenomeno non è però in grado di fare alcuna ipotesi. Notiamo che dall'esame delle misure di a' e a_{suppl} egli sarebbe in grado di accorgersi da solo che c'è un valore speciale, appunto g , che si ottiene sempre sommando o sottraendo i valori di a' e a_{suppl} ; solo in seguito a un'informazione esterna potrebbe però accorgersi che a_{suppl} non è altro che a_t e che quindi egli ha un modo per mettere in evidenza cosa sta succedendo al suo sistema (se il moto di O' fosse sempre uniforme egli misurerebbe sempre g e non avrebbe alcun modo per mettere in evidenza che è in movimento).

Visualizza soluzione

3.5 Moto di trascinamento rotatorio uniforme

Supponiamo ora che il moto di trascinamento sia soltanto rotatorio uniforme e per comodità prendiamo coincidenti le origini dei due sistemi ($\mathbf{r} = \mathbf{r}'$). Abbiamo $\mathbf{v}_{O'} = 0$, $\mathbf{a}_{O'} = 0$, $\boldsymbol{\omega} = \text{costante}$, e le relazioni (3.4) e (3.7) diventano

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (3.13)$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' \quad (3.14)$$

Riscriviamo così (3.10):

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_{\text{centr}} + \mathbf{F}_{\text{Cor}} = m \mathbf{a}' ;$$

la *forza centrifuga*, $\mathbf{F}_{\text{centr}} = -m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$, e la *forza di Coriolis*, $\mathbf{F}_{\text{Cor}} = -2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'$, hanno lo stesso ruolo della forza $-m\mathbf{a}_t$ vista nel paragrafo precedente.

Il sistema inerziale O è una coppia di assi cartesiani x, y posti in un piano orizzontale e il sistema non inerziale O' un'altra coppia di assi x', y' con la stessa origine e nello stesso piano, ruotanti con velocità angolare costante $\boldsymbol{\omega}$. Si può ad esempio assumere gli assi x' e y' solidali ad un disco posto nel piano x, y che ruota rispetto ad un asse passante per il suo centro e ortogonale al piano x, y .

Se poniamo un punto materiale sul disco, con attrito nullo tra il punto e il piano del disco, il punto rimane fermo mentre il disco gira sotto il punto. Se il punto lasciasse una traccia, osserveremmo una circonferenza di raggio r , con centro nell'origine comune dei due sistemi.

Per l'osservatore O il punto è in quiete, mentre per quello ruotante O' il punto descrive un moto circolare uniforme, in base a (3.13) e (3.14). Infatti nei due sistemi il moto del punto ha queste caratteristiche:

$$\text{sistema } O \quad \mathbf{v} = 0 \quad , \quad \mathbf{a} = 0$$

$$\text{sistema } O' \quad \mathbf{v}' = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad , \quad \mathbf{a}' = -\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) - 2\boldsymbol{\omega} \times (-\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}).$$

Pertanto nel sistema O' accelerato il punto descrive una circonferenza in verso contrario al moto del disco, con velocità costante in modulo e pari a ωr e con accelerazione, puramente centripeta, di valore $\omega^2 r$ (in figura 3.10 è mostrata la traiettoria che è percorsa in senso orario in quanto il disco ruota in senso antiorario). Però O' deve ipotizzare che sul punto agiscono due forze (centrifuga e di Coriolis) le quali, combinandosi, comunicano al punto l'accelerazione \mathbf{a}' ; resta per O' il problema dell'origine di queste forze.

Leghiamo ora il punto con un filo all'asse di rotazione e diamogli una velocità di modulo ωr in modo tale che ruoti con la stessa velocità del punto del disco su cui si trova. La situazione è opposta a quella precedente: per O il punto descrive un moto circolare uniforme sotto l'azione della tensione del filo, mentre O' vede il punto fermo, $\mathbf{v}' = 0$ e $\mathbf{a}' = 0$; tutto ciò è in accordo con (3.13) e (3.14).

Forza centrifuga
Forza di Coriolis

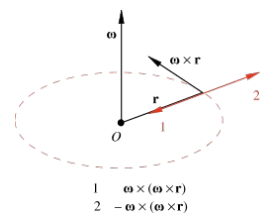


FIGURA 3.10

Però O' osserva pure che il filo è teso malgrado il punto sia fermo e quindi è costretto a supporre che sul punto agisca una forza diretta verso l'esterno, che chiama forza centrifuga, bilanciata dalla tensione del filo.

Per verificare la sua ipotesi O' traccia un segno radiale sul disco e recide il legame tra il punto e l'origine degli assi, immaginando di vedere il punto allontanarsi radialmente sotto l'azione della forza centrifuga, in quanto è stata annullata la forza esercitata dal filo. In effetti O' osserva ora un moto del punto materiale, però lungo una traiettoria curvilinea, e deve quindi ammettere, come già fatto per il primo esempio, che sui punti in moto nel suo sistema di riferimento ($\mathbf{v}' \neq 0$) agisca un'altra forza che non si manifesta quando sono in quiete; si tratta precisamente della forza di Coriolis. È chiaro che O dà un'altra interpretazione dell'ultima fase dell'esperimento, cioè dopo il taglio del filo. Infatti nel sistema inerziale il punto materiale all'istante in cui viene lasciato libero inizia a muoversi di moto rettilineo uniforme con direzione tangente alla circonferenza nella posizione in cui avviene il distacco dal vincolo (filo). Le accelerazioni nei due sistemi sono:

$$\mathbf{a} = 0 \quad , \quad \mathbf{a}' = -\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) - 2 \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' \quad .$$

Il problema che si presenta ad O' è sempre la comprensione dell'origine della forza centrifuga e di quella di Coriolis.

La figura 3.11 mostra le posizioni del punto libero viste dai due osservatori negli istanti zero, $T/12$, $T/6$, $T/4$ se T è il periodo di rotazione del disco, ovvero del sistema non inerziale.

Riprendiamo ora in esame il problema del *pendolo conico*, discusso nel terzo esempio del paragrafo 2.13, considerando un sistema con origine sull'asse verticale e ruotante con la stessa velocità angolare del pendolo. In questo sistema, non inerziale, il pendolo è immobile e forma con la verticale l'angolo θ tale che $\text{tg } \theta = \omega^2 r/g$. Siamo in una situazione di equilibrio statico, che necessita l'introduzione di una forza che bilanci la risultante della tensione del filo e del peso. Tale forza è la forza centrifuga, che esiste solo in questo sistema, e vale $\mathbf{F}_{\text{centr}} = -m g \text{tg } \theta \mathbf{u}_N = -m \omega^2 r \mathbf{u}_N$; \mathbf{u}_N è un versore orizzontale diretto verso l'asse attorno a cui ruota il pendolo.

Notiamo che se il moto di trascinamento è rotatorio, uniforme o vario, è sempre $\mathbf{a}_t \neq 0$ e quindi non può mai sussistere l'eguaglianza $\mathbf{a} = \mathbf{a}'$. Non esiste cioè l'analogo rotatorio della relatività galileiana: in un sistema rotante è sempre possibile mettere in evidenza la rotazione (e più in generale in un sistema non inerziale l'accelerazione a_t), cioè accorgersi di essere in movimento.

A conclusione della serie di esempi di questo paragrafo e dei precedenti, vogliamo brevemente riprendere l'argomento delle forze d'inerzia. Da una parte dobbiamo ripetere che esse non hanno esistenza reale in quanto non derivano dalle interazioni fondamentali e non compaiono nella descrizione del moto effettuata in un sistema di riferimento inerziale. Per altro in un sistema non

inerziale esse rappresentano effetti genuini e sono necessarie per spiegare le osservazioni sperimentali. Ad esempio, in un sistema rotante è corretto attribuire alla forza centrifuga la tendenza allo spostamento radiale verso l'esterno e alla forza di Coriolis l'incurvamento della traiettoria osservata, in un veicolo che accelera o rallenta lo spostamento all'indietro o in avanti è reale e si spiega solo con la forza $-m\mathbf{a}_t$. La cosa importante è avere ben chiara l'origine di tali forze apparenti, utilizzarle correttamente dove appropriato e non estendere la loro esistenza ai sistemi inerziali.

ESEMPIO 3.7

Un cilindro cavo, di raggio $R = 2$ m, ruota rispetto al proprio asse verticale con velocità angolare ω . Un corpo poggiato contro la parete interna del cilindro ruota insieme ad esso, ma non cade. Se il coefficiente di attrito statico tra corpo e parete del cilindro è $\mu_s = 0.7$, calcolare il valore minimo che deve avere ω .

Soluzione

Risolviamo prima il problema in un sistema inerziale fisso al suolo (si veda l'esempio 2.10). La reazione N della parete, dovuta al fatto che il corpo tendendo a proseguire in linea retta preme sulla parete, è la forza centripeta che permette la rotazione del corpo, $N = m\omega^2 R$. Dato che il corpo non cade deve essere

$$mg \leq \mu_s N = \mu_s m\omega^2 R$$

$$\Rightarrow \omega^2 \geq \frac{g}{\mu_s R}, \quad \omega \geq 2.6 \text{ rad/s.}$$

Nel sistema rotante solidale al cilindro il corpo è in equilibrio statico, sia orizzontale che verticale. Orizzontalmente esso è sottoposto alla reazione N e alla forza centrifuga $m\omega^2 R$, che devono essere eguali in modulo (e sono opposte in verso); verticalmente la condizione è quella già scritta nel sistema inerziale (non c'è accelerazione di trascinamento verticale). Si trova ovviamente lo stesso risultato, ma bisogna introdurre la forza centrifuga, che non esiste nel sistema inerziale.

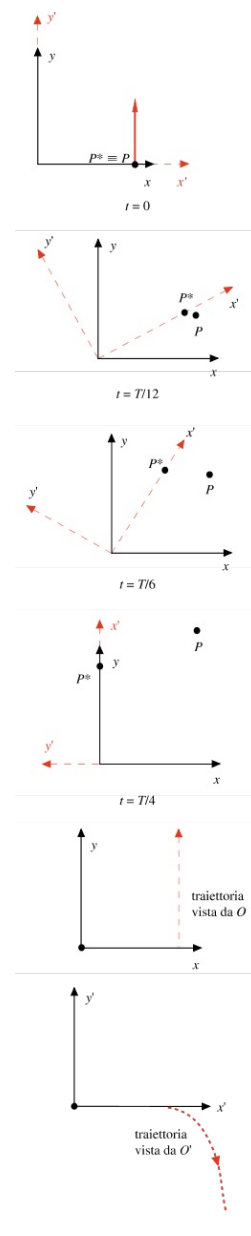


FIGURA 3.11

[Visualizza soluzione](#)

3.6 Il moto rispetto alla terra

Nei paragrafi precedenti abbiamo introdotto la nozione di sistema inerziale senza però darne un esempio: lo facciamo adesso, dicendo che un sistema di riferimento con l'origine nel centro di massa del sistema solare e gli assi diretti verso determinate *stelle fisse* è con ottima approssimazione un sistema inerziale, come lo sono tutti gli altri sistemi in moto rettilineo uniforme rispetto ad esso. La verifica è data dal fatto che, entro gli errori sperimentali, in tali sistemi vale la legge di Newton (2.1) con tutte le sue conseguenze; in particolare risultano accuratissime le previsioni sul moto dei vari corpi celesti e dei satelliti artificiali.

Di norma le misure vengono fatte in un riferimento terrestre: ora, qualsiasi riferimento solidale alla terra, per esempio con un asse diretto come l'asse terrestre e gli altri due nel piano dell'equatore, ruota insieme alla terra e non è inerziale; anche un sistema con origine nel centro della terra e assi sempre paralleli a quelli dei sistemi inerziali di cui sopra non è inerziale in quanto si muove di moto traslatorio accelerato (la traiettoria dell'origine è curvilinea).

Quindi nelle misure terrestri compaiono termini correttivi dovuti alle forze apparenti ed è conveniente riferire tali misure, attraverso note formule di trasformazione, a un sistema inerziale (si sa, per esempio, che il moto dei pianeti visto dalla terra è molto complicato). Le correzioni hanno un'importanza che è in relazione con le misure e con la precisione voluta: nel caso di misure astronomiche sono fondamentali, come pure nei moti terrestri su notevoli distanze; per tempi e percorsi brevi possono essere trascurabili in assoluto o rispetto ad altri effetti più importanti, come l'attrito dell'aria.

Dato che intendiamo descrivere e valutare quantitativamente gli effetti dovuti al moto della terra, cominciamo col fornire alcuni dati numerici. Approssimiamo la terra ad una sfera che compie un moto di rivoluzione attorno al sole lungo un'orbita ellittica, che praticamente coincide con una circonferenza, ed un moto di rotazione su se stessa. I dati caratteristici delle proprietà fisiche della terra e dei due moti, rivoluzione e rotazione, sono riportati nella tabella che segue.

La velocità e l'accelerazione di un punto P alla superficie della terra (si veda figura 3.12) sono

$$v(P) = \omega r = \omega R \cos\theta = 4.64 \cdot 10^2 \cos\theta \text{ m/s},$$

$$a(P) = \omega^2 r = \omega^2 R \cos\theta = 3.38 \cdot 10^{-2} \cos\theta \text{ m/s}^2 .$$

In particolare, per un punto all'equatore

$$v = 4.64 \cdot 10^2 \text{ m/s} = 1671 \text{ km/h} ,$$

$$a = 3.38 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}^2 .$$

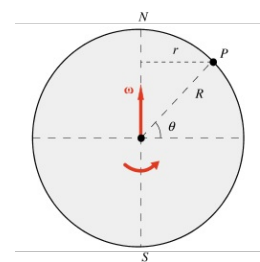


FIGURA 3.12

Tabella 3.1 Dati sul moto della terra

massa della terra	m_T	$5.98 \cdot 10^{24}$ kg
raggio della terra	R	$6.37 \cdot 10^6$ m
raggio dell'orbita	R_0	$1.49 \cdot 10^{11}$ m
periodo di rivoluzione	T_0	$3.16 \cdot 10^7$ s
velocità di rivoluzione	$v_0 = \frac{2\pi R_0}{T_0}$	$2.96 \cdot 10^4$ m/s = 106655 km/h
velocità angolare di rivoluzione	$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$	$1.99 \cdot 10^{-7}$ rad/s
accelerazione centripeta di rivoluzione	$a_0 = \omega_0^2 R_0$	$5.88 \cdot 10^{-3}$ m/s ²
periodo di rotazione	T	$8.64 \cdot 10^4$ s
velocità angolare di rotazione	$\omega = \frac{2\pi}{T}$	$7.29 \cdot 10^{-5}$ rad/s

Un sistema di riferimento solidale alla terra, con asse z orientato da sud a nord e assi x, y nel piano equatoriale, ruota con velocità angolare $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{u}_z$, essendo \mathbf{u}_z il versore dell'asse z e $\omega = 7.29 \cdot 10^{-5}$ rad/s.

Un punto in moto vicino alla superficie terrestre è sottoposto alla forza peso $m \mathbf{g}_0$ e in base a (3.7)

$$\mathbf{g}_0 = \mathbf{g} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$$

dove \mathbf{g} e \mathbf{v} sono rispettivamente l'accelerazione e la velocità misurate nel sistema solidale alla terra. Abbiamo trascurato l'accelerazione centripeta del centro della terra, dovuta al moto di rivoluzione. Pertanto l'accelerazione di gravità misurata dal sistema terrestre è data da

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}_0 - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$$

Il termine centrifugo è ortogonale all'asse z di rotazione e diretto verso l'esterno, in entrambi gli emisferi. Esso vale in modulo, come già calcolato, $3.38 \cdot 10^{-2} \cos\theta$ m/s². Le due componenti, radiale (parallela e concorde a \mathbf{R}) e trasversa (diretta sempre verso l'equatore) valgono rispettivamente

$$a_R = 3.38 \cdot 10^{-2} \cos^2\theta \quad , \quad a_\theta = 3.38 \cdot 10^{-2} \cos\theta \sin\theta \quad \text{m/s}^2 \quad .$$

La correzione centrifuga all'accelerazione di gravità è nulla al polo, dove \mathbf{R} e $\boldsymbol{\omega}$ sono paralleli, e massima all'equatore, dove sono ortogonali. Gli effetti sono la diminuzione (piccola) del valore di \mathbf{g}_0 con dipendenza dalla latitudine θ e l'alterazione della verticale determinata con il filo a piombo; ad esempio per $\theta = 45^\circ$ la deviazione è dell'ordine di 0.1° .

L'effetto del termine di Coriolis è più complicato in quanto dipende dalla velocità \mathbf{v} del punto rispetto al sistema solidale con la terra.

Se per esempio consideriamo un punto che cade da un'altezza h , con velocità iniziale nulla, l'azione della forza centrifuga comporta uno spostamento verso

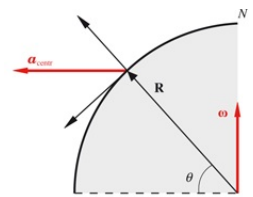


FIGURA 3.13

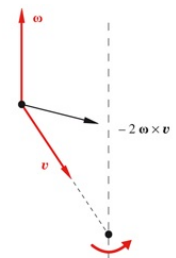


FIGURA 3.14

l'equatore lungo un meridiano; invece la forza di Coriolis, tangente a un parallelo e rivolta come in figura 3.14, provoca uno spostamento verso *oriente* in entrambi gli emisferi. L'effetto complessivo è la combinazione dei due.

Si trova che le due deviazioni rispetto al piede della verticale *vera* sono

$$x_{\text{centr}} = 3.45 \cdot 10^{-3} h \cos\theta \sin\theta \text{ m} ,$$

$$x_{\text{Cor}} = 2.2 \cdot 10^{-5} h^{3/2} \cos\theta \text{ m} .$$

$$\text{Con } h = 100 \text{ m e } \theta = 45^\circ , \quad x_{\text{centr}} \cong 17.3 \text{ cm} , \quad x_{\text{Cor}} \cong 1.6 \text{ cm} .$$

Qual è la *spiegazione inerziale* degli effetti misurati? Il punto P che cade dall'altezza h ($= PQ$) ha velocità iniziale $\mathbf{v}_{P,0}$, in quanto all'istante $t = 0$ sta ruotando insieme alla terra, e accelerazione \mathbf{g}_0 . Il moto avviene nel piano individuato da $\mathbf{v}_{P,0}$ e \mathbf{g}_0 , la cui intersezione con la superficie terrestre è indicata in figura 3.15 dalla linea punteggiata; PP rappresenta la traiettoria del punto. La velocità iniziale è tangente a un parallelo, però durante la caduta non c'è nessun vincolo che tenga il punto su una traiettoria circolare e perciò esso si sposta verso l'equatore, come è chiaro dalla figura. Inoltre poiché P è inizialmente a una distanza dall'asse di rotazione maggiore di quella di Q , esso ha velocità maggiore di Q e quindi cade più a est di Q . Correttamente interpretati, questi effetti mettono in evidenza la rotazione terrestre.

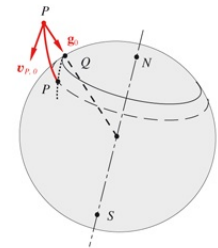


FIGURA 3.15

Un effetto più vistoso a prova della rotazione terrestre è quello mostrato dal *pendolo di Foucault*. Immaginiamo di fare oscillare un pendolo semplice al polo: il moto è contenuto nel piano \mathbf{g}_0, \mathbf{v} , fisso in un sistema inerziale; però dalla terra, sistema non inerziale, si vede ruotare il piano di oscillazione del pendolo, a causa della forza di Coriolis. Un giro completo dura 24 ore. Se il pendolo lasciasse una traccia sul suolo si vedrebbero le linee disegnate in figura 3.16. Naturalmente l'esperimento è stato eseguito alle nostre latitudini, ma l'effetto è lo stesso anche se un giro completo viene compiuto in un tempo che dipende dalla latitudine.

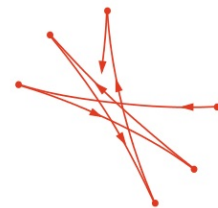


FIGURA 3.16

È interessante osservare che i primati di lancio del giavellotto o del disco, a parità di condizioni atmosferiche e di attrito dell'aria, sono influenzati in modo non trascurabile dalla forza centrifuga e di Coriolis.

3.7 Commenti e note

Raccogliamo in questo paragrafo alcuni commenti e delle note che altrimenti avrebbero appesantito il testo.

Una caratteristica importante di (3.1), (3.4), (3.7) è di essere relazioni vettoriali e quindi valere intrinsecamente. Però ciascuna si può tradurre in tre relazioni tra le componenti dei vari vettori in un determinato sistema di riferimento, che deve essere lo stesso per tutti i termini. Se per esempio si sceglie il sistema O tutte le componenti dei termini con l'apice (\mathbf{r}' , \mathbf{v}' , \mathbf{a}') vanno riferite al sistema O e quindi è necessario stabilire le relazioni di trasformazione che permettono di passare dalle coordinate valide in O' a quelle valide in O .

La semplicità della geometria della figura 3.2, scelta per il moto relativo traslatorio, rende le formule di trasformazione praticamente immediate e di facile uso. In particolare, il fatto che gli assi dei sistemi siano paralleli tra loro ha come conseguenza che le componenti di un vettore siano le stesse nei due sistemi; ad esempio la componente v_x' del vettore velocità \mathbf{v}' è eguale alla componente v_x (si veda il paragrafo C.2 dell'appendice C). Se il sistema O' avesse gli assi ruotati rispetto a quelli di O , con l'angolo tra assi omologhi costante durante il moto, le formule di trasformazione sarebbero più complicate, pur restando le conclusioni generali le stesse. Sempre con riferimento a \mathbf{v}' e alla relazione $\mathbf{v} = v_{O'} + \mathbf{v}'$, nota la componente v_x' si dovrebbe trasformarla in v_x e solo allora scrivere $v_x = v_{O'} + v_x'$, proiezione della relazione vettoriale sull'asse x del sistema O .

Facciamo un esempio esplicito non per un moto relativo traslatorio, ma per il moto rotatorio dei due sistemi del paragrafo 3.5: gli assi di O' ruotano a rispetto a quelli di O con velocità angolare costante ω e l'angolo tra x' e x è $\theta = \omega t$: la (3.1) si riduce a $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$. Ciò non vuol dire che valgono le relazioni $x = x'$, $y = y'$, manifestamente false e concettualmente sbagliate perché eguagliano le componenti viste da due diversi sistemi. Le relazioni corrette sono $r_x = r'_x$, $r_y = r'_y$, cioè

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \omega t - y' \sin \omega t \quad , \\ y &= x' \sin \omega t + y' \cos \omega t \quad , \end{aligned}$$

con il che l'eguaglianza è espressa nel sistema O , oppure passando nel sistema O' $r_x' = r'_x$, $r_y' = r'_y$, cioè

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \omega t + y \sin \omega t \quad , \\ y' &= -x \sin \omega t + y \cos \omega t \quad . \end{aligned}$$

Queste formule di trasformazione esprimono il legame tra le coordinate di uno stesso punto nei due sistemi (ottenuti uno dall'altro tramite una rotazione nel piano x, y). Esse valgono anche per le componenti di un qualsiasi altro

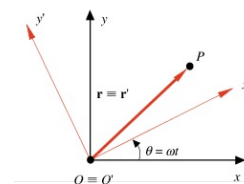


FIGURA 3.17

vettore. Notiamo esplicitamente, e lo si verifica subito, che una rotazione lascia invariato il modulo di un vettore.

Si è già rivelato nella dimostrazione del teorema delle velocità relative (3.4) che $d\mathbf{r}'/dt$ non è \mathbf{v}' ; analogamente $d\mathbf{v}'/dt$ non è \mathbf{a}' . Questo perché i versori \mathbf{u}_x' , \mathbf{u}_y' , \mathbf{u}_z' sono variabili nel tempo, rispetto a O . L'osservatore O' trova però l'usuale cinematica: nel suo sistema

$$\mathbf{a}' = d\mathbf{v}'/dt \text{ e } \mathbf{v}' = d\mathbf{r}'/dt \quad ;$$

non gli torna invece che $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$ e $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$.

La quarta relazione fondamentale, oltre alle tre citate sopra, è (3.10), che permette di estendere la legge di Newton ai sistemi non inerziali. Questa però è l'unica estensione che ci limitiamo a fare; cioè non cercheremo di sviluppare in un generico sistema lo studio della dinamica del punto, come già fatto in un sistema inerziale partendo da (2.1). La procedura da seguire piuttosto è di trasformare le misure eseguite in un sistema non inerziale riferendole a un sistema inerziale e, a questo punto, interpretarle con le leggi note.

Anche tutti i successivi sviluppi della teoria (sistemi di punti e corpi rigidi) verranno ambientati naturalmente in sistemi di riferimento inerziali, con una sola importante eccezione: troveremo significativo in qualche caso riferire il moto anche al cosiddetto sistema di riferimento del centro di massa, che in generale non è un sistema inerziale. Avremo allora modo di applicare il formalismo sviluppato in questo capitolo.

Nota sulla composizione di moti

Le operazioni essenzialmente formali di scomposizione del moto di un punto in tre moti rettilinei lungo gli assi e viceversa, che abbiamo visto nel primo capitolo, trovano applicazione nell'ambito del moto relativo, anche se il contesto fisico è diverso. Il moto rispetto a O può sempre essere pensato come composizione del moto relativo rispetto a O' e del moto di trascinamento di O' rispetto a O .

Un esempio tipico è quello di una barca che attraversa un fiume e viene trasportata dalla corrente. Supponiamo che il fiume sia rettilineo e largo d , che la velocità della corrente sia \mathbf{v}_F (velocità del moto di trascinamento, costante), che la barca si muova sempre ortogonalmente a \mathbf{v}_F con velocità \mathbf{v}_B costante (relativa al sistema O' che si sposta con la corrente).

Se la barca parte dal punto A , quanto a valle si trova il punto B di arrivo? Il tempo di attraversamento si calcola più facilmente nel sistema O' e vale d / v_B ; in questo tempo la corrente percorre il tratto $b = (d/v_B)v_F$ e ciò risponde alla domanda. La traiettoria della barca rispetto a O , solidale alle rive, è un segmento lungo $\sqrt{d^2+b^2}$ che forma con la corrente l'angolo $\theta = \arctg (v_B/v_F)$; la velocità rispetto a O è $\sqrt{v_B^2+v_F^2}$

Note sulle formule di Poisson

Scriviamo le componenti cartesiane del vettore $d\mathbf{u}_x / dt$ come proiezioni del vettore stesso sugli assi:

$$\frac{d\mathbf{u}_x}{dt} = \left(\frac{d\mathbf{u}_x}{dt} \cdot \mathbf{u}_x \right) \mathbf{u}_x + \left(\frac{d\mathbf{u}_x}{dt} \cdot \mathbf{u}_y \right) \mathbf{u}_y + \left(\frac{d\mathbf{u}_x}{dt} \cdot \mathbf{u}_z \right) \mathbf{u}_z \quad .$$

Il primo termine però è nullo perché, come abbiamo già ricavato più volte, $d\mathbf{u}_x/dt$ è ortogonale a \mathbf{u}_x . Ragionando allo stesso modo per $d\mathbf{u}_y/dt$ e $d\mathbf{u}_z/dt$ abbiamo:

$$\frac{d\mathbf{u}_x}{dt} = \left(\frac{d\mathbf{u}_x}{dt} \cdot \mathbf{u}_y \right) \mathbf{u}_y + \left(\frac{d\mathbf{u}_x}{dt} \cdot \mathbf{u}_z \right) \mathbf{u}_z \quad ,$$

$$\frac{d\mathbf{u}_y}{dt} = \left(\frac{d\mathbf{u}_y}{dt} \cdot \mathbf{u}_x \right) \mathbf{u}_x + \left(\frac{d\mathbf{u}_y}{dt} \cdot \mathbf{u}_z \right) \mathbf{u}_z \quad ,$$

$$\frac{d\mathbf{u}_z}{dt} = \left(\frac{d\mathbf{u}_z}{dt} \cdot \mathbf{u}_x \right) \mathbf{u}_x + \left(\frac{d\mathbf{u}_z}{dt} \cdot \mathbf{u}_y \right) \mathbf{u}_y \quad .$$

Le sei componenti non sono indipendenti, ma eguali in modulo a due a due; infatti derivando la $\mathbf{u}_x \cdot \mathbf{u}_y = 0$ si ricava

$$\frac{d\mathbf{u}_x}{dt} \cdot \mathbf{u}_y = - \frac{d\mathbf{u}_y}{dt} \cdot \mathbf{u}_x \quad ;$$

analogamente

$$\frac{d\mathbf{u}_x}{dt} \cdot \mathbf{u}_z = - \frac{d\mathbf{u}_z}{dt} \cdot \mathbf{u}_x \quad , \quad \frac{d\mathbf{u}_y}{dt} \cdot \mathbf{u}_z = - \frac{d\mathbf{u}_z}{dt} \cdot \mathbf{u}_y \quad .$$

Definiamo il vettore $\boldsymbol{\omega}$ che ha come componenti i tre termini indipendenti:

$$\omega_x = \frac{d\mathbf{u}_y}{dt} \cdot \mathbf{u}_z \quad , \quad \omega_y = \frac{d\mathbf{u}_z}{dt} \cdot \mathbf{u}_x \quad , \quad \omega_z = \frac{d\mathbf{u}_x}{dt} \cdot \mathbf{u}_y \quad .$$

Dalle proprietà del prodotto vettoriale (appendice C) ricaviamo infine

$$\frac{d\mathbf{u}_x}{dt} = \omega_z \mathbf{u}_y - \omega_y \mathbf{u}_z = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}_x \quad ,$$

$$\frac{d\mathbf{u}_y}{dt} = -\omega_z \mathbf{u}_x + \omega_x \mathbf{u}_z = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}_y \quad ,$$

$$\frac{d\mathbf{u}_z}{dt} = \omega_y \mathbf{u}_x - \omega_x \mathbf{u}_y = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}_z \quad .$$

Vediamo così che esiste un vettore $\boldsymbol{\omega}$ tramite il quale si possono scrivere

tutte e tre le derivate. La dimostrazione è valida per qualsiasi terna cartesiana trirettangola e quindi in particolare per il sistema O' .

Nota sui sistemi di riferimento in coordinate polari

Nella descrizione del moto piano in coordinate polari il punto P è individuato dalla distanza r dal polo O e dall'angolo θ formato da \mathbf{r} con un asse di riferimento. Chiamiamo fisso il sistema x, y e mobile il sistema definito dai versori \mathbf{u}_r e \mathbf{u}_θ , che rispetto al sistema fisso ruota con velocità angolare $\omega = d\theta/dt$. Una caratteristica di questo sistema mobile è che il punto P si trova sempre sull'asse x' , per cui il moto relativo è rettilineo con

$$\mathbf{v}' = \frac{dr}{dt} \mathbf{u}_r, \quad \mathbf{a}' = \frac{d^2r}{dt^2} \mathbf{u}_r.$$

Confrontando le espressioni in notazione polare per la velocità (1.19) e l'accelerazione (1.23), introdotte nel primo capitolo, e le relazioni (3.4) e (3.7), ci accorgiamo che sono identiche. Infatti

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \frac{dr}{dt} \mathbf{u}_r + r \frac{d\theta}{dt} \mathbf{u}_\theta = \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \\ \mathbf{a} &= \frac{d^2r}{dt^2} \mathbf{u}_r - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \mathbf{u}_r + r \frac{d^2\theta}{dt^2} \mathbf{u}_\theta + 2 \frac{d\theta}{dt} \frac{dr}{dt} \mathbf{u}_\theta = \\ &= \mathbf{a}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' \end{aligned}$$

In effetti il moto piano in coordinate polari è riferito ad un particolare sistema mobile e quindi, per essere riferito al sistema fisso x, y , deve obbedire ai teoremi del moto relativo.

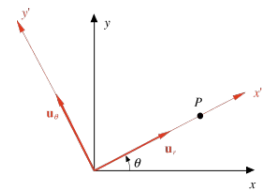


FIGURA 3.18

3.8 Teoria della relatività. Trasformazioni di Lorentz

La proprietà più notevole che abbiamo trovato studiando il moto relativo è la relatività galileiana, che ora riformuliamo così: le leggi della meccanica sono invarianti rispetto alle trasformazioni tipo (3.11), che legano le coordinate di due sistemi di riferimento in moto rettilineo uniforme l'uno rispetto all'altro. Un fenomeno osservato e spiegato in un sistema ha la stessa spiegazione dinamica nell'altro: la cinematica è diversa perché diverse sono le condizioni iniziali, ma la legge fisica è la stessa, nella sostanza e nella struttura. Da ciò segue tra l'altro che con esperimenti di meccanica compiuti in sistemi inerziali non è possibile mettere in evidenza se il sistema di riferimento è in moto o è in quiete, fatto rilevato già da Galileo.

Nella seconda metà dell'ottocento diverse circostanze portarono a una crisi del principio di relatività galileiano. I fenomeni elettrici e magnetici vennero inquadrati nella teoria dell'elettromagnetismo di Maxwell, che incluse in questo contesto anche i fenomeni luminosi; le equazioni di Maxwell risultarono però non invarianti rispetto alle trasformazioni galileiane. Inoltre nel 1887 venne provato sperimentalmente da Michelson e Morley che la velocità c della luce nel vuoto ha lo stesso valore in qualsiasi sistema di riferimento inerziale, cioè non si compone con la velocità di trascinamento dando per esempio $c + v$ o $c - v$, come vorrebbero le trasformazioni galileiane delle velocità.

La soluzione venne proposta da Einstein nel 1905; egli estese il principio di relatività, assumendo che tutte le leggi della Fisica siano invarianti quando considerate in diversi sistemi di riferimento inerziali e che quindi con nessun esperimento sia possibile mettere in evidenza il moto del sistema di riferimento. In particolare devono essere invarianti le equazioni di Maxwell e la legge sperimentale secondo cui la velocità della luce nel vuoto vale sempre c , indipendentemente dal moto della sorgente e dell'osservatore. La trasformazione di coordinate tra due sistemi inerziali che permette di soddisfare tali richieste non può essere del tipo (3.11), ma risulta, nel caso semplice della figura 3.2 e indicando con v_0 la velocità costante di trascinamento,

$$\begin{aligned} x' &= \gamma_0 (x - v_0 t) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \gamma_0 \left(t - \frac{v_0}{c^2} x \right) \end{aligned} \quad \gamma_0 = \frac{1}{1 - \frac{v_0^2}{c^2}} \quad (3.15)$$

Il valore di c , velocità della luce nel vuoto, è con ottima approssimazione $3 \cdot 10^8$ m/s.

Un fenomeno che avviene nel sistema O in un punto di coordinate x, y, z al

tempo t , ovvero, come si suol dire, un *evento* caratterizzato da x, y, z, t , viene osservato dal sistema O' , in moto con velocità v_0 , nel punto di coordinate x', y', z' al tempo t' . Il fatto più notevole sta nella quarta relazione: nelle (3.11) si assumeva implicitamente $t = t'$, cioè che il tempo fosse assoluto, ora invece *anche il tempo ha un valore relativo al sistema di riferimento*.

Le (3.15) costituiscono una *trasformazione di Lorentz* e furono scritte da Lorentz molto prima del 1905, quando egli si pose il problema matematico di trovare quali fossero le trasformazioni di coordinate tra due sistemi inerziali che rendessero invarianti le equazioni di Maxwell. Einstein ne comprese il significato profondo e le pose alla base della teoria della relatività (detta ristretta o speciale).

La trasformazione di Lorentz è dunque la trasformazione di coordinate spaziali e temporali più generale che lega le osservazioni fatte in due diversi sistemi inerziali; l'invarianza rispetto ad una trasformazione di Lorentz è un requisito fondamentale che, in base al principio di relatività, deve possedere qualsiasi legge fisica. Come si è detto, le equazioni di Maxwell possiedono questo requisito e vedremo tra breve che anche il valore c della velocità della luce nel vuoto è preservato da una trasformazione di Lorentz.

Invece la seconda legge di Newton, che abbiamo utilizzato per la descrizione della dinamica del punto materiale, non è invariante rispetto ad una trasformazione di Lorentz. Questo fatto però non le toglie validità, ne limita soltanto il campo di applicabilità. In effetti la meccanica newtoniana, sia quella studiata finora che quella contenuta nei prossimi capitoli, e le trasformazioni galileiane rispetto alle quali essa è invariante, sono perfettamente adeguate alla descrizione dei fenomeni meccanici ordinari, che coinvolgono corpi macroscopici aventi velocità molto inferiori a quelle della luce; del resto, è proprio dalla sperimentazione compiuta sul moto di questi corpi che le leggi della meccanica sono state ricavate. Non è però lecita l'estensione a fenomeni che comportino velocità prossime o eguali a quella della luce, come risultò verso la fine dell'ottocento e come si verifica facilmente operando con particelle microscopiche a livello atomico e nucleare. In queste situazioni occorre ridefinire la quantità di moto e l'energia e utilizzare la legge del moto $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$; accenneremo brevemente a questa meccanica relativistica nel successivo paragrafo. Caratteristica saliente della nuova formulazione è che essa riproduce, quando trattiamo i fenomeni ordinari, la formulazione newtoniana: infatti, se v_0 è molto minore di c , γ_0 vale a tutti gli effetti 1, v_0/c^2 vale zero e le (3.15) diventano le (3.11); analogamente le grandezze relativistiche, definite per qualsiasi velocità, si riconducono alle usuali grandezze meccaniche per piccole velocità.

Vediamo adesso alcune prime conseguenze delle (3.15).

Trasformazione delle velocità

Nel sistema di origine O la velocità di un punto materiale ha le componenti $dx/dt, dy/dt, dz/dt$; nel sistema O' si hanno le componenti $dx'/dt', dy'/dt', dz'/dt'$. Dalla prima e dalla quarta delle (3.15) ricaviamo

$$dx' = \gamma_0 (dx - v_0 dt) = \gamma_0 dt \left(\frac{dx}{dt} - v_0 \right) = \gamma_0 dt (v_x - v_0) \quad ,$$

$$dt' = \gamma_0 \left(dt - \frac{v_0}{c^2} dx \right) = \gamma_0 dt \left(1 - \frac{v_0}{c^2} v_x \right) \quad ,$$

$$\frac{dx'}{dt'} = v_x' = \frac{v_x - v_0}{1 - \frac{v_0}{c^2} v_x} \quad .$$

Per le altre due componenti si procede allo stesso modo e il risultato per le relazioni tra le componenti della velocità di un punto misurate nei due diversi sistemi è

$$v_x' = \frac{v_x - v_0}{1 - \frac{v_0}{c^2} v_x}$$

$$v_y' = \frac{v_y}{\gamma_0 \left(1 - \frac{v_0}{c^2} v_x \right)} \quad (3.16)$$

$$v_z' = \frac{v_z}{\gamma_0 \left(1 - \frac{v_0}{c^2} v_x \right)} \quad .$$

Notiamo subito che se $v_0 \ll c$ le (3.16) danno le (3.12).

Applichiamo le (3.16) al caso limite di un segnale luminoso che si propaga lungo l'asse x con velocità c ($v_x = c, v_y = v_z = 0$); risulta

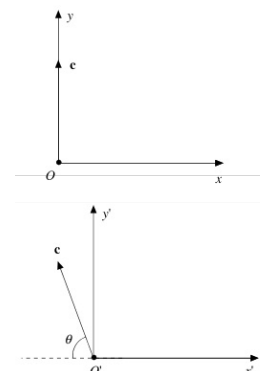
$$v_x' = \frac{c - v_0}{1 - \frac{v_0}{c}} = c \quad , \quad v_y' = v_z' = 0 \quad ,$$

e quindi nel sistema O' , in moto con velocità v_0 rispetto a O , si misura la stessa velocità c , qualunque sia il valore di v_0 .

ESEMPIO 3.8

Nel sistema O si osserva un raggio luminoso che si propaga lungo l'asse y con velocità c ; determinare cosa si osserva nel sistema O' che si sposta rispetto ad O con velocità v_0 .

Soluzione



Applichiamo le relazioni (3.16) con $v_x = v_z = 0$, $v_y = c$:

$$v'_x = -v_0 \quad , \quad v'_y = \frac{c}{\gamma_0} \quad , \quad v'_z = 0 \quad .$$

Pertanto nel sistema O' la luce ha velocità

$$\sqrt{v'^2_x + v'^2_y} = \frac{c}{\gamma_0} \sqrt{1 + \frac{v_0^2}{c^2}} = c$$

e la sua traiettoria forma con l'asse $x' \equiv x$ un angolo θ tale che

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{v'_y}{v'_x} = -\frac{c}{\gamma_0 v_0} \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = -\frac{1}{\gamma_0} \quad , \quad \operatorname{cos}\theta = \frac{v_0}{c} \quad .$$

Più in generale, ponendo $v_x = c \cos\Phi$, $v_y = c \operatorname{sen}\Phi$, $v_z = 0$, cioè considerando una traiettoria della luce nel piano x, y , si trova facilmente che $v'^2_x + v'^2_y = c^2$ ed eguale risultato si ottiene nel caso tridimensionale.

FIGURA 3.19
(Esempio 3.8)

Visualizza soluzione

Abbiamo così verificato che *le trasformazioni di Lorentz garantiscono la costanza del valore c in qualsiasi sistema inerziale*. È solo la direzione del raggio luminoso che appare diversa in ciascun sistema.

Come secondo esempio consideriamo il moto di punti materiali con velocità prossima a quella della luce.

ESEMPIO 3.9

Due elettroni si muovono nel sistema O , uno con velocità $0.7c$ concorde all'asse x e l'altro con velocità $0.5c$ discorde all'asse x . Qual è la velocità relativa?

Soluzione

Prendiamo come sistema O' quello in cui è in quiete l'elettrone avente velocità $0.7c$; in questo sistema la velocità del secondo elettrone è appunto la velocità relativa al primo. Abbiamo $v_0 = 0.7c$, $v_x = 0.5c$ (e $v_y = v_z = 0$). Pertanto

$$v'_x = \frac{-0.5c - 0.7c}{1 + \frac{0.7c \cdot 0.5c}{c^2}} = -\frac{1.2c}{1.35} = -0.89c \quad .$$

La trasformazione classica (3.12) ci avrebbe dato $-1.2c$, invece la trasformazione relativistica dà un risultato che in modulo è minore di c (se invece O' fosse il sistema in cui è in quiete l'elettrone avente velocità $-0.5c$, troveremmo $v'_x = 0.89c$, cioè lo stesso risultato). È facile verificare che v'_x resta in modulo sempre minore di c se v_x e v_0 sono entrambe minori di c .

Visualizza soluzione

La conclusione raggiunta nell'esempio 3.9 può essere estesa nel modo seguente: quando si compone la velocità di un punto materiale con quella di un sistema di riferimento, ovvero si osserva il moto da un diverso sistema di riferimento, non si ottiene mai un valore maggiore o eguale a c se le velocità del punto e del sistema sono entrambi minori di c .

Questo fatto va visto insieme ad un'altra circostanza fondamentale: dall'espressione di $\gamma_0 = (1 - v_0^2/c^2)^{-1/2}$, che partendo dal valore unitario assunto per $v_0 = 0$ cresce all'aumentare di v_0 e tende all'infinito per v_0 tendente a c (con $v_0 > c$ γ_0 assumerebbe un valore immaginario), si capisce che *la velocità della luce appare come un valore limite non raggiungibile*. Per valori di v_0 maggiori di c le (3.15) perderebbero significato e lo stesso succedrebbe, come vedremo nel prossimo paragrafo, anche per la quantità di moto e l'energia di un punto materiale.

Siccome noi possiamo sempre pensare che il sistema O' sia quello in cui è in quiete un punto materiale che ha velocità v_0 rispetto al sistema O , deduciamo in definitiva che *la velocità di un punto materiale è sempre inferiore a c , in qualsiasi sistema di riferimento inerziale* (essa può però essere molto vicina a c : la velocità raggiunta dagli elettroni accelerati nella macchina LEP del CERN è inferiore a c di circa $3 \cdot 10^{-10}$ m/s).

Un caso speciale è costituito dalla luce stessa, che ha velocità c in qualsiasi sistema inerziale, come abbiamo verificato; pertanto *non esiste un sistema inerziale in cui la velocità della luce è eguale a zero*.

Accanto alle trasformazioni da O a O' vanno considerate le trasformazioni inverse da O' a O ; si tratta di ricavare x, y, z, t in funzione di x', y', z', t' nelle (3.15) e di procedere in modo analogo nelle (3.16). Si trova

$$\begin{aligned}
 x &= \gamma_0 (x' + v_0 t') & v_x &= \frac{u'_x + v_0}{1 + \frac{v_0}{c^2} u'_x} \\
 y &= y' & & \\
 z &= z' & v_y &= \frac{u'_y}{\gamma_0 \left(1 + \frac{v_0}{c^2} u'_x\right)} \\
 t &= \gamma_0 \left(t' + \frac{v_0}{c^2} x'\right) & v_z &= \frac{u'_z}{\gamma_0 \left(1 + \frac{v_0}{c^2} u'_x\right)}
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

e si nota che le trasformazioni inverse hanno la stessa struttura, semplicemente v_0 è diventata $-v_0$, come era prevedibile a priori.

Trasformazione delle accelerazioni

Per trovare le formule secondo cui si trasforma l'accelerazione cominciamo dalle componenti $a_x = dv_x/dt$ e $a_x' = dv_x'/dt'$. Abbiamo già visto che $dt' = \gamma_0 dt (1 - v_0 v_x/c^2)$; dalla prima delle (3.16) ricaviamo

$$dv_x' = \frac{dv_x}{1 - \frac{v_0}{c^2} v_x} + \frac{(v_x - v_0) v_0 dv_x}{c^2 \left(1 - \frac{v_0}{c^2} v_x\right)^2} = \frac{1}{\gamma_0^2} \frac{dv_x}{\left(1 - \frac{v_0}{c^2} v_x\right)^2}$$

$$\Rightarrow a_x' = \frac{a_x}{\gamma_0^3 \left(1 - \frac{v_0}{c^2} v_x\right)^3} . \quad (3.18a)$$

Passando alla seconda delle (3.16) si ha

$$dv_y' = \frac{dv_y}{\gamma_0 \left(1 - \frac{v_0}{c^2} v_x\right)} + \frac{v_y v_0 dv_x}{\gamma_0 \left(1 - \frac{v_0}{c^2} v_x\right)^2 c^2} = \frac{1}{\gamma_0 \left(1 - \frac{v_0}{c^2} v_x\right)} \left(dv_y + \frac{\frac{v_0 v_y}{c^2}}{1 - \frac{v_0}{c^2} v_x} dv_x \right)$$

$$\Rightarrow a_y' = \frac{1}{\gamma_0^2 \left(1 - \frac{v_0}{c^2} v_x\right)^2} \left(a_y + a_x \frac{\frac{v_0 v_y}{c^2}}{1 - \frac{v_0}{c^2} v_x} \right) . \quad (3.18b)$$

Analogamente

$$a_z' = \frac{1}{\gamma_0^2 \left(1 - \frac{v_0}{c^2} v_x\right)^2} \left(a_z + a_x \frac{\frac{v_0 v_z}{c^2}}{1 - \frac{v_0}{c^2} v_x} \right) . \quad (3.18c)$$

Se nel sistema O l'accelerazione è nulla ($a_x = a_y = a_z = 0$), lo stesso avviene nel sistema O' ($a_x' = a_y' = a_z' = 0$). Ciò è coerente con l'affermazione iniziale secondo cui, dato un sistema inerziale, con una trasformazione di Lorentz si passa ad un altro sistema inerziale (e ci ricorda che di sistemi inerziali ne esiste un numero infinito). Invece, se in un sistema inerziale si misura un'accelerazione non nulla, in un altro sistema inerziale si trova un valore non nullo diverso, secondo (3.18); non è più valido il risultato $\mathbf{a} = \mathbf{a}'$, garantito dalle trasformazioni galileiane (ad esso si ritorna solo nel caso di piccole velocità, come è facile verificare). Si comprende così perché la legge di Newton $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ non è invariante rispetto ad una trasformazione di Lorentz.

Contrazione delle lunghezze e dilatazione dei tempi

Nella meccanica newtoniana si ammette implicitamente che le misure di spazio e di tempo siano invarianti rispetto al sistema di riferimento ovvero che esse abbiano un significato assoluto: se un oggetto misurato in O ha lunghezza L anche O' trova L e un intervallo di tempo Δt misurato in O vale ancora Δt se

misurato in O' . Invece un'impostazione corretta del problema, che tenga conto di tutti i fenomeni conosciuti (tra i quali la costanza del valore c della velocità della luce in qualsiasi sistema inerziale), porta alla conclusione che le misure di lunghezza e tempo dipendono dal sistema di riferimento; numericamente l'effetto si può trascurare solo per velocità molto minori di c .

Cominciamo col considerare una sbarretta lunga L' , la quale è in quiete sull'asse x' del sistema O' ; x'_1 e x'_2 sono le coordinate dei suoi estremi. Supponiamo che O' si muova con velocità v_0 rispetto a O e che un osservatore nel sistema O

misuri, nello stesso istante di tempo t , le coordinate x_1 e x_2 degli estremi della sbarretta. Secondo (3.15)

$$x'_1 = \gamma_0 (x_1 - v_0 t) \quad , \quad x'_2 = \gamma_0 (x_2 - v_0 t) \quad ,$$

$$L' = x'_2 - x'_1 = \gamma_0 (x_2 - x_1) = \gamma_0 L \quad , \quad L = \frac{L'}{\gamma_0} = \sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}} L' \quad :$$

la lunghezza L misurata da O della sbarretta in movimento rispetto ad O' risulta minore della lunghezza L' misurata da O' , rispetto a cui la sbarretta è in quiete. La sbarretta appare contratta lungo la direzione del moto e l'effetto si chiama *contrazione delle lunghezze*.

Notiamo che se la sbarretta è in quiete in O e in moto rispetto a O' abbiamo dalle (3.17)

$$x_1 = \gamma_0 (x'_1 + v_0 t') \quad , \quad x_2 = \gamma_0 (x'_2 + v_0 t') \quad ,$$

$$x_2 - x_1 = \gamma_0 (x'_2 - x'_1) \quad , \quad L' = \frac{L}{\gamma_0} = \sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}} L \quad :$$

l'effetto è lo stesso, *la misura fatta nel sistema rispetto a cui la sbarretta è in moto è minore della misura fatta nel sistema in cui la sbarretta è in quiete*. Quest'ultima misura si chiama *lunghezza propria* della sbarretta.

La contrazione relativistica non si ha se la sbarretta è disposta lungo l'asse y o l'asse z , ortogonali alla direzione del moto (dato che $y = y'$ e $z = z'$).

Consideriamo adesso un fenomeno che nel sistema O' avviene nella posizione di coordinata x' e dura un tempo $\Delta t' = t'_2 - t'_1$; nel sistema O si ha

$$t_1 = \gamma_0 \left(t'_1 + \frac{v_0}{c^2} x' \right) \quad , \quad t_2 = \gamma_0 \left(t'_2 + \frac{v_0}{c^2} x' \right) \quad ,$$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \gamma_0 \Delta t' = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} \quad :$$

l'intervallo di tempo in O , rispetto a cui O' si muove, appare più lungo, il fenomeno per O dura di più. Di nuovo l'effetto è lo stesso se il fenomeno avviene

in O , dove dura Δt , e si calcola cosa misura O' : si trova $\Delta t' = \gamma_0 \Delta t$. Nella situazione descritta *il tempo misurato da un sistema in movimento è sempre maggiore del tempo proprio, misurato in quiete*. Si parla in questo caso di *dilatazione dei tempi*.

La dilatazione dei tempi segue in modo naturale dalla trasformazione di Lorentz. Vogliamo far vedere come la si possa ricavare direttamente dal fatto che la velocità della luce ha lo stesso valore c in sistemi inerziali diversi. Il fenomeno che si considera è l'emissione di un segnale luminoso dall'origine del sistema O ; tale segnale si propaga lungo l'asse y fino a distanza d , qui viene riflesso da uno specchio e torna in O : il tempo di andata è d/c e il tempo totale per tornare in O è $2d/c$. Osserviamo il fenomeno dal sistema O' in moto con velocità v_0 ; ricordando quanto calcolato nell'esempio 3.8, si ha la situazione mostrata nella figura 3.20 (supponendo che nell'istante in cui viene emesso il segnale O e O' coincidano). La distanza d' misurata in O' e la distanza d misurata in O sono legate dalla relazione $d = d' \sin\theta = d'/\gamma_0$, dove abbiamo usato (in modulo) la relazione ricavata nell'esempio 3.8. La velocità della luce è c in entrambi i sistemi e il tempo impiegato dalla

luce, secondo O' , per raggiungere lo specchio e tornare indietro è

$$t' = \frac{2d'}{c} = 2\gamma_0 \frac{d}{c} = \gamma_0 t \quad ;$$

la distanza è maggiore, la velocità è la stessa, il tempo deve essere maggiore. Ritroviamo che la durata di un fenomeno, visto da un sistema in moto, è maggiore della durata propria.

Classicamente, cioè componendo la velocità della luce c con la velocità di trascinamento v_0 secondo la regola galileiana, la velocità della luce in O' sarebbe $c+v_0$, l'angolo θ sarebbe tale che $\tan\theta = v_0/c$ ovvero $\sin\theta = \frac{v_0}{\sqrt{c^2+v_0^2}}$, la distanza $d' = d/\sin\theta$ risulterebbe $d \sqrt{c^2+v_0^2}/c$ e per il tempo si avrebbe

$$t' = \frac{2d'}{c} = \frac{2d}{c} \frac{\sqrt{c^2+v_0^2}}{c} = t \quad ,$$

eguale al tempo misurato in O .

Anche nel caso della contrazione delle lunghezze si può costruire un esempio analogo in cui si vede esplicitamente che il risultato è conseguenza diretta della costanza del valore c in diversi sistemi inerziali.

Accanto a questi esempi essenzialmente concettuali c'è una classe di fenomeni in cui la dilatazione dei tempi si misura correntemente, *i decadimenti delle particelle subnucleari instabili*. Nel decadimento la particella primaria cessa di esistere e al suo posto compaiono altre particelle; il processo ha un suo tempo caratteristico τ , detto *vita media* della particella che decade, avente questo significato: se ad un certo istante c'è un dato numero N di particelle primarie, dopo τ secondi questo numero si è ridotto a N/e (con $e = 2.71828\dots$),

dopo 2τ secondi a N/e^2 e così via. Ovvero, se una particella instabile viene considerata al tempo $t = 0$, la probabilità P che essa sia ancora esistente al tempo t è $P(t) = e^{-t/\tau}$. Tutto ciò è corretto in un sistema di riferimento in cui la particella è in quiete. Con un acceleratore di particelle e attraverso opportune reazioni è possibile produrre artificialmente particelle instabili di un dato tipo con ben determinate velocità, anche assai prossime alla velocità c . Si osserva che esse percorrono spazi che sembrano incompatibili con la loro vita media τ , cioè queste particelle arrivano a distanza notevole dalla sorgente di produzione dopo un tempo tale che la probabilità di sopravvivenza dovrebbe essere praticamente zero; come ordine di grandezza potremmo aspettarci che esse arrivino a distanze di valore $\sim c\tau$, invece le distanze sono molto maggiori. La spiegazione sta nella dilatazione relativistica del tempo. Immaginiamo un sistema O' solidale alla particella: in O' essa è a riposo e la sua vita media vale τ , cioè il fenomeno osservato in un punto x' di O' è il decadimento in quiete della particella, caratterizzato dal tempo τ . Il sistema O' si muove però con velocità vicina a c rispetto al sistema O , per esempio solidale all'acceleratore (il cosiddetto sistema del laboratorio) e nei due sistemi gli intervalli di tempo non sono gli stessi: come abbiamo visto $\Delta t = \gamma_0 \Delta t'$ e quindi nel sistema O la vita media è $\gamma_0 \tau$; la particella in moto vive più a lungo ed è pertanto in grado di coprire distanze di valore $\sim c\gamma_0 \tau$. Qualunque sia la velocità di O' (cioè della particella) rispetto ad O , O' misura sempre τ ; invece O misura una vita media $\gamma_0 \tau$ che è tanto maggiore quanto più la particella è veloce: al crescere della velocità relativa ad O sembra che i fenomeni in O' si svolgano sempre più lentamente.

In effetti è nel campo della cinematica e della dinamica (vedi paragrafo 3.9) delle particelle nucleari e subnucleari, stabili e instabili, che la meccanica relativistica ha trovato solide verifiche, soprattutto attraverso l'uso degli acceleratori di particelle, nei quali queste raggiungono facilmente velocità prossime a c , con notevolissimi effetti relativistici.

ESEMPIO 3.10

Il leptone μ è una particella subnucleare avente vita media $\tau = 2.2 \cdot 10^{-6}$ s. Calcolare la vita media nel laboratorio e la quantità $c\gamma\tau$ per velocità del v pari a $0.5c$, $0.7c$, $0.9c$, $0.99c$, $0.999c$.

Soluzione

Per le varie velocità calcoliamo $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ e compiliamo la seguente tabella.

Teniamo presente che nel sistema in cui il μ è a riposo $c\tau = 660$ m = 0.66 km.

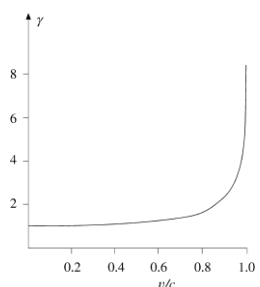


FIGURA 3.21
(Esempio 3.10)

$v = 0.5c$	$\gamma = 1.16$	$\gamma\tau = 2.55 \cdot 10^{-6} \text{ s}$	$c\gamma\tau = 0.77 \text{ km}$
$0.7c$	1.40	$3.08 \cdot 10^{-6} \text{ s}$	0.92 km
$0.9c$	2.29	$5.04 \cdot 10^{-6} \text{ s}$	1.51 km
$0.99c$	7.09	$15.60 \cdot 10^{-6} \text{ s}$	4.68 km
$0.999c$	22.37	$49.21 \cdot 10^{-6} \text{ s}$	14.76 km

Vediamo che si tratta di variazioni importanti. L'ultima colonna in particolare ci dà il riscontro quantitativo del fatto che un μ prodotto con notevole velocità può coprire prima di decadere distanze molto maggiori di $c\tau$.

Storicamente i leptoni μ vennero scoperti nel 1937 nella radiazione cosmica; si trovò, rallentandoli fino a portarli alla quiete, che erano particelle instabili con la vita media $\tau = 2.2 \cdot 10^{-6} \text{ s}$ sopra citata. D'altra parte la loro origine è dovuta al decadimento di altre particelle instabili prodotte nell'urto di protoni cosmici contro i nuclei degli atomi presenti negli strati alti dell'atmosfera (distanti ben più di $c\tau = 660 \text{ m}$ dalla superficie terrestre). I leptoni μ così prodotti hanno notevole velocità; nel sistema del laboratorio la loro vita è più lunga e così essi possono raggiungere la superficie terrestre ed essere rivelati.

Visualizza soluzione

Simultaneità

La nozione che il tempo dipende dal sistema di riferimento, espressa dalla quarta delle (3.15), comporta anche la revisione del concetto di simultaneità. Ad esempio, due eventi che nel sistema O' sono localizzati nei punti di coordinate x'_1 e x'_2 sono definiti simultanei se avvengono nello stesso istante di tempo t' : i punti sono in quiete nel sistema O' e non ci sono problemi nella misura del tempo. Però O assegna ai due eventi i tempi

$$t_1 = \gamma_0 \left(t' + \frac{v_0}{c^2} x'_1 \right) \quad , \quad t_2 = \gamma_0 \left(t' + \frac{v_0}{c^2} x'_2 \right) \quad ,$$

che non sono eguali essendo $x'_1 \neq x'_2$. La differenza vale

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \gamma_0 \frac{v_0}{c^2} (x'_2 - x'_1)$$

e concludiamo che due eventi localizzati in punti diversi e simultanei nel sistema O' non sono simultanei nel sistema O .

Anche per questo caso possiamo legare il risultato all'invarianza di c , come mostriamo nell'esempio seguente. Nel sistema O' consideriamo un punto P da cui nello stesso istante vengono inviati due segnali luminosi verso i rivelatori R_1 e R_2 , distanti d da P ; l'arrivo dei segnali ai rivelatori è simultaneo e avviene all'istante $t'_1 = t'_2 = d/c$. Tutto questo apparato si sposta con velocità v_0 rispetto

al sistema O , nel quale la luce si propaga sempre con velocità c ; però R_1 va incontro al segnale luminoso emesso da P e R_2 se ne allontana, cioè nel sistema O la luce che va da P a R_1 percorre uno spazio minore di quella che va da P a R_2 e quindi i tempi non possono essere gli stessi, proprio perché c non cambia. In formule

$$PR_1 \quad ct_1 = d - v_0 t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{d}{c + v_0}$$

$$PR_2 \quad ct_2 = d + v_0 t_2 \Rightarrow t_2 = \frac{d}{c - v_0} > t_1 .$$

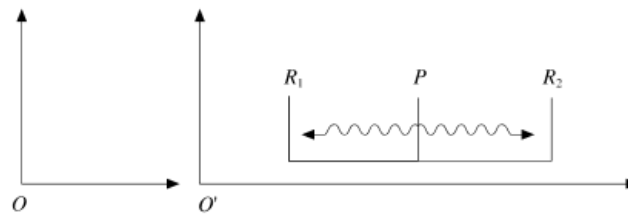


FIGURA 3.22

Nella visuale galileiana la velocità della luce si compone con la velocità di trascinamento v_0 : in O la luce che va da P a R_1 ha velocità $c - v_0$ e quella che va da P a R_2 ha velocità $c + v_0$, per cui dobbiamo scrivere

$$PR_1 \quad (c - v_0) t_1 = d - v_0 t_1 \Rightarrow t_1 = d/c$$

$$PR_2 \quad (c + v_0) t_2 = d + v_0 t_2 \Rightarrow t_2 = d/c$$

e la simultaneità viene preservata; però questo procedimento è contrario al risultato sperimentale dell'invarianza di c .

3.9 Quantità di moto ed energia relativistiche

La quantità di moto di un punto materiale di massa m e velocità v si scrive relativisticamente come

$$\mathbf{p} = m\gamma \mathbf{v} = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \mathbf{v} . \quad (3.19)$$

Non si ha più la dipendenza diretta dalla velocità della definizione newtoniana $m\mathbf{v}$ ma compare anche γ come fattore moltiplicativo. Si nota di nuovo che la definizione relativistica tende a quella newtoniana per piccole velocità.

La legge del moto si scrive nella forma (2.2)

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} , \quad (3.20)$$

cioè conserva formalmente la struttura newtoniana, purché la quantità di moto sia data da (3.19). Ne vedremo più avanti l'applicazione in alcune situazioni che abbiamo già trattato per piccole velocità. Vogliamo però notare subito come l'applicazione di una forza, quando la velocità ha già assunto valori vicini a c , porta sì ad un aumento di p , ma questo aumento non si traduce in un aumento corrispondente di velocità, bensì soprattutto in un aumento del fattore γ .

L'effetto si vede chiaramente mettendo in relazione la crescita di p con quella di v , nel modo seguente. Si differenzia la (3.19) e si divide per $p = m\gamma v$:

$$\begin{aligned} dp &= m d(\gamma v) = m \gamma dv + m v d\gamma , \\ \frac{dp}{p} &= \frac{dv}{v} + \frac{d\gamma}{\gamma} = \frac{dv}{v} \left(1 + \frac{d\gamma/\gamma}{dv/v} \right) . \end{aligned}$$

Si differenzia poi l'espressione di γ e si divide per γ :

$$d\gamma = d\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} = \frac{1}{2} \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} d\left(\frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{v}{c^2} \gamma^3 dv = \frac{v^2}{c^2} \gamma^3 \frac{dv}{v} ,$$

$$\frac{d\gamma}{\gamma} = \frac{v^2}{c^2} \gamma^2 \frac{dv}{v} .$$

Mettendo insieme i risultati

$$\begin{aligned} \frac{dp}{p} &= \left(1 + \frac{v^2}{c^2} \gamma^2 \right) \frac{dv}{v} = \gamma^2 \frac{dv}{v} , \\ \frac{dv}{v} &= \frac{1}{\gamma^2} \frac{dp}{p} . \end{aligned} \quad (3.21)$$

L'aumento relativo di velocità è $1/\gamma^2$ volte l'aumento relativo di quantità di moto (causato dall'applicazione di una forza). Dato che γ cresce notevolmente al tendere di v a c , l'aumento relativo di velocità è in effetti molto piccolo. Tutto ciò è in accordo col fatto che la velocità di un punto materiale non possa crescere indefinitamente, bensì tenda alla velocità c .

Calcoliamo adesso l'energia cinetica partendo dalla definizione di lavoro e da (3.20):

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot d\mathbf{s} = d\mathbf{p} \cdot \mathbf{v} \quad .$$

Per la variazione infinitesima della quantità di moto relativistica ci serviamo di (3.21) nella forma $d\mathbf{p} = p\gamma^2 d\mathbf{v}/v$:

$$dW = p\gamma^2 \frac{d\mathbf{v}}{v} \cdot \mathbf{v} = m\gamma^3 \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = \frac{1}{2} m\gamma^3 d(v^2) \quad ,$$

dove abbiamo utilizzato il fatto che $d(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = d(v^2) = 2 \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v}$. Quindi $dW = m\gamma^3 v dv$ e confrontando con l'espressione $d\gamma = \gamma^3 dv/c^2$ trovata sopra concludiamo che

$$dW = mc^2 d\gamma = d(mc^2 \gamma) \quad .$$

Il lavoro per portare una particella dalla quiete ($v = 0, \gamma = 1$) alla velocità v è

$$W = mc^2 \int_1^\gamma d\gamma = mc^2 (\gamma - 1)$$

ed è naturale interpretare questo lavoro come energia cinetica della particella che ha velocità v :

$$E_k = m (\gamma - 1) c^2 \quad . \quad (3.22)$$

Energia cinetica

Per prima cosa verifichiamo che questa espressione, così diversa da $1/2 mv^2$, tenda a tale forma per $v \ll c$. Allo scopo osserviamo che, arrestando lo sviluppo al prim'ordine, si ha

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{x}{2} \quad (x \ll 1)$$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 1 + \frac{v^2}{2c^2} \quad (v^2 \ll c^2)$$

e quindi

$$E_k (v \ll c) = m \left(1 + \frac{v^2}{2c^2} - 1 \right) c^2 = \frac{1}{2} mv^2 \quad .$$

In secondo luogo notiamo la particolare struttura di (3.22): l'energia cinetica, cioè la forma di energia legata esclusivamente al moto del punto, appare come differenza tra i valori $m\gamma c^2$ e mc^2 , il primo variabile con la velocità e il secondo costante, proporzionale alla massa del punto. Ponendo

$$E = m\gamma c^2 \quad , \quad E_0 = mc^2 \quad , \quad (3.23)$$

Energia totale

la (3.22) si scrive

$$E = E_k + E_0 \quad . \quad (3.24)$$

Il termine E viene chiamato *energia totale* del punto materiale alla velocità v e il termine E_0 *energia a riposo* (in quanto eguale ad E quando $E_k = 0$) ovvero energia di massa del punto materiale, proprio perché proporzionale a m . Queste modifiche al concetto di energia, con l'introduzione dell'energia legata all'esistenza della massa e dell'energia totale, somma di energia cinetica e di energia di massa, sono tra i risultati più importanti della meccanica relativistica.

Notiamo che dal rapporto tra le due formule (3.23) si ha

$$\gamma = \frac{E}{E_0} \quad . \quad (3.25)$$

Rispetto alla definizione cinematica $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$, la (3.25) mostra il ruolo dinamico di γ , rapporto tra energia totale ed energia di massa.

Per mezzo della (3.19) possiamo collegare quantità di moto ed energia totale:

$$E = m\gamma c^2 = m\gamma v \frac{c^2}{v} = p \frac{c^2}{v} \quad .$$

In forma vettoriale

$$\mathbf{p} = \frac{E}{c^2} \mathbf{v} \quad . \quad (3.26)$$

Infine, sempre sfruttando le stesse relazioni si ottiene

$$\begin{aligned} E^2 - p^2 c^2 &= m^2 \gamma^2 c^4 - m^2 \gamma^2 v^2 c^2 = m^2 c^4 \gamma^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = m^2 c^4 \\ \Rightarrow E^2 &= p^2 c^2 + m^2 c^4 = p^2 c^2 + E_0^2 \quad , \\ E &= \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} = \sqrt{p^2 c^2 + E_0^2} \quad , \end{aligned} \quad (3.27)$$

relazione fondamentale tra energia totale, quantità di moto ed energia a riposo.

Nota Particelle di massa nulla

Se consideriamo una particella con massa eguale a zero, la relazione (3.27) tra energia totale e quantità di moto diventa

$$E = pc \quad .$$

Sostituendo nella (3.26) si vede che l'eguaglianza comporta $v = c$ e deduciamo questo risultato importante: *una particella con massa nulla si muove con la velocità della luce c* ; di conseguenza non esiste un sistema inerziale in cui essa sia a riposo. Sono particelle di massa nulla i *fotoni*, cioè i quanti di energia elettromagnetica (discussi nel volume secondo).

Trasformazione di Lorentz per quantità di moto e energia

Le varie relazioni trovate tra energia e quantità di moto riguardano il moto di un punto materiale osservato in un certo sistema di riferimento inerziale: in questo il punto di massa m ha velocità v (dalla quale si può calcolare γ), quantità di moto p ed energia totale E , legate appunto da (3.26) e (3.27). In un diverso sistema inerziale tutte queste grandezze hanno i valori v' , γ' , p' , E' e siamo interessati a trovare quale relazione ci sia tra p , E e p' , E' . Ammettiamo che, in base al principio di relatività, E' e p' siano definiti e legati tra loro come E e p .

Indichiamo schematicamente uno dei possibili procedimenti:

- si scrive $p'_x = m \gamma' v'_x$, $p'_y = m \gamma' v'_y$, $p'_z = m \gamma' v'_z$;
- per v'_x , v'_y , v'_z si utilizzano le (3.17);
- si scrive $v_x = p_x / m\gamma$, $v_y = p_y / m\gamma$, $v_z = p_z / m\gamma$;
- si sostituiscono γ e γ' con E / mc^2 e E' / mc^2 .

Arriviamo così, con un calcolo un po' laborioso, ma facile, alle tre relazioni

$$\frac{p'_x}{E'} = \frac{p_x - \frac{v_0}{c^2} E}{E - v_0 p_x} \quad , \quad \frac{p'_y}{E'} = \frac{p_y}{\gamma_0 (E - v_0 p_x)} \quad \frac{p'_z}{E'} = \frac{p_z}{\gamma_0 (E - v_0 p_x)} \quad .$$

Successivamente nella $E' = m\gamma'c^2$, e precisamente in γ' , si sostituisce a v'^2 l'espressione ricavata usando sempre le (3.17), di nuovo si scrive $v_x = p_x / m\gamma$ e si ricava $E' = \gamma_0 (E - v_0 p_x)$, per cui il risultato finale è

$$\begin{aligned} p'_x &= \gamma_0 \left(p_x - \frac{v_0}{c^2} E \right) \\ p'_y &= p_y \\ p'_z &= p_z \\ E' &= \gamma_0 (E - v_0 p_x) \quad . \end{aligned} \tag{3.28}$$

Si nota subito che le (3.28) sono eguali alle (3.15), con $p_x, p_y, p_z, E/c$ al posto di x, y, z, t : *le componenti della quantità di moto e l'energia si trasformano allo stesso modo delle coordinate spaziali e del tempo, cioè secondo una trasformazione di Lorentz*, cosa che non succede a velocità e accelerazione. Anche la trasformazione inversa di (3.28), che fa passare da O' a O , si ottiene

come visto per (3.17).

Abbiamo già detto che in ciascun sistema inerziale le leggi fisiche hanno la stessa struttura; in particolare sia in O che in O' vale la (3.27):

$$E^2 - c^2 p^2 = E_0^2 \quad , \quad E'^2 - c^2 p'^2 = E_0'^2 \quad .$$

Un semplice calcolo sulle (3.28) mostra che

$$E'^2 - c^2 p'^2 = E'^2 - c^2 (p_x'^2 + p_y'^2 + p_z'^2) = E'^2 - c^2 (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) = E^2 - c^2 p^2$$

ovvero l'energia a riposo, e quindi la massa, hanno lo stesso valore nei due sistemi O e O' . In realtà così abbiamo solo verificato la consistenza del formalismo, perché nella nostra dimostrazione si è assunto in partenza che la massa fosse la stessa nei due sistemi (ad esempio quando abbiamo scritto $p'_x = my' v_x'$ o $E' = my' c^2$). D'altra parte è anche vero che le (3.28) possono essere provate indipendentemente e che da esse discende la costanza del valore della massa in qualsiasi sistema inerziale.

Una verifica analoga sulle (3.15) fa vedere che

$$c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \quad .$$

Incontriamo, con questa e con la precedente eguaglianza, una proprietà fondamentale delle trasformazioni di Lorentz. Con le quattro variabili oggetto della trasformazione è possibile costruire una quantità, somigliante al quadrato del modulo di un vettore, che non cambia operando la trasformazione, cioè passando da O ad O' e viceversa. In un caso tale quantità è $c^2 t^2 - r^2$, nell'altro $E^2 - c^2 p^2$. Su questa proprietà ci accontentiamo di richiamare l'attenzione; formalmente essa discende dal fatto che le coordinate spaziali e il tempo possono essere pensate come le coordinate di uno speciale spazio quadridimensionale (lo spazio di Minkowski), in cui le trasformazioni di Lorentz hanno lo stesso ruolo delle rotazioni nello spazio ordinario tridimensionale (sappiamo che le rotazioni conservano la lunghezza dei segmenti, vedi paragrafo 3.7). L'argomento esula dagli scopi di questo libro; esso costituisce la base per la costruzione formale della teoria della relatività ristretta, di cui noi diamo solo qualche nozione.

Esempio 3.11

Nel sistema O' un punto è in quiete. Quanto valgono la sua quantità di moto e la sua energia viste da O ?

Soluzione

In O' $p_x' = p_y' = p_z' = 0$ ed $E' = E_0 = mc^2$. Dato che O' si muove con velocità v_0 rispetto ad O , secondo la solita geometria, usiamo la trasformazione inversa di (3.28):

$$\begin{aligned}
p_x &= \gamma_0 \left(p'_x + \frac{v_0}{c^2} E' \right) = \gamma_0 \frac{v_0}{c^2} mc^2 = m\gamma v_0 \\
p_y &= p'_y = 0 \\
p_z &= p'_z = 0 \\
E &= \gamma_0 (E' + v_0 p'_x) = m\gamma_0 c^2 \quad .
\end{aligned}$$

Giustamente, il punto rispetto ad O si muove con velocità v_0 parallela all'asse x e quindi quantità di moto ed energia hanno le espressioni (3.19) e (3.23). Abbiamo in sostanza verificato nel caso in esame la consistenza della teoria.

Visualizza soluzione

Esempio 3.12

Un fotone avente energia E si muove lungo una linea retta che forma l'angolo θ con l'asse x del sistema O . Calcolare nel sistema O' le espressioni di E' e θ' .

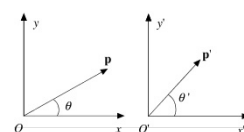


FIGURA 3.23
(Esempio 3.12)

Soluzione

Abbiamo visto nella nota di questo paragrafo che il fotone, considerato come particella di massa nulla, ha quantità di moto $p = E/c$. Tale relazione è vera in qualsiasi sistema inerziale in quanto il fotone ha sempre velocità c e quindi massa nulla. Pertanto nel sistema O possiamo scrivere

$$p_x = p \cos\theta = \frac{E}{c} \cos\theta \quad , \quad p_y = p \sin\theta = \frac{E}{c} \sin\theta \quad , \quad p_z = 0$$

e analogamente nel sistema O'

$$p'_x = \frac{E'}{c} \cos\theta' \quad , \quad p'_y = \frac{E'}{c} \sin\theta' \quad , \quad p'_z = 0 \quad .$$

Dalle (3.28)

$$\frac{E'}{c} \cos\theta' = \gamma_0 \left(\frac{E}{c} \cos\theta - \frac{v_0}{c^2} E \right) = \gamma_0 \frac{E}{c} \left(\cos\theta - \frac{v_0}{c} \right)$$

$$\frac{E'}{c} \sin\theta' = \frac{E}{c} \sin\theta$$

$$E' = \gamma_0 \left(E - v_0 \frac{E}{c} \cos\theta \right) = \gamma_0 E \left(1 - \frac{v_0}{c} \cos\theta \right) \quad .$$

Dividendo la seconda relazione per la prima si ottiene

$$\text{tg}\theta' = \frac{\sin\theta}{\gamma_0 \left(\cos\theta - \frac{v_0}{c} \right)} \quad ,$$

da cui possiamo calcolare l'angolo θ' in funzione di θ e della velocità relativa dei due sistemi; si noti che non c'è dipendenza dall'energia del

fotone. In particolare, se $\theta = \pi/2$, $\text{tg}\theta' = -c/\gamma_0 v_0$ in accordo con quanto trovato nell'esempio 3.8.

La relazione tra le energie mostra che l'energia dipende dal sistema di riferimento, pur avendo il fotone la stessa velocità in qualsiasi sistema. Ponendo per semplicità $\theta = 0$, abbiamo

$$E' = \gamma_0 E \left(1 - \frac{v_0}{c}\right) = E \frac{1 - \frac{v_0}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} = E \frac{\sqrt{1 - \frac{v_0}{c}}}{\sqrt{1 + \frac{v_0}{c}}} < E.$$

Se, ad esempio, O è il sistema in cui viene emesso il fotone di energia E , nel sistema O' che si allontana da O si misura un'energia E' inferiore e dalla differenza delle energie si può calcolare la velocità relativa tra i due sistemi (se O' si avvicinasse ad O , esso misurerebbe un'energia superiore; in ogni caso si ha un'informazione sul moto relativo, non su chi si muove e chi è fermo).

Resta il problema di capire da cosa dipenda l'energia di un fotone. Tratteremo questo argomento nel secondo volume e vedremo che un fotone di energia E è associato alla propagazione di un'onda elettromagnetica di frequenza ν (la nozione di propagazione ondulatoria verrà introdotta nel capitolo 9 di questo volume); l'energia del fotone è legata alla frequenza dell'onda dalla relazione $E = h\nu$, dove h è una costante fondamentale, la *costante di Planck*. Da questo punto di vista la relazione precedente si scrive

$$\nu' = \nu \frac{1 - \frac{v_0}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}}$$

e mostra come varia la frequenza con la velocità relativa dei due sistemi. Il fenomeno si chiama *effetto Doppler* (paragrafo 13.11 del secondo volume). Un'applicazione notissima è la seguente. Supponiamo di misurare sulla terra le frequenze di un tipo di luce e di essere in grado di riconoscere quel tipo di luce quando ci giunge da una galassia; troviamo però che le frequenze sono sistematicamente diverse da quelle misurate sulla terra e dalla differenza determiniamo la velocità della galassia rispetto alla terra. Misure di questo tipo hanno messo in evidenza una diminuzione di frequenza (il cosiddetto spostamento verso il rosso), segno che le galassie si allontanano da noi, e accreditano l'ipotesi dell'universo in espansione.

Visualizza soluzione

Forza

La legge del moto nella meccanica relativistica, come nella meccanica newtoniana, è la (3.20), $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$. Questa espressione è valida in qualsiasi sistema inerziale, nel senso che in O e in O' la legge del moto è, rispettivamente

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad , \quad \mathbf{F}' = \frac{d\mathbf{p}'}{dt'} \quad .$$

In generale $d\mathbf{p}/dt$ e $d\mathbf{p}/dt'$ sono diverse e quindi *due osservatori inerziali misurano forze diverse*: questa è una differenza sostanziale rispetto alla relatività galileiana.

Dalle leggi di trasformazione già ricavate potremmo risalire a quella valida per le componenti della forza e troveremmo espressioni che non sono trasformazioni di Lorentz, come è successo per la velocità e l'accelerazione. Non esplicitiamo però questo calcolo perché non ci servirà per il seguito dell'esposizione.

Vogliamo invece dimostrare come da $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ non si possa dedurre $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Allo scopo sviluppiamo (3.20), inserendo l'espressione relativistica (3.19) della quantità di moto; in questa la massa è costante, però γ varia al variare del modulo della velocità e pertanto la forza è eguale alla somma di due termini,

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = m\gamma \frac{d\mathbf{v}}{dt} + m\mathbf{v} \frac{d\gamma}{dt} \quad , \quad (3.29)$$

il primo parallelo all'accelerazione $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$ e il secondo parallelo a \mathbf{v} ; poiché \mathbf{v} e \mathbf{a} non sono di norma parallele, non sussiste più il parallelismo tra \mathbf{F} e \mathbf{a} .

Questo è il caso più generale. Limitiamoci ora a due casi particolari, in cui per costruzione \mathbf{F} e \mathbf{a} sono parallele e verifichiamo che non si ha comunque $F = ma$.

Per primo consideriamo un moto circolare uniforme. La velocità cambia solo di direzione, $d\gamma/dt = 0$ anche se γ può avere un valore elevato (se v è vicina a c), e la (3.29) si riduce a

$$\mathbf{F} = m\gamma\mathbf{a} \quad , \quad F = m\gamma a_N = m\gamma \frac{v^2}{R} = \frac{p v}{R} \quad ,$$

essendo R il raggio della circonferenza. La dipendenza della forza centripeta F da γv^2 invece che solo da v^2 come vorrebbe la meccanica newtoniana è stata verificata sin dagli inizi di questo secolo, confermando la correttezza della formulazione relativistica.

Negli acceleratori circolari, in cui le particelle descrivono orbite composte da archi di circonferenza, la forza centripeta è ottenuta per mezzo di un opportuno campo magnetico (forza di Lorentz, capitolo 7 del secondo volume) e il calcolo del suo valore si fa appunto servendosi della formula relativistica. Un altro fatto interessante verificato è che la dilatazione $\gamma\tau$ della vita media di una particella instabile in moto con velocità v si ha pure se il moto avviene lungo una

circonferenza.

Passiamo adesso ad un moto rettilineo, con forza, velocità, accelerazione parallele alla direzione del moto. Supponiamo che la forza agente sia costante e che inizialmente il punto sia in quiete. Per calcolare dy/dt nella (3.29) utilizziamo l'espressione di dy che abbiamo ricavato per arrivare alla (3.21), ovvero

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{v}{c^2} \gamma^3 \frac{dv}{dt} \quad ;$$

l'equazione del moto è quindi

$$F = m\gamma \frac{dv}{dt} + m \frac{v^2}{c^2} \gamma^3 \frac{dv}{dt} = m\gamma \frac{dv}{dt} \left(1 + \frac{v^2}{c^2} \gamma^2 \right) = m\gamma^3 \frac{dv}{dt} = m\gamma^3 a \quad .$$

Notiamo subito che il moto non è uniformemente accelerato: γ varia nel tempo e a non può essere costante, dato che $m\gamma^3 a$ è costante. Calcoliamo la velocità in questo modo:

$$\frac{F}{m} dt = \gamma^3 dv = d(\gamma v) \quad ,$$

dove l'ultimo passaggio segue da

$$d(\gamma v) = \gamma dv + v d\gamma = \gamma dv + \frac{v^2}{c^2} \gamma^3 dv = \gamma^3 dv \quad .$$

Si integra e si ottiene

$$\gamma v = \frac{F}{m} t \quad , \quad \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{F}{m} t \quad , \quad v = \frac{c}{\sqrt{1 + \frac{m^2 c^2}{F^2 t^2}}} \quad .$$

La velocità non cresce linearmente col tempo e tende asintoticamente a c . Solo fino a quando è soddisfatta la condizione

$$\frac{m^2 c^2}{F^2 t^2} \gg 1 \quad \Rightarrow \quad t^2 \ll \frac{m^2 c^2}{F^2}$$

si può descrivere $v = Ft/m$, come nella meccanica newtoniana. All'opposto, per velocità prossima a c , cioè quando

$$\frac{m^2 c^2}{F^2 t^2} \ll 1 \quad \Rightarrow \quad t^2 \gg \frac{m^2 c^2}{F^2} \quad ,$$

ci possiamo servire dell'approssimazione $1/\sqrt{1+x} = 1-x$ e abbiamo

$$v = c \sqrt{1 - \frac{m^2 c^2}{F^2 t^2}} \quad ,$$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{Ft}{mc} \quad , \quad p = m\gamma v = Ft \sqrt{1 - \frac{m^2 c^2}{F^2 t^2}} \quad .$$

La verifica sperimentale di queste formule si effettua accelerando linearmente particelle come gli elettroni e i protoni.

Confrontando i due esempi emerge che il rapporto F/a vale in un caso $m\gamma$ e nell'altro $m\gamma^3$: questo rapporto, che nella meccanica newtoniana vale m e indica l'inerzia del punto materiale, nella meccanica relativistica dipende dal tipo di moto; la nozione di inerzia cioè non è più legata soltanto alla massa.

Un'ultima avvertenza sulle forze riguarda il principio di azione e reazione. La formulazione data nel paragrafo 2.2 presuppone un'interazione istantanea tra i due corpi, ma ciò è in contrasto con uno dei fondamenti della teoria della relatività, secondo cui qualsiasi segnale fisico ha velocità finita, che non può superare quella della luce. Non approfondiamo l'argomento; notiamo però ancora una volta che la teoria della relatività comporta una revisione concettuale di tutte le basi della meccanica newtoniana. Nel caso specifico è vera la solita approssimazione, e cioè che nei problemi meccanici ordinari ci si può correttamente servire del principio di azione e reazione, però già passando a fenomeni elettromagnetici macroscopici con emissione e assorbimento di onde elettromagnetiche (che si propagano con la velocità della luce) è necessario abbandonare il semplice meccanismo dell'azione e reazione.

Energia e massa

Abbiamo visto che solo per il fatto di avere la massa m una particella possiede l'energia $E_0 = mc^2$, detta energia di massa o energia a riposo. Il nuovo concetto, introdotto da Einstein, ha validità generale; tuttavia esso non ha interesse pratico nella meccanica dei corpi macroscopici, mentre gioca un ruolo fondamentale nelle interazioni tra particelle nucleari o subnucleari.

Anticipando una situazione che discuteremo nel capitolo quarto, consideriamo due tali particelle che interagiscono; nel caso più generale lo stato finale è diverso dallo stato iniziale, nel senso che come risultato della reazione si possono avere particelle diverse da quelle iniziali. Si è verificato con estrema precisione che in questi fenomeni *l'energia totale resta costante*:

$$E_{\text{in}} = (\sum E_k)_{\text{in}} + (\sum E_0)_{\text{in}} = E_{\text{fin}} = (\sum E_k)_{\text{fin}} + (\sum E_0)_{\text{fin}} \quad ,$$

dove le sommatorie sono estese alle particelle che partecipano all'interazione. Definendo

$$\Delta E_k = (\sum E_k)_{\text{fin}} - (\sum E_k)_{\text{in}} \quad , \quad \Delta E_0 = (\sum E_0)_{\text{fin}} - (\sum E_0)_{\text{in}} \quad ,$$

deve essere

$$\Delta E = \Delta E_k + \Delta E_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta E_k = -\Delta E_0 = -(\Delta m) c^2 \quad .$$

In queste reazioni può avvenire che la somma delle masse delle particelle che compongono lo stato finale sia diversa dalla somma delle masse delle particelle presenti all'inizio, cioè *la massa totale non si conserva*, ma varia di Δm . Questa variazione, moltiplicata per c^2 , compare nel bilancio dell'energia e deve essere compensata da una variazione opposta di energia cinetica. Abbiamo pertanto due casi possibili:

a) $\Delta m > 0$, massa finale maggiore di quella iniziale $\Rightarrow \Delta E_k < 0$, nello stato finale c'è meno energia cinetica, una parte dell'energia cinetica iniziale si è trasformata in energia di massa;

b) $\Delta m < 0$, massa finale minore di quella iniziale $\Rightarrow \Delta E_k > 0$, nello stato finale c'è più energia cinetica, una parte dell'energia di massa iniziale si è trasformata in energia cinetica.

Questa nozione della non immutabilità della massa e della possibilità di *conversione tra massa ed energia* è una delle più importanti introdotte dalla teoria della relatività.

Dalle trasformazioni di massa in energia nelle reazioni di fusione tra nuclei degli isotopi dell'idrogeno si spera di ottenere una fonte di energia praticamente inesauribile. L'esempio più semplice è costituito dalla fusione di due nuclei di deuterio, detti deutoni, ciascuno formato da un protone e da un neutrone, che danno luogo a un *nucleo di elio 3* e ad un neutrone; l'elio 3 è un isotopo dell'elio con nucleo composto da due protoni e da un neutrone. La somma delle masse della particelle finali è minore di quella dei due nuclei di deuterio e la differenza si ritrova sotto forma di energia cinetica dell'elio 3 e del neutrone; è proprio l'energia cinetica del neutrone che verrebbe successivamente assorbita e trasformata in altre forme di energia utilizzabile. Si osservi che la reazione non avviene spontaneamente perché i due deutoni sono entrambi carichi positivamente e si respingono; essi devono perciò possedere una certa energia che permetta di vincere la repulsione elettrica. La via sperimentale attualmente più seguita è di portare deuterio gassoso a temperature molto elevate, il che corrisponde a energie cinetiche elevate come vedremo nel capitolo sulle proprietà dei gas, con lo scopo di favorire il processo di fusione. Si parla di *fusione termonucleare controllata* e al momento attuale alcuni dei reattori sperimentali operanti nel mondo non sono lontani dalla parità nel bilancio energetico, cioè dall'eguaglianza tra energia spesa complessivamente per realizzare le fusioni e energia ricavata dalle fusioni. Però la via da percorrere per realizzare un'operazione continua e affidabile sembra ancora molto lunga.

Sempre a reazioni di fusione si attribuisce la fonte di energia di alcune categorie di stelle, tra cui il Sole.

Un altro esempio interessante è la formazione di uno stato legato a partire da due particelle singole, per esempio un protone e un neutrone che danno un deutone (nucleo del deuterio). La massa del deutone è inferiore alla somma delle masse del protone e del neutrone, però il sistema è legato con una certa energia.

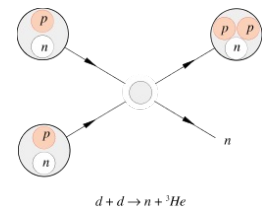


FIGURA 3.24

Si misura che l'energia di legame vale proprio $(\Delta m) c^2$: la massa scomparsa si è tramutata in energia. Rompendo il sistema si deve spendere energia e si recupera massa.

Infine vogliamo ricordare un processo che ha un'applicazione in campo medico. Alcune sostanze radioattive emettono positroni, particelle aventi la stessa massa dell'elettrone e carica opposta. Quando un positrone così prodotto attraversa la materia avviene un processo di annichilazione: il positrone interagisce con un elettrone, entrambi scompaiono e vengono emessi due fotoni, aventi energia pari all'energia di massa delle particelle scomparse. In prima approssimazione possiamo supporre che l'energia cinetica iniziale sia trascurabile rispetto all'energia di massa e fare questa schematizzazione:

– in un punto si ha l'annichilazione, con le particelle praticamente in quiete, e viene resa disponibile l'energia $2mc^2$; da quel punto escono due fotoni, aventi la stessa direzione di moto e verso opposto, ciascuno di energia mc^2 .

– Si ha trasformazione integrale di massa in energia (ricordiamo che i fotoni hanno massa nulla).

È noto in medicina che, iniettando nel corpo umano alcuni particolari composti chimici, questi si accumulano in organi o tessuti specifici, come il muscolo cardiaco o tessuti con cellule tumorali. Sostituendo in una piccola percentuale di molecole di tali composti certi atomi con loro isotopi radioattivi emettitori di positroni (ad esempio C^{11} al posto di C^{12}), con il che non si alterano le proprietà di assorbimento da parte dell'organismo, si ottiene una concentrazione di emissione nelle zone interessate; i positroni annichilano subito e si produce una coppia di fotoni. Siccome l'emissione non ha una direzione preferenziale e gli eventi di annichilazione sono tanti, nel complesso si ha una distribuzione isotropa di fotoni, che ha origine nella zona da studiare. Si rivelano con opportuni strumenti la direzione e l'energia di ciascun fotone e si riesce a costruire un'immagine della zona di emissione, mettendone in evidenza la forma. Questo mezzo diagnostico si chiama PET (positron emission tomography ovvero tomografia ad emissione di positroni) e trova applicazione principalmente in neurologia, cardiologia e oncologia.

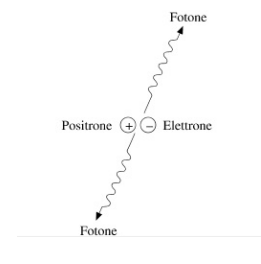


FIGURA 3.25

Commento conclusivo

Ripercorriamo rapidamente gli argomenti di teoria della relatività ristretta che abbiamo esposto per trarne alcune conclusioni riassuntive.

La formulazione relativistica fornisce la legge del moto e la definizione di grandezze fondamentali come quantità di moto ed energia per un punto materiale in moto con velocità qualsiasi, però sempre inferiore alla velocità c della luce nel vuoto, limite asintotico non raggiungibile per particelle dotate di massa.

Tutte le leggi fisiche devono avere la stessa struttura in qualsiasi sistema inerziale (principio di relatività); il collegamento tra le misure di spazio e tempo

effettuate in due sistemi diversi è dato dalla trasformazione di Lorentz. In particolare gli intervalli spaziali e temporali dipendono dal sistema di riferimento.

Pur avendo concettualmente validità generale, le nuove formule trovano applicazione pratica solo nel moto di particelle a livello atomico, nucleare e subnucleare, le uniche che possano raggiungere velocità prossime a quelle della luce in fenomeni naturali o procurati in laboratorio e per le quali sono misurabili gli effetti di trasformazioni tra energia e massa. È per questa ragione che i risultati trovati appaiono così lontani dalla nostra esperienza comune: noi non siamo circondati da corpi che si muovono con velocità vicine a c e non siamo in grado di comunicare tali velocità ad oggetti macroscopici, non abbiamo cioè sensibilità per questo tipo di fenomeni.

In questo contesto, come abbiamo già detto all'inizio del paragrafo 3.8, la meccanica newtoniana è una teoria approssimata, a cui si riduce la meccanica relativistica quando v è trascurabile rispetto a c e γ vale 1 a tutti gli effetti. Delimitatone così il campo di azione, in esso la meccanica newtoniana è estremamente accurata e resta la teoria fondamentale, nella quale trovano spiegazione i fenomeni meccanici che coinvolgono corpi macroscopici.

Nella parte restante di questo volume avremo ancora due richiami specifici di relatività: nel capitolo quarto quando parleremo di urti tra punti e nel capitolo quinto dove trattiamo la legge di gravitazione.

4.1 Sistemi di punti. Forze interne e forze esterne

Nel capitolo 2 abbiamo studiato la dinamica di un punto materiale, come conseguenza dell'interazione con il resto dell'universo, cioè dell'azione di una forza o di un sistema di forze agenti su di esso.

Consideriamo ora un sistema di n punti materiali, con n maggiore di 1, interagenti tra di loro e con il resto dell'universo.

La forza \mathbf{F}_i agente sull' i -esimo punto si può pensare come risultante delle *forze esterne* agenti sul punto, $\mathbf{F}_i^{(E)}$, e delle forze esercitate dagli altri $n - 1$ punti, *forze interne* al sistema, $\mathbf{F}_i^{(I)}$:

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{(E)} + \mathbf{F}_i^{(I)} \quad (4.1)$$

Questa scomposizione è molto utile concettualmente, come si vedrà, ma non possiamo evidenziare dal moto del punto P_i separatamente i due tipi di forze: infatti il moto di P_i è determinato dalla risultante \mathbf{F}_i .

La distinzione tra forze interne ed esterne dipende da come viene definito il sistema di punti. Se, per esempio, inglobiamo nel sistema una parte del resto dell'universo, alcune forze, precedentemente considerate esterne, diventano interne. Nel sistema formato dai pianeti che ruotano attorno al sole il moto della terra è determinato dall'interazione della stessa con i singoli pianeti (forze interne) e con il sole e il resto dell'universo (forze esterne). Se invece definissimo come sistema tutti i pianeti eccettuati Marte e Giove, l'interazione della terra con questi due pianeti diventerebbe una forza esterna.

Alle forze interne si applica la *terza legge di Newton*, o *principio di azione e reazione*, che abbiamo introdotto nel paragrafo 2.2 e ora richiamiamo: se il punto i -esimo esercita sul punto j -esimo la forza $\mathbf{F}_{i,j}$, il punto j -esimo reagisce esercitando sul punto i -esimo la forza $\mathbf{F}_{j,i}$ e tali forze hanno la stessa retta di azione, stesso modulo e verso opposto; esse possono essere attrattive o repulsive (nella figura 4.1 è mostrato il caso di forze repulsive).

La natura delle forze interne in un sistema di punti materiali può essere qualsiasi; ad esempio, se i punti sono legati tra loro da fili e molle abbiamo le tensioni dei fili (attrattive) e le forze elastiche (attrattive o repulsive a seconda che le molle siano estese o compresse), se i punti sono a contatto le forze interne possono essere dovute a deformazioni (elastiche o non elastiche) e a fenomeni di attrito. Ancora, se i punti hanno carica elettrica, vanno considerate forze elettriche e magnetiche, che possono essere attrattive o repulsive. Infine, tra punti dotati di massa si esercita la forza gravitazionale, che studieremo nel

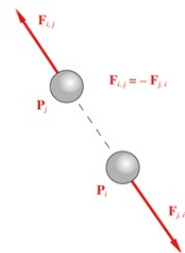


FIGURA 4.1

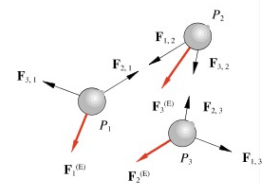


FIGURA 4.2

capitolo 5; essa è trascurabile per i normali sistemi di punti, in quanto le masse sono piccole, ma è invece la forza fondamentale nei problemi di meccanica celeste (moto di pianeti e satelliti). Osserviamo inoltre che le forze interne possono essere conservative o non conservative.

Una possibile configurazione di forze interne ed esterne per un generico sistema di tre punti è schematizzata in figura 4.2.

In generale la risultante $\mathbf{F}_i^{(1)}$ delle forze interne agenti sull' i -esimo punto è diversa da zero, però la risultante di tutte le forze interne del sistema è nulla perché, in base al principio di azione e reazione, esse sono a due a due eguali ed opposte:

$$\mathbf{R}^{(1)} = \sum_i \mathbf{F}_i^{(1)} = \sum_{i,j} \mathbf{F}_{i,j} = 0 \quad (4.2)$$

con $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, n$, $i \neq j$.

Si osservi che il principio di azione e reazione si applica a qualunque interazione e quindi anche alle forze esterne: la reazione in tal caso è applicata al resto dell'universo e non al sistema, il cui moto intendiamo studiare.

In vari esempi e problemi che si incontrano durante lo studio della dinamica del punto materiale si considerano corpi in interazioni tra loro: nella determinazione del moto ogni corpo viene esaminato separatamente e per esso si scrive l'equazione del moto. Si veda a questo scopo l'esempio 2.19. Come ulteriore esempio prendiamo due corpi m_1 e m_2 in moto, l'uno rispetto all'altro, con una forza di attrito radente alla superficie di contatto. Il moto complessivo, verso destra, è dovuto alla forza esterna \mathbf{F} e le due equazioni del moto sono:

$$F - \mu_d N = m_1 a_1 \quad , \quad \mu_d N = m_2 a_2 \quad .$$

Il termine di attrito compare per un corpo come forza resistente e per l'altro come forza motrice, eguale in modulo, ma di verso opposto alla precedente: e infatti l'attrito è opposto al verso del moto relativo (rispetto a m_1 , m_2 si sposta verso sinistra). Oltre a questa coppia di forze interne, essenziali per studiare il moto orizzontale dei due corpi (che supponiamo avvenire su un piano senza attrito), ci sono le forze normali. La terra attira m_2 con una forza m_2g , la cui reazione è applicata al centro della terra, e per questa ragione m_2 preme su m_1 , deformandolo; la reazione di m_1 è $F_{1,2} = m_2g$. Analogamente si tratta l'interazione m_1 -piano; nella figura 4.4 sono indicate tutte le forze verticali interne al sistema piano- m_1 - m_2 (sfalsate per comodità di disegno).

Per ciascun punto P_i di massa m_i sottoposto alla forza \mathbf{F}_i consideriamo le grandezze, misurate in un sistema di riferimento inerziale:

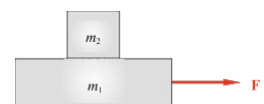


FIGURA 4.3

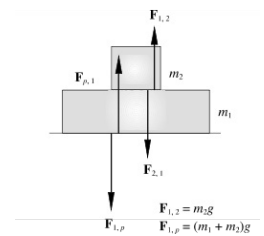


FIGURA 4.4

<i>posizione</i>	\mathbf{r}_i	<i>velocità</i>	\mathbf{v}_i
<i>accelerazione</i>	$\mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i / m_i$	<i>quantità di moto</i>	$\mathbf{p}_i = m_i \mathbf{v}_i$,
<i>momento angolare</i>	$\mathbf{L}_i = \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i$	<i>energia cinetica</i>	$E_{k,i} = \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^2$.

Per il sistema complessivo di punti possiamo inoltre definire le grandezze:

$$\text{quantità di moto totale} \quad \mathbf{P} = \sum_i \mathbf{P}_i = \sum_i m_i \mathbf{v}_i ,$$

$$\text{momento angolare totale} \quad \mathbf{L} = \sum_i \mathbf{L}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i ,$$

$$\text{energia cinetica totale} \quad E_k = \sum_i E_{k,i} = \sum_i \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^2 .$$

I momenti angolari vanno riferiti a un polo, che nelle formule è stato preso coincidente con l'origine, ma che può essere un qualsiasi altro punto, fermo o in movimento, nel sistema di riferimento inerziale.

4.2 Centro di massa di un sistema di punti.

Teorema del moto del centro di massa

Si definisce come *centro di massa di un sistema* di punti materiali il punto geometrico la cui posizione è individuata, nel sistema di riferimento considerato, dal raggio vettore

$$\mathbf{r}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 + \dots + m_n \mathbf{r}_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} ; \quad (4.3)$$

le componenti di \mathbf{r}_{CM} , ovvero le coordinate del centro di massa in un sistema di coordinate cartesiane con l'origine in O , sono

$$x_{CM} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i} , \quad y_{CM} = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i} , \quad z_{CM} = \frac{\sum_i m_i z_i}{\sum_i m_i} .$$

Si noti che *la posizione* del centro di massa rispetto agli n punti materiali *non dipende dal sistema di riferimento*, mentre le sue coordinate invece variano a seconda del sistema prescelto. In figura 4.6 sono mostrati un sistema di n punti e i centri di due sistemi di riferimento O e O' : le posizioni dei punti P_i sono individuate rispettivamente dai raggi \mathbf{r}_i e \mathbf{r}'_i con

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}'_i + \mathbf{OO}' \quad \text{ovvero} \quad \mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i + \mathbf{O}'\mathbf{O} .$$

La posizione del centro di massa rispetto ad O è data da (4.3) e rispetto ad O' da

$$\mathbf{r}'_{CM} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}'_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i (\mathbf{r}_i + \mathbf{O}'\mathbf{O})}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{\sum_i m_i} + \mathbf{O}'\mathbf{O} = \mathbf{r}_{CM} + \mathbf{O}'\mathbf{O} .$$

Se gli n punti sono in movimento, di norma la posizione del centro di massa varia; sulla base della definizione calcoliamo la velocità del centro di massa:

$$\mathbf{v}_{CM} = \frac{d\mathbf{r}_{CM}}{dt} = \frac{\sum_i m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt}}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{v}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\mathbf{P}}{m} . \quad (4.4)$$

Abbiamo utilizzato la definizione di quantità di moto totale del sistema data nel paragrafo 4.1 e chiamato $m = \sum_i m_i$ la massa totale del sistema. Vediamo quindi che \mathbf{P} coincide con la quantità di moto $m\mathbf{v}_{CM}$ del centro di massa, considerato come un punto materiale che abbia la posizione \mathbf{r}_{CM} , la velocità \mathbf{v}_{CM} e massa pari alla massa totale m del sistema.

Analogamente possiamo ricavare l'accelerazione del centro di massa, derivando (4.4):

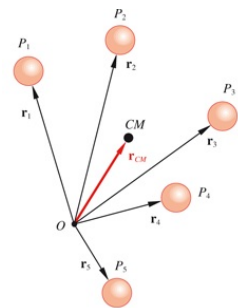


FIGURA 4.5

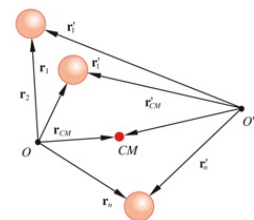


FIGURA 4.6

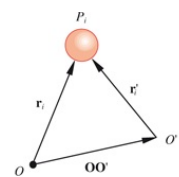


FIGURA 4.7

$$\mathbf{a}_{CM} = \frac{d\mathbf{r}_{CM}}{dt} = \frac{\sum_i m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt}}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{a}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{a}_i}{m} . \quad (4.5)$$

Se il sistema di riferimento è inerziale

$$m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{(E)} + \mathbf{F}_i^{(I)}$$

secondo (4.1). Sostituendo in (4.5)

$$m \mathbf{a}_{CM} = \sum_i m_i \mathbf{a}_i = \sum_i (\mathbf{F}_i^{(E)} + \mathbf{F}_i^{(I)}) = \mathbf{R}^{(E)} + \mathbf{R}^{(I)} = \mathbf{R}^{(E)} ,$$

dato che la risultante (4.2) delle forze interne è nulla. La relazione

$$\mathbf{R}^{(E)} = m \mathbf{a}_{CM} \quad (4.6)$$

Teorema del moto del
centro di massa

esprime il *teorema del moto del centro di massa*. Il centro di massa si muove come un punto materiale in cui sia concentrata tutta la massa del sistema e a cui sia applicata la risultante delle forze esterne.

Utilizzando le (4.4) e (4.6) si ha inoltre

$$\mathbf{R}^{(E)} = m \mathbf{a}_{CM} = m \frac{d\mathbf{v}_{CM}}{dt} = \frac{d}{dt} (m \mathbf{v}_{CM}) = \frac{d\mathbf{P}}{dt} . \quad (4.7)$$

La risultante delle forze esterne è eguale alla derivata rispetto al tempo della quantità di moto totale del sistema.

Il moto del centro di massa è determinato dunque solo dalle forze esterne. L'azione delle forze interne non può modificare lo stato di moto del centro di massa; invece il moto di ciascun punto dipende dall'azione delle forze esterne ed interne agenti su di esso.

Osservazioni ed esempi sulle proprietà del centro di massa

La definizione introdotta di centro di massa è matematica, nel senso che non esiste il punto materiale centro di massa, ma la massa è distribuita nei singoli punti che si muovono sotto l'azione delle forze interne ed esterne. Tuttavia questo punto matematico gode di notevoli proprietà, che in parte vedremo in seguito.

Per ora è stato dimostrato che considerando il centro di massa alla stregua di un punto materiale di massa m , eguale alla massa totale del sistema,

- a) la sua velocità è eguale alla quantità di moto totale divisa per la massa totale, ovvero la sua quantità di moto $m\mathbf{v}_{CM}$ è eguale alla quantità di moto totale \mathbf{P} ;
- b) la sua accelerazione è determinata dalla risultante delle forze esterne agenti sul sistema.

In questo senso, facendo riferimento a \mathbf{P} e $\mathbf{R}^{(E)}$, possiamo dire che il *centro di massa rappresenta il moto globale o di insieme dei punti materiali*.

Il fatto che ad un certo istante \mathbf{v}_{CM} abbia un determinato valore significa solamente che il sistema *in media* si sta spostando in quella data direzione,

anche se nessuna delle singole \mathbf{v}_i coincide con \mathbf{v}_{CM} . Analogamente, il fatto che \mathbf{a}_{CM} abbia un certo valore a causa dell'azione di $\mathbf{R}^{(E)}$ indica che *nel suo complesso* il sistema sta accelerando in quella data direzione.

In effetti \mathbf{r}_{CM} , \mathbf{v}_{CM} e \mathbf{a}_{CM} sono le *medie pesate* sulle masse dei raggi vettori, velocità, accelerazioni dei singoli punti e pertanto forniscono *informazioni di proprietà medie* e non sul moto dei singoli punti.

Notiamo infine che la legge del moto (4.6) e la quantità di moto (4.4) del centro di massa coincidono con quelle del punto materiale ideale, di cui il centro di massa costituisce l'esempio migliore, senza approssimazioni sulle dimensioni o sul tipo di moto.

ESEMPIO 4.1

Determinare la posizione del centro di massa di un sistema di due punti materiali, posti a distanza d tra loro, di massa m_1 e m_2 .

Soluzione

Soluzione

Il problema è unidimensionale e in base a (4.3) si ha

$$(m_1 + m_2) x_{CM} = m_1 x_1 + m_2 x_2.$$

Dato che $x_2 - x_1 = d$, si ricava

$$x_{CM} = x_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} d$$

ovvero la posizione del centro di massa rispetto alla posizione di m_1 è

$$x_{CM} - x_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} d.$$

Indicando con a e b la distanza del centro di massa dai due punti, con $a + b = d$, si ha:

$$a = \frac{m_2}{m_1 + m_2} d, \quad b = \frac{m_1}{m_1 + m_2} d, \quad \frac{a}{b} = \frac{m_2}{m_1}.$$

Il centro di massa sta in una posizione intermedia tra i due punti ed è più vicino al punto di massa maggiore.

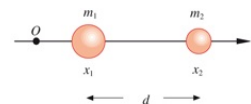


FIGURA 4.8

(Esempio 4.1)

Visualizza soluzione

ESEMPIO 4.2

Determinare la posizione del centro di massa di un sistema di tre punti di eguale massa m , posti ai vertici di un triangolo equilatero di lato a .

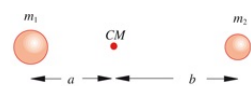


FIGURA 4.9

Soluzione

Soluzione Assumiamo gli assi di riferimento come in figura 4.10. Il centro di massa sta nel piano x, y individuato dai tre punti ($z_1 = z_2 = z_3 = 0$, quindi $z_{CM} = 0$). Le sue coordinate sono

$$x_{CM} = \frac{m \cdot 0 + m x_2 + m x_3}{3 m} = \frac{m \frac{a}{2} + m a}{3 m} = \frac{a}{2}$$
$$y_{CM} = \frac{m \cdot 0 + m y_2 + m \cdot 0}{3 m} = \frac{y_2}{3} = \frac{h}{3} = \frac{a}{2\sqrt{3}}$$

Il centro di massa sta pertanto sull'altezza del triangolo, a distanza $h / 3$ dalla base. Il risultato non dipende dalla scelta degli assi.

Si poteva procedere diversamente, determinando prima la posizione del centro di massa dei punti P_1 e P_3 , che cade nel punto di mezzo della base $P_1 P_3$; in tale punto si assume esservi la massa $2m$. Successivamente si calcola la posizione del centro di massa di P_2 e del centro di massa di P_1 e P_3 , utilizzando il risultato dell'esempio 4.1.

Questa procedura è permessa dalla definizione (4.3) di \mathbf{r}_{CM} come sommatoria: il calcolo di \mathbf{r}_{CM} si può effettuare associando gruppi di punti a piacere, determinando i relativi centri di massa, considerando questi come punti materiali e calcolando infine il centro di massa di tali centri di massa parziali.

(Esempio 4.1)

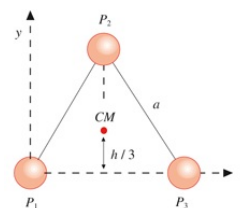


FIGURA 4.10
(Esempio 4.2)

Visualizza soluzione

ESEMPIO 4.3

Calcolare la posizione e la velocità del centro di massa di due punti di eguale massa m , in moto con la stessa velocità \mathbf{v} lungo l'asse x .

Soluzione

$$x_{CM} = \frac{m x_1 + m x_2}{2 m} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$
$$v_{CM} = \frac{m v + m v}{2 m} = v$$

Il centro di massa si trova sempre nella posizione di mezzo tra i due punti in moto e si muove con la stessa velocità \mathbf{v} .

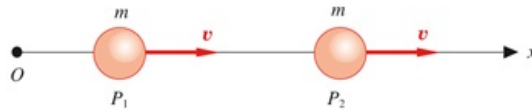


FIGURA 4.11

Se invece P_2 fosse fermo, la posizione del centro di massa sarebbe sempre a metà del segmento $P_1 P_2$, ma la velocità sarebbe $\mathbf{v}/2$.

Infine, se P_2 avesse velocità $-\mathbf{v}$, il centro di massa sarebbe fermo al centro del segmento $P_1 P_2$.

Visualizza soluzione

ESEMPIO 4.4

Si determini il moto del centro di massa di un insieme di punti sottoposti solo alla forza peso.

Soluzione

Dato che $\mathbf{a}_i = \mathbf{g}$, abbiamo

$$m \mathbf{a}_{CM} = \sum_i m_i \mathbf{a}_i = m \mathbf{g} \quad ,$$

oppure

$$m \mathbf{a}_{CM} = \mathbf{R}^{(E)} = \sum_i m_i \mathbf{g} = m \mathbf{g} \quad .$$

Risulta dunque $\mathbf{a}_{CM} = \mathbf{g}$: il centro di massa si muove con accelerazione \mathbf{g} . Se tra i punti esistono anche forze interne (ad esempio i punti materiali sono elettricamente carichi), per i singoli punti $\mathbf{a}_i \neq \mathbf{g}$, dato che essi risentono dell'azione delle forze interne. Il centro di massa si muove però sempre con accelerazione \mathbf{g} , descrivendo in generale una traiettoria parabolica, dato che risente solo dell'azione della risultante delle forze esterne $\mathbf{R}^{(E)} = m \mathbf{g}$.

Un'altra situazione che rientra in questo caso è quella relativa a due punti materiali connessi da una molla compressa. Si lascia il sistema libero di cadere, con una certa velocità iniziale, permettendo contemporaneamente alla molla di estendersi. La traiettoria dei singoli punti è assai complicata, a causa dell'oscillazione dovuta alla molla, ma il centro di massa descrive semplicemente una parabola, con accelerazione \mathbf{g} , dato che le forze elastiche sono forze interne.

Visualizza soluzione

4.3 Conservazione della quantità di moto

Se il sistema di punti considerato è isolato, cioè non soggetto a forze esterne, oppure l'azione delle forze esterne è tale che la loro risultante $\mathbf{R}^{(E)}$ sia nulla, da (4.6) e (4.4) si ha:

$$\mathbf{a}_{CM} = 0 \quad , \quad \mathbf{v}_{CM} = \text{costante} \quad , \quad \mathbf{P} = \text{costante} \quad (4.8)$$

Quando la risultante delle forze esterne è nulla, la quantità di moto totale del sistema rimane costante nel tempo e il centro di massa si muove di moto rettilineo uniforme o resta in quiete. Tale risultato esprime il principio della conservazione della quantità di moto per un sistema di punti materiali.

La legge (4.8) è una legge vettoriale e si può scomporre in tre relazioni valide per i moti proiettati sugli assi, scritte sinteticamente $P_x = \text{costante}$, $P_y = \text{costante}$, $P_z = \text{costante}$. Osserviamo inoltre che la conservazione della quantità di moto può avvenire anche parzialmente, cioè essere riferita a una o due delle componenti. Per esempio se $R_x^{(E)} = 0$, allora $P_x = \text{costante}$. Notiamo poi che, pur verificandosi $\mathbf{R}^{(E)} = 0$, le quantità di moto dei vari punti $m_i \mathbf{v}_i$ in generale variano nel tempo; resta costante solo la loro somma $\Sigma_i m_i \mathbf{v}_i$.

Consideriamo ora due punti isolati, che possono quindi interagire solo tra loro:

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = m \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = \text{costante} \quad . \quad (4.9)$$

Derivando rispetto al tempo

$$\frac{d}{dt} (m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2) = m_1 \mathbf{a}_1 + m_2 \mathbf{a}_2 = 0$$
$$\Rightarrow \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = 0 \quad , \quad \mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2.$$

Il principio di conservazione della quantità di moto per un sistema isolato di due punti ha come conseguenza che le forze che si esercitano tra i due punti sono eguali in modulo e di verso opposto. Tale risultato non è completamente equivalente al principio di azione e reazione in quanto $\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2$ non implica che le due forze abbiano la stessa retta di azione. Del resto anche la dimostrazione diretta (4.7) che segue da (4.2) e (4.6) non sfrutta il fatto che $\mathbf{F}_{i,j}$ e $\mathbf{F}_{j,i}$ hanno la stessa retta di azione.

Riprenderemo l'argomento parlando della conservazione del momento angolare di un sistema isolato di punti materiali nel paragrafo 4.6. Fatta questa precisazione, potremmo dire che *c'è equivalenza tra conservazione della quantità di moto e principio di azione e reazione, generalizzabile a sistemi più complessi.*

In realtà la conservazione della quantità di moto per un sistema isolato è un

principio di portata più generale: si dimostra che esso discende dalla omogeneità dello spazio, cioè dal fatto che non esiste una origine privilegiata per i sistemi di riferimento.

Il principio di conservazione della quantità di moto permette anche di definire dinamicamente la massa, indipendentemente dalla forza peso. Consideriamo infatti due punti materiali fermi agli estremi di una molla compressa. Dato che il centro di massa è in quiete, la quantità di moto del sistema dei due punti è nulla, $\mathbf{P} = 0$. Si lascia espandere la molla: i due punti si muovono in versi opposti e poiché vengono ad agire, durante il moto, solo forze interne al sistema, resta sempre vero che $\mathbf{P} = 0$. Da (4.9)

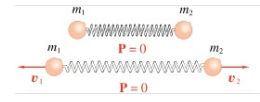


FIGURA 4.12

$$m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = 0 \Rightarrow \text{in modulo} \quad m_2 = m_1 \frac{v_1}{v_2} .$$

È possibile misurare il valore di una qualsiasi massa, rispetto ad una massa campione, attraverso misure di velocità. Riprenderemo questo caso, per valutarne gli aspetti energetici, nel paragrafo 4.8.

ESEMPIO 4.5

Due punti materiali sono sottoposti soltanto alla loro mutua interazione, che è attrattiva. Se essi sono inizialmente in quiete e vengono lasciati liberi, in quale posizione si incontrano?

Soluzione

Viste le condizioni iniziali, i punti si muovono lungo la linea retta che li congiunge. D'altra parte nell'istante in cui si incontrano i punti coincidono con il loro centro di massa. Quindi il punto di incontro, qualunque sia la forza attrattiva e la legge del moto di avvicinamento, è nella posizione occupata dal centro di massa, calcolabile subito a partire dalle posizioni iniziali dei punti (vedi esempio 4.1). Infatti il centro di massa, inizialmente in quiete come i punti, successivamente non si muove non essendoci forze esterne.

Visualizza soluzione

ESEMPIO 4.6

Un punto materiale A di massa m_1 è posto sull'estremità di sinistra di una lastra B lunga d e di massa m_2 ; il tutto poggia su di un piano orizzontale senza attrito. Sotto l'azione di forze interne A entra in movimento e arriva all'estremità di destra della lastra B . Dato un asse x , con origine nella posizione iniziale di A e orientato lungo la lastra da sinistra a destra, determinare la coordinata di A quando si trova nell'estremità di destra di B .

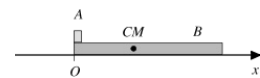


FIGURA 4.13

(Esempio 4.6)

Soluzione

Anche in questo esempio, come nell'esempio 4.5, il centro di massa resta

fermo (conservazione della quantità di moto totale che, nulla all'inizio, resta nulla). Esso ha la coordinata

$$x_{CM} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{d}{2} ,$$

calcolata utilizzando il risultato dell'esempio 4.1 e supponendo che il centro di massa della lastra sia nel suo centro geometrico, come si intuisce e come vedremo analiticamente nel capitolo 6. In figura 4.13 è mostrata la situazione iniziale. Quando il punto A è giunto all'altra estremità della lastra, abbiamo la situazione simmetrica rispetto alla posizione del centro di massa, come mostrato in figura 4.14. Cioè, mentre il punto A avanza la lastra retrocede, per azione delle forze interne, con la condizione che il centro di massa resti fermo. Pertanto alla fine $x_A = 2 x_{CM}$.

Visualizza soluzione

ESEMPIO 4.7

Nella stessa situazione iniziale dell'esempio 4.6 al punto A viene comunicata una velocità iniziale v_0 , concorde all'asse x ; tra A e B esiste un coefficiente di attrito dinamico μ_d . Dopo un certo tempo A si ferma rispetto a B , ed entrambi proseguono verso destra. Calcolare la velocità finale, di quanto A si sposta rispetto a B , il lavoro svolto dalla forza di attrito. Descrivere il moto del centro di massa.

Soluzione

Soluzione Il valore della velocità finale si calcola applicando la conservazione della quantità di moto (non agiscono forze esterne); si impone cioè l'eguaglianza tra la quantità di moto iniziale e la quantità di moto finale:

$$P_{in} = m_1 v_0 = P_{fin} = (m_1 + m_2) v = P$$

$$\Rightarrow v = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_0 .$$

Questa è anche la velocità del centro di massa durante il processo:

$$v_{CM} = \frac{P}{m_1 + m_2} = v .$$

Dall'istante iniziale, in cui $v(A) = v_0$ e $v(B) = 0$, all'istante finale in cui $v(A) = v(B) = v$, il centro di massa si muove con velocità costante v .

Scriviamo adesso le equazioni del moto, indicando con 1 le grandezze relative ad A e con 2 quelle relative a B . Su A agisce la forza interna di attrito $-\mu_d m_1 g$ e su B la forza $\mu_d m_1 g$. Pertanto:

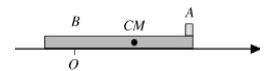


FIGURA 4.14
(Esempio 4.6)

$$\begin{aligned}
m_1 a_1 &= -\mu_d m_1 g \\
v_1 &= v_0 + a_1 t = v_0 - \mu_d g t \\
x_1 &= v_0 t - \frac{1}{2} \mu_d g t^2 \\
m_2 a_2 &= \mu_d m_1 g \\
v_2 &= a_2 t = \frac{m_1}{m_2} \mu_d g t \\
x_2 &= \frac{1}{2} \frac{m_1}{m_2} \mu_d g t^2
\end{aligned}$$

(x_2 è la coordinata dell'estremità di sinistra della lastra). La velocità di A decresce, quella di B aumenta e A si ferma rispetto a B quando $v_1 = v_2$, cioè nell'istante

$$t^* = \frac{m_2 v_0}{(m_1 + m_2) \mu_d g} .$$

Per $t = t^*$ B non frena più A e A non spinge più B ; cessa il moto relativo e i corpi continuano con la stessa velocità. La distanza percorsa da A rispetto a B è

$$\Delta x = x_1(t^*) - x_2(t^*) = \frac{m_2 v_0^2}{2 (m_1 + m_2) \mu_d g} .$$

Si verifica subito che, inserendo t^* nelle espressioni di v_1 e v_2 , queste assumono il valore v , calcolato precedentemente.

Il lavoro svolto dall'attrito, unica forza agente, deve essere eguale alla variazione di energia cinetica (nel paragrafo 4.8 lo dimostreremo in generale):

$$W = E_{k,\text{fin}} - E_{k,\text{in}} = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 - \frac{1}{2} m_1 v_0^2 = -\frac{m_1 m_2}{2 (m_1 + m_2)} v_0^2 ,$$

indipendente da μ_d , come lo è la velocità finale v (mentre dipende da μ_d la durata del processo, cioè t^*). Se dividiamo il modulo di W per il valore $\mu_d m_1 g$ della forza di attrito troviamo la distanza lungo cui la forza ha agito; sviluppando il calcolo abbiamo che il risultato coincide con Δx , cioè con lo spostamento di A relativo a B .

Un'ultima verifica da effettuare avendo dati numerici è che Δx sia inferiore o eguale a d , lunghezza della lastra B .

Visualizza soluzione

4.4 Teorema del momento angolare

Determiniamo ora a cosa siano dovute le variazioni del momento angolare totale di un sistema di punti materiali, ricordando quanto già studiato relativamente al momento angolare di un punto materiale nel paragrafo 2.22.

Consideriamo dunque il momento angolare totale di un sistema di punti materiali rispetto ad un polo O ; detto \mathbf{r}_i il raggio vettore \mathbf{OP}_i si ha

$$\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i \quad .$$

Teniamo presente che in generale il polo O non coincide con l'origine e può non essere fisso (possibilità che per semplicità abbiamo escluso nel paragrafo 2.22) e che quindi il raggio vettore \mathbf{r}_i può avere entrambi gli estremi in movimento, con velocità \mathbf{v}_i e \mathbf{v}_O nel sistema di riferimento inerziale da cui osserviamo il sistema di punti.

La derivata di \mathbf{L} rispetto al tempo è

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \times m_i \mathbf{v}_i + \sum_i \mathbf{r}_i \times m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} \quad .$$

Per $\frac{d\mathbf{r}_i}{dt}$ usiamo il risultato del paragrafo 3.1, cioè $\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_O$; inoltre, essendo il sistema di riferimento inerziale,

$$m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{(E)} + \mathbf{F}_i^{(I)} \quad .$$

Ne segue

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{L}}{dt} &= \sum_i (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_O) \times m_i \mathbf{v}_i + \sum_i \mathbf{r}_i \times (\mathbf{F}_i^{(E)} + \mathbf{F}_i^{(I)}) \\ &= \sum_i \mathbf{v}_i \times m_i \mathbf{v}_i - \sum_i \mathbf{v}_O \times m_i \mathbf{v}_i + \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{(E)} + \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{(I)} \\ &= -\mathbf{v}_O \times m \mathbf{v}_{CM} + \mathbf{M}^{(E)} + \mathbf{M}^{(I)} \quad . \end{aligned}$$

Infatti $\sum_i \mathbf{v}_i \times m_i \mathbf{v}_i$ è nulla perché ogni addendo è un prodotto vettoriale di vettori paralleli; \mathbf{v}_O è stato portato fuori dalla sommatoria perché indipendente dall'indice i ; infine si è usata (4.4). Il vettore

$$\mathbf{M}^{(E)} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{(E)}$$

rappresenta il momento totale delle forze esterne rispetto al polo O e

$$\mathbf{M}^{(I)} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{(I)}$$

quello delle forze interne rispetto allo stesso polo. Con riferimento alla figura 4.16 dimostriamo che $\mathbf{M}^{(I)} = \mathbf{0}$. La somma dei momenti delle due forze interne $\mathbf{F}_{i,j}$ e $\mathbf{F}_{j,i}$ rispetto al polo O è

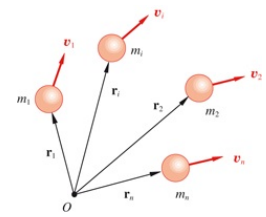


FIGURA 4.15

$$\mathbf{M}^{(I)}_{i,j} = \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{i,j} + \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{j,i} = (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) \times \mathbf{F}_{i,j} = \mathbf{r}_{i,j} \times \mathbf{F}_{i,j} \quad .$$

Il vettore $\mathbf{r}_{i,j} = \mathbf{P}_i \mathbf{P}_j$ è parallelo a $\mathbf{F}_{i,j}$ e quindi $\mathbf{M}^{(I)}_{i,j} = 0$. $\mathbf{M}^{(I)}$ è costituito dalla somma di tutti i possibili termini $\mathbf{M}^{(I)}_{i,j}$ e perciò risulta identicamente nullo (qualunque sia la scelta del polo).

In conclusione

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}^{(E)} - \mathbf{v}_O \times M \mathbf{v}_{CM} \quad (4.10)$$

e se il termine $-\mathbf{v}_O \times M \mathbf{v}_{CM}$ risulta nullo si ha

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}^{(E)} \quad . \quad (4.11)$$

Il termine $-\mathbf{v}_O \times M \mathbf{v}_{CM}$ è nullo in questi casi:

- a) il polo O è fisso nel sistema di riferimento inerziale, $\mathbf{v}_O = 0$;
- b) il centro di massa è in quiete nel sistema di riferimento inerziale, $\mathbf{v}_{CM} = 0$;
- c) il polo O coincide con il centro di massa, per cui $\mathbf{v}_O = \mathbf{v}_{CM}$ e $\mathbf{v}_O \times \mathbf{v}_{CM} = 0$;
- d) \mathbf{v}_O è parallelo a \mathbf{v}_{CM} .

Il teorema del momento angolare (4.11) indica dunque che, se il polo O è fisso nel sistema di riferimento inerziale o coincide con il centro di massa (anche se quest'ultimo non è in generale un punto fisso), l'evoluzione nel tempo del momento angolare del sistema di punti è determinata dal momento delle forze esterne rispetto ad O , mentre le forze interne non portano contributi.

Sottolineiamo che in (4.11) le quantità di moto sono misurate nel sistema di riferimento inerziale (\mathbf{v}_i è la velocità del punto P_i vista dall'origine), i raggi vettori partono dal polo scelto e le forze sono quelle vere.

Si noti infine che il risultato $\mathbf{M}^{(I)} = 0$ si ottiene solo perché si assume che le forze interne siano un insieme di coppie di forze eguali in modulo e di verso opposto, con la stessa retta di azione, ossia coppie di forze con braccio nullo (vedi paragrafo 4.15). Vedremo nel paragrafo seguente che questa assunzione ha una giustificazione sperimentale.

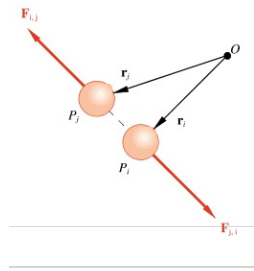


FIGURA 4.16

Teorema del momento angolare

4.5 Conservazione del momento angolare

In una situazione in cui valga (4.11), cioè sia $\mathbf{v}_O \times M \mathbf{v}_{CM} = \mathbf{0}$, se il momento delle forze esterne è nullo il momento angolare resta costante. La condizione $\mathbf{M}^{(E)} = \mathbf{0}$ si può verificare in due casi: a) non agiscono forze esterne, il sistema è isolato: allora \mathbf{L} si conserva rispetto a qualsiasi polo per il quale $\mathbf{v}_O \times M \mathbf{v}_{CM} = \mathbf{0}$; in questa situazione, in cui è anche $\mathbf{R}^{(E)} = \mathbf{0}$, si ha pure la conservazione della quantità di moto, $\mathbf{P} = \text{costante}$ (si osservi che $\mathbf{R}^{(E)} = \mathbf{0}$ non ha come conseguenza, in generale, $\mathbf{M}^{(E)} = \mathbf{0}$); b) il momento delle forze esterne è nullo rispetto ad un determinato polo, ma non rispetto a qualsiasi polo, pure in presenza di forze esterne; pertanto si ha conservazione del momento angolare solo se calcolato rispetto a quel polo (mentre, in generale, non si conserva in tali casi la quantità di moto).

Questa seconda situazione fisica sottolinea l'importanza della scelta del polo per poter risolvere determinati problemi.

L'osservazione sperimentale che, per un sistema isolato, si conserva il momento angolare (rispetto a un polo per cui $\mathbf{v}_O \times M \mathbf{v}_{CM} = \mathbf{0}$) conferma la validità di (4.11) e quindi che sia $\mathbf{M}^{(I)} = \mathbf{0}$. Infatti se fosse $\mathbf{M}^{(I)} \neq \mathbf{0}$, anche in un sistema isolato il momento angolare potrebbe non conservarsi. Di conseguenza, è corretto assumere che le forze interne a due a due abbiano la stessa retta di azione, costituiscono cioè coppie di forze con braccio nullo.

La conservazione del momento angolare di un sistema di punti materiali isolato è una proprietà molto generale: si dimostra che discende dalla caratteristica dello spazio di essere *isotropo*, cioè dal fatto che non esiste una direzione privilegiata.

ESEMPIO 4.8

Due punti materiali di eguale massa m sono legati tra loro da una sbarretta di massa trascurabile e ruotano senza attrito in un piano orizzontale rispetto al centro della sbarretta; nella situazione iniziale la sbarretta è lunga $2r_1$ e la velocità angolare ha il valore costante ω_1 . Supponiamo che la sbarretta sia telescopica e che, durante il moto, la lunghezza venga portata al valore $2r_2$, con $r_2 > r_1$. Calcolare il valore finale ω_2 della velocità angolare.

Soluzione

Le forze esterne al sistema, che sono le forze peso e le reazioni normali del piano, hanno momento risultante nullo rispetto al centro O del sistema, che assumiamo come polo (nel caso specifico anche $\mathbf{R}^{(E)} = \mathbf{0}$). La tensione della

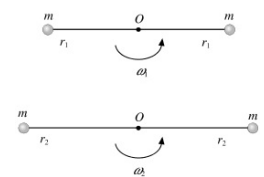


FIGURA 4.17
(Esempio 4.8)

sbarretta fornisce a ciascun punto la forza centripeta necessaria al moto circolare, ma si tratta di forze interne, con momento nullo. Possiamo dunque applicare la conservazione del momento angolare rispetto al centro O . Il momento angolare iniziale \mathbf{L}_{in} è ortogonale al piano del moto, rivolto verso il lettore, e vale in modulo $2r_1 m v_1$; dato che $v_1 = \omega_1 r_1$,

$$L_{in} = 2 m r_1^2 \omega_1 \quad .$$

Dopo l'allungamento $L_{fin} = 2 m r_2^2 \omega_2$ e dall'eguaglianza $L_{in} = L_{fin}$ si ricava

$$\omega_2 = \frac{r_1^2}{r_2^2} \omega_1 \quad .$$

A seguito dell'allungamento il sistema rallenta. Anche per questo esempio, come per il caso della definizione dinamica della massa (paragrafo 4.3), tratteremo l'aspetto energetico nel paragrafo 4.8.

Visualizza soluzione

4.6 Sistema di riferimento del centro di massa

Nello studio della dinamica dei sistemi di punti materiali è molto utile considerare il *sistema di riferimento del centro di massa*. Esso ha le seguenti caratteristiche:

- l'origine è nel centro di massa;
- gli assi mantengono sempre la stessa direzione rispetto agli assi del sistema inerziale e, in particolare, possono essere assunti paralleli a questi;
- si tratta in generale di un sistema non inerziale: in base a b il moto del sistema del centro di massa è traslatorio, ma non necessariamente rettilineo e uniforme; ciò avviene solo se $\mathbf{R}^{(E)} = \mathbf{0}$ così che $\mathbf{a}_{CM} = \mathbf{0}$.

Indichiamo con un apice le grandezze relative al sistema del centro di massa; dalla figura 4.18 si vede che, per il punto P_i ,

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}'_i + \mathbf{r}_{CM} \quad (4.12)$$

Dal teorema delle velocità relative (3.4) con $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ (moto di trascinamento traslatorio) si ha:

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}'_i + \mathbf{v}_{CM} \quad (4.13)$$

Avendo assunto il centro di massa come riferimento, evidentemente la posizione e la velocità del centro di massa rispetto a se stesso sono nulle:

$$\mathbf{r}'_{CM} = \mathbf{0} \quad , \quad \mathbf{v}'_{CM} = \mathbf{0} \quad .$$

Da (4.3) e (4.4), valide in qualsiasi sistema, segue

$$\sum_i m_i \mathbf{r}'_i = \mathbf{0} \quad , \quad \sum_i m_i \mathbf{v}'_i = \mathbf{0} \quad . \quad (4.14)$$

Pertanto la *quantità di moto totale del sistema*, $\mathbf{P}' = \sum_i m_i \mathbf{v}'_i$, risulta nulla se misurata nel sistema di riferimento del centro di massa (i singoli termini $m_i \mathbf{v}'_i$ sono però in generale diversi da zero).

Essendo il sistema del centro di massa non inerziale, sui singoli punti sembra agire anche la forza di inerzia $-m_i \mathbf{a}_t = -m_i \mathbf{a}_{CM}$, in quanto l'accelerazione di trascinamento è pari a quella dell'origine, cioè del centro di massa. Per ogni punto abbiamo quindi da (3.10)

$$\mathbf{F}_i^{(E)} + \mathbf{F}_i^{(1)} - m_i \mathbf{a}_{CM} = m_i \mathbf{a}'_i$$

e sommando su tutti i punti

$$\mathbf{R}^{(E)} - \sum_i m_i \mathbf{a}_{CM} = \mathbf{R}^{(E)} - m \mathbf{a}_{CM} = \sum_i m_i \mathbf{a}'_i = \mathbf{0} \quad ,$$

in base a (4.6). Quindi alle (4.14) va aggiunta la proprietà $\sum_i m_i \mathbf{a}'_i = \mathbf{0}$, che d'altra parte si può ricavare direttamente da (4.5) essendo per definizione $\mathbf{a}'_{CM} = \mathbf{0}$.

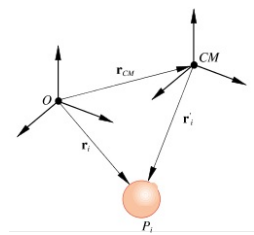


FIGURA 4.18

Quantità di moto totale rispetto al centro di massa

Il momento risultante delle forze applicate nei singoli punti, calcolato rispetto al centro di massa, vale

$$\sum_i \mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i^{(E)} + \sum_i \mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i^{(I)} - \sum_i \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{a}_{CM} = \mathbf{M}^{(E)} - (\sum_i m_i \mathbf{r}'_i) \times \mathbf{a}_{CM} = \mathbf{M}^{(E)},$$

Momento risultante
rispetto al centro di
massa

avendo utilizzato (4.14). *Il momento risultante rispetto al centro di massa è eguale al solo momento delle forze esterne vere, senza contributi dalle forze di inerzia.*

Sappiamo che (4.11) è vera anche se si assume, in un sistema di riferimento inerziale, il centro di massa come polo (caso c del paragrafo 4.4). Il momento delle forze esterne è

$$\mathbf{M}^{(E)} = \sum_i \mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i^{(E)} = \mathbf{M}^{(E)} .$$

Il momento angolare rispetto al centro di massa, calcolato nel sistema di riferimento inerziale, è

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \sum_i \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}_i = \sum_i \mathbf{r}'_i \times m_i (\mathbf{v}'_i + \mathbf{v}_{CM}) = \\ &= \sum_i \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i + \sum_i \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}_{CM} = \\ &= \mathbf{L}' + (\sum_i m_i \mathbf{r}'_i) \times \mathbf{v}_{CM} = \mathbf{L}' , \end{aligned}$$

dove abbiamo sfruttato (4.13) e (4.14). Pertanto il momento angolare rispetto al centro di massa ha lo stesso valore sia nel sistema di riferimento inerziale che nel sistema di riferimento del centro di massa. Di conseguenza

$$\frac{d\mathbf{L}'}{dt} = \mathbf{M}^{(E)} : \quad (4.15)$$

il teorema del momento angolare vale anche nel sistema (non inerziale) del centro di massa purché come polo si assuma l'origine, cioè il centro di massa; al calcolo del momento contribuiscono solo le forze vere (esterne).

4.7 Teoremi di König

I *teoremi di König* stabiliscono le relazioni tra i momenti angolari e le energie cinetiche di un sistema di punti materiali, valutati in un sistema di riferimento inerziale (\mathbf{L}, E_k) e nel sistema di riferimento del centro di massa (\mathbf{L}', E'_k).

Teorema di König per il momento angolare

Assumiamo per semplicità come polo l'origine del sistema inerziale: il momento angolare è dato da

$$\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i \quad .$$

Riscriviamo questa relazione utilizzando (4.12) e (4.13):

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \sum_i (\mathbf{r}'_i + \mathbf{r}_{CM}) \times m_i (\mathbf{v}'_i + \mathbf{v}_{CM}) = \\ &= \sum_i \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i + \sum_i \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}_{CM} + \sum_i \mathbf{r}_{CM} \times m_i \mathbf{v}'_i + \sum_i \mathbf{r}_{CM} \times m_i \mathbf{v}_{CM} \quad . \end{aligned}$$

Esaminiamo in dettaglio le quattro sommatorie, ricordando le (4.14).

Il primo termine, $\mathbf{L}' = \sum_i \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i$, rappresenta, come già evidenziato, il momento angolare rispetto al centro di massa.

Il secondo e terzo termine, pari a $(\sum_i m_i \mathbf{r}'_i) \times \mathbf{v}_{CM}$ e $\mathbf{r}_{CM} \times (\sum_i m_i \mathbf{v}'_i)$ sono entrambi nulli.

L'ultimo termine, $\mathbf{r}_{CM} \times m \mathbf{v}_{CM} = \mathbf{r}_{CM} \times \mathbf{P}$, rappresenta il momento angolare, rispetto all'origine del sistema inerziale, di un punto materiale che ha una massa pari a quella totale del sistema, coincide con il centro di massa e ha la velocità dello stesso. Pertanto esso viene chiamato momento angolare del centro di massa.

In conclusione abbiamo il *primo teorema di König*:

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}' + \mathbf{r}_{CM} \times m \mathbf{v}_{CM} = \mathbf{L}' + \mathbf{L}_{CM} \quad . \quad (4.16)$$

Primo teorema di König

Il *momento angolare del sistema si può scrivere, nel sistema di riferimento inerziale, come somma del momento angolare dovuto al moto del centro di massa, \mathbf{L}_{CM} , e di quello del sistema rispetto al centro di massa.*

Se assumiamo come polo il centro di massa, con il che $\mathbf{r}_{CM} = \mathbf{0}$, ritroviamo $\mathbf{L} = \mathbf{L}'$ (paragrafo 4.6).

Teorema di König per l'energia cinetica

L'energia cinetica calcolata nel sistema di riferimento inerziale è

$$E_k = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \quad .$$

Utilizzando (4.13) otteniamo

$$E_k = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\mathbf{v}'_i + \mathbf{v}_{CM})^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{CM}^2 + \sum_i m_i \mathbf{v}'_i \cdot \mathbf{v}_{CM} .$$

Il primo termine rappresenta l'energia cinetica calcolata nel sistema di riferimento del centro di massa, ossia l'energia cinetica rispetto al centro di massa, E'_k . Il secondo termine è pari a $\frac{1}{2} m v_{CM}^2$, energia cinetica di un punto materiale che possiede tutta la massa del sistema e si muove con la velocità del centro di massa, detta brevemente energia del centro di massa. L'ultimo termine è nullo in base a (4.14) perché è eguale a $(\sum_i m_i \mathbf{v}'_i) \cdot \mathbf{v}_{CM} = \mathbf{P}' \cdot \mathbf{v}_{CM}$. Pertanto

$$E_k = E'_k + \frac{1}{2} m v_{CM}^2 = E'_k + E_{k,CM} , \quad (4.17)$$

relazione nota come *secondo teorema di König*. *L'energia cinetica del sistema di punti si può scrivere, nel sistema di riferimento inerziale, come la somma dell'energia cinetica dovuta al moto del centro di massa e di quella del sistema rispetto al centro di massa.*

Secondo teorema di König

Commento sui teoremi di König

È chiara l'analogia strutturale e di significato tra i due teoremi di König. Servendosi della definizione e delle proprietà del centro di massa, essi mettono in evidenza una scomposizione semplice e significativa del momento angolare e dell'energia cinetica in termini del moto medio del sistema, rappresentato dal moto del centro di massa, e del moto del sistema rispetto al centro di massa, che potremmo chiamare moto interno. Una proprietà analoga non sussiste per la quantità di moto: infatti la quantità di moto totale di un sistema è eguale alla quantità di moto del centro di massa, mentre la quantità di moto rispetto al centro di massa è nulla, $\mathbf{P} = m\mathbf{v}_{CM}$ e $\mathbf{P}' = 0$ (paragrafi 4.2 e 4.6).

Possiamo dunque affermare che per quanto riguarda il momento angolare e l'energia cinetica il centro di massa non riassume le proprietà del sistema, a differenza di quanto discusso riguardo a \mathbf{P} e $\mathbf{R}^{(E)}$. Non è sufficiente conoscere il moto del centro di massa, cioè appunto \mathbf{P} e $\mathbf{R}^{(E)}$, per ricavare \mathbf{L} e E_k , ma bisogna tener conto anche del moto rispetto al centro di massa. Ovvero, il moto globale e il moto medio coincidono solo per quanto riguarda la quantità di moto, che è nulla nel moto interno, mentre per quanto riguarda \mathbf{L} e E_k abbiamo contributi sia dal moto medio che dal moto interno.

Dopo queste precisazioni generali riprendiamo le formule di König per esaminare i casi di nullità delle varie grandezze e ricominciamo dal momento angolare. Per un singolo punto materiale $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ così che la nullità di \mathbf{p} comporta sempre quella di \mathbf{L} . Invece per un sistema $\mathbf{L} = \mathbf{L}' + \mathbf{r}_{CM} \times \mathbf{P}$ e quindi la nullità di \mathbf{P} non comporta la nullità di \mathbf{L} : il sistema può essere mediamente fermo ($\mathbf{v}_{CM} = 0$), però i singoli punti possono essere in moto e può

risultare $\mathbf{L} \neq 0$ come conseguenza di un momento angolare rispetto al centro di massa. Viceversa, $\mathbf{L} = 0$ non comporta $\mathbf{P} = 0$, ma soltanto $\mathbf{L}_{CM} = -\mathbf{L}'$.

Passando all'energia cinetica, di nuovo sappiamo che per un singolo punto essa è nulla se il punto è fermo; invece per un sistema anche se $\mathbf{v}_{CM} = 0$ l'energia cinetica non è necessariamente nulla: il movimento dei singoli punti può rendere $E'_k \neq 0$. Se però $E_k = 0$, allora devono essere necessariamente nulle sia E'_k che E dato che l'energia cinetica non può essere negativa.

ESEMPIO 4.9

Si determinino i valori di \mathbf{L} , \mathbf{L}' , \mathbf{L}_{CM} e di E_k , E'_k , $E_{k,CM}$

MathType@MTEF@5@5@+=

feaagKart1ev2aaatCvAUfeBSjuyZL2yd9gzLbvyNv2CaerbuLwBLn

hiov2DGi1BTfMBaeXatLxBI9gBaerbd9wDYLwzYbItLDharqqTubsr

4rNCHbGeaGqiVuoJe9sqrrpepCoxbbL8F4rqqFfpeeaOxe9Lq=Jc9

vqaqpepmoxbba9pwe9Q8fso=yqaqpepae9pgoFirpepeKkFroxfr=x

fr=xb9adbaqaeeGaciGaaiaabeqaamaabaabaaGcbaGaamyramaaBa

aaleaacaWGRbaabeaakiaacYcacaMc8UaamyramaaDaaaleaacaWG

RbaabaGaii4jaaaakiaacYcacaMc8UaamyramaaBaaaleaacaWGRb

GaiilaiaadoeacaWGNbaabeaaaaa@4328@ nei quattro casi rappresentati

nelle figure. O indica l'origine del sistema di riferimento inerziale e coincide con il polo di riferimento di \mathbf{L} e \mathbf{L}_{CM} .

Soluzione

Caso A Il centro di massa coincide col polo, la sua velocità è nulla; si ha

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}' = \mathbf{L}_{CM} = 0.$$

Per l'energia cinetica $E_{k,CM} = 0$, mentre $E_k, E'_k = 2 \cdot \frac{1}{2} m v^2 = m v^2$.

Notiamo un fatto, che è generale: $\mathbf{L}' = 0$ non implica $E'_k = 0$;

MathType@MTEF@5@5@+=

feaagKart1ev2aaatCvAUfeBSjuyZL2yd9gzLbvyNv2CaerbuLwBLn

hiov2DGi1BTfMBaeXatLxBI9gBaerbd9wDYLwzYbItLDharqqTubsr

4rNCHbGeaGqiVuoJe9sqrrpepCoxbbL8F4rqqFfpeeaOxe9Lq=Jc9

vqaqpepmoxbba9pwe9Q8fso=yqaqpepae9pgoFirpepeKkFroxfr=x

fr=xb9adbaqaeeGaciGaaiaabeqaamaabaabaaGcbaGaamyramaaDa

aaleaacaWGRbaabaGaii4jaaaakiabg2da9iaaicdacaGG7aaaaa@3B11@

infatti il primo dipende da \mathbf{v}'_i , la seconda da $v_i'^2$. In altre parole, nel

moto relativo al centro di massa non c'è relazione tra \mathbf{L}' e E'_k ,

MathType@MTEF@5@5@+=

feaagKart1ev2aaatCvAUfeBSjuyZL2yd9gzLbvyNv2CaerbuLwBLn

hiov2DGi1BTfMBaeXatLxBI9gBaerbd9wDYLwzYbItLDharqqTubsr

4rNCHbGeaGqiVuoJe9sqrrpepCoxbbL8F4rqqFfpeeaOxe9Lq=Jc9

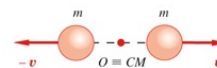


FIGURA 4.19A

(Esempio 4.9)

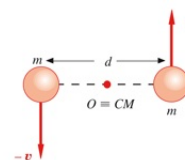


FIGURA 4.19B

(Esempio 4.9)

vqaqpepmoxbba9pwe9Q8fso=yqaqpepae9pgoFirpepeKkFroxfr=x
 fr=xb9adbaqaaeGaciGaaiaabeqaamaabaabaaGcbaGaamyramaaDa
 aaleaacaWGRbaabaGai4jaaaakiaacYcaaaa@3942@ a meno che il sistema
 non sia un corpo rigido, come vedremo.

Caso B Di nuovo il centro di massa coincide con il polo e $\mathbf{v}_{CM} = \mathbf{0}$. Si ha:

$$\mathbf{L}_{CM} = \mathbf{0} \quad , \quad \mathbf{L} = \mathbf{L}' = 2m \mathbf{r} \times \mathbf{v}.$$

In modulo $L = m d v$, se d è la distanza tra le traiettorie rettilinee dei due punti. Per le energie cinetiche si hanno gli stessi risultati del caso A (e si vede così la differenza di comportamento tra grandezze vettoriali e grandezze scalari).

Caso C

Posizione e velocità del centro di massa sono date da

$$2m \mathbf{r}_{CM} = m \mathbf{r}_1 + m \mathbf{r}_2 \Rightarrow \mathbf{r}_{CM} = \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2}$$

$$2m \mathbf{v}_{CM} = m \mathbf{v} + m \mathbf{v} \Rightarrow \mathbf{v}_{CM} = \mathbf{v} \Rightarrow \mathbf{P} = 2m \mathbf{v}_{CM}$$

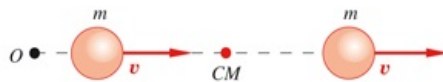


FIGURA 4.19C

Si ha $\mathbf{L}_{CM} = \mathbf{0}$, dato che \mathbf{r}_{CM} e \mathbf{v}_{CM} sono paralleli, $\mathbf{L} = \mathbf{0}$ perché \mathbf{r}_i è parallelo a \mathbf{v}_i , $\mathbf{L}' = \mathbf{0}$ dato che $\mathbf{v}'_i = \mathbf{0}$. Invece $E_k = E_k, CM = m v^2$ mentre $E' k = \mathbf{0}$.

Caso D È identico al caso C, solo la posizione del polo è diversa. La velocità del centro di massa è ancora \mathbf{v} e la sua posizione, relativamente ai due punti, è la stessa. $\mathbf{L}' = \mathbf{0}$ perché $\mathbf{v}'_i = \mathbf{0}$, invece $\mathbf{L} = \mathbf{L}_{CM} = \mathbf{r}_{CM} \times 2m \mathbf{v}_{CM}$; in modulo $L = 2m h v$. Per le energie cinetiche si hanno gli stessi risultati del caso C. Dal confronto tra i casi C e D si nota la dipendenza di \mathbf{L} dalla scelta del polo.

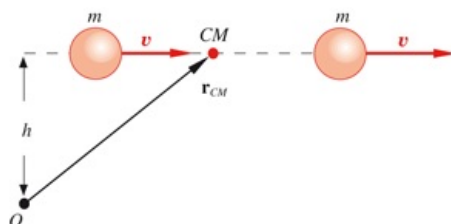


FIGURA 4.19D

Visualizza soluzione

4.8 Il teorema dell'energia cinetica

Calcoliamo il lavoro associato al moto di un sistema di punti materiali. Come già visto nel caso di un solo punto, il lavoro per uno spostamento $d\mathbf{r}_i$, del punto P_i è

$$dW_i = \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i = \mathbf{F}_i^{(E)} \cdot d\mathbf{r}_i + \mathbf{F}_i^{(I)} \cdot d\mathbf{r}_i = dW_i^{(E)} + dW_i^{(I)} .$$

Sommando su tutti i punti e integrando lungo le traiettorie Γ_i percorse si ottiene il lavoro totale

$$W = W^{(E)} + W^{(I)} ,$$

somma del lavoro delle forze esterne e delle forze interne. Questa volta il contributo delle forze interne non scompare: infatti $dW^{(I)}$ è formato da tanti termini del tipo

$$\mathbf{F}_{i,j} \cdot d\mathbf{r}_j + \mathbf{F}_{j,i} \cdot d\mathbf{r}_i = \mathbf{F}_{i,j} \cdot (d\mathbf{r}_j - d\mathbf{r}_i) = \mathbf{F}_{i,j} \cdot d(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) = \mathbf{F}_{i,j} \cdot d\mathbf{r}_{i,j}$$

in generale non nulli e con somma diversa da zero. La struttura di $dW^{(I)}$ implica che *al lavoro delle forze interne è legato un cambiamento delle distanze mutue tra i vari punti*. Se queste non potessero variare, come avviene per esempio se il corpo è rigido (capitolo 6), sarebbe $W^{(I)} = 0$.

Ritornando all'espressione $dW_i = \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i$, sappiamo dal paragrafo 2.15 che essa è eguale a $m_i v_i dv_i$; sommando su tutti i punti e integrando

$$W = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{i,B}^2 - \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{i,A}^2 = E_{k,B} - E_{k,A}$$

dove $v_{i,A}$ e $v_{i,B}$ sono i moduli delle velocità dell' i -esimo punto nella configurazione iniziale A e nella configurazione finale B, $E_{k,A}$ e $E_{k,B}$ l'energia cinetica del sistema rispettivamente nella configurazione iniziale A e nella finale B.

Mettendo insieme i risultati ottenuti,

$$W^{(E)} + W^{(I)} = E_{k,B} - E_{k,A} = \Delta E_k , \quad (4.18)$$

che esprime il *teorema dell'energia cinetica per i sistemi di punti materiali*.

Se le forze interne sono conservative, $W^{(I)} = -\Delta E_p^{(I)}$; analogamente, se lo sono quelle esterne, $W^{(E)} = -\Delta E_p^{(E)}$. Quando tutte le forze agenti, sia interne che esterne, sono conservative, abbiamo la *conservazione dell'energia meccanica del sistema*:

$$W = \Delta E_k = -\Delta E_p = E_{p,A} - E_{p,B} \Rightarrow (E_k + E_p)_A = (E_k + E_p)_B = \text{costante} . \quad (4.19)$$

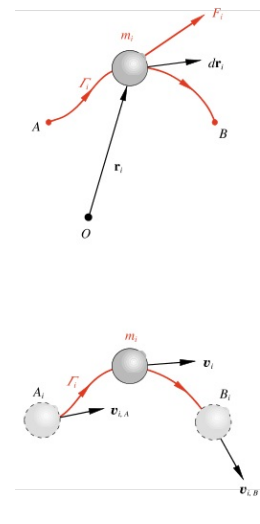


FIGURA 4.20

Teoria dell'energia cinetica

Conservazione dell'energia meccanica

L'energia E_p è la somma di tutte le energie potenziali in gioco, associate alle forze interne ed esterne agenti sul sistema.

Se non tutte le forze sono conservative abbiamo invece

$$(E_k + E_p)_B - (E_k + E_p)_A = W_{nc} ; \quad (4.20)$$

in questa formula il lavoro delle forze conservative è espresso da $E_{p,A} - E_{p,B}$ e quello delle forze non conservative da W_{nc} .

È essenziale osservare che anche in assenza di forze esterne (sistema isolato) non è detto che l'energia meccanica si conservi: ciò dipende dalle caratteristiche delle forze interne.

Riprendiamo qui la discussione del paragrafo 2.20. La presenza di forze non conservative che svolgono lavoro comporta una variazione dell'energia meccanica, che può aumentare o diminuire; quando sono presenti soltanto forze di attrito, l'energia meccanica certamente diminuisce. Se si considera tutto ciò che partecipa allo svolgimento di un fenomeno meccanico macroscopico, in generale non si verifica mai che l'energia meccanica si conservi; però nel processo intervengono scambi di energia di altro tipo e, prendendo in esame ogni possibile forma di energia, si trova che l'energia complessiva si conserva. Ritourneremo su questo argomento trattando del primo principio della termodinamica (capitolo 10).

Nei fenomeni microscopici la situazione è relativamente più semplice: tutte le interazioni fondamentali sono conservative e questo fatto si manifesta con la conservazione dell'energia senza eccezioni; si tratta di una legge fondamentale e, come si può dimostrare, essa discende dal fatto che *non esiste un'origine privilegiata per la misura del tempo*.

ESEMPIO 4.10

Calcolare l'energia potenziale della forza peso per un sistema di punti materiali.

Soluzione

Soluzione L'energia potenziale di ciascun punto è $E_{p,i} = m_i g z_i$, avendo scelto come riferimento per l'energia potenziale il piano orizzontale x, y e orientato l'asse z verso l'alto. Per l'insieme dei punti

$$E_p = \sum_i E_{p,i} = \sum_i m_i g z_i = g \sum_i m_i z_i = m g z_{CM} , \quad (4.21)$$

secondo (4.3) proiettata sull'asse z . L'energia potenziale del sistema è eguale a quella del centro di massa, cioè a quella di un punto materiale che occupa la posizione del CM e possiede tutta la massa del sistema. Pertanto il lavoro della forza peso è semplicemente

Lavoro delle forze non conservative

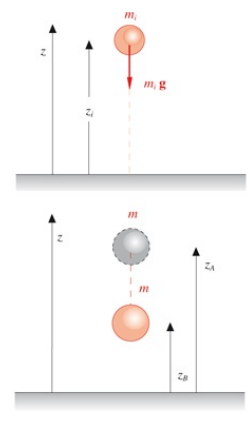


FIGURA 4.21 (Esempio 4.10)

$$W_{\text{peso}} = -\Delta E_p = m g z_A - m g z_B \quad ,$$

calcolabile dallo spostamento verticale del centro di massa da A a B . È questa l'espressione che va usata in (4.18), mentre (4.21) va usata in (4.19) e (4.20), per quanto riguarda la forza peso.

Visualizza soluzione

ESEMPIO 4.11

Discutere l'aspetto energetico della misura dinamica della massa (paragrafo 4.3) e dell'esempio 4.8 sulla conservazione del momento angolare. Nel primo caso si supponga che inizialmente la molla sia compressa dalla lunghezza a riposo d fino a lunghezza nulla e che i punti si stacchino dalla molla quando questa, espandendosi, ha raggiunto la lunghezza d .

Soluzione

Con riferimento alla figura 4.12, le uniche forze in gioco sono le forze elastiche esercitate dalla molla che si estende. Si tratta quindi di forze interne conservative, che compiono il lavoro

$$W^{(l)} = -\Delta E_p = \frac{1}{2} k x_{\text{in}}^2 - \frac{1}{2} k x_{\text{fin}}^2 = \frac{1}{2} k d^2 = E_{p, \text{in}} \quad ,$$

essendo $x_{\text{in}} = d$ e $x_{\text{fin}} = 0$ le deformazioni iniziali e finali della molla. Dunque

$$E_{m, \text{in}} = E_{k, \text{in}} + E_{p, \text{in}} = \frac{1}{2} k d^2 \quad ,$$

$$E_{m, \text{fin}} = E_{k, \text{fin}} + E_{p, \text{fin}} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \quad ,$$

con la condizione $E_{m, \text{in}} = E_{m, \text{fin}}$. Sappiamo inoltre che in modulo $v_2 = m_1 v_1 / m_2$ per cui otteniamo

$$v_1 = d \sqrt{\frac{k m_2}{m_1 (m_1 + m_2)}} \quad , \quad v_2 = d \sqrt{\frac{k m_1}{m_2 (m_1 + m_2)}} \quad .$$

Quando le masse si sono staccate, ciascuna prosegue con velocità costante, in quanto non agiscono più forze.

Qualora invece agisse una forza interna non conservativa al posto della forza elastica, non potremmo conservare l'energia meccanica e dovremmo invece utilizzare $W_{nc} = \Delta E_k$: occorre quindi poter calcolare W_{nc} . Resta sempre valida la conservazione della quantità di moto.

Passiamo all'esempio 4.8. In questo problema si ha variazione di energia cinetica, come si verifica immediatamente:

$$\Delta E_k = E_{k, \text{fin}} - E_{k, \text{in}} = 2 \frac{1}{2} m r_2^2 \omega_2^2 - 2 \frac{1}{2} m r_1^2 \omega_1^2 = m \omega_1^2 r_1^2 \left(\frac{r_1^2}{r_2^2} - 1 \right) \quad .$$

Essendo $r_1 < r_2$, $\Delta E_k < 0$. Il corrispondente lavoro $W = \Delta E_k$ è il lavoro delle forze interne. Queste sono dovute alla tensione della sbarretta, che per una generica distanza r vale $m \omega^2 r$; la forza è

diretta verso il centro, ma lo spostamento è verso l'esterno, per cui il lavoro è negativo in accordo col fatto che E_k diminuisce. Per ω si usa l'espressione ricavata dalla conservazione del momento angolare, $\omega r^2 = \omega_1 r_1^2$, cioè $\omega = \omega_1 r_1^2 / r^2$ e quindi, tenendo appunto conto che $\cos\theta = -1$,

$$W = 2 \int_{r_1}^{r_2} m \frac{\omega_1^2 r_1^4}{r^4} r dr = -2 m \omega_1^2 r_1^4 \left[-\frac{1}{2 r^2} \right]_{r_1}^{r_2} = m \omega_1^2 r_1^2 \left(\frac{r_1^2}{r_2^2} - 1 \right) .$$

Come si vede, la conservazione del momento angolare non implica assolutamente la costanza dell'energia cinetica.

Visualizza soluzione

Riepilogo

Con gli argomenti di questo paragrafo abbiamo terminato la trattazione generale della dinamica dei sistemi di punti materiali. Vogliamo richiamare brevemente i punti salienti.

Le equazioni del moto sono date dal teorema del moto del centro di massa e dal teorema del momento angolare:

$$\mathbf{R}^{(E)} = m \mathbf{a}_{CM} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} \quad , \quad \mathbf{M}^{(E)} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} .$$

Da queste ricaviamo informazioni sull'evoluzione temporale di \mathbf{P} e di \mathbf{L} , dovuta all'azione rispettivamente di forze e momenti esterni e riferita a tutto il sistema, ma non sul moto dei singoli punti.

Le due equazioni sono indipendenti, in quanto per un sistema di forze applicate in punti distinti la risultante e il momento risultante sono grandezze indipendenti, come discuteremo nel paragrafo 4.15.

La variazione di energia cinetica è eguale al lavoro compiuto da tutte le forze agenti, interne ed esterne; se tra queste forze ce ne sono di non conservative, il corrispondente lavoro è eguale alla variazione dell'energia meccanica.

Il calcolo del momento angolare e dell'energia cinetica del sistema può essere eseguito servendosi dei termini di König, che si basano sulla scomposizione del moto rispetto al centro di massa e moto del centro di massa.

L'insieme di queste proprietà è impiegato in tutti i problemi di meccanica dei sistemi, aggiungendo le caratteristiche tipiche del sistema in esame; in particolare nel capitolo 6 ne vedremo l'applicazione al moto dei corpi rigidi.

Dalle equazioni del moto e dal teorema dell'energia cinetica discendono tre leggi di conservazione:

- se $\mathbf{R}^{(E)} = 0$ si conserva la quantità di moto \mathbf{P} ;
- se $\mathbf{M}^{(E)} = 0$ si conserva il momento angolare \mathbf{L} ;
- se tutte le forze agenti sono conservative si conserva l'energia meccanica E_m .

Queste leggi sono indipendenti tra loro (per le prime due ciò deriva dall'indipendenza delle leggi del moto): se si conserva una grandezza, non vuol

dire che si conservano le altre.

Un campo specifico in cui le leggi di conservazione sono molto utili è quello degli urti tra punti materiali (trattati nei prossimi paragrafi) e degli urti tra punti e corpi rigidi (trattati nel capitolo 6).

4.9 Urti tra due punti materiali

Quando due punti materiali vengono a contatto e interagiscono per un intervallo di tempo trascurabile rispetto al tempo di osservazione del sistema, si parla di *urto tra i due punti*. Il fenomeno è di così breve durata da giustificare l'assunzione che durante l'interazione i punti non si muovano in modo apprezzabile.

Nell'urto si possono sviluppare forze molto intense che modificano la quantità di moto di ciascun punto. Queste forze che, come avviene in un urto, agiscono per un tempo breve rispetto al tempo di osservazione, sono chiamate *forze impulsive*. Nella figura 4.22 sono rappresentati due possibili andamenti del modulo della forza in funzione del tempo. L'azione della forza si esplica nell'intervallo $t = t_2 - t_1$.

Osserviamo che le forze che si manifestano durante il processo d'urto sono forze interne al sistema costituito dai due punti materiali interagenti. *In assenza di forze esterne si verifica pertanto durante l'urto la conservazione della quantità di moto totale.*

Se indichiamo con $\mathbf{v}_{1, \text{in}}, \mathbf{v}_{2, \text{in}}$ le velocità nell'istante precedente all'urto dei due punti materiali, di masse m_1 e m_2 , e con $\mathbf{v}_{1, \text{fin}}, \mathbf{v}_{2, \text{fin}}$ le corrispondenti velocità nell'istante successivo all'urto, la conservazione di \mathbf{P} si scrive

$$\mathbf{P}_{\text{in}} = m_1 \mathbf{v}_{1, \text{in}} + m_2 \mathbf{v}_{2, \text{in}} = m_1 \mathbf{v}_{1, \text{fin}} + m_2 \mathbf{v}_{2, \text{fin}} = \mathbf{P}_{\text{fin}} . \quad (4.22)$$

La quantità di moto del centro di massa rimane invariata nell'urto:

$$\mathbf{P} = (m_1 + m_2) \mathbf{v}_{CM} = \mathbf{P}_{\text{in}} = \mathbf{P}_{\text{fin}} = \text{costante} ; \quad (4.23)$$

il moto del centro di massa non viene cioè alterato dall'urto. Invece variano le quantità di moto di ciascun punto materiale per effetto dell'impulso della forza di interazione:

$$m_1 \mathbf{v}_{1, \text{fin}} - m_1 \mathbf{v}_{1, \text{in}} = \mathbf{J}_{2, 1} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_{2, 1} dt ,$$

$$m_2 \mathbf{v}_{2, \text{fin}} - m_2 \mathbf{v}_{2, \text{in}} = \mathbf{J}_{1, 2} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_{1, 2} dt .$$

$\mathbf{J}_{2, 1}$ è l'impulso dovuto alla forza impulsiva $\mathbf{F}_{2, 1}$ esercitata dal punto 2 sul punto 1 e analogo significato ha $\mathbf{J}_{1, 2}$. Naturalmente

$$\mathbf{F}_{1, 2} = -\mathbf{F}_{2, 1} \Rightarrow \mathbf{J}_{1, 2} = -\mathbf{J}_{2, 1} ;$$

le variazioni di quantità di moto sono eguali ed opposte.

Possiamo conservare la quantità di moto totale anche in presenza di forze esterne? La risposta è positiva se la durata t dell'urto è sufficientemente piccola e le forze esterne non sono impulsive. Infatti la variazione di quantità di moto

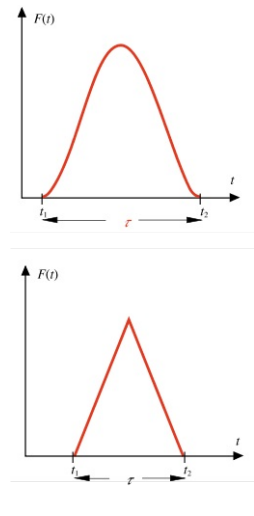


FIGURA 4.22

totale del sistema *dovuta* alle forze esterne è

$$\Delta \mathbf{P} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}^{(E)} dt = \mathbf{F}_m^{(E)} \tau$$

e se t è molto breve ΔP risulta trascurabile. Il ragionamento non sarebbe corretto se $\mathbf{F}^{(E)}$ fosse impulsiva nell'intervallo t in quanto in tal caso il valore medio $\mathbf{F}_m^{(E)}$ potrebbe assumere valori notevoli. Alternativamente, considerando $\mathbf{J}_{1,2}$ o $\mathbf{J}_{2,1}$ prima calcolati, si può scrivere

$$\mathbf{J} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt = \mathbf{F}_m \tau$$

dove \mathbf{F}_m è il valore medio della forza impulsiva nell'intervallo t (figura 4.23). Dato che \mathbf{J} assume un valore finito e t è molto breve, \mathbf{F}_m può assumere valori estremamente grandi, rispetto ai quali $\mathbf{F}_m^{(E)}$ è certamente trascurabile. La forza esterna non modifica i singoli impulsi durante l'urto e quindi resta vera l'eguaglianza $\mathbf{J}_{1,2} = -\mathbf{J}_{2,1}$ e valida la conservazione della quantità di moto totale.

La conservazione del momento angolare non aggiunge informazioni nel caso dell'urto di due corpi puntiformi. Infatti durante l'urto $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}$ e quindi se $\mathbf{P}_{in} = \mathbf{P}_{fin}$, risulta anche $\mathbf{L}_{in} = \mathbf{r} \times \mathbf{P}_{in} = \mathbf{L}_{fin} = \mathbf{r} \times \mathbf{P}_{fin}$: le due leggi di conservazione sono in questo caso equivalenti.

Ricordiamo infine che a priori non è noto se le forze interne che si sviluppano nell'urto sono conservative e pertanto non si può assumere la conservazione dell'energia meccanica del sistema durante l'urto. Dato che la posizione dei punti non varia nell'urto, eventuali energie potenziali dei punti non variano nell'urto e quindi $\Delta E_m = \Delta E_k$: l'argomento appena esposto si traduce pertanto nel fatto che in un urto non si può assumere a priori che l'energia cinetica si conservi.

Riguardo all'energia cinetica torna utile il secondo teorema di König (4.17): per i due punti

$$E_k = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_{CM}^2 + E'_k \quad .$$

Il primo termine, energia cinetica del centro di massa, non varia nell'urto se vale la conservazione della quantità di moto, come supponiamo. Ciò che resta costante o varia, a seconda che le forze interne siano conservative o non conservative, è l'energia cinetica rispetto al centro di massa

$$E'_k = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \quad .$$

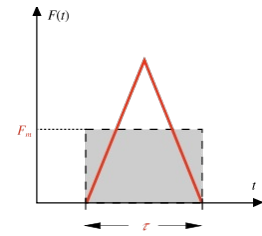


FIGURA 4.23

Sistema del laboratorio e sistema del centro di massa

Il sistema di riferimento inerziale in cui è posto il dispositivo che permette di

fare urtare i due punti e di studiare le caratteristiche dell'urto si chiama spesso sistema del laboratorio. L'urto però può essere studiato anche nel sistema di riferimento del centro di massa (paragrafo 4.6).

Il legame tra le velocità nei due sistemi in qualsiasi istante è

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}'_1 + \mathbf{v}_{CM} \quad , \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}'_2 + \mathbf{v}_{CM} \quad . \quad (4.13)$$

Nel sistema del centro di massa la quantità di moto totale è nulla, come già sappiamo; per altro la verifica è immediata:

$$m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = m_1 \mathbf{v}'_1 + m_2 \mathbf{v}'_2 + (m_1 + m_2) \mathbf{v}_{CM} \Rightarrow m_1 \mathbf{v}'_1 + m_2 \mathbf{v}'_2 = \mathbf{0} \quad ,$$

avendo usato (4.13) e (4.23). Dunque

$$\begin{aligned} m_1 \mathbf{v}'_{1, \text{in}} + m_2 \mathbf{v}'_{2, \text{in}} &= m_1 \mathbf{v}'_{1, \text{fin}} + m_2 \mathbf{v}'_{2, \text{fin}} = \mathbf{0} \\ \Rightarrow \mathbf{p}'_{1, \text{in}} &= -\mathbf{p}'_{2, \text{in}} \quad , \quad \mathbf{p}'_{1, \text{fin}} = -\mathbf{p}'_{2, \text{fin}} \quad . \end{aligned}$$

Dal centro di massa si vedono i punti arrivare verso il centro di massa con quantità di moto eguali in modulo e opposte in verso; i punti si urtano nella posizione occupata dal centro di massa e ripartono dopo l'urto con quantità di moto eguali in modulo e opposte in verso (in generale però $p'_{\text{fin}} \neq p'_{\text{in}}$).

L'energia cinetica nel sistema del centro di massa è semplicemente quella relativa al centro di massa e normalmente si ha

$$E'_{k, \text{in}} = \frac{1}{2} m_1 v'^2_{1, \text{in}} + \frac{1}{2} m_2 v'^2_{2, \text{in}} \neq E'_{k, \text{fin}} = \frac{1}{2} m_1 v'^2_{1, \text{fin}} + \frac{1}{2} m_2 v'^2_{2, \text{fin}} \quad .$$

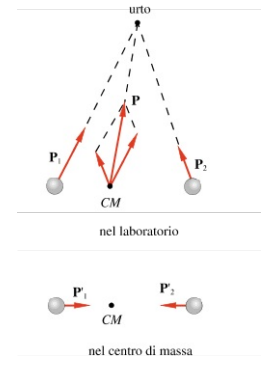


FIGURA 4.24

4.10 Urto completamente anelastico

L'urto si chiama *completamente anelastico* quando i due punti restano attaccati dopo l'urto formando un unico corpo puntiforme di massa $m_1 + m_2$.

Se \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 sono le velocità dei due punti nell'istante prima dell'urto e \mathbf{v}' la velocità comune immediatamente dopo l'urto, da (4.22) e (4.23) si ha

$$m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = (m_1 + m_2) \mathbf{v}' = (m_1 + m_2) \mathbf{v}_{CM} ,$$

$$\mathbf{v}_{CM} = \frac{m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2}{m_1 + m_2} .$$

Subito dopo l'urto i punti si muovono con la velocità che aveva il centro di massa un istante prima dell'urto (\mathbf{v}_{CM} resta invariata nell'urto). Le variazioni di quantità di moto dei singoli punti sono $m_1 \mathbf{v}_{CM} - m_1 \mathbf{v}_1$ e $m_2 \mathbf{v}_{CM} - m_2 \mathbf{v}_2$ e si verifica subito che sono eguali ed opposte.

Calcoliamo l'energia cinetica del sistema prima e dopo l'urto:

$$E_{k, in} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = E'_k + \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_{CM}^2 ,$$

avendo applicato il secondo teorema di König (4.17); invece

$$E_{k, fin} = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_{CM}^2 < E_{k, in} .$$

In effetti, dopo l'urto completamente anelastico non c'è più moto rispetto al centro di massa, con cui i due punti vengono a coincidere, e concludiamo che in questo tipo d'urto è assorbita proprio E'_k , l'energia cinetica che i punti hanno rispetto al centro di massa prima dell'urto:

$$\Delta E_k = E_{k, fin} - E_{k, in} = -E'_k = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_{CM}^2 - \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m v_2^2 .$$

Ciò che avviene in realtà si può schematizzare così: i due corpi, che assimiliamo a punti materiali, durante l'urto si deformano in modo permanente e restano compenetrati. Il lavoro compiuto, a spese dell'energia cinetica iniziale, per fare avvenire la deformazione non viene più recuperato, ovvero le forze interne che si sviluppano nell'urto non sono conservative.

ESEMPIO 4.12

Un punto di massa m_1 con velocità \mathbf{v}_1 urta in modo completamente anelastico un punto di massa m fermo ($\mathbf{v}_2 = 0$). Calcolare la velocità finale dei due punti, la variazione di energia cinetica, il rapporto tra l'energia cinetica finale e quella iniziale. Nel sistema del centro di massa quali sono le velocità dei punti prima dell'urto?

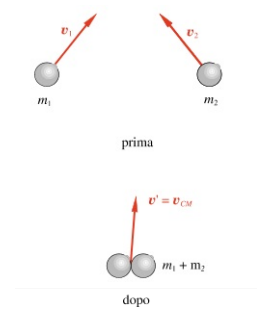


FIGURA 4.25

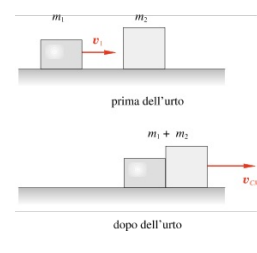


FIGURA 4.26

(Esempio 4.12)

Soluzione

Dalla conservazione della quantità di moto

$$m_1 \mathbf{v}_1 = (m_1 + m_2) \mathbf{v}_{CM} \quad , \quad \mathbf{v}_{CM} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{v}_1 \quad .$$

La direzione e il verso del moto dopo l'urto sono gli stessi del moto di m_1 prima dell'urto (il problema è unidimensionale). Le energie cinetiche sono:

$$\begin{aligned} E_{k, \text{in}} &= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \quad , \\ E_{k, \text{fin}} &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_{CM}^2 = \frac{1}{2} \frac{m_1^2}{m_1 + m_2} v_1^2 \quad , \\ \Rightarrow \Delta E_k &= E_{k, \text{fin}} - E_{k, \text{in}} = - \frac{m_1 m_2}{2 (m_1 + m_2)} v_1^2 \quad , \\ \frac{E_{k, \text{fin}}}{E_{k, \text{in}}} &= \frac{m_1}{m_1 + m_2} \quad . \end{aligned}$$

Se le masse sono eguali si perde metà dell'energia cinetica, se $m_1 \gg m_2$ non si perde praticamente nulla ($v_{CM} \approx v_1$, m_1 prosegue quasi indisturbata insieme a m_2), se $m_1 \ll m_2$ si perde praticamente tutta l'energia cinetica ($v_{CM} \ll v_1$). Per quale ragione ΔE_k ha un'espressione identica a quella trovata nell'esempio 4.7? Nel sistema del centro di massa

$$v'_1 = v_1 - v_{CM} = v_1 - \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v_1 \quad , \quad v'_2 = -v_{CM} = - \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{CM} \quad .$$

Entrambi i punti di muovono verso il CM (che in ogni istante sta nella posizione intermedia dell'esempio 4.1) con velocità diverse, ma eguali quantità di moto. L'energia cinetica nel CM è

$$E'_k = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v_1^2 = - \Delta E_k \quad ,$$

in accordo con quanto detto prima.

Visualizza soluzione

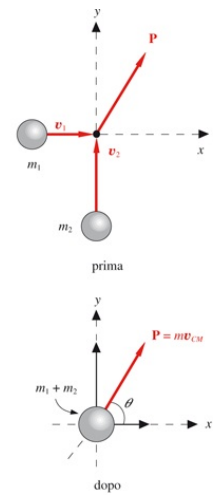


FIGURA 4.27
(Esempio 4.13)

ESEMPIO 4.13

Si studi l'urto completamente anelastico, tra due punti di massa m_1 e m_2 , in moto con velocità \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 , perpendicolari tra di loro.

Soluzione

Prendiamo come origine del sistema di assi x, y il punto in cui avviene l'urto. Chiamiamo θ l'angolo formato dalla quantità di moto totale $\mathbf{P} = m \mathbf{v}_{CM}$ con l'asse x . \mathbf{P} è costante nell'urto per cui

$$m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = (m_1 + m_2) \mathbf{v}_{CM} .$$

In questo problema bidimensionale la conservazione della quantità di moto, che è una legge vettoriale, dà luogo a due equazioni di conservazione, lungo l'asse x e lungo l'asse y , ottenute per proiezione:

$$\begin{aligned} P_{x, \text{in}} = m_1 v_1 &= P_{x, \text{fin}} = (m_1 + m_2) v_{CM} \cos \theta, \\ P_{y, \text{in}} = m_2 v_2 &= P_{y, \text{fin}} = (m_1 + m_2) v_{CM} \sin \theta, \\ \Rightarrow \operatorname{tg} \theta &= \frac{m_2 v_2}{m_1 v_1} \quad , \quad v_{CM} = \frac{\sqrt{(m_1 v_1)^2 + (m_2 v_2)^2}}{m_1 + m_2} \end{aligned}$$

La somma vettoriale delle quantità di moto dei singoli punti un istante prima dell'urto determina

$$\mathbf{P} = (m_1 + m_2) \mathbf{v}_{CM} = m \mathbf{v}_{CM} \quad ,$$

che resta tale dopo l'urto.

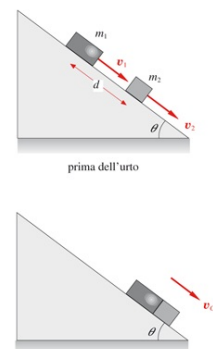


FIGURA 4.28
(Esempio 4.14)

[Visualizza soluzione](#)

ESEMPIO 4.14

Si considerino due corpi puntiformi, di massa m_1 e m_2 , che scendono lungo un piano inclinato liscio con velocità v_1 e v_2 . All'istante $t = 0$ la distanza tra i due corpi è d e le loro velocità sono $v_{0,1}$ e $v_{0,2}$ con $v_{0,1} > v_{0,2}$. Si determini la velocità dopo l'urto, che viene assunto completamente anelastico.

Soluzione

Le velocità dei due corpi sono funzioni del tempo

$$v_1 = v_{0,1} + at \quad , \quad v_2 = v_{0,2} + at$$

con $a = g \sin\theta$. Il moto relativo è uniforme con velocità

$$v_1 - v_2 = v_{0,1} - v_{0,2}$$

e quindi l'urto avviene al tempo $t^* = d / (v_{0,1} - v_{0,2})$. Applichiamo la conservazione della quantità di moto durante l'urto:

$$m_1 v_{0,1} + m_1 a t^* + m_2 v_{0,2} + m_2 a t^* = (m_1 + m_2) v_{CM}$$

$$v_{CM}(t^*) = \frac{m_1 v_{0,1} + m_2 v_{0,2}}{m_1 + m_2} + a t^* = v_{CM}(t=0) + a t^* .$$

Dopo l'urto i due corpi scendono uniti con velocità data da

$$v = v_{CM}(t^*) + a(t - t^*) = v_{CM}(t=0) + a t$$

Quindi il centro di massa scende con la stessa legge prima e dopo l'urto e la sua velocità non subisce discontinuità nell'urto.

Questo è un caso in cui si applica (4.22) pur in presenza della forza esterna peso, in quanto non impulsiva.

Visualizza soluzione

ESEMPIO 4.15 Pendolo balistico

Il pendolo balistico, utilizzato per misurare la velocità di un proiettile, consiste di un grande blocco di legno, appeso verticalmente. Una pallottola di massa m , che viaggia orizzontalmente con velocità v , urta il pendolo rimanendovi conficcata. Se il tempo di collisione è piccolo rispetto al periodo di oscillazione del pendolo, la cordicella che sostiene la massa M resta praticamente verticale durante l'urto. Per tempo di collisione si intende il tempo necessario perché il proiettile si fermi all'interno del legno (nell'esempio 2.25 abbiamo stimato per fenomeni di questo tipo una durata dell'ordine di 10^{-4} s).

Nessuna forza esterna orizzontale agisce sul sistema e pertanto è possibile conservare nell'urto la componente orizzontale della quantità di moto.

Terminata la collisione, il pendolo con la pallottola inizia ad oscillare raggiungendo un'altezza massima h , misurata rispetto alla posizione di equilibrio, tale che l'energia potenziale corrispondente eguagli l'energia cinetica del sistema subito dopo l'urto. Si può pertanto risalire al valore della velocità del sistema ($M + m$) e quindi a quella del proiettile prima dell'urto. La conservazione della quantità di moto durante l'urto, completamente anelastico, dà

$$m v = (m + M) v' \quad .$$

Dopo l'urto, per la conservazione dell'energia meccanica durante l'oscillazione,

$$\frac{1}{2} (m + M) v'^2 = (m + M) g h$$

$$\Rightarrow v' = \sqrt{2 g h} \quad , \quad v = \frac{m + M}{m} \sqrt{2 g h} \quad .$$

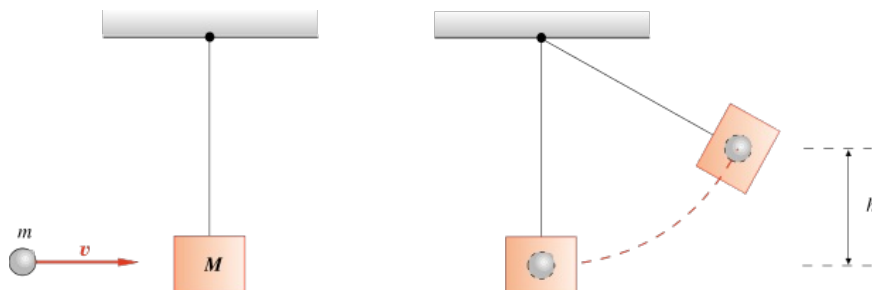


FIGURA 4.29

4.11 Urto elastico

Si definisce come *urto elastico* un urto durante il quale *si conserva anche l'energia cinetica del sistema*. Questo comporta che le forze interne, che si manifestano durante l'urto, siano conservative. I due corpi reali che si urtano subiscono, durante l'urto, delle deformazioni elastiche, riprendendo la configurazione iniziale subito dopo l'urto.

Nello studio di un urto elastico possiamo utilizzare le equazioni

$$\mathbf{P}_{\text{in}} = \mathbf{P}_{\text{fin}} \quad , \quad E_{k, \text{in}} = E_{k, \text{fin}}$$

(ed è l'unico caso in cui le due leggi valgono simultaneamente).

L'urto più generale è tridimensionale e abbiamo sei incognite, le componenti delle velocità dei due punti dopo l'urto, ma solo quattro equazioni (tre dalla conservazione di \mathbf{P} e una dalla conservazione di E_k). Anche nel caso di urto nel piano, abbiamo quattro incognite e tre equazioni. Quindi per risolvere un problema di urto elastico nel piano o nello spazio, oltre a conoscere le velocità prima dell'urto bisogna avere qualche altra informazione sulle velocità dopo l'urto.

Invece nel *caso unidimensionale* (due punti che si muovono prima e dopo l'urto elastico lungo la stessa direzione) abbiamo due equazioni di conservazione e due incognite (le velocità dei due punti dopo l'urto) e possiamo risolvere il problema. Scriviamo dunque in questo caso:

$$m_1 v_{1, \text{in}} + m_2 v_{2, \text{in}} = m_1 v_{1, \text{fin}} + m_2 v_{2, \text{fin}} = (m_1 + m_2) v_{CM} \quad ,$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1, \text{in}}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2, \text{in}}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1, \text{fin}}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2, \text{fin}}^2 \quad .$$

Per determinare i valori di $v_{1, \text{fin}}$ e $v_{2, \text{fin}}$ in funzione di $v_{1, \text{in}}$ e $v_{2, \text{in}}$ è più comodo considerare l'urto anche nel sistema di riferimento del centro di massa, dove $P' = 0$ e quindi:

$$m_1 v'_{1, \text{in}} = -m_2 v'_{2, \text{in}} \quad , \quad m_1 v'_{1, \text{fin}} = -m_2 v'_{2, \text{fin}} \quad ,$$

$$\frac{1}{2} m_1 v'^2_{1, \text{in}} + \frac{1}{2} m_2 v'^2_{2, \text{in}} = \frac{1}{2} m_1 v'^2_{1, \text{fin}} + \frac{1}{2} m_2 v'^2_{2, \text{fin}} \quad .$$

Da queste si ottiene la soluzione

$$v'_{1, \text{fin}} = -v'_{1, \text{in}} \quad , \quad v'_{2, \text{fin}} = -v'_{2, \text{in}} \quad ;$$

nel sistema del centro di massa la velocità e la quantità di moto di ciascun punto restano le stesse in modulo, cambiando solo di verso.

Ritorniamo ora nel sistema inerziale e usiamo (4.13):

$$v_{1, \text{in}} = v'_{1, \text{in}} + v_{CM} \quad , \quad v_{2, \text{in}} = v'_{2, \text{in}} + v_{CM}$$

$$v_{1, \text{fin}} = v'_{1, \text{fin}} + v_{CM} \quad , \quad v_{2, \text{fin}} = v'_{2, \text{fin}} + v_{CM} \quad .$$

Tenendo conto della soluzione trovata nel sistema del centro di massa e del fatto che

$$v_{CM} = \frac{m_1 v_{1, in} + m_2 v_{2, in}}{m_1 + m_2}$$

si ottiene:

$$\begin{aligned} v_{1, fin} &= \frac{(m_1 - m_2) v_{1, in} + 2 m_2 v_{2, in}}{m_1 + m_2} , \\ v_{2, fin} &= \frac{2 m_1 v_{1, in} + (m_2 - m_1) v_{2, in}}{m_1 + m_2} . \end{aligned} \quad (4.24)$$

Nell'applicazione di (4.24) bisogna fare attenzione ai segni delle velocità. Prendendo come riferimento il verso di $v_{1, in}$, $v_{2, in}$ va inserita con segno positivo o negativo a seconda che $v_{2, in}$ sia concorde o discorde a $v_{1, in}$. Ottenute le velocità finali, per ciascuna vale la stessa regola: se è positiva vuol dire che è concorde a $v_{1, in}$, se è negativa che è discorde.

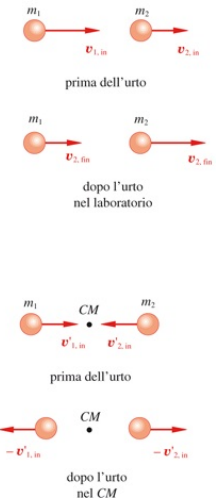


FIGURA 4.30

ESEMPIO 4.16

In un urto elastico tra due punti assumiamo che $v_{1, in}$ sia concorde all'asse x : elencare i possibili stati iniziali e, per ciascuno di questi, i possibili stati finali, precisando i segni delle velocità.

Soluzione

Gli stati iniziali possibili sono due: nel primo $v_{2, in}$ è concorde all'asse x e minore in modulo di $v_{1, in}$ (m_1 insegue e raggiunge m_2), nel secondo $v_{2, in}$ è discorde all'asse x (m_2 va incontro a m_1). Nel primo caso ci sono due possibili stati finali, nel secondo tre.

stato iniziale	stato finale	$v_{1, fin}$	$v_{2, fin}$
		> 0	> 0
		< 0	> 0
		> 0	> 0
		< 0	< 0
		< 0	> 0

Il risultato finale dipende ovviamente dai valori delle masse e delle velocità iniziali.

[Visualizza soluzione](#)

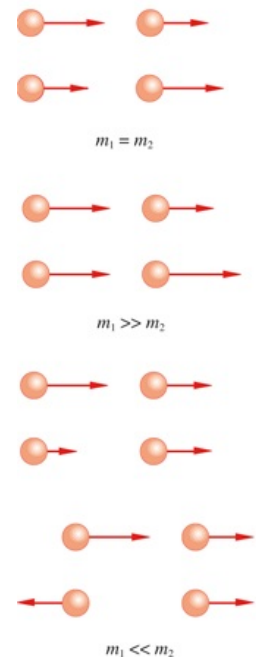


FIGURA 4.31
(Esempio 4.17)

ESEMPIO 4.17

Studiare l'urto elastico tra due punti aventi velocità iniziali concordi, nei casi in cui $m_1 = m_2$, $m_1 \gg m_2$, $m_1 \ll m_2$.

Soluzione

Partiamo dalle (4.24). Nel primo caso

$$v_{1, \text{fin}} = v_{2, \text{in}} \quad , \quad v_{2, \text{fin}} = v_{1, \text{in}} \quad .$$

Dopo l'urto le velocità dei due punti risultano scambiate, m_2 è più veloce di m_1 . Nel secondo caso si trascura m_2 rispetto a m_1 :

$$v_{1, \text{fin}} = v_{1, \text{in}} \quad , \quad v_{2, \text{fin}} = 2v_{1, \text{in}} - v_{2, \text{in}} \quad .$$

Il moto di m_1 è (praticamente) indisturbato, m_2 acquista una velocità maggiore di quella di m_1 . Nel terzo caso si trascura m_1 rispetto a m_2 :

$$v_{1, \text{fin}} = -v_{1, \text{in}} + 2v_{2, \text{in}} \quad , \quad v_{2, \text{fin}} = v_{2, \text{in}} \quad .$$

Ora è m_2 a non subire perturbazioni mentre m_1 torna indietro se $v_{1, \text{in}} > 2v_{2, \text{in}}$ o prosegue nello stesso verso.

[Visualizza soluzione](#)

ESEMPIO 4.18

Ripetere l'esempio 4.17 nel caso in cui m_2 sia ferma e calcolare inoltre il rapporto tra l'energia cinetica finale di m_2 e quella iniziale di m_1 .

Soluzione

Sempre da (4.24), con $v_{2, \text{in}} = 0$, si ha:

$$v_{2, \text{fin}} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1, \text{in}}$$

$$\frac{1}{2} m_2 v_{2, \text{fin}}^2 = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \frac{1}{2} m_1 v_{1, \text{in}}^2$$

$$R = \frac{(E_{k,2})_{\text{fin}}}{(E_{k,1})_{\text{in}}} = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} .$$

Nei tre casi che vogliamo considerare abbiamo:

$m_1 = m_2$	$v_{2, \text{fin}} = v_{1, \text{in}}$	$(v_{1, \text{fin}} = 0)$	$R = 1$,
$m_1 \gg m_2$	$v_{2, \text{fin}} = 2v_{1, \text{in}}$	$(v_{1, \text{fin}} = v_{1, \text{in}})$	$R = 4 \frac{m_2}{m_1} \simeq 0$,
$m_1 \ll m_2$	$v_{2, \text{fin}} = 2 \frac{m_1}{m_2} v_{1, \text{in}} \simeq 0$	$(v_{1, \text{fin}} = -v_{1, \text{in}})$	$R = 4 \frac{m_1}{m_2} \simeq 0$.

Il trasferimento di energia cinetica da m_1 a m_2 è massimo quando le masse sono eguali. Per dimostrarlo basta considerare m_1 fisso e m_2 variabile e imporre $dR/dm_2 = 0$; si trova che la condizione è soddisfatta se $m_2 = m_1$ e si tratta evidentemente di un massimo (l'unico da zero a $+\infty$).

Visualizza soluzione

ESEMPIO 4.19

Un punto materiale di massa m e velocità \mathbf{v} urta elasticamente contro una parete. La direzione del moto è ortogonale alla parete. Con quale velocità rimbalza il punto? Ripetere il problema se la direzione incidente forma un angolo θ con la normale alla parete, che supponiamo liscia.

Soluzione

Nel caso di incidenza normale abbiamo, ponendo $v_2 = 0$ e $m_2 = \infty$,

$$v_{\text{fin}} = -v_{\text{in}} .$$

La velocità è la stessa, solo il verso è cambiato. Si tratta di una situazione limite in cui si conserva l'energia cinetica, ma non la quantità di moto che cambia di verso. Il risultato si spiega considerando che la parete è vincolata a rimanere ferma; allora durante l'urto si sviluppano forze esterne vincolari impulsive, paragonabili alle forze interne, che fanno variare la quantità di moto.

Quando l'urto è obliquo, scomponiamo la velocità incidente nelle componenti $v \cos \theta$, ortogonale alla parete, e $v \sin \theta$, parallela alla parete. Per la componente normale vale il ragionamento precedente; per la componente parallela osserviamo che non essendoci attrito non ci sono forze parallele alla parete e quindi nell'urto si conserva la componente parallela della quantità di moto. Pertanto dopo

L'urto la componente parallela è invariata, la componente normale è rovesciata e si ha la situazione della figura 4.32: la direzione del moto dopo l'urto è simmetrica rispetto alla direzione incidente, formando l'angolo θ con la normale (come avviene nella riflessione di un raggio luminoso da parte di uno specchio piano). Anche ora si ha conservazione dell'energia cinetica, ma non della quantità di moto totale.

L'urto obliquo appena considerato è un urto bidimensionale; esso avviene nel piano individuato dalla direzione di incidenza e dalla normale alla parete. Il fatto che il corpo urtato sia immobile rende possibile la soluzione conoscendo solo lo stato iniziale, a differenza del caso con entrambi i corpi liberi, ricordato all'inizio del paragrafo.

Visualizza soluzione

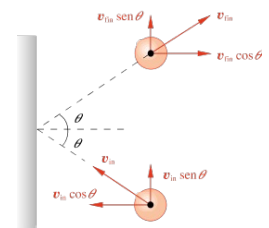


FIGURA 4.32
(Esempio 4.19)

4.12 Urto anelastico

Questo è il caso più comune: i punti ritornano separati dopo l'urto, durante il quale si conserva la quantità di moto del sistema, se non agiscono forze esterne di tipo impulsivo, ma non l'energia cinetica. Una certa frazione di E_k' , energia cinetica prima dell'urto rispetto al centro di massa, viene assorbita.

Ciò è determinato, negli urti tra particelle reali, dal fatto che l'impulso della forza di interazione di una particella con l'altra risulta, nella fase di deformazione dei corpi, superiore a quello nella fase di ritorno dei corpi alla configurazione iniziale. Se l'urto fosse elastico i due impulsi sarebbero eguali (in modulo), mentre per un urto completamente anelastico il secondo sarebbe nullo.

Per chiarire meglio il processo, consideriamolo nel sistema di riferimento del centro di massa. Il punto con quantità di moto p_1' , in nell'istante precedente all'urto vede, per effetto dell'impulso nella fase di deformazione, ridursi progressivamente a zero la sua quantità di moto fino ad arrestarsi. Nella fase successiva, sempre durante l'urto, il punto riacquista quantità di moto fino al valore p_1' , in, opposto in verso e minore in modulo rispetto a p_1' , in. Si definisce coefficiente di restituzione il rapporto

$$e = -\frac{p_{1, \text{fin}}'}{p_{1, \text{in}}'} = -\frac{v_{1, \text{fin}}'}{v_{1, \text{in}}'} = -\frac{p_{2, \text{fin}}'}{p_{2, \text{in}}'} = -\frac{v_{2, \text{fin}}'}{v_{2, \text{in}}'} \quad (4.25)$$

Ricordiamo che, essendo $P' = 0$, in modulo p_1' , in = p_2' , in e p_1' , fin = p_2' , fin, per cui il coefficiente di restituzione è lo stesso anche per la seconda particella, come scritto in (4.25).

L'energia cinetica del sistema delle due particelle dopo l'urto è data da

$$E'_{k, \text{fin}} = \frac{1}{2} m_1 v_{1, \text{fin}}'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2, \text{fin}}'^2 = e^2 \left(\frac{1}{2} m_1 v_{1, \text{in}}'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2, \text{in}}'^2 \right) \\ \Rightarrow E'_{k, \text{fin}} = e^2 E'_{k, \text{in}} .$$

La variazione relativa di energia cinetica nell'urto è

$$\delta = \frac{E'_{k, \text{fin}} - E'_{k, \text{in}}}{E'_{k, \text{in}}} = e^2 - 1 \quad .$$

Nell'urto elastico $e = 1$, $\delta = 0$, l'energia cinetica si conserva. Nell'urto completamente anelastico $e = 0$, $\delta = -1$: tutta l'energia cinetica del moto relativo al centro di massa è assorbita e trasformata. *Nella situazione di urto anelastico il coefficiente di restituzione e risulta compreso tra zero e uno, E_k' , fin è sempre minore di E_k' , in.*

Per ricavare la relazione tra le velocità nel sistema inerziale, inseriamo (4.13) in (4.25) ottenendo:

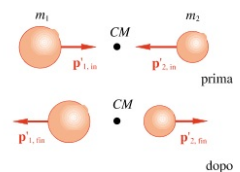


FIGURA 4.33

$$v'_{1, \text{fin}} = v_{1, \text{fin}} - v_{CM} = -e v'_{1, \text{in}} = -e (v_{1, \text{in}} - v_{CM}) \quad ,$$

$$v'_{2, \text{fin}} = v_{2, \text{fin}} - v_{CM} = -e v'_{2, \text{in}} = -e (v_{2, \text{in}} - v_{CM}) \quad ,$$

$$\Rightarrow v_{1, \text{fin}} = v_{CM} (1 + e) - e v_{1, \text{in}} \quad , \quad v_{2, \text{fin}} = v_{CM} (1 + e) - e v_{2, \text{in}} \quad .$$

Poiché $v_{CM} = \frac{m_1 v_{1, \text{in}} + m_2 v_{2, \text{in}}}{m_1 + m_2}$ si ottiene infine

$$v_{1, \text{fin}} = \frac{(m_1 - e m_2) v_{1, \text{in}} + m_2 (1 + e) v_{2, \text{in}}}{m_1 + m_2} \quad (4.26)$$

$$v_{2, \text{fin}} = \frac{m_1 (1 + e) v_{1, \text{in}} + (m_2 - e m_1) v_{2, \text{in}}}{m_1 + m_2} \quad . \quad (4.26)$$

Con $e = 1$ si ritorna alle (4.24), valide per l'urto elastico, mentre con $e = 0$ si ha $v_{1, \text{fin}} = v_{2, \text{fin}} = v_{CM}$, come è giusto per l'urto completamente anelastico.

Seguendo lo stesso ragionamento utilizzato nel caso dell'urto elastico, è chiaro che le (4.26) sono valide solo per gli urti unidimensionali.

ESEMPIO 4.20

Un punto materiale cade, partendo con velocità iniziale nulla da un'altezza h_1 , sopra un piano orizzontale, rimbalza e risale all'altezza h_2 minore di h_1 . Calcolare il coefficiente di restituzione.

Soluzione

Soluzione La velocità un istante prima dell'urto è $v_{\text{in}} = \sqrt{2gh_1}$, quella un istante dopo l'urto è v_{fin} e il punto risale alla quota h_2 tale che $v_{\text{in}} = \sqrt{2gh_2}$, dove il segno meno tiene conto del fatto che v_{fin} è negativa. Dalle (4.26), nel caso limite di $v_{2, \text{in}} = 0$ e $m_2 = \infty$, si ricava $v_{\text{fin}} = -e v_{\text{in}}$. D'altra parte, proprio per la grandissima differenza di massa tra piano e punto, possiamo pensare che il centro di massa sia fermo e quindi che le velocità nel sistema del laboratorio e nel sistema del centro di massa siano eguali. Pertanto:

$$e = -\frac{v'_{\text{fin}}}{v'_{\text{in}}} = -\frac{v_{\text{fin}}}{v_{\text{in}}} = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}} \quad .$$

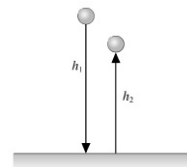


FIGURA 4.34
(Esempio 4.20)

Visualizza soluzione

4.13 Ulteriori nozioni sugli urti

Nei paragrafi precedenti, quando abbiamo esaminato gli urti elastici e gli urti anelastici, ci siamo limitati al caso in cui, prima e dopo l'urto, i due punti si muovono sempre restando sulla stessa retta, quella che contiene le loro velocità e ne congiunge in ogni istante le posizioni. Si tratta di una situazione particolare e semplice da trattare; vediamo subito qualche esempio diverso.

Tra i due punti può esistere una forza interna che agisce anche se i due punti non vengono a contatto; l'azione di questa forza durante il tempo di durata dell'urto (si continua ad usare questo termine pur non essendoci contatto) determina una variazione della quantità di moto dei singoli punti come mostrato qualitativamente nelle figure 4.35a e 4.35b. Se le masse dei punti sono molto diverse, quello con massa maggiore resta praticamente indisturbato (figura 4.35c). Infine nella figura 4.35d è mostrato l'urto di un punto in moto contro un punto fermo, quando tra i due agisce una forza interna con raggio di azione molto corto (rispetto ai casi delle figure precedenti) per cui i punti devono essere molto vicini per interagire; lo schema della figura 4.35d si può comunque riferire a tutti i casi di urto contro un punto fermo, in quanto rappresenta la situazione iniziale e finale delle quantità di moto.

Gli urti con una geometria iniziale del tipo appena descritto si dicono *non centrali* e una grandezza caratteristica dello stato iniziale è il cosiddetto *parametro d'urto* b , per comodità grafica disegnato solo nella figura 4.35c. Quando b è nullo l'urto si chiama *centrale*. Vedremo altri esempi di urti centrali e non centrali nei paragrafi del capitolo 6 dedicati agli urti tra corpi rigidi. Gli esempi qualitativi qui riportati si possono ricondurre all'urto di due punti con carica elettrica dello stesso segno (forza elettrostatica repulsiva, figure 4.35a e 4.35c), all'urto di due punti sottoposti alla forza gravitazionale o elettrostatica attrattiva (figura 4.35b), all'urto di un protone contro un altro protone (forza nucleare, figura 4.35d).

Per quanto riguarda le leggi di conservazione, in assenza di forze esterne impulsive si conserva la quantità di moto e, se le forze interne sono conservative, si conserva anche l'energia. Infine ha significato indipendente anche la conservazione del momento angolare, perché i punti non occupano un'unica posizione durante l'urto, a differenza di quanto visto nel paragrafo 4.9. Un'applicazione fondamentale di queste nozioni si ha nella spiegazione dell'esperimento di Rutherford (paragrafo 1.7 del volume secondo) che portò alla scoperta del nucleo atomico.

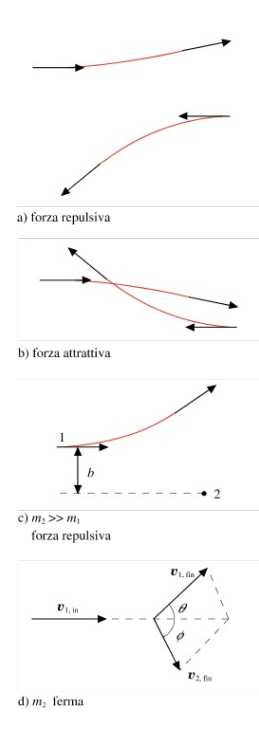


FIGURA 4.35

ESEMPIO 4.21

Un punto materiale di massa m e velocità $v_{1, \text{in}}$ urta un punto di eguale massa, fermo. Si osserva che dopo l'urto il primo punto si muove con velocità $v_{1, \text{fin}}$ lungo una retta che forma l'angolo θ con la

direzione incidente. Calcolare in funzione di $v_{1, in}$, $v_{1, fin}$ e θ il valore dell'angolo Φ formato con la direzione incidente dalla direzione di moto del secondo punto e la velocità $v_{2, fin}$. Come cambiano i risultati se le masse dei due punti sono diverse?

Soluzione

Conserviamo la quantità di moto lungo gli assi x e y , dato che il problema è bidimensionale:

$$\begin{aligned}
 m v_{1, in} &= m v_{1, fin} \cos \theta + m v_{2, fin} \cos \phi & 0 &= m v_{1, fin} \sin \theta - m v_{2, fin} \sin \phi \\
 \Rightarrow v_{2, fin} \sin \phi &= v_{1, fin} \sin \theta & \Rightarrow \operatorname{tg} \phi &= \frac{v_{1, fin} \sin \theta}{v_{1, in} - v_{1, fin} \cos \theta} .
 \end{aligned}$$

Calcolato l'angolo Φ , la velocità $v_{2, fin}$ del secondo punto dopo l'urto si ricava da

$$v_{2, fin} = v_{1, fin} \frac{\sin \theta}{\sin \phi} = \sqrt{v_{1, in}^2 + v_{1, fin}^2 - 2 v_{1, in} v_{1, fin} \cos \theta} ,$$

esprimendo $\sin \Phi$ in funzione di $\operatorname{tg} \Phi$. Lo stesso risultato si ottiene considerando (figura 4.36) che $\mathbf{v}_{2, fin} = \mathbf{v}_{1, in} - \mathbf{v}_{1, fin}$ e applicando il teorema di Carnot.

Notiamo che non si ha dipendenza dai valori delle masse, se queste sono eguali. Se invece sono diverse, si verifica subito che l'espressione di $\operatorname{tg} \Phi$ non cambia, mentre si ha

$$v_{2, fin} = \frac{m_1}{m_2} \sqrt{v_{1, in}^2 + v_{1, fin}^2 - 2 \frac{m_2}{m_1} v_{1, in} v_{1, fin} \cos \theta} ;$$

con $m_1 \neq m_2$ la figura 4.36 è corretta solo se i vettori disegnati sono le quantità di moto e non le velocità.

Visualizza soluzione

ESEMPIO 4.22

Si ripeta il calcolo dell'esempio 4.21 supponendo che l'urto sia elastico e si determini il trasferimento di energia cinetica dal primo al secondo punto; si consideri solo il caso delle masse eguali.

Soluzione

La relazione trovata per $\operatorname{tg} \Phi$ resta vera perché ottenuta utilizzando soltanto la conservazione della quantità di moto. In più, la simultanea conservazione dell'energia cinetica porta al risultato $\Phi = \pi/2 - \theta$: nell'urto elastico tra due particelle di egual massa, rappresentato nella figura 4.37, l'angolo tra le direzioni di moto delle particelle nello stato finale è sempre eguale a 90° . Il risultato si dimostra facilmente scrivendo le relazioni di conservazione dell'energia cinetica e del modulo della quantità di moto:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} m v_{1, in}^2 &= \frac{1}{2} m v_{1, fin}^2 + \frac{1}{2} m v_{2, fin}^2 , \\
 (m v_{1, in})^2 &= (m v_{1, fin})^2 + (m v_{2, fin})^2 + 2 m^2 v_{1, fin} v_{2, fin} \cos (\theta + \phi) .
 \end{aligned}$$

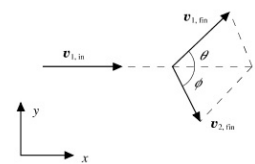


FIGURA 4.36
(Esempio 4.21)

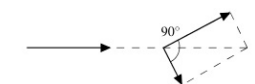


FIGURA 4.37
(Esempio 4.22)

Si verifica subito che queste sono compatibili solo se $\cos(\theta + \Phi) = 0$, cioè se $\theta + \Phi = \pi/2$. Di conseguenza, dalla figura 4.37, si ricava che

$$v_{1,\text{fin}} = v_{1,\text{in}} \cos \theta \quad , \quad v_{2,\text{fin}} = v_{1,\text{in}} \sin \theta$$

e quindi, per le energie cinetiche,

$$(E_{k,1})_{\text{fin}} = \frac{1}{2} m v_{1,\text{fin}}^2 = \frac{1}{2} m v_{1,\text{in}}^2 \cos^2 \theta = (E_{k,1})_{\text{in}} \cos^2 \theta \quad ,$$
$$(E_{k,2})_{\text{fin}} = (E_{k,1})_{\text{in}} \sin^2 \theta = (E_{k,1})_{\text{in}} \cos^2 \phi \quad .$$

L'energia trasferita dalla particella incidente alla particella ferma varia con l'angolo Φ . I casi limite sono: $\Phi = 0$, trasferimento massimo e totale, la particella 2 prosegue lungo la direzione del moto della particella 1, che si ferma; $\Phi = \pi/2$, trasferimento nullo, la particella 2 resta in quiete, la particella 1 prosegue indisturbata.

Visualizza soluzione

4.14 Urti relativistici

Anche con le particelle subatomiche, quali elettroni, protoni e nuclei atomici, è possibile condurre esperimenti d'urto.

Si tratta di urti senza contatto, come quelli descritti nel paragrafo 4.13, in cui tipicamente due particelle arrivano ad una distanza reciproca così piccola (10^{-14} ÷ 10^{-15} m) da risentire delle forze di origine nucleare e delle forze elettriche (in tal caso anche a distanze superiori).

In linea generale lo studio delle caratteristiche degli urti tra particelle ha permesso di verificare la correttezza della formulazione relativistica della meccanica e la validità assoluta delle leggi di conservazione dell'energia, della quantità di moto e del momento angolare. Più specificamente, a seconda del tipo di particelle che partecipano al processo, è possibile ricavare informazioni sulle interazioni tra di esse. Notiamo che in pratica questo è l'unico modo che abbiamo per progredire in modo sistematico nella conoscenza della realtà subnucleare (operativamente, tali indagini richiedono l'uso degli acceleratori di particelle).

Consideriamo due particelle che si urtano; i casi più comuni come realizzazione di laboratorio sono quello in cui una delle particelle è ferma oppure quello in cui le particelle si muovono una verso l'altra. Nello stato finale più semplice, con ancora due particelle, la configurazione è simile a quella mostrata nella figura 4.35d. Bisogna però tener presente che in questi processi le particelle finali possono essere diverse da quelle iniziali (non c'è conservazione della massa, si veda la discussione su energia e massa del paragrafo 3.9). Quindi l'urto a due corpi può essere scritto schematicamente come $m_1 + m_2 \rightarrow m_3 + m_4$; nel caso specifico in cui le particelle restino le stesse, $m_1 + m_2 \rightarrow m_1 + m_2$, si parla di urto elastico.

Come abbiamo detto precedentemente, *negli urti tra particelle si conservano sempre la quantità di moto e l'energia totale*. Questa è la differenza più sostanziale rispetto agli urti tra punti macroscopici, nei quali solo la quantità di moto è sempre conservata (se i punti sono liberi). Ricordando (3.24), notiamo che la conservazione dell'energia totale consente variazioni dell'energia cinetica e dell'energia di massa, purché queste si trasformino una nell'altra. Solo se $m_3 = m_1$, $m_4 = m_2$ l'energia di massa non varia nell'urto e quindi non varia l'energia cinetica: si vede che il termine urto elastico conserva il suo significato.

Le leggi di conservazione della quantità di moto e dell'energia si scrivono

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4 \quad , \quad E_1 + E_2 = E_3 + E_4 \quad ,$$

dove ciascun termine è dato da (3.19) o (3.27). La prima equazione vettoriale dà luogo a due equazioni proiettate sugli assi (le particelle dopo l'urto stanno in un piano che contiene la direzione di incidenza). Noto lo stato iniziale, note cioè

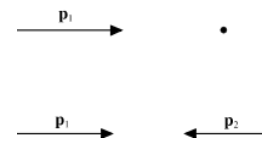


FIGURA 4.38

p_1, p_2, m_1, m_2 , e note le masse m_3 e m_4 , lo stato finale non è determinato: vi sono infatti quattro incognite, i moduli delle quantità di moto p_3, p_4 e i due angoli θ e Φ della figura 4.35d, ma tre sole equazioni di conservazione. Per risolvere il problema occorre fissare una variabile, ad esempio θ , e calcolare le altre tre con le leggi di conservazione: ovvero, lo stato finale è determinabile in funzione di θ (o di un'altra delle incognite).

Non eseguiamo materialmente il calcolo, sia perché non è immediato sia perché non ci serve per applicazioni. Menzioniamo solo che nell'urto elastico tra particelle di egual massa, una in moto e l'altra ferma, l'angolo tra le quantità di moto nello stato finale non è eguale a 90° , come nel caso non relativistico.

Nella discussione fatta finora abbiamo osservato l'urto dal sistema inerziale O , detto del laboratorio, nel quale, ad esempio, la particella bersaglio m_2 è ferma e la particella proiettile m_1 è in moto lungo l'asse x . Consideriamo adesso un altro sistema inerziale O' , con gli assi paralleli a quelli di O , che si muove rispetto ad O nel verso della quantità di moto totale nel laboratorio, $\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$, con velocità costante

$$v_0 = \frac{pc^2}{E} \quad ,$$

essendo E l'energia totale nel laboratorio,

$$E = E_1 + E_2 = \sqrt{p_1^2 c^2 + m_1^2 c^4} + \sqrt{p_2^2 c^2 + m_2^2 c^4} \quad .$$

Dal sistema O al sistema O' si passa con una trasformazione di Lorentz e, in particolare, con (3.28) per quanto riguarda quantità di moto ed energia. Sviluppando il calcolo si trova subito che $\mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 = 0$, cioè che in O' la quantità di moto iniziale è nulla; dato che la quantità di moto si conserva nell'urto, anche la quantità di moto finale appare nulla in O' . Per questa ragione O' si chiama il sistema di riferimento del centro di massa. Trasformando le energie risulta che l'energia totale vista da O' , $E' = E'_1 + E'_2$, è legata all'energia e alla quantità di moto nel laboratorio dalla

$$E'^2 = E^2 - p^2 c^2 \quad .$$

Questa relazione, molto importante, poteva essere ricavata direttamente ricordando che la quantità $E^2 - p^2 c^2$ ha lo stesso valore in qualsiasi sistema inerziale; ma in O' $p' = 0$.

ESEMPIO 4.23

Un protone avente velocità $v = 0.999 c$ urta centralmente contro un protone avente la stessa velocità. Calcolare la quantità di moto e l'energia totale nell'istante dell'urto. La massa del protone è $m = 1.673 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$.

Soluzione

La quantità di moto è sempre nulla (siamo nel secondo caso della figura 4.38, con $\mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}_1$): per l'urto in esame il sistema di riferimento del laboratorio coincide con quello del centro di massa. L'energia di un singolo protone è

$$E_1 = m \gamma c^2 \quad \text{con} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 22.4 \quad ,$$
$$E_1 = 1.673 \cdot 10^{-27} \cdot 22.4 \cdot (3 \cdot 10^8)^2 = 3.37 \cdot 10^{-9} \text{ J.}$$

Di questa, $0.15 \cdot 10^{-9} \text{ J}$ è energia di massa e $3.22 \cdot 10^{-9} \text{ J}$ energia cinetica. L'energia totale vale $E = 2E_1 = 6.75 \cdot 10^{-9} \text{ J}$.

Se immaginiamo che per un brevissimo istante i protoni urtandosi si fermino, in quell'istante è scomparsa tutta l'energia cinetica e l'energia del sistema, che è fermo ($\mathbf{p} = 0$), è solo energia di massa: prima avevamo $2mc^2$ come energia di massa, ora abbiamo $2m \gamma c^2$, γ volte di più. Subito dopo i protoni o altre particelle che si formano nell'urto danno luogo allo stato finale e l'energia di massa si ritrasforma in parte in energia cinetica (tanto meno quante più particelle sono presenti).

Il metodo descritto, che consente di concentrare in un unico processo elementare e in un volume molto piccolo una grande quantità di energia, è quello usato correntemente per ottenere, facendo collidere due fasci di particelle, eventuali stati instabili con massa molto elevata, che possono segnalare l'esistenza di nuovi tipi di materia, non producibili in condizioni ordinarie.

Visualizza soluzione

4.15 Proprietà dei sistemi di forze applicate a punti diversi

Discutiamo in questo paragrafo alcune proprietà relative a un sistema di forze applicate a punti diversi nello spazio (per esempio agli n punti materiali che costituiscono un sistema di punti).

Indichiamo con $\mathbf{R} = \sum_i \mathbf{F}_i$ la risultante delle forze e con

$$\mathbf{M}_O = \sum_i \mathbf{OP}_i \times \mathbf{F}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$$

il momento risultante delle forze rispetto al polo O . Se cambiano polo, si ha $\mathbf{M}_{O'} = \sum_i \mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i$ con $\mathbf{r}_i = \mathbf{OO}' + \mathbf{r}'_i$ per cui

$$\mathbf{M}_O = \sum_i (\mathbf{OO}' + \mathbf{r}'_i) \times \mathbf{F}_i = \mathbf{OO}' \times \sum_i \mathbf{F}_i + \sum_i \mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i = \mathbf{OO}' \times \mathbf{R} + \mathbf{M}_{O'}$$

Il momento dipende dal polo, a meno che non sia $\mathbf{R} = \mathbf{0}$.

Un'applicazione importante di questo risultato riguarda la coppia di forze. Si chiama così un sistema formato da due forze eguali e di verso opposto, *aventi diversa retta di azione*. La distanza tra le due rette d'azione è chiamata braccio della coppia, b . La risultante delle due forze è nulla e pertanto il momento \mathbf{M} non dipende dalla scelta del polo. \mathbf{M} è ortogonale al piano individuato dalle due rette di azione, ha verso determinato dalla solita regola del prodotto vettoriale e modulo bF , come si ottiene scegliendo ad esempio P_2 come polo (figura 4.40).

Le forze interne di un sistema di punti materiali, considerate nei paragrafi precedenti, costituiscono un insieme di coppie a braccio nullo ($\mathbf{F}_{i,j}$ e $\mathbf{F}_{j,i}$ sono la coppia generica); pertanto il loro momento risultante è nullo, rispetto a qualsiasi polo. Si dimostra così in modo diverso il risultato utilizzato nella dimostrazione del teorema del momento angolare (paragrafo 4.4, figura 4.16).

In generale, dato un qualsiasi sistema di forze, i vettori \mathbf{R} e \mathbf{M}_O non sono ortogonali tra loro e quindi non è possibile trovare due punti O e P tali che $\mathbf{M}_O = \mathbf{OP} \times \mathbf{R}$. Ciò vuol dire che \mathbf{M}_O è indipendente da \mathbf{R} e conferma che le equazioni (4.6) e (4.11) sono indipendenti.

Quest'ultima osservazione ci porta a concludere che un sistema di forze applicate in punti diversi non può in generale essere rappresentato solo dalla sua risultante. La situazione è diversa da quella considerata nel paragrafo 2.22 in cui le forze erano applicate allo stesso punto: in tal caso, nota la risultante, è noto il momento rispetto a qualsiasi polo, $\mathbf{M}_O = \mathbf{OP} \times \mathbf{R}$.

Dall'insieme delle considerazioni riportate si deduce il seguente risultato generale, che noi enunciamo soltanto: *dato un sistema di forze applicate in punti diversi e fissato un polo per i momenti, con il che sono noti \mathbf{R} e \mathbf{M}_O , questo sistema può essere sempre ridotto a una forza \mathbf{R} con retta d'azione passante per il polo (così il momento di \mathbf{R} rispetto al polo è nullo) e ad una*

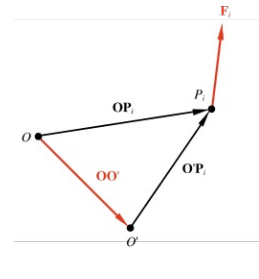


FIGURA 4.39

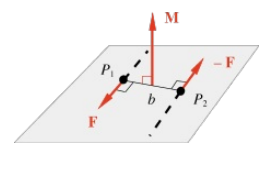


FIGURA 4.40

coppia di forze di momento \mathbf{M}_O (che ha risultante nulla e momento indipendente dal polo).

Vediamo adesso un sistema speciale di forze, per il quale risultante e momento risultante non sono indipendenti.

Sistema di forze parallele

Tale sistema è formato da forze aventi tutte la stessa direzione, individuata dal versore \mathbf{u} . Pertanto $\mathbf{F}_i = F_i \mathbf{u}$ e la risultante $\mathbf{R} = \sum_i \mathbf{F}_i = (\sum_i F_i) \mathbf{u}$ risulta parallela a \mathbf{u} . Il momento risultante è dato da

$$\mathbf{M} = \sum_i \mathbf{r}_i \times F_i \mathbf{u} = (\sum_i F_i \mathbf{r}_i) \times \mathbf{u}$$

ed è ortogonale a \mathbf{u} , ovvero a \mathbf{R} . Deve quindi essere possibile trovare un punto C , dove applicare \mathbf{R} , tale che

$$\mathbf{M} = \mathbf{OC} \times \mathbf{R} = \mathbf{r}_C \times \mathbf{R} .$$

Eguagliando le due espressioni scritte per \mathbf{M}

$$\begin{aligned} (\sum_i F_i \mathbf{r}_i) \times \mathbf{u} &= \mathbf{r}_C \times (\sum_i F_i) \mathbf{u} = (\sum_i F_i) \mathbf{r}_C \times \mathbf{u} \\ \Rightarrow \mathbf{r}_C = \mathbf{OC} &= \frac{\sum_i F_i \mathbf{r}_i}{\sum_i F_i} = \frac{F_1 \mathbf{r}_1 + F_2 \mathbf{r}_2 + \dots + F_n \mathbf{r}_n}{F_1 + F_2 + \dots + F_n} . \end{aligned} \quad (4.27)$$

Il punto C , individuato dal vettore \mathbf{r}_C , è chiamato *centro delle forze parallele*.

A differenza del caso generale di forze con direzioni qualsiasi, un sistema di forze parallele può sempre essere ridotto a una sola forza, pari alla risultante \mathbf{R} , applicata in C . Il risultato non dipende dalla scelta di O , ma solo dalla posizione relativa dei punti e può essere generalizzato a qualsiasi sistema di vettori paralleli.

Una interessante applicazione in tal senso è lo studio della traslazione di un sistema di punti, cioè del moto di un insieme di punti materiali che hanno ad ogni istante la stessa velocità \mathbf{v} . Le quantità di moto $m_1 \mathbf{v}$, ..., $m_n \mathbf{v}$ formano un sistema di vettori paralleli, il cui centro è individuato, secondo (4.27), da

$$\mathbf{r}_C = \frac{\sum_i m_i v \mathbf{r}_i}{\sum_i m_i v} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{\sum_i m_i} = \mathbf{r}_{CM} .$$

Il centro è il centro di massa, come potevamo aspettarci. La risultante delle quantità di moto è $m \mathbf{v}_{CM}$ e il momento è $\mathbf{OC} \times m \mathbf{v}_{CM} = \mathbf{r}_{CM} \times m \mathbf{v}_{CM}$, coincidente col momento angolare \mathbf{L} ; infatti dato che tutti i punti hanno la stessa velocità, che è anche quella del centro di massa, non c'è moto rispetto al centro di massa e, per il primo teorema di König (4.16), il momento angolare \mathbf{L} è pari a $\mathbf{L}_{CM} = \mathbf{r}_{CM} \times m \mathbf{v}_{CM}$.

Un sistema molto comune di forze parallele è quello delle forze peso applicate a un insieme di punti. Le singole forze sono pari a $m_i \mathbf{g}$ (modulo $m_i g$),

la risultante è $\mathbf{R} = m \mathbf{g}$ e il centro, secondo (4.27), è individuato dal vettore

$$\mathbf{r}_C = \frac{\sum_i m_i g \mathbf{r}_i}{\sum_i m_i g} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{\sum_i m_i} = \mathbf{r}_{CM} .$$

Il centro delle forze peso, detto anche centro di gravità o baricentro, coincide con il centro di massa. Osserviamo che per poter considerare le forze peso parallele l'estensione del sistema non deve essere molto grande, così da poter trascurare la curvatura della terra.

Il momento risultante delle forze peso è

$$\mathbf{M} = \mathbf{OC} \times m \mathbf{g} = \mathbf{r}_{CM} \times m \mathbf{g} . \quad (4.28)$$

Notiamo che il centro delle forze parallele non coincide sempre con il centro di massa; ciò avviene solo se le forze parallele (o più in generale i vettori paralleli) hanno modulo proporzionale alle masse, come la forza peso $m_i g$ (o la quantità di moto nella traslazione $m_i v$). Notiamo infine che il metodo di calcolo e il concetto stesso di centro perdono significato se la risultante del sistema di forze parallele è nulla; in tal caso di norma è diverso da zero il momento (una coppia di forze fornisce l'esempio più banale).

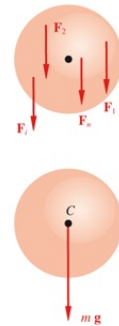


FIGURA 4.41

Momento assiale

Dato un vettore generico \mathbf{a} , che può essere sia una forza che una quantità di moto, calcoliamo il suo momento rispetto ai poli O e O' :

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{OP} \times \mathbf{a} , \quad \mathbf{M}_{O'} = \mathbf{O'P} \times \mathbf{a} .$$

Abbiamo dimostrato nell'appendice C che

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{OO}' \times \mathbf{a} + \mathbf{M}_{O'} .$$

Pertanto il vettore $\mathbf{M}_O - \mathbf{M}_{O'} = \mathbf{OO}' \times \mathbf{a}$ risulta ortogonale a \mathbf{OO}' e conseguentemente i momenti \mathbf{M}_O e $\mathbf{M}_{O'}$ devono avere la stessa componente lungo la direzione dell'asse \mathbf{OO}' . Tale componente si chiama *momento assiale del vettore \mathbf{a} rispetto all'asse \mathbf{OO}'* .

In conclusione, se si calcola il momento \mathbf{M} di un vettore rispetto ai vari punti di un dato asse, al variare del punto varia \mathbf{M} , però la sua componente lungo l'asse è indipendente da dove si sceglie il polo sull'asse.

Il risultato si estende al momento risultante di un sistema di vettori, come forze e quantità di moto.

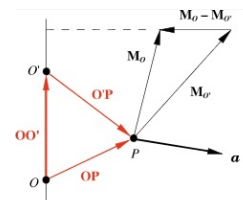


FIGURA 4.42

4.16 Massa variabile

Nel paragrafo 2.3 abbiamo accennato a situazioni in cui la massa del sistema, che noi assimiliamo ad un punto materiale, varia durante il moto. Possibili esempi sono: un nastro trasportatore, su cui vengono caricati o scaricati dei corpi, una scala mobile, un recipiente in moto contenente liquido e nel quale viene versato altro liquido, un veicolo in moto che brucia carburante.

La quantità di moto nel punto può subire una variazione sia perché cambia la velocità sia perché cambia la massa e la (2.2) va scritta esplicitamente

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathbf{v} \frac{dm}{dt} .$$

In particolare, se il moto deve avvenire a velocità costante, è pur sempre necessaria una forza in quanto varia la massa,

$$\mathbf{F} = \mathbf{v} \frac{dm}{dt} ,$$

e la conoscenza della legge di variazione della massa nel tempo permette di calcolare tale forza; sarà in generale necessaria anche un'altra forza per vincere l'attrito.

ESEMPIO 4.24

Sopra un corpo di massa m_0 in moto orizzontale con velocità v_0 viene depositato del materiale, in modo tale che la massa totale aumenti linearmente nel tempo. Calcolare, in assenza di attrito, la forza che bisogna applicare per mantenere costante la velocità. Se invece non agisce nessuna forza, determinare come varia la velocità del corpo.

Soluzione

La variazione lineare della massa si può scrivere $m(t) = m_0 + kt$ dove k è una costante, pari a dm/dt , che esprime la rapidità di aumento della massa. La forza necessaria per mantenere costante la velocità v_0 è

$$F = v_0 \frac{dm}{dt} = v_0 k$$

ed è a sua volta costante. Per una variazione generica di massa, la forza è direttamente proporzionale a dm/dt .

Nel caso in cui non agisca nessuna forza possiamo applicare la legge di conservazione della quantità di moto, tra l'istante iniziale e un istante generico:

$$m_0 v_0 = m(t) v(t) \Rightarrow v(t) = \frac{m_0 v_0}{m(t)} .$$

Questa formula vale per qualsiasi variazione di massa; nel caso particolare proposto

$$v(t) = \frac{m_0 v_0}{m_0 + kt} = \frac{v_0}{1 + \frac{k}{m_0} t} .$$

Si noti che abbiamo implicitamente ammesso che la massa via via aggiunta abbia quantità di moto orizzontale nulla; ad esempio essa viene depositata sul corpo cadendo verticalmente. Si osservi inoltre che in questo problema c'è variazione di velocità e quindi accelerazione, ma non c'è forza; perché?

Visualizza soluzione

Con la legge di conservazione della quantità di moto, che abbiamo applicato nella seconda parte dell'esempio 4.24, si tratta un caso classico, quello del razzo il cui motore brucia combustibile ed espelle gas di scarico ad alta velocità rispetto al razzo stesso, naturalmente nell'ipotesi che non ci siano forze esterne.

Siano m e v massa e velocità del sistema ad un certo istante del moto. In un istante successivo, a seguito dell'espulsione di una massa dm (positiva) con velocità v^* rispetto al razzo, abbiamo la massa $m - dm$ che si muove con velocità $v + dv$ e la massa dm che si muove, in un sistema inerziale, con velocità $v - v^*$ (c'è il segno negativo in quanto v^* è opposta a v). Conserviamo la quantità di moto:

$$mv = (m - dm)(v + dv) + dm(v - v^*) .$$

Trascuriamo i prodotti di due quantità infinitesime e otteniamo

$$m dv = v^* dm \Rightarrow dv = v^* \frac{dm}{m} .$$

Questa relazione dice come aumenta la velocità con la variazione di massa, dovuta alla combustione.

Il caso più semplice è quello di una velocità di combustione dm/dt costante, cioè $m(t) = m_0 - kt$. La variazione infinitesima di massa che si ricava da tale formula è $-kdt$, ma avendo noi considerato dm come il valore assoluto della massa espulsa, poniamo $dm = kdt$ e abbiamo

$$dv = v^* \frac{kdt}{m_0 - kt} \Rightarrow v(t) = v_0 + v^* \ln \frac{m_0}{m_0 - kt} .$$

Si ottiene subito anche l'accelerazione della massa $m(t)$:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{v^* k}{m_0 - kt} .$$

Il prodotto v^*k , che si misura in newton, viene chiamato *spinta* del motore del razzo.

Se il moto fosse verticale, diretto verso l'alto, si dovrebbe tener conto della forza peso, $-mg$. Alla relazione di conservazione, scritta $dp = m dv - v^* dm = 0$, bisognerebbe sostituire

$$dp = mdv - v^* dm = F dt = -mg dt$$

$$\Rightarrow dv = v^* \frac{dm}{m} - g dt \quad .$$

In sostanza alla soluzione precedente bisogna aggiungere un termine che rallenta il moto:

$$v(t) = v_0 + v^* \ln \frac{m_0}{m_0 - kt} - gt \quad .$$

ESEMPIO 4.25

Un razzo di massa $m_0 = 10^6$ kg brucia carburante alla velocità $k = 1.2 \cdot 10^3$ kg/s; i gas vengono espulsi con velocità $v^* = 3 \cdot 10^4$ m/s rispetto al razzo. Supponendo nulla la velocità iniziale, calcolare al tempo $t = 100$ s la velocità del razzo, in assenza e in presenza della forza di gravità. Stimare anche lo spazio percorso.

Soluzione

Applichiamo, nei due casi proposti, le formule trovate per $v(t)$:

$$\begin{array}{ll} \text{senza gravità} & v(100) = 3.84 \cdot 10^3 \text{ m/s} \approx 13800 \text{ km/h} \quad , \\ \text{con gravità} & v(100) = 2.86 \cdot 10^3 \text{ m/s} \approx 10300 \text{ km/h} \quad . \end{array}$$

La spinta del motore è $3.6 \cdot 10^7$ N, rispetto ad una forza peso iniziale di $9.8 \cdot 10^6$ N. Per stimare lo spazio percorso in 100 s, osserviamo che l'accelerazione iniziale vale $a(0) = 36$ m/s² e quella finale $a(100) = 40.9$ m/s², nel caso senza gravità. Con buona approssimazione il moto è uniformemente accelerato, con accelerazione media $a \approx 38.5$ m/s² e in 100 s viene percorsa una distanza di circa 190 km; lo stesso risultato si ottiene per via grafica, calcolando l'area sotto la curva $v(t)$. In presenza di gravità la distanza percorsa risulta di circa 140 km.

Visualizza soluzione

I dati numerici dell'esempio 4.25 rispecchiano, come ordine di grandezza, i valori tipici di razzi utilizzati per missioni spaziali. Risulta conveniente, per ottenere una grande spinta e raggiungere rapidamente una quota dell'ordine del centinaio di chilometri, avere un primo stadio in cui il carico utile è piccolo rispetto alla massa totale, costituita soprattutto da carburante. Il secondo stadio opera in condizioni più favorevoli (velocità iniziale elevata, circa 10^4 km/h, attrito atmosferico quasi nullo, relativamente piccola massa) e può collocarsi in un'orbita stabile rispetto alla terra oppure comunicare ad un eventuale terzo stadio la velocità necessaria, $\sim 4 \cdot 10^4$ km/h, per sfuggire all'attrazione terrestre (vedi capitolo 5).

L'interazione gravitazionale è la prima delle interazioni fondamentali, citate nel paragrafo 2.5, di cui trattiamo alcune caratteristiche. Gli sviluppi classici dell'interazione elettromagnetica costituiscono gran parte del materiale esposto nel secondo volume mentre, come abbiamo già detto, esula dai nostri obiettivi lo studio delle interazioni importanti a livello nucleare e subnucleare.

Dopo aver trovato l'espressione analitica della forza gravitazionale, introduciamo il concetto di campo gravitazionale e il metodo di calcolo legato al teorema di Gauss; si tratta di argomenti che verranno ripresi ed ampliati nel secondo volume.

Infine determiniamo esplicitamente l'orbita di un corpo soggetto alla forza gravitazionale di un altro corpo; si tratta di un caso particolare, ma molto importante, del moto di un sistema di due punti sottoposti ad una specifica interazione mutua.

5.1 La forza gravitazionale

Richiamiamo brevemente le conoscenze sul moto dei pianeti che si avevano prima di Newton (vissuto dal 1642 al 1727).

Agli inizi del 500 era stata avanzata da Copernico l'ipotesi eliocentrica: il sole, e non la terra, era il corpo celeste attorno al quale si svolgeva il moto dei pianeti. Successivamente, le posizioni assunte da questi nel tempo erano state oggetto di numerose e accurate misure da parte di Brahe (fine del 500), misure su cui si basò Keplero per formulare, tra il 1600 e il 1620, le sue tre leggi.

Prima legge

I pianeti percorrono orbite ellittiche intorno al sole che occupa uno dei fuochi dell'ellisse.

Seconda legge

La velocità areale con cui il raggio vettore che unisce il sole ad un pianeta descrive l'orbita è costante.

Terza legge

Il quadrato del periodo di rivoluzione di ogni pianeta è proporzionale al cubo del semiasse maggiore dell'ellisse: $T^2 = k r^3$ (i valori della costante k sono dati nella tabella del paragrafo 5.6).

Le tre leggi di Keplero danno una descrizione cinematica del moto dei pianeti. La spiegazione dinamica venne trovata da Newton nel 1666 e resa nota solamente nel 1687. Da essa prese corpo la *teoria della gravitazione universale*, i cui aspetti più semplici sono esaminati in questo capitolo.

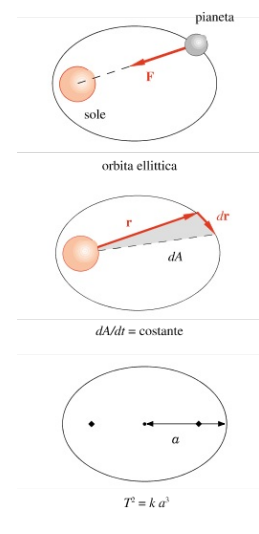


FIGURA 5.1

Diamo una traccia del ragionamento di Newton, inizialmente approssimato. Le orbite dei pianeti, pur essendo certamente ellittiche, sono molto prossime a circonferenze (si veda il paragrafo 5.6); immaginiamo allora che siano circolari. Se questo è vero e se la velocità areale è costante, il moto di un pianeta è circolare uniforme: infatti, ricordando dal paragrafo 2.23 che

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} ,$$

la costanza della velocità areale e di r dà $d\theta/dt = \text{costante}$.

La forza che agisce sul pianeta, permettendogli di percorrere una traiettoria circolare con velocità costante, deve essere esclusivamente centripeta (cioè senza componente tangenziale, figura 5.2) e si scrive

$$F = m \omega^2 r = m \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 r ,$$

essendo T il periodo di rivoluzione, m la massa e r il raggio dell'orbita del pianeta. Utilizziamo ora la terza legge di Keplero $T^2 = kr^3$, confondendo il raggio della circonferenza con il semiasse maggiore dell'ellisse, così che la forza diviene

$$F = \frac{4\pi^2}{k} \frac{m}{r^2} .$$

Questo è il primo risultato fondamentale: *la forza esercitata dal sole sui pianeti, che incurva la loro orbita, è inversamente proporzionale al quadrato della distanza dal sole.*

Consideriamo il sistema sole-terra: la forza esercitata dal sole sulla terra può quindi essere scritta

$$F_{S,T} = \frac{4\pi^2}{k_T} \frac{m_T}{r^2}$$

mentre la forza esercitata dalla terra sul sole ha l'espressione

$$F_{T,S} = \frac{4\pi^2}{k_S} \frac{m_S}{r^2}$$

eguale in modulo a $F_{S,T}$ per il *principio di azione e reazione*. Dall'eguaglianza si ottiene $m_T k_S = m_S k_T$. Definendo la costante

$$\gamma = \frac{4\pi^2}{m_T k_S} = \frac{4\pi^2}{m_S k_T}$$

abbiamo per il modulo della forza sole-terra

$$F = \gamma \frac{m_S m_T}{r^2} ;$$

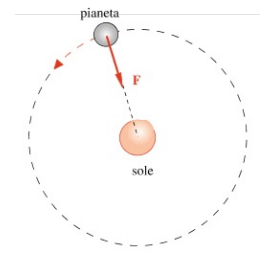


FIGURA 5.2

la direzione è quella della retta congiungente il sole alla terra.

La formula ottenuta è molto semplice ed è simmetrica nei due corpi; Newton ipotizzò che si trattasse di una formula universale ed enunciò la seguente *legge di gravitazione universale*: *date due masse qualsiasi, di dimensioni trascurabili rispetto alla distanza mutua, tra di esse agisce una forza attrattiva diretta lungo la retta congiungente le due masse, il cui modulo dipende direttamente dal prodotto delle masse e inversamente dal quadrato della distanza.*

La costante di proporzionalità γ è una costante universale, che non dipende dai valori delle masse e dalla geometria del sistema, ma è caratteristica dell'interazione gravitazionale.

In termini vettoriali (figura 5.3) l'espressione della forza gravitazionale che la massa m_1 esercita sulla massa m_2 è

$$\mathbf{F}_{1,2} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \mathbf{u}_{1,2} \quad (5.1)$$

La forza $\mathbf{F}_{2,1}$, subita da m_1 ad opera di m_2 , è $-\mathbf{F}_{1,2}$.

Innumerevoli verifiche sperimentali, soprattutto in campo astronomico, hanno confermato la correttezza dell'ipotesi.

La prima verifica è dovuta sempre a Newton. La (5.1) deve valere anche per un corpo di massa m posto sulla terra, che è un corpo sferico di massa m_T e raggio r_T : per la forza subita dal corpo scriviamo

$$F = \gamma \frac{m_T m}{r_T^2}$$

Questa formula è valida se si ammette che un corpo a simmetria sferica eserciti una forza come se la massa fosse tutta concentrata nel suo centro (vedi paragrafo 5.5); la prova di questa proprietà fu una delle cause che ritardò la pubblicazione della (5.1). D'altra parte $F = mg$ per cui

$$g = \gamma \frac{m_T}{r_T^2}$$

Però Newton non conosceva né il valore di γ né la massa della terra. Tuttavia, con riferimento al sistema terra-luna, si può scrivere

$$F_{T,L} = \gamma \frac{m_T m_L}{r_L^2} = m_L \omega_L^2 r_L$$

per la forza esercitata dalla terra sulla luna, centripeta per la luna; segue $\gamma m_T = \omega_L^2 r_L^3$ e dunque dal periodo di rotazione della luna attorno alla terra e dalla distanza terra-luna è possibile determinare il prodotto γm_T e quindi g .

Con i valori oggi noti l'accordo è perfetto. Al tempo di Newton il valore stimato per la distanza terra-luna era sbagliato e solo dopo una misurazione

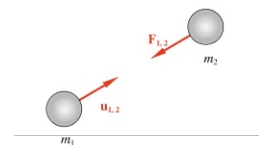


FIGURA 5.3

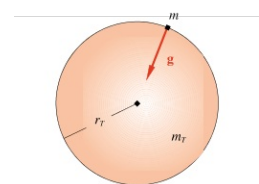


FIGURA 5.4

astronomica più precisa Newton poté trovare un buon accordo tra g e $\gamma m_T / r_T^2$ (altro fatto che ritardò la pubblicazione della teoria).

La misura diretta di γ e quindi la prima determinazione della massa della terra, venne effettuata da Cavendish nel 1798; egli si servì di una bilancia di torsione (vedi paragrafo 7.4) per misurare la forza di attrazione tra due masse sferiche, misura molto difficile essendo la forza dell'ordine di 10^{-9} N a causa del piccolo valore di γ . Le determinazioni più recenti danno

$$\gamma = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2} \quad , \quad m_T = 5.98 \cdot 10^{24} \text{ kg} \quad .$$

La (5.1) mostra che la forza gravitazionale è una forza centrale: viene così chiarito il perché della validità della seconda legge di Keplero (paragrafo 2.23). Vedremo più avanti come si spieghino la prima e la terza legge.

Si noti che solo conoscendo γ si possono determinare le masse dei corpi celesti, come vedremo nell'esempio 5.3 (paragrafo 5.4).

Sottolineiamo che, a differenza delle forze finora considerate, che si manifestano al contatto (macroscopico) tra i corpi, la forza gravitazionale si manifesta a distanza, senza che le masse vengano a contatto. In effetti tutte le interazioni fondamentali conosciute sono forze a distanza, che differiscono però nel raggio di azione (oltre che per altre proprietà): la forza gravitazionale e la forza tra cariche elettriche hanno la stessa dipendenza dalla distanza ($1/r^2$) e si dice che il loro *raggio di azione* è *infinito*, invece la forza forte e quella debole decrescono molto più rapidamente con la distanza e sono efficaci solo a livello subatomico.

Altre caratteristiche notevoli della forza gravitazionale tra due corpi sono costituite dall'indipendenza rispetto a diversi fattori, quali lo stato di moto relativo, la presenza di materia interposta e proprietà specifiche come stato di aggregazione e composizione chimica.

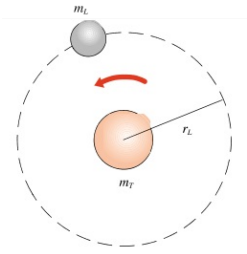


FIGURA 5.5

5.2 Massa inerziale e massa gravitazionale

La legge (5.1) esprime un particolare tipo di interazione esistente in natura il cui valore numerico dipende da γ , che è tipica dell'interazione, dalla geometria del sistema e da una caratteristica dei corpi che partecipano all'interazione, che abbiamo indicato con m e chiamiamo massa gravitazionale.

A priori non c'è nessuna ragione logica per cui la massa gravitazionale, legata a una particolare interazione, debba essere eguale alla massa inerziale che compare nella legge di Newton $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$; qui la grandezza m caratterizza l'inerzia del corpo, qualunque sia la forza agente, e sappiamo che essa può essere determinata con misure cinematiche indipendenti dalla forza peso.

Sulla superficie terrestre vale l'equazione

$$m_I g = \gamma \frac{m_{T,G} m_G}{r_T^2}$$

dove m_I e m_G sono le *masse inerziale e gravitazionale* del corpo attratto dalla terra, la cui massa gravitazionale è $m_{T,G}$. Ne ricaviamo

$$g = \gamma \frac{m_{T,G}}{r_T^2} \frac{m_G}{m_I} .$$

Sperimentalmente, in uno stesso luogo g è indipendente dai corpi, quindi per qualsiasi corpo il rapporto m_G/m_I è pari a una costante, indipendente dal corpo: le due masse m_I e m_G sono per lo meno proporzionali.

Poiché non c'è un modo diretto per misurare il rapporto m_G/m_I , l'ipotesi più semplice è supporre $m_G = m_I$; in pratica questo vuol dire che nell'esperimento di Cavendish i valori delle masse delle sfere sono quelli inerziali e che quindi il valore di γ si basa sull'ipotesi $m_G = m_I$.

Se il rapporto m_G/m_I dipendesse dai corpi, cioè ad esempio dalla sostanza da cui sono costituiti, sarebbe possibile metterlo in evidenza col metodo seguente. Nel paragrafo 3.6 si è visto che in un sistema di riferimento terrestre (non inerziale) un filo a piombo non si dispone parallelamente alla forza di gravità (dipendente da m_G) in quanto risente della forza centrifuga (forza apparente d'inerzia, dipendente da m_I); la deviazione è piccola, ma misurabile. Due fili con appesi due corpi di materiale diverso potrebbero disporsi secondo angoli diversi, se per essi il rapporto m_G/m_I fosse diverso. L'idea e la maniera pratica per mettere in evidenza un eventuale effetto sono dovuti a Eötvös (seconda metà dell'ottocento); l'esperimento non diede risultato, nel senso che l'eguaglianza $m_G/m_I = 1$ fu trovata vera per tutti i materiali provati entro 10^{-6} . Misure moderne, che si sono servite di questo come di altri metodi, hanno verificato l'eguaglianza entro 10^{-12} .

5.3 Campo gravitazionale

La struttura della legge (5.1) si presta a una considerazione interessante; possiamo infatti scrivere:

$$\mathbf{F}_{1,2} = \left(-\gamma \frac{m_1}{r^2} \mathbf{u}_{1,2} \right) m_2 \quad , \quad \mathbf{F}_{2,1} = \left(-\gamma \frac{m_2}{r^2} \mathbf{u}_{2,1} \right) m_1 \quad ,$$

e dire che la forza gravitazionale $\mathbf{F}_{1,2}$ esercitata dal corpo di massa m_1 sull'altro di massa m_2 è pari al prodotto di un vettore, che non dipende da m_2 , ma solo da m_1 e dalla distanza da m_1 , per la massa m_2 sottoposta all'azione di m_1 ; viceversa nel caso di $\mathbf{F}_{2,1}$.

Il vettore tra parentesi si chiama *campo gravitazionale* \mathbf{G} generato dalla massa sorgente del campo nel punto P distante r :

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_1 &= -\gamma \frac{m_1}{r^2} \mathbf{u}_1 \quad , \quad \mathbf{F}_{1,2} = m_2 \mathbf{G}_1 \quad , \\ \mathbf{G}_2 &= -\gamma \frac{m_2}{r^2} \mathbf{u}_2 \quad , \quad \mathbf{F}_{2,1} = m_1 \mathbf{G}_2 \quad ; \end{aligned} \quad (5.2)$$

\mathbf{u}_i è un versore uscente radialmente dal punto in cui si trova la massa sorgente m_i (vedi figura 5.6). \mathbf{G}_1 è diverso da \mathbf{G}_2 , anche in modulo, però $\mathbf{F}_{1,2} = -\mathbf{F}_{2,1}$.

Le formule (5.2) sono valide per masse puntiformi, o a simmetria sferica; in tal caso anche il campo è a simmetria sferica, cioè è centrale, ed è sempre rivolto verso la sorgente.

Il campo gravitazionale totale \mathbf{G} in un punto P (figura 5.7) dovuto a più masse puntiformi $m_1, \dots, m_i, \dots, m_n$ si ottiene sommando vettorialmente i vari contributi

$$\mathbf{G}_i = -\gamma \frac{m_i}{r_i^2} \mathbf{u}_i$$

delle singole masse:

$$\mathbf{G}(P) = \sum_1^n \mathbf{G}_i = \sum_1^n \left(-\gamma \frac{m_i}{r_i^2} \mathbf{u}_i \right) . \quad (5.3)$$

Il campo gravitazionale \mathbf{G} in un punto P (figura 5.8) dovuto a una massa m continua contenuta in una regione limitata, come il corpo C della figura, si calcola in modo analogo: si divide la massa m in parti infinitesime dm , ognuna delle quali genera in P un campo

$$d\mathbf{G} = -\gamma \frac{dm}{r^2} \mathbf{u} \quad ,$$

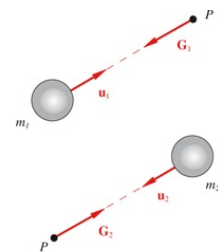


FIGURA 5.6

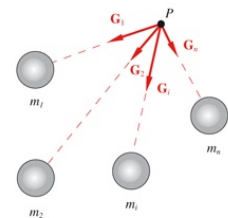


FIGURA 5.7

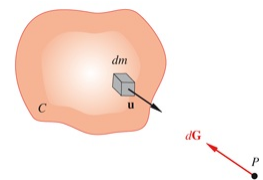


FIGURA 5.8

e si integra vettorialmente su tutti i contributi :

$$\mathbf{G}(P) = \int_C -\gamma \frac{dm}{r^2} \mathbf{u} = \int_V -\gamma \rho \frac{dV}{r^2} \mathbf{u} . \quad (5.4)$$

Nella (5.4) abbiamo usato la relazione $dm = \rho dV$, ovvero la definizione di densità ρ

come rapporto tra una massa infinitesima e il volume che tale massa occupa.

Questa nozione sarà precisata ed estesa nel paragrafo 6.3.

La forza tra due corpi estesi C_1 e C_2 di masse m_1 e m_2 si ottiene calcolando in ciascun elemento di m_2 la forza $d\mathbf{F}_{1,2} = dm_2 \mathbf{G}_1$ esercitata dal corpo di massa m_1 , con \mathbf{G}_1 dato da un'espressione come (5.4) e integrando vettorialmente su tutto C_2 :

$$\mathbf{F}_{1,2} = \int_{C_2} \mathbf{G}_1 dm_2 . \quad (5.5)$$

La nozione di campo è utile concettualmente: per esempio attraverso di esso si esprime agevolmente una proprietà notevole come il teorema di Gauss (paragrafo 5.5) oppure si eseguono più chiaramente calcoli complessi quando le masse sono estese; però non appare indispensabile.

Guardando l'argomento in modo un po' diverso, ci si può chiedere se il campo \mathbf{G} è una grandezza che ha un significato indipendente da m_1 e m_2 .

Cominciando da m_2 , se non si mette la massa m_2 nel campo di m_1 e non si misura $\mathbf{F}_{1,2}$, ha senso parlare di \mathbf{G}_1 ? La risposta può essere in un certo senso affermativa: la presenza di m_1 modifica lo spazio circostante indipendentemente da m_2 , come si verifica osservando che la traiettoria di raggi luminosi che attraversano un campo gravitazionale risulta incurvata, in accordo con le previsioni della teoria della *relatività generale* (vedi paragrafo 5.7). La prima osservazione a conferma di questi fatti venne effettuata nel 1919, durante un'eclisse di sole. Nella figura 5.9, che non è in scala, è mostrata una particolare configurazione del sistema terra-sole e una stella, che in tale situazione si trova per un osservatore terrestre dietro il sole (dato che la terra ruota intorno al sole, in altre configurazioni la stella è visibile e quindi ben localizzata). Se la propagazione della luce fosse sempre rettilinea la stella non dovrebbe essere visibile, se invece i raggi luminosi sono incurvati dal campo gravitazionale del sole essi possono raggiungere la terra. In condizioni normali il fenomeno non si può osservare perché il sole è troppo luminoso; però in caso di eclissi di sole (con la luna cioè che intercetta i raggi solari) l'osservazione diventa possibile e in effetti ha dato risultato positivo.

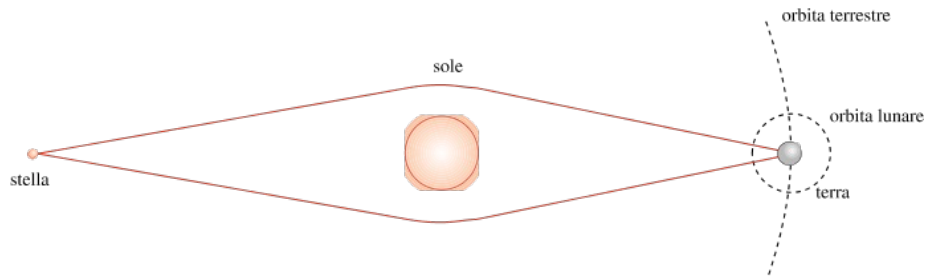


FIGURA 5.9

Può esistere un campo \mathbf{G} senza sorgente m ? Sarebbe possibile in questa situazione: la massa m in opportune condizioni variabili nel tempo genera un campo variabile che si propaga; si potrebbe allora rivelare \mathbf{G} molto lontano da m e molto dopo l'emissione, quando magari m non esiste più. Un fenomeno analogo, che coinvolge il campo elettromagnetico, si verifica per esempio nell'esplosione di una supernova, che avviene con notevole emissione di onde elettromagnetiche (anche luminose). Queste onde si propagano e vengono rivelate sulla terra quando oramai la sorgente ha cessato di esistere. Ci sono prove indirette dell'esistenza di onde gravitazionali, cioè di campi gravitazionali che si propagano, però sulla terra fino ad ora non c'è stata nessuna osservazione sicura dell'arrivo di onde gravitazionali.

In conclusione, l'introduzione della nozione di campo gravitazionale appare giustificata. L'utilità concettuale e pratica di questo modo di procedere risulterà chiara studiandone l'applicazione ai fenomeni elettrici e magnetici.

5.4 Energia potenziale gravitazionale

Dimostriamo direttamente che la forza gravitazionale è conservativa; in effetti sappiamo già che è così in quanto si tratta di una forza centrale, però il calcolo ci serve per trovare l'espressione dell'energia potenziale.

In figura 5.10 è mostrata la traiettoria di una massa m_2 nel campo di una massa m_1 . Il lavoro compiuto durante lo spostamento $d\mathbf{s}$ è

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \mathbf{u}_1 \cdot d\mathbf{s} \quad ;$$

il prodotto scalare $\mathbf{u}_1 \cdot d\mathbf{s}$, figura 5.11, è pari alla proiezione di $d\mathbf{s}$ su \mathbf{u}_1 e quindi a dr , variazione del modulo della distanza tra m_1 e m_2 a seguito dello spostamento $d\mathbf{s}$. Pertanto

$$\begin{aligned} W &= \int_A^B dW = \int_{r_A}^{r_B} -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} dr = -\gamma m_1 m_2 \left(-\frac{1}{r_B} + \frac{1}{r_A} \right) = \\ &= -\gamma \frac{m_1 m_2}{r_A} - \left(-\gamma \frac{m_1 m_2}{r_B} \right) = E_{p,A} - E_{p,B} \quad . \end{aligned}$$

Verifichiamo così che il lavoro non dipende dalla traiettoria, ma solo dalle posizioni iniziali e finali, e che l'energia potenziale ha l'espressione

$$E_p = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r} \quad . \quad (5.6)$$

Il segno negativo deriva da quello di (5.1) e significa che la forza gravitazionale è attrattiva. Possiamo giustificarlo anche così: per due masse molto distanti $r \approx \infty$ per cui $F = 0$, $E_p = 0$; a rigore E_p è definita a meno di una costante additiva, però è ragionevole che a distanza infinita, quando cioè non c'è interazione, l'energia potenziale sia nulla e quindi la costante, che ha il significato di valore dell'energia potenziale per $r = \infty$, si assume nulla. Quando m_2 si avvicina a m_1 la forza gravitazionale compie un lavoro positivo e m_2 acquista energia cinetica; siccome la forza è conservativa, l'energia meccanica, somma dell'energia cinetica e dell'energia gravitazionale, resta costante e quindi se E_k aumenta E_p deve diminuire; essendo nulla per distanza infinita, E_p deve essere negativa per distanze finite.

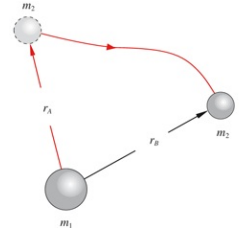


FIGURA 5.10

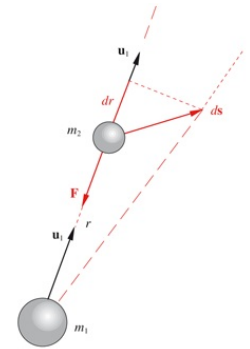


FIGURA 5.11

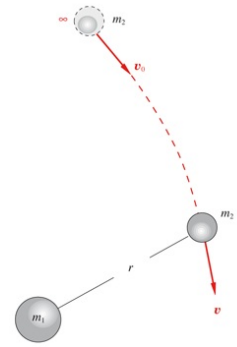


FIGURA 5.12
(Esempio 5.1)

Esempio 5.1

Due masse m_1 e m_2 si trovano a distanza molto grande, praticamente infinita; la massa m_1 è fissa, la massa m_2 ha energia cinetica $E_{k, \text{in}} = \frac{1}{2} m_2 v_0^2$. Calcolare la velocità della massa m_2 quando è a distanza r da m_1 .

Soluzione

L'energia meccanica iniziale del sistema delle due masse è $E_m = E_{k, \text{in}} = \frac{1}{2} m_2 v_0^2$ mentre quando le masse distano r tra loro l'energia meccanica vale

$$E_m = \frac{1}{2} m_2 v^2 - \gamma \frac{m_1 m_2}{r} .$$

Eguagliando le due espressioni si trova

$$v^2 = v_0^2 + 2 \gamma \frac{m_1}{r} .$$

Il risultato è vero qualunque sia la traiettoria seguita da m_2 nel campo di m_1 .

Visualizza soluzione

Esempio 5.2

Calcolare la velocità di fuga di un corpo dalla terra.

Soluzione

Nella condizione iniziale abbiamo un corpo di massa m sulla superficie terrestre, con energia cinetica $E_{k, \text{in}} = \frac{1}{2} m v_0^2$. Alla fine si vuole che il corpo sia a distanza infinita con velocità $v_0 \geq 0$.

Scriviamo la conservazione dell'energia meccanica:

$$\frac{1}{2} m v^2 - \gamma \frac{m m_T}{r_T} = \frac{1}{2} m v_0^2$$

per cui

$$v^2 = v_0^2 + 2 \gamma \frac{m_T}{r_T} .$$

Si vede che il problema è l'inverso del precedente. Il valore limite (inferiore) di v , detto v_F , *velocità di fuga*, corrisponde a $v_0 = 0$: il corpo arriva a distanza infinita dalla terra con velocità nulla. Si trova

$$v_F = \sqrt{2 \gamma \frac{m_T}{r_T}} ,$$

indipendente dalla massa del corpo. Poiché $r_T = 6.37 \cdot 10^6$ m, inserendo i valori di γ e m_T dati nel paragrafo 5.1, abbiamo

$$v_F = 11.2 \text{ km/s} \cong 4 \cdot 10^4 \text{ km/h} .$$

La stessa formula vale per qualsiasi altro pianeta, con gli appropriati valori di massa e raggio. Nel caso della luna si trova, per esempio, $v_F = 2.4 \text{ km/s} \cong 8.5 \cdot 10^3 \text{ km/h}$. Per i pianeti del sistema solare il maggior valore della velocità di fuga si ha su Giove, dove $v_F = 60 \text{ km/s} = 21.6 \cdot 10^4 \text{ km/h}$.

Visualizza soluzione

Esempio 5.3

Un satellite di massa m descrive un'orbita circolare attorno ad un pianeta di massa M ; il raggio dell'orbita è r e il periodo di rivoluzione è T . Calcolare il valore della massa M del pianeta e l'energia del satellite.

Soluzione

La legge di Newton $\mathbf{F} = m \mathbf{a}$ applicata al satellite si scrive

$$\gamma \frac{m M}{r^2} = m \omega^2 r ;$$

Al posto di ω^2 si sostituisce $4\pi^2 / T^2$ e si trova

$$M = \frac{4\pi^2}{T^2} \frac{r^3}{\gamma} .$$

Vediamo che, noto il valore di γ , la massa del pianeta si può dedurre da misure geometriche e cinematiche sul moto del satellite; il risultato non dipende dalla massa del satellite. L'energia meccanica del satellite è

$$E_m = \frac{1}{2} m v^2 - \gamma \frac{m M}{r} .$$

Riprendendo la legge del moto

$$\gamma \frac{m M}{r^2} = m \omega^2 r = m \frac{v^2}{r}$$

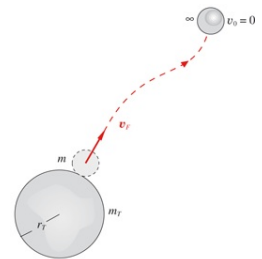


FIGURA 5.13
(Esempio 5.2)

possiamo esprimere l'energia cinetica in funzione di r :

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \gamma \frac{m M}{r} \quad ;$$

troviamo quindi che l'energia totale risulta

$$E_m = -\gamma \frac{m M}{2 r} < 0 \quad .$$

Il valore è negativo in quanto il modulo dell'energia potenziale è maggiore dell'energia cinetica; ciò significa che il satellite non può sfuggire all'attrazione del pianeta e si dice che il sistema è legato, con energia di legame E_m .

Visualizza soluzione

Esempio 5.4

Un satellite artificiale di massa $m = 10^3$ kg descrive un'orbita circolare intorno alla terra. Calcolare, in funzione del raggio r dell'orbita, la velocità, il periodo, l'energia meccanica, la forza gravitazionale, in particolare per r poco maggiore del raggio della terra r_T . Estendere i calcoli al caso di un satellite geostazionario (cioè con periodo eguale a 24 ore). Determinare infine il lavoro necessario per portare il satellite da un'orbita di raggio r_1 a un'orbita di raggio $r_2 > r_1$. Ricordiamo che $m_T = 5.98 \cdot 10^{24}$ kg, $r_T = 6.38 \cdot 10^6$ m, $\gamma = 6.67 \cdot 10^{-11}$ m³/kgs².

Soluzione

Le formule da utilizzare, tutte già viste, sono:

$$F = \gamma \frac{m m_T}{r^2} = m \omega^2 r = m \frac{v^2}{r}$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\gamma \frac{m_T}{r}} \quad , \quad T = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{\gamma m_T}}$$

$$E_m = -\gamma \frac{m m_T}{2r} \quad .$$

Numericamente, $\gamma m_T = 3.99 \cdot 10^{14}$ m³/s² e quindi:

$$v = \frac{2 \cdot 10^7}{\sqrt{r}} \text{ m/s} \quad , \quad T = 3.14 \cdot 10^{-7} r^{3/2} \text{ s}$$

(con riferimento all'esempio 5.3 $T^2 = k r^3$, $k = 9.87 \cdot 10^{-14}$ s²/m³).

Questi risultati non dipendono dalla massa del satellite, mentre ne dipendono forza ed energia meccanica:

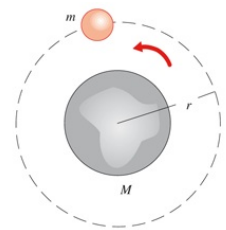


FIGURA 5.14
(Esempio 5.3)

$$F = 3.99 \cdot 10^{14} \frac{m}{r^2} = \frac{3.99 \cdot 10^{17}}{r^2} \text{ N} ,$$

$$E_m = -2 \cdot 10^{14} \frac{m}{r} = \frac{-2 \cdot 10^{17}}{r} \text{ J} .$$

Per un'orbita con raggio di poco superiore al raggio terrestre, ad esempio per un satellite con distanza dalla superficie terrestre dell'ordine di 100 km, poniamo in prima approssimazione $r = r_T$ e troviamo, ricordando che $g = \gamma m_T/r^2$:

$$v = \sqrt{g r_T} = 7.91 \cdot 10^3 \text{ m/s} \approx 28500 \text{ km/h} ,$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r_T}{g}} = 5.05 \cdot 10^3 \text{ s} \approx 84 \text{ minuti} ,$$

$$F = mg = 9.81 \cdot 10^3 \text{ N} ,$$

$$E_m = -\frac{1}{2} mgr_T = -3.14 \cdot 10^{10} \text{ J} .$$

Nel caso del satellite geostazionario il periodo è fissato, $T = 24 \text{ ore} = 8.64 \cdot 10^4 \text{ s}$ e si deduce il raggio dell'orbita

$$r = \left(\frac{T}{3.14 \cdot 10^{-7}} \right)^{2/3} = 4.23 \cdot 10^7 \text{ m} = 42300 \text{ km} ,$$

cioè un'altezza di circa 36000 km dalla superficie terrestre. Infine, nel passaggio da un'orbita ad un'altra l'energia meccanica del satellite varia e quindi il lavoro necessario, fornito da una forza non conservativa, è

$$W = \Delta E_m = E_{m,2} - E_{m,1} = \gamma \frac{m m_T}{2} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = 2 \cdot 10^{17} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \text{ J} .$$

Vogliamo riassumere, per concludere, la situazione cinematica e dinamica del satellite in orbita circolare. L'accelerazione, soltanto centripeta e dovuta alla forza di gravità, vale $g(r) = \gamma m_T/r^2$; essa forma un angolo di $\pi/2$ con la velocità; entrambe, velocità e accelerazione, sono costanti lungo l'orbita. Si può dire che il satellite è in caduta libera, ma a causa delle condizioni iniziali l'orbita di equilibrio è circolare (caduta continua, ma senza mai avvicinarsi alla terra). Qualsiasi oggetto all'interno del satellite risente della stessa accelerazione e si ha quella situazione, detta impropriamente di assenza di peso, già descritta nell'esempio 3.6.

Visualizza soluzione

Potenziale gravitazionale

Anche a (5.6) si può applicare il ragionamento del paragrafo 5.3, che introduce il concetto di *campo gravitazionale*. Precisamente l'energia potenziale

si può scrivere $E_p = m_2 V_1$ ponendo

$$V_1 = \frac{E_p}{m_2} = -\gamma \frac{m_1}{r} ; \quad (5.7)$$

la grandezza $V_1(r)$ si chiama *potenziale gravitazionale* del campo prodotto da m_1 . Chiaramente la situazione è simmetrica nelle masse: si può scrivere anche $E_p = m_1 V_2$ con $V_2 = -\gamma m_2 / r$, potenziale gravitazionale del campo prodotto da m_2 .

Il lavoro per uno spostamento generico della massa m_2 dalla posizione A alla posizione B nel campo di m_1 è

$$W = -\Delta E_p = -m_2 \Delta V_1 = -m_2 (V_{1,B} - V_{1,A}).$$

Tra campo e potenziale esiste la relazione fondamentale

$$\mathbf{G} = -\text{grad } V = -\nabla V , \quad (5.8)$$

che si ricava da (2.20) inserendo (5.1) e (5.6) e dividendo entrambi i membri per m_2 o per m_1 .

Anche al potenziale si applica quanto visto per il campo gravitazionale in presenza di più masse puntiformi o di masse estese: il potenziale si calcola come somma dei vari contributi, finiti o infinitesimi. È bene notare che si tratta di una somma di grandezze scalari (negative) e non vettoriali, come avviene per \mathbf{G} ; quindi l'operazione può risultare più facile da un punto di vista analitico. Calcolato il potenziale di una distribuzione di masse, il campo si ottiene tramite (5.8). Non approfondiamo ulteriormente l'argomento, dato che esso verrà ripreso per il campo e il potenziale generati da cariche elettriche.

Grafici dell'energia

L'energia totale di un sistema di due masse può assumere valore positivo, nullo o negativo a seconda che sia

$$E_k > |E_p| , \quad E_k = |E_p| , \quad E_k < |E_p| .$$

Nei grafici della figura 5.15 sono rappresentati i tre casi: r è la distanza mutua, E l'energia totale costante; la doppia freccia indica la differenza $E - E_p = E_k$ per un particolare valore r . La curva continua mostra $E_p = -\gamma m_1 m_2 / r$ ed è eguale nei tre casi. Vediamo che nei primi due casi non ci sono limiti, mentre nel terzo caso r è limitato ($r \leq r_0$, altrimenti risulterebbe $E_p > E$).

Correggeremo parzialmente queste conclusioni nel paragrafo 5.6 dove calcoleremo un'espressione esplicita per l'energia totale del sistema di due masse, valida

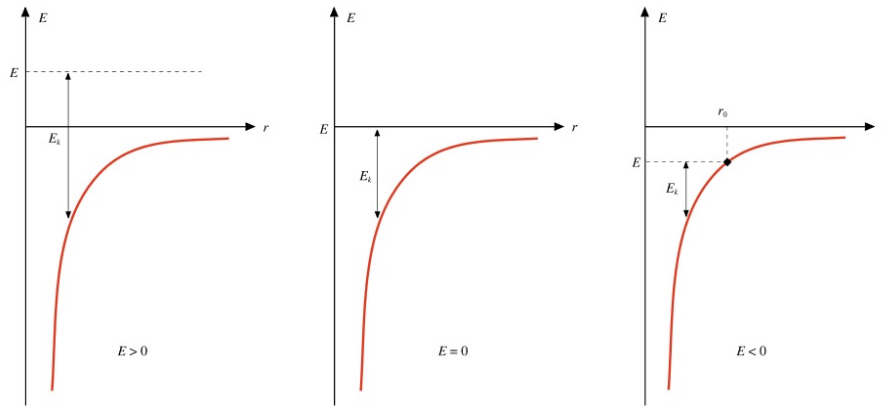


FIGURA 5.15

anche per orbite non circolari. Inoltre vedremo che:

se $E > 0$ l'orbita è iperbolica

se $E = 0$ l'orbita è parabolica

se $E < 0$ l'orbita è ellittica .

Il caso trattato nell'esempio 5.3 appartiene all'ultima categoria: l'energia totale è negativa, l'orbita è limitata.

La situazione descritta per le orbite è mostrata in figura 5.16. In P c'è la massa m_2 con velocità \mathbf{v} . Sono disegnate una possibile traiettoria iperbolica, l'unica traiettoria parabolica e tre possibili traiettorie ellittiche (la centrale in realtà è circolare). Controllando v si può scegliere la traiettoria voluta, come avviene con i satelliti artificiali.

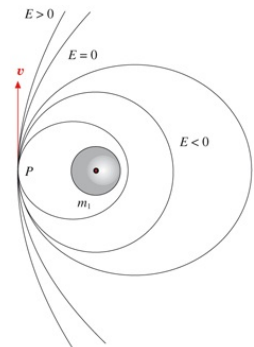


FIGURA 5.16

5.5 Teorema di Gauss. Distribuzione sferica di massa

Consideriamo un certo numero di masse e una superficie geometrica chiusa che ne racchiude n (nella figura 5.17 le masse sono sette e $n = 4$); in ogni punto della superficie determiniamo \mathbf{G} , che è dovuto a tutte le masse presenti (interne ed esterne) e calcoliamo la quantità scalare

$$d\Phi = \mathbf{G} \cdot \mathbf{u}_N dS \quad ;$$

\mathbf{u}_N è il vettore normale alla superficie, che assumiamo orientato verso l'interno, e dS è l'elemento di superficie intorno al punto in cui è calcolato \mathbf{G} . L'integrale esteso a tutta la superficie chiusa

$$\Phi = \oint d\Phi = \oint \mathbf{G} \cdot \mathbf{u}_N dS$$

si chiama *flusso del vettore \mathbf{G} attraverso la superficie chiusa S* .

Il *teorema di Gauss*, che enunciamo senza dimostrazione, afferma che il *flusso del campo gravitazionale attraverso una superficie chiusa è proporzionale alla somma delle masse interne alla superficie*:

$$\Phi = 4\pi\gamma \sum_1^n m_i \quad . \quad (5.9)$$

Nella dimostrazione è essenziale il fatto che il campo gravitazionale di una massa puntiforme è una funzione della distanza del tipo $1/r^2$: il *teorema di Gauss* cioè vale esclusivamente per i campi vettoriali che dipendono inversamente dal quadrato della distanza. In tal senso dire che per un determinato campo vale il teorema di Gauss è equivalente a dire che la sua intensità diminuisce come $1/r^2$.

Il teorema di Gauss, dimostrato agli inizi dell'ottocento, permette di verificare facilmente che il campo di una distribuzione sferica di massa è pari a quello di una eguale massa puntiforme posta nel centro della distribuzione.

Cominciamo con una massa m distribuita su una superficie sferica di raggio R in modo uniforme (cioè la massa per unità di area è costante ovunque). Nel punto P (figura 5.18) il campo \mathbf{G} è radiale: esso è dovuto alla somma di contributi simmetrici, eguali in modulo, che danno risultante radiale; se così non fosse, vorrebbe dire che la distribuzione di massa non è uniforme. In qualsiasi altro punto che abbia dal centro la stessa distanza di P la situazione è la stessa: il campo \mathbf{G} è radiale e il suo modulo dipende solo da r ,

$$\mathbf{G} = -G(r) \mathbf{u}_r \quad .$$

Per calcolare $G(r)$ utilizziamo il teorema di Gauss (5.9): come superficie di

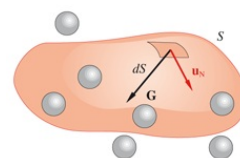


FIGURA 5.17

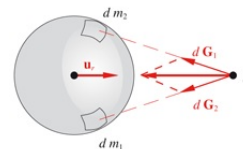


FIGURA 5.18

integrazione prendiamo una superficie sferica S concentrica a m e di raggio $r \geq R$, nei cui punti il campo ha lo stesso valore; la massa contenuta all'interno è appunto m . Abbiamo:

$$\Phi = \oint -G(r) \mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_N dS = G(r) \oint dS = 4\pi r^2 G(r) = 4\pi \gamma m$$

$$\Rightarrow G(r) = \gamma \frac{m}{r^2} \quad , \quad (5.10)$$

come se m fosse concentrata nel centro. Il risultato vale per $r \geq R$; all'interno, per $r < R$, qualsiasi superficie di integrazione si consideri, questa non contiene massa e dunque il flusso attraverso di essa è nullo; deve quindi essere $G = 0$ ovunque.

In figura 5.19 è rappresentato il modulo del campo gravitazionale di una massa distribuita uniformemente su una superficie sferica; si osservi che il campo è discontinuo per $r = R$, cioè nell'attraversare la massa.

Se m è distribuita uniformemente in tutto il volume sferico, all'esterno il discorso è lo stesso:

$$G(r) = \gamma \frac{m}{r^2} \quad , \quad r \geq R \quad . \quad (5.11)$$

All'interno invece cambia tutto, G non è più nullo; resta però vero l'argomento di simmetria radiale. All'interno di una superficie sferica S_1 di raggio $r \leq R$, figura 5.20, c'è la massa $m(r)$ minore di m ; dato che la distribuzione di massa è uniforme (massa per unità di volume eguale ovunque), il rapporto tra $m(r)$ e m è eguale al rapporto tra i volumi occupati ovvero a r^3/R^3 , per cui possiamo scrivere

$$m(r) = m \frac{r^3}{R^3} \quad .$$

Applichiamo (5.9):

$$\Phi(r) = 4\pi r^2 G(r) = 4\pi \gamma m(r) = 4\pi \gamma m \frac{r^3}{R^3}$$

$$\Rightarrow G(r) = \gamma \frac{m}{R^3} r \quad . \quad (5.12)$$

Il campo all'interno di una sfera omogenea cresce linearmente con la distanza dal centro; il grafico di $G(r)$ è mostrato in figura 5.20. Questo caso è una dimostrazione di come una massa estesa possa generare un campo che non ha l'andamento $1/r^2$, tipico della massa puntiforme. Osserviamo infine da (5.12) che una massa puntiforme m_p subisce all'interno della sfera omogenea la forza

$$\mathbf{F} = m_p \mathbf{G} = -\gamma \frac{m m_p}{R^3} \mathbf{r} = -k \mathbf{r} \quad ,$$

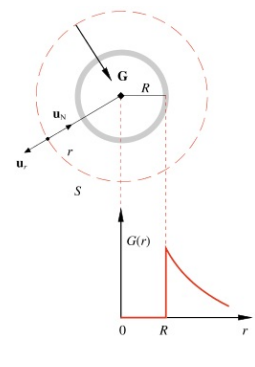


FIGURA 5.19

cioè una forza di tipo elastico. Se lungo un diametro si scavasse un foro e si abbandonasse sulla superficie un punto materiale con velocità nulla, questo descriverebbe un moto armonico all'interno del foro, con ampiezza pari al raggio R .

Riassumendo, da (5.10) e (5.11) si vede che il campo gravitazionale in un punto P all'esterno di una distribuzione sferica uniforme di massa in ogni caso vale

$$\mathbf{G}(r) = -\gamma \frac{m}{r^2} \mathbf{u}_r, \quad (5.13)$$

indipendente, tra l'altro, dal raggio della distribuzione. Questo è anche, in base a (5.2), il campo gravitazionale in P prodotto da una massa m concentrata nel centro della distribuzione; la figura 5.21 mostra l'equivalenza tra le due situazioni.

Come conseguenza di ciò dimostriamo che la forza gravitazionale tra due sfere omogenee di masse m_1 e m_2 , poste a una distanza r tra i loro centri O_1 e O_2 , è eguale alla forza gravitazionale tra due masse puntiformi m_1 e m_2 distanti r .

Ciascun elemento dm_2 della seconda sfera è soggetto a una forza, esercitata dalla prima sfera, che equivale a quella di una massa puntiforme m_1 posta in O_1 ; quindi, secondo (5.2) e (5.13),

$$d\mathbf{F}_{1,2} = dm_2 \mathbf{G}_1 = -\gamma \frac{m_1 dm_2}{r_1^2} \mathbf{u}_1,$$

essendo \mathbf{G}_1 il campo della prima sfera e r_1 la distanza della massa dm_2 da O_1 . Per calcolare la risultante di tutte queste forze $d\mathbf{F}_{1,2}$ osserviamo che, in base al principio di azione e reazione, dm_2 esercita in O_1 una forza eguale e contraria,

$$d\mathbf{F}_{2,1} = -d\mathbf{F}_{1,2} = \gamma \frac{m_1 dm_2}{r_1^2} \mathbf{u}_1,$$

e che, per le proprietà appena viste, l'effetto risultante in O_1 è quello di una massa m_2 puntiforme posta in O_2 . Quindi la forza risultante è, in modulo, $\gamma m_1 m_2 / r^2$. I passi del procedimento sono visualizzati in figura 5.22, che va letta in senso orario partendo da sinistra, in alto.

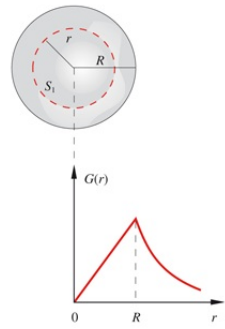


FIGURA 5.20

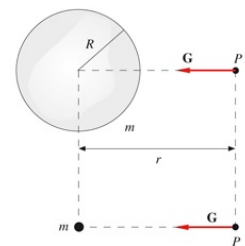


FIGURA 5.21

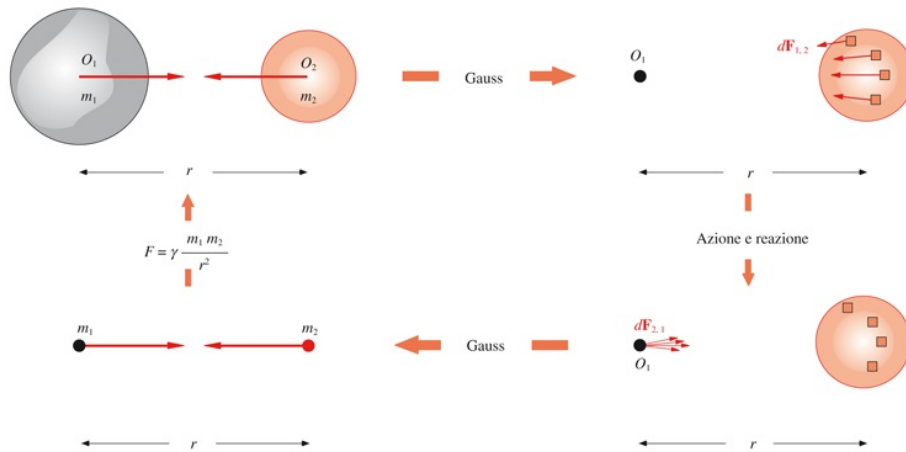


FIGURA 5.22

È importante mettere in evidenza che il risultato è vero anche se i raggi delle due sfere sono confrontabili con la distanza tra i centri, cioè anche se le sfere sono molto vicine o a contatto. Inoltre si può rilasciare l'ipotesi che le sfere siano omogenee, purché la distribuzione di massa vari solo col raggio in modo da conservare la simmetria sferica in ciascuno dei gusci sferici di cui si può pensare composta la sfera.

Le proprietà dimostrate in questo paragrafo discendono dal teorema di Gauss e pertanto valgono per tutti i campi il cui modulo varia come $1/r^2$. In particolare esse sono valide per il campo elettrostatico, come si vedrà nello studio delle forze tra cariche elettriche.

Energia gravitazionale di una massa sferica omogenea

Supponiamo di costruire la sfera, di massa m e raggio R , per gusci successivi, ciascuno compreso tra r e $r + dr$, e calcoliamo il lavoro necessario; il risultato non dipenderà dal procedimento perché la forza è conservativa.

Se è già stata fatta la sfera di raggio r , figura 5.23, il lavoro per portare da distanza infinita a distanza r dal centro la massa dm che si distribuisce nel guscio tra r e $r + dr$ è, secondo (5.6),

$$dW = -dE_p = \gamma \frac{m(r) dm}{r} .$$

Sappiamo che $m(r) = m r^3 / R^3$, da cui

$$dm = \frac{m}{R^3} d(r^3) = \frac{3mr^2}{R^3} dr .$$

Pertanto

$$dW = 3 \gamma \frac{m^2}{R^6} r^4 dr \Rightarrow W = \int_0^R dW = \frac{3}{5} \gamma \frac{m^2}{R} .$$

Questo lavoro è fornito dalla forza gravitazionale ed è eguale a $E_{p, \text{in}} - E_{p, \text{fin}}$

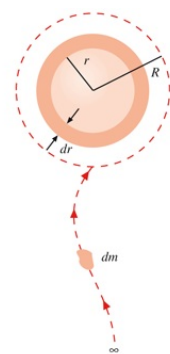


FIGURA 5.23

. Però $E_{p, \text{in}} = 0$ perché inizialmente tutte le parti della sfera sono infinitamente lontane tra loro e quindi

$$E_{p, \text{fin}} = -W = -\frac{3}{5} \gamma \frac{m^2}{R} \quad (5.14)$$

è l'espressione dell'energia potenziale gravitazionale di una sfera omogenea di massa m e raggio R , cioè dell'energia immagazzinata nel sistema a seguito dell'azione della forza gravitazionale.

Notiamo che al contrarsi della massa l'energia aumenta in modulo; al limite per $R \rightarrow 0$ l'energia diverge. Questo vuol dire che da un punto di vista energetico una massa puntiforme non ha significato (in fisica classica, mentre invece per particelle subnucleari elementari è possibile superare il problema di queste divergenze).

Si può dimostrare che quando il raggio ha un valore R_0 tale che

$$\frac{3}{5} \gamma \frac{m^2}{R_0} = mc^2 \quad ,$$

essendo c la velocità della luce nel vuoto, dalla sfera non può sfuggire alcun segnale luminoso: essa si comporta come un *buco nero*.

Il sole ha massa $m_S = 1.98 \cdot 10^{30}$ kg e raggio $R_S = 6.96 \cdot 10^8$ m ; la sua energia potenziale vale in modulo

$$|E_p| = \frac{3}{5} \gamma \frac{m_S^2}{R_S} = 2.25 \cdot 10^{41} \text{ J} \quad (\text{mentre } m_S c^2 = 1.78 \cdot 10^{47} \text{ J}) \quad .$$

Il valore di $R_0 = \frac{3}{5} \gamma \frac{m^2}{c^2}$ risulta pari a 880 m, molto minore di R_S . Il sole cioè è ancora molto lontano dal somigliare a un buco nero.

5.6 Determinazione della traiettoria

Vogliamo adesso dimostrare che l'orbita dei pianeti è ellittica (1^a legge di Keplero) e che il quadrato del periodo di rivoluzione è proporzionale al cubo del semiasse maggiore (3^a legge di Keplero).

Dobbiamo però premettere alcune proprietà delle coniche.

Parentesi geometrica sulle coniche

Una conica è una curva piana definita (vedi figura 5.24) come luogo dei punti per i quali il rapporto tra la distanza da un punto (fuoco) e la distanza da una retta (direttrice) è pari a una costante positiva che si chiama eccentricità ε :

$$\varepsilon = \frac{PF}{PQ} = \frac{r}{d + r \cos \theta} ;$$

d è la distanza tra il fuoco e la direttrice ed è un parametro dato. Pertanto l'equazione di una conica in coordinate polari di centro F è

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\varepsilon d} - \frac{1}{d} \cos \theta . \quad (5.15)$$

Se $\varepsilon < 1$ abbiamo un'ellisse, se $\varepsilon = 1$ una parabola, se $\varepsilon > 1$ un'iperbole. In particolare per un'ellisse di semiassi a e b valgono le relazioni:

$$a = \frac{\varepsilon d}{1 - \varepsilon^2} \quad b = a \sqrt{1 - \varepsilon^2} \quad \varepsilon^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} . \quad (5.16)$$

L'area dell'ellisse è $A = \pi a b = \pi a^2 \sqrt{1 - \varepsilon^2}$

($\varepsilon = 0$ quindi corrisponde a una circonferenza)

Equazione del moto. Traiettoria

Consideriamo due punti isolati, di masse M e m , tra i quali esiste la forza gravitazionale $\gamma M m / r^2$. In un sistema di riferimento inerziale

$$\mathbf{F} = m \mathbf{a}_m , \quad -\mathbf{F} = M \mathbf{a}_M .$$

Secondo quanto visto nel paragrafo 3.1, l'accelerazione relativa di m rispetto a M è

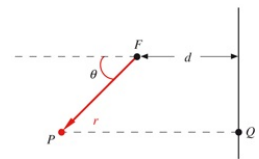


FIGURA 5.24

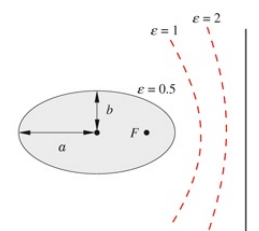


FIGURA 5.25

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_m - \mathbf{a}_M = \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right) \mathbf{F} = \frac{1}{\mu} \mathbf{F} \quad ,$$

dove

$$\mu = \frac{mM}{m+M}$$

si chiama *massa ridotta* del sistema ($\mu < m$ e $\mu < M$). Pertanto

$$\mathbf{F} = \mu \mathbf{a} \quad : \quad (5.17)$$

il moto relativo di due punti materiali sottoposti alla loro interazione mutua è equivalente al moto di un punto con massa eguale alla massa ridotta e sottoposto a una forza eguale alla forza di interazione mutua. Ovvero, l'equazione del moto di m rispetto a M , $\mathbf{F} = \mu \mathbf{a}$, è identica a quella valida in un sistema di riferimento inerziale, col solo scambio $m \rightarrow \mu$ e con la forza \mathbf{F} immutata, anche se M si muove di moto accelerato.

Il risultato non dipende dal tipo di forza agente e mostra che il problema del moto relativo di due punti è riconducibile al moto di un punto materiale.

Introduciamo adesso al posto di \mathbf{F} l'espressione $-\gamma \frac{mM}{r^2} \mathbf{u}_r$

Introduciamo adesso al posto di \mathbf{F} l'espressione $-\gamma \frac{mM}{r^2} \mathbf{u}_r$ in quanto vogliamo studiare il moto di m rispetto a M sotto l'azione dell'interazione gravitazionale tra le due masse (che possono essere estese, purché con simmetria sferica).

La forza è centrale e quindi il moto si svolge in un piano, con momento angolare costante. Possiamo usare per \mathbf{a} la *formula di Binet* (2.27), che dà l'accelerazione, in un campo di forze centrali, in funzione delle coordinate polari di m rispetto a M e del valore costante di \mathbf{L} . Nella (2.27) bisogna però sostituire μ^2 a m^2 , come dobbiamo fare in tutte le espressioni che riguardano il moto di m (ma non nella forza). La (5.17) diventa allora

$$-\gamma \frac{mM}{r^2} \mathbf{u}_r = -\mu \frac{L^2}{\mu^2 r^2} \left[\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right] \mathbf{u}_r$$

ovvero

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = \gamma \mu \frac{mM}{L^2} \quad . \quad (5.18)$$

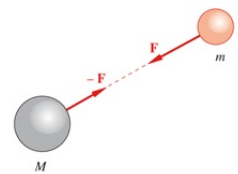


FIGURA 5.26

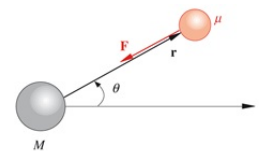


FIGURA 5.27

La soluzione di questa equazione differenziale dà $r(\theta)$, cioè la relazione funzionale tra r e θ che corrisponde, in coordinate polari, alla traiettoria di m rispetto a M .

A primo membro di (5.18) riconosciamo la nota struttura $\frac{d^2 r}{d\theta^2} + r = \frac{\mu M}{L^2}$.
 feaagKart1ev2aaatCvAUfeBSjuyZL2yd9gzLbvyNv2CaerbuLwBLn
 hiov2DGi1BTfMBaeXatLxBI9gBaerbd9wDYLwzYbItLDharqqtubsr
 4rNCHbGeaGqiVuoJe9sqqrpepCoxbbL8F4rqqrFfpeea0xe9Lq=Jc9
 vqaqpepmoxbba9pwe9Q8fso=yqaqpepae9pg0FirpepeKkFroxfr=x
 fr=xb9adbaqaeeGaciGaaiaabeqaamaabaabaaGcbaWaaSaaaeaaca
 WGKbWaaWbaaSqaabeaacaIYaaaaOGaamOzaaqaiaadsgacaWG4bWa
 aWbaaSqaabeaacaIYaaaaaakiabgUcaRiaadAgaaaa@3D73@ , tipica
 dell'oscillatore armonico; però l'equazione non è omogenea. Come vedremo nel
 capitolo 9, in questo caso la soluzione più generale consiste nella somma $A \cos\theta$
 + S_p , dove $A \cos\theta$ è la soluzione più generale dell'equazione omogenea e S_p è una
 soluzione particolare di (5.18). Ora è evidente che $S_p = (1/r)_p = \text{costante}$ è una
 soluzione di (5.18) e che tale costante è proprio $\gamma \mu m M / L^2$ (basta sostituire
 nell'equazione e si ritrova un'identità). Pertanto la funzione che risolve (5.18) è

$$\frac{1}{r} = \gamma \mu \frac{m M}{L^2} + A \cos\theta \quad (5.19)$$

Confrontando (5.19) con (5.15) vediamo che la traiettoria è una conica.

Momento angolare. Energia

Un primo risultato del suddetto confronto è che

$$L^2 = \gamma \mu m M \epsilon d \quad (5.20)$$

I parametri della traiettoria ϵ e d danno il valore costante del momento angolare della massa m .

L'energia totale di m è la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale:

$$E = \frac{1}{2} \mu v^2 - \gamma \frac{m M}{r} = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \mu r^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - \gamma \frac{m M}{r} \quad (5.21)$$

avendo fatto ricorso a (1.19), valida perché il moto è piano. Per la stessa ragione possiamo usare la (2.21), riscritta come

$$L = \mu r^2 \frac{d\theta}{dt} \quad (5.22)$$

Il primo termine di (5.21) si può trasformare ricorrendo a (5.15):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \right) = - \frac{1}{r^2} \frac{dr}{dt} = \frac{\sin \theta}{d} \frac{d\theta}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \mu \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} \mu \frac{r^4}{d^2} \sin^2 \theta \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{\sin^2 \theta}{d^2} \frac{L^2}{\mu} ,$$

avendo utilizzato (5.22). Questa permette di trasformare anche il secondo termine di (5.21):

$$\frac{1}{2} \mu r^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{L^2}{\mu r^2} .$$

Infine il terzo termine di (5.21) tramite (5.20) diviene

$$-\gamma \frac{m M}{r} = - \frac{L^2}{\varepsilon d \mu r} .$$

Mettendo insieme i vari risultati

$$E = \frac{1}{2} \frac{\sin^2 \theta}{d^2} \frac{L^2}{\mu} + \frac{1}{2} \frac{L^2}{\mu r^2} - \frac{L^2}{\varepsilon d \mu r} .$$

Riutilizzando (5.15) per $1/r$ e $1/r^2$ MathType@MTEF@5@5@+=
 feaagKart1ev2aaatCvAUfeBSjuyZL2yd9gzLbvyNv2CaerbuLwBLn
 hiov2DGi1BTfMBaeXatLxBI9gBaerbd9wDYLwzYbItLDharqqtubsr
 4rNCHbGeaGqiVu0Je9sqqrpepC0xbbL8F4rqqrFfpeea0xe9Lq=Jc9
 vqaqpepmoxbb9pwe9Q8fso=yqaqpepae9pg0FirpepeKkFroxfr=x
 fr=xb9adbaqaeeGaciGaaiaabeqaamaabaabaaGcbaWaaSaaaeaaca
 aIXaaabaGaamOCaaaacaaMc8UaaGPaVlaaykW7caaMc8Uaamyzaiaa
 ykW7caaMc8UaaGPaVlaaykW7daWcaaqaiaaigdaaeaacaWGYbWaaW
 baaSqabeaacaIYaaaaaaaaa@47A5@ e (5.20) si ottiene

$$E = \frac{L^2}{2 \mu \varepsilon^2 d^2} (\varepsilon^2 - 1) = \gamma \frac{m M}{2 \varepsilon d} (\varepsilon^2 - 1) . \quad (5.23)$$

Anche l'energia totale, costante perché la forza è conservativa, si ricava dai parametri dell'orbita. Viceversa, fissati i valori di L ed E , si possono calcolare ε e d .

La (5.23) ci permette di dimostrare quanto enunciato nel paragrafo 5.4. Con $\varepsilon < 1$, orbita ellittica, l'energia è negativa, con $\varepsilon = 1$, orbita parabolica, l'energia è nulla, con $\varepsilon > 1$, orbita iperbolica, l'energia è positiva.

Poiché il sistema pianeta-sole è legato, l'energia totale è negativa e quindi l'orbita del pianeta è un'ellisse, come prescrive la prima legge di Keplero.

Nel caso particolare di orbite ellittiche utilizziamo (5.16) per trasformare (5.20) e (5.23):

$$L^2 = \gamma \mu m M a (1 - \varepsilon^2) , \quad E = -\gamma \frac{m M}{2 a} . \quad (5.24)$$

Data l'energia totale E , è fissato solo il semiasse maggiore a , ma non l'eccentricità ε : a parità di energia si possono avere ellissi diverse (stessa a , diversa ε) con momento angolare diverso, a conferma che energia e momento angolare sono indipendenti.

Infine dalla (2.26), che dà il periodo di rivoluzione, riscritta come

$$T = 2\mu \frac{A}{L} = 2\mu \frac{\pi a^2}{L} \sqrt{1 - \varepsilon^2}$$

e confrontata con la prima delle (5.24) si ottiene

$$L^2 = \frac{4\pi^2 \mu^2 a^4 (1 - \varepsilon^2)}{T^2} = \gamma \mu m M a (1 - \varepsilon^2)$$

$$\Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 \mu a^3}{\gamma m M} = \frac{4\pi^2}{\gamma (m + M)} a^3 = k a^3 \quad ,$$

che è la *terza legge di Keplero*. Si osservi che la costante

$$k = \frac{4\pi^2}{\gamma (m + M)}$$

è praticamente eguale per tutti i pianeti, essendo la massa m di ciascun pianeta molto minore della massa M del sole.

La legge della gravitazione di Newton è quindi in grado di spiegare le leggi di Keplero relative ai pianeti del sistema solare. D'altra parte non c'è nulla nelle dimostrazioni svolte che dipenda da caratteristiche specifiche del sole e dei pianeti; per questa ragione Newton avanzò l'ipotesi che la legge avesse validità universale (e abbiamo visto nel paragrafo 5.1 il calcolo di g , relativo al sistema corpo-terra, fatto utilizzando il sistema terra-luna). In particolare le leggi di Keplero valgono per i satelliti di un pianeta, materiali o artificiali; nella terza legge cambia soltanto il valore di k . Per i satelliti artificiali terrestri $k = 4\pi^2/\gamma m_T = 9.87 \cdot 10^{-14} \text{ s}^2/\text{m}^3$ (esempio 5.4), essendo la massa del satellite trascurabile rispetto a quella della terra; per il sistema terra-luna il valore è di poco diverso, dato che $m_L = 1.23 \cdot 10^{-2} m_T$.

Grafici dell'energia

Riprendiamo adesso, alla luce di (5.21), l'argomento relativo ai grafici dell'energia, trattato nel paragrafo 5.4 (figura 5.15). Nella (5.21) il secondo termine si può scrivere $L^2/2\mu r^2$ come abbiamo dimostrato, per cui

$$E = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} - \gamma \frac{m M}{r} = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + E_{p, \text{eff}}$$

con

$$E_{p, \text{eff}} = \frac{L^2}{2\mu r^2} - \gamma \frac{mM}{r},$$

detta *energia potenziale efficace*, somma dell'energia potenziale gravitazionale e del termine $L^2 / 2\mu r^2$, che è una parte dell'energia cinetica, ma che, in presenza di forze centrali, si può esprimere come funzione delle coordinate in quanto dipende solo dalla distanza di m da M .

Energia potenziale efficace

Se confrontiamo $L^2 / 2\mu r^2$ con $-\gamma mM / r$ vediamo che per r grande predomina E_p , ma che per r tendente a zero predomina $L^2 / 2\mu r^2$. La loro somma $E_{p, \text{eff}}$ ha l'andamento mostrato in figura 5.28.

Quando l'energia totale è positiva o nulla (E_1 o E_2), r ha un valore minimo r_1 o r_2 : al di sotto di questi sarebbe $E < E_{p, \text{eff}}$, che non è possibile. La distanza tra m e M non può quindi scendere al di sotto di un certo valore che dipende da E (retta orizzontale) e da L (curva di $E_{p, \text{eff}}$): a parità di E , maggiore è L maggiore è la distanza minima. Si osservi che quando r è minimo (o massimo) $dr/dt = 0$ e uno dei termini che compongono l'energia cinetica si annulla, per cui l'energia meccanica E coincide con $E_{p, \text{eff}}$.

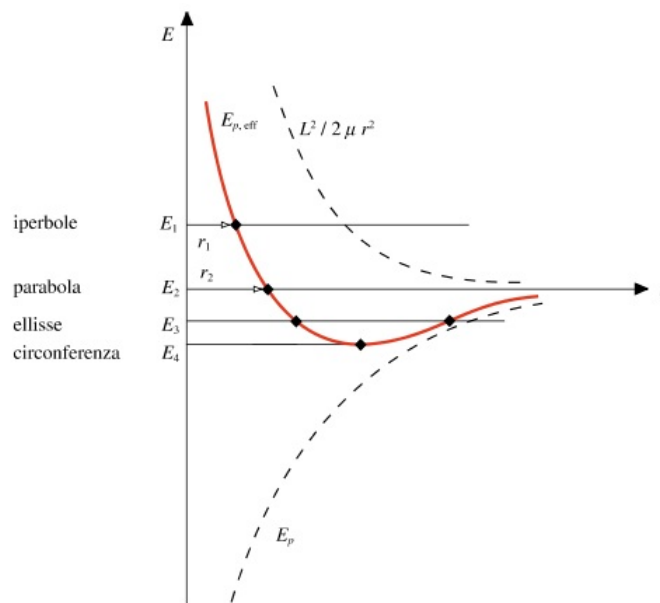


FIGURA 5.28

Quando l'energia totale è negativa (E_3) la distanza tra m e M ha un valore minimo e uno massimo, salvo nel caso di E_4 in cui è permesso un solo valore di r e l'orbita è circolare. Non sono possibili valori minori di E_4 perché deve sempre essere $E \geq E_{p, \text{eff}}$. La configurazione con energia minima è dunque quella con orbita circolare, tutte le altre configurazioni hanno un livello energetico superiore.

In definitiva, dalla figura 5.28 si hanno informazioni interessanti sul moto di

m rispetto a M . Fissate le masse, la curva di E_p è fissata; le condizioni iniziali danno E e L : il valore di E determina se il sistema è legato o meno e quindi il tipo di traiettoria, il valore di L determina, tra l'altro, il valore della distanza di minimo impatto. In pratica, solo se la velocità iniziale è nulla o diretta lungo la retta di azione della forza, m cade sicuramente su M , altrimenti descrive un'orbita, aperta o chiusa, attorno a M a cui si avvicina più o meno a seconda del valore di L ; siccome però né M né m sono in generale puntiformi, può anche accadere che l'orbita di m incontri la superficie di M : si riveda la figura 5.16 immaginando M di dimensioni maggiori.

Nella realtà sperimentale, in astronomia l'orbita è data e da essa si possono calcolare energia e momento angolare; invece, nel lancio di satelliti artificiali, si possono fissare le condizioni iniziali e scegliere l'orbita più appropriata.

Al termine $L^2 / 2\mu r^2$ si dà talvolta il nome di *energia potenziale centrifuga*, anche se nel sistema non c'è alcuna forza centrifuga; si usa tale termine per sottolineare il fatto che maggiore è L maggiore è la distanza minima e quindi è come se ci fosse una forza repulsiva dipendente da L^2 (diretta da M a m , cioè centrifuga): si parla anche di *barriera centrifuga*, per visualizzare l'impossibilità di scendere al di sotto di un certo valore di r .

Energia potenziale
centrifuga

Considerazioni conclusive

Le leggi della meccanica che abbiamo studiato nei capitoli precedenti forniscono il quadro generale in cui collocare e risolvere situazioni specifiche. Il caso della forza tra due masse e del moto che ne risulta è un esempio classico, molto importante. Per risolverlo abbiamo usato varie proprietà, dimostrate in generale e applicate al caso in cui la forza abbia appunto l'espressione (5.1).

Un altro esempio di grande rilevanza verrà trattato nel volume secondo: si tratta della forza elettrostatica che ha una struttura identica a (5.1), a parte la differenza fondamentale dell'esistenza di cariche di due segni (mentre la massa ha solo un segno), che rende la fenomenologia più varia.

Con riferimento alla discussione del capitolo 2 sul significato di $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, la scoperta della (5.1) è un esempio di deduzione della forza da misure geometriche e cinematiche; l'uso successivo è invece un esempio di come dalla conoscenza della forza si possano calcolare le traiettorie. Un caso storico famoso è il seguente: dallo studio di anomalie nella traiettoria di Urano, non giustificabili come perturbazioni, da parte dei pianeti conosciuti, della forza esercitata dal sole, si calcolò dove si sarebbe potuto trovare un altro pianeta, fino ad allora sconosciuto, la cui presenza avrebbe fatto tornare i conti e si scoprì così, nel 1846, il pianeta Nettuno.

Concludiamo con una precisazione: abbiamo detto che le orbite dei pianeti attorno al sole sono certamente ellittiche, a parte piccole perturbazioni dovute alle forze tra pianeti, ma poco diverse da circonferenze.

Nella tabella sono riportati vari dati relativi ai pianeti, tra cui l'eccentricità dell'orbita. Da questa si calcola con (5.16) il rapporto tra i semiassi dell'ellisse.

All'eccentricità massima di Plutone, $\varepsilon = 0.250$, corrisponde un rapporto $b/a = 0.968$, contro un valore $b/a = 1$ per una traiettoria circolare ($\varepsilon = 0$). L'eccentricità dell'orbita terrestre è $\varepsilon = 0.017$, per cui $b/a = 0.999$.

Pianeta	Massa (kg)	Raggio (m)	Periodo (s)	Eccentricità	Semiasse magg. (m)	T^2/a^3 (s^2/m^3)
Mercurio	$0.32 \cdot 10^{24}$	$2.43 \cdot 10^6$	$0.76 \cdot 10^7$	0.206	$5.79 \cdot 10^{10}$	$2.98 \cdot 10^{-19}$
Venere	$4.88 \cdot 10^{24}$	$6.06 \cdot 10^6$	$1.94 \cdot 10^7$	0.007	$1.08 \cdot 10^{11}$	2.99
Terra	$5.98 \cdot 10^{24}$	$6.37 \cdot 10^6$	$3.16 \cdot 10^7$	0.017	$1.50 \cdot 10^{11}$	2.96
Marte	$0.64 \cdot 10^{24}$	$3.37 \cdot 10^6$	$5.94 \cdot 10^7$	0.093	$2.28 \cdot 10^{11}$	2.98
Giove	$19.00 \cdot 10^{26}$	$6.99 \cdot 10^7$	$3.74 \cdot 10^8$	0.048	$7.78 \cdot 10^{11}$	2.97
Saturno	$5.68 \cdot 10^{26}$	$5.85 \cdot 10^7$	$9.35 \cdot 10^8$	0.056	$1.43 \cdot 10^{12}$	2.99
Urano	$0.87 \cdot 10^{26}$	$2.33 \cdot 10^7$	$2.65 \cdot 10^9$	0.046	$2.87 \cdot 10^{12}$	2.97
Nettuno	$1.03 \cdot 10^{26}$	$2.21 \cdot 10^7$	$5.22 \cdot 10^9$	0.009	$4.50 \cdot 10^{12}$	2.99
Plutone	$1.08 \cdot 10^{24}$	$3 \cdot 10^6$	$7.82 \cdot 10^9$	0.250	$5.92 \cdot 10^{12}$	2.95
Luna	$7.35 \cdot 10^{22}$	$1.74 \cdot 10^6$	$2.36 \cdot 10^6$	0.055	$3.84 \cdot 10^8$	$9.84 \cdot 10^{-14}$
Sole	$1.98 \cdot 10^{30}$	$6.96 \cdot 10^8$	—	—	—	—

Ricollegandoci infine all'inizio del capitolo, noi abbiamo ora completato la presentazione di una delle interazioni fondamentali esistenti in natura, appunto quella gravitazionale. Si tratta di una interazione molto debole se considerata a livello elementare. Ad esempio, l'attrazione gravitazionale tra un elettrone e un protone posti ad una distanza eguale alle dimensioni di un atomo di idrogeno è pari a

$$\gamma \frac{m_e m_p}{r^2} = \frac{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 9.11 \cdot 10^{-31} \cdot 1.67 \cdot 10^{-27}}{(0.53 \cdot 10^{-10})^2} = 3.63 \cdot 10^{-47} \text{ N} \quad ,$$

mentre la corrispondente forza elettrostatica vale $8.24 \cdot 10^{-8}$ N. In effetti l'interazione gravitazionale è sempre trascurata a livello atomico rispetto alle altre forze agenti. Anche per corpi macroscopici l'effetto è difficilmente apprezzabile; due corpi di massa 1 kg e posti a distanza di 1 m si attraggono con una forza numericamente eguale a γ , cioè di $6.67 \cdot 10^{-11}$ N. L'interazione gravitazionale diventa invece importante in presenza di grandi masse, come quelle dei pianeti e delle stelle; oltre che negli ordinari fenomeni descritti (forza peso, attrazione terra-luna e terra-sole), essa ha un ruolo fondamentale nella cosmologia, in fenomeni quali l'espansione dell'universo e i collassi stellari. In tali casi è però necessaria una profonda modificazione, cui accenniamo nel prossimo paragrafo.

5.7 Cenni di relatività generale

La teoria della relatività generale, concepita inizialmente da Einstein nel 1915, porta a una formulazione più generale dell'interazione gravitazionale, valida per qualsiasi valore del campo gravitazionale e per corpi che si muovono con qualsiasi velocità, purché inferiore a quella della luce nel vuoto. A basse velocità e campi deboli si ritrovano i risultati della teoria newtoniana: è questa la situazione tipica dei fenomeni terrestri e planetari, per i quali la formulazione classica è completamente adeguata.

L'unica eccezione allora (1915) conosciuta e inspiegabile era un'anomalia nel moto del pianeta Mercurio, che è il più vicino al sole e quindi quello che sente un maggior campo gravitazionale. La spiegazione del fenomeno costituì il primo grande successo della teoria di Einstein; il secondo fu la previsione della deviazione dei raggi luminosi in un campo intenso, che abbiamo descritto nel paragrafo 5.3. La terza previsione originale di Einstein, e cioè la diminuzione della frequenza della luce quando questa si allontana da un corpo massiccio (e viceversa l'aumento dell'avvicinarsi), venne verificata con successo in laboratorio soltanto nel 1960.

Non sono però soltanto queste le previsioni che si possono ottenere dalla relatività generale e dai suoi successivi sviluppi. Le equazioni generali della teoria ammettono soluzioni con carattere ondulatorio: in certe situazioni quindi il campo gravitazionale prodotto da una sorgente si propaga nello spazio, con la velocità della luce; altre soluzioni portano alla previsione dell'esistenza dei buchi neri. Non si tratta però di fenomeni facilmente individuabili. Delle onde gravitazionali si ha finora soltanto una prova indiretta di esistenza e sono stati localizzati nell'universo alcuni oggetti che potrebbero essere buchi neri. Malgrado le difficoltà, la dinamica di questo campo di ricerca negli ultimi decenni è stata notevole, sia per un rinnovato interesse teorico che per la disponibilità di raffinate tecniche osservative sulla superficie terrestre e al di fuori di questa (satelliti e navicelle spaziali). E tutte le nuove verifiche sperimentali che è stato possibile effettuare hanno confermato la teoria.

Un'esposizione, seppure a livello introduttivo, delle basi della relatività generale è troppo complessa per essere qui riportata. Diciamo soltanto che uno dei punti di partenza è l'eguaglianza tra massa inerziale e massa gravitazionale, verificata sperimentalmente con grande precisione (paragrafo 5.2).

6.1 Definizione di corpo rigido. Prime proprietà

Nel capitolo 4 abbiamo illustrato le proprietà generali della dinamica dei punti materiali; non avendo fatto alcuna ipotesi sulle forze esterne e sulle eventuali forze esistenti tra i punti, salvo il fatto che obbedissero alla terza legge di Newton (principio di azione e reazione), quelle proprietà si possono applicare alle più svariate situazioni. Bisogna però ricordare che si tratta di proprietà globali, riguardanti il moto del centro di massa, il momento angolare e l'energia cinetica totali; nulla di generale abbiamo potuto dire sul moto dei singoli punti.

Nel capitolo 5 abbiamo esaminato il caso particolare di due punti distanti r , tra i quali si esercita una forza centrale, attrattiva e dipendente da $1/r^2$, la forza gravitazionale. In tale situazione molto specifica, ma di importanza fondamentale, siamo stati in grado di calcolare, per il moto relativo, l'energia, il momento angolare e la forma delle orbite. Aggiungiamo ora che quando si hanno soltanto due punti il problema del loro moto relativo, dovuto alla forza interna di interazione, è sempre risolvibile, anche nel caso di forze diverse da quella gravitazionale. Già il semplice passaggio a tre punti complica enormemente il problema, che non ha una soluzione generale per quanto riguarda il moto relativo.

La situazione che ci apprestiamo a studiare in questo capitolo riguarda un altro caso particolare, anch'esso fondamentale soprattutto per le sue applicazioni pratiche. Il sistema fisico in esame è un insieme di punti materiali sottoposti ad un'interazione mutua tale da mantenerli in posizione fissa l'uno rispetto all'altro. Un sistema di questo tipo si chiama *corpo rigido* e più precisamente è definito come un *sistema di punti materiali in cui le distanze tra tutte le possibili coppie di punti non possono variare*. Come spesso accade in Fisica si tratta di un modello ideale, quello del corpo indeformabile, al quale si avvicinano i corpi solidi ordinari, nella pratica sempre deformabili (argomento che affronteremo nel capitolo 7). L'approssimazione è molto buona per corpi formati da materiali come acciaio, alluminio, cemento armato, vetro, certe materie plastiche, meno buona nel caso di piombo o gomma, giusto per fare alcuni esempi. Da un punto di vista microscopico le forze che garantiscono la rigidità dei solidi sono essenzialmente forze elettriche tra i costituenti (atomi o molecole), come descriveremo nel capitolo 19 del secondo volume.

Intuitivamente, nel moto di un corpo rigido come può essere quello di una sfera da biliardo, di una ruota, di una punta di trapano, di una trottola, è possibile individuare un moto d'assieme, cioè uno spostamento globale, naturalmente riconducibile al moto del centro di massa (si osservi che, in base

alle definizioni, il centro di massa è in una posizione immutabile rispetto a tutti i punti del corpo rigido). Però ci si rende anche conto che i vari punti possono descrivere traiettorie diverse tra loro e da quella del centro di massa; basta pensare, tra gli esempi appena fatti, al moto dei punti di una ruota che rotola senza strisciare (vedi paragrafo 6.8 e anche la figura 1.30). Ciò vuol dire che il moto d'insieme non contiene e non può rappresentare tutta la dinamica del moto di un corpo rigido, ovvero che questo non può essere trattato alla stessa stregua del moto di un punto materiale. Più avanti e nel paragrafo 6.2 preciseremo quantitativamente queste osservazioni introduttive.

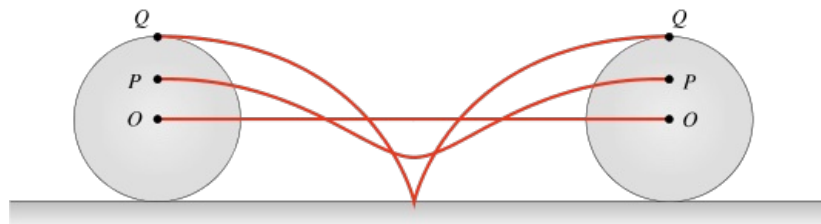


FIGURA 6.1

Lo studio del moto di un corpo rigido verrà fatto normalmente in un sistema di riferimento inerziale. Un altro sistema importante è il sistema di riferimento del centro di massa del corpo rigido (non inerziale, con gli assi paralleli a quelli del sistema inerziale; si riveda il paragrafo 4.6). In questo sistema si può studiare solo il moto rispetto al centro di massa; poiché la distanza dei singoli punti dal centro di massa non cambia mai, ciascun punto è visto dal centro di massa o fermo o in moto lungo un arco di circonferenza. Infine possiamo considerare un sistema di riferimento con gli assi solidi al corpo rigido; tale sistema, in cui ciascun punto è fermo, può essere utile per visualizzare il moto del corpo rigido rispetto agli altri due sistemi di riferimento.

Vediamo ora di determinare quanti parametri sono necessari per individuare la posizione nello spazio di un corpo rigido ad un certo istante. Un punto nello spazio è individuato da tre parametri, le sue coordinate, e quindi n punti tra loro indipendenti da $3n$ parametri. Nel caso di un corpo rigido, formato da n punti, la condizione che le distanze tra tutte le possibili coppie di punti siano costanti riduce il numero di parametri ad un valore minore di $3n$.

Consideriamo un sistema x^*, y^*, z^* con l'origine nel centro di massa, figura 6.2, e gli assi, di versori $\mathbf{u}_{x^*}, \mathbf{u}_{y^*}, \mathbf{u}_{z^*}$, solidali con il corpo rigido. Ciascuno dei tre assi è individuato, rispetto a un sistema esterno, da tre coseni direttori $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ che sono le componenti cartesiane del versore \mathbf{u}_{i^*} in quel sistema: in tutto quindi nove coseni direttori, che però non sono tra loro indipendenti. Infatti quelli di un dato asse devono soddisfare alla condizione

$$\alpha_i^2 + \beta_i^2 + \gamma_i^2 = 1$$

avendo il versore modulo unitario; in totale sono tre condizioni, una per ogni

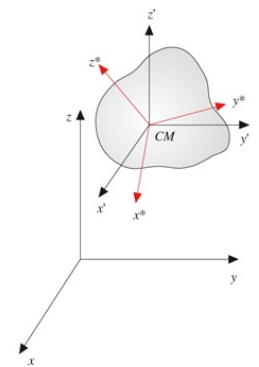


FIGURA 6.2

asse. Inoltre gli assi devono essere mutuamente ortogonali, il che comporta $\mathbf{u}_{x^*} \cdot \mathbf{u}_{y^*} = 0$, $\mathbf{u}_{y^*} \cdot \mathbf{u}_{z^*} = 0$, $\mathbf{u}_{z^*} \cdot \mathbf{u}_{x^*} = 0$, ovvero le tre condizioni.

$$\begin{aligned}\alpha_x \alpha_y + \beta_x \beta_y + \gamma_x \gamma_y &= 0 \quad , \\ \alpha_y \alpha_z + \beta_y \beta_z + \gamma_y \gamma_z &= 0, \\ \alpha_z \alpha_x + \beta_z \beta_x + \gamma_z \gamma_x &= 0.\end{aligned}$$

Quindi i parametri indipendenti che individuano i tre assi sono tre (nove coseni direttori con sei condizioni).

Per completare il quadro dobbiamo individuare la posizione del centro di massa, tramite le sue tre coordinate e quindi in totale occorrono sei parametri per descrivere la posizione di un corpo rigido.

Pertanto, se conosciamo dove si trova ad un certo istante un punto P di un corpo rigido (la cui posizione rispetto al sistema x^* , y^* , z^* è fissa e misurabile una volta per tutte), l'evoluzione nel tempo della posizione di P nel sistema di riferimento inerziale è nota se conosciamo il moto del centro di massa, individuato da tre parametri, e il cambiamento nel tempo della direzione dei tre assi x^* , y^* , z^* individuati da altri tre parametri.

Questo primo risultato conferma l'osservazione che il moto di un corpo rigido è più complesso di quello di un punto materiale (sei parametri invece di tre), ma in un modo definito, indipendente dal numero n dei punti costituenti. Oltre al moto del centro di massa, basta considerare il moto rispetto al centro di massa.

Il numero l di parametri necessari per descrivere il moto di un sistema si chiama numero di *gradi di libertà del sistema*. Un corpo rigido ha quindi $l = 6$, un punto materiale $l = 3$, n punti materiali indipendenti $l = 3n$, un punto vincolato a muoversi lungo una linea $l = 1$ o sopra una superficie $l = 2$, due punti vincolati ad avere sempre la stessa distanza tra loro $l = 5$ (sei coordinate dei due punti con una condizione sulla distanza).

Abbiamo detto che un corpo rigido è formato da n punti; tali punti possono essere un insieme discreto oppure essere distribuiti con continuità (vedi paragrafo 6.3); ad ogni modo un corpo rigido è un corpo esteso. Il suo moto è determinato dalle forze esterne che, in generale, sono più di una e sono applicate in punti diversi del corpo. Si tratta quindi di sistemi di forze, caratterizzati da una risultante $\mathbf{R}^{(E)}$ e da un momento risultante $\mathbf{M}^{(E)}$, grandezze indipendenti tra loro (paragrafo 4.15). Ricordiamo inoltre che il lavoro delle forze interne è nullo in un sistema rigido, dove i punti mantengono invariate le distanze mutue (paragrafo 4.10): pertanto la variazione dell'energia cinetica di un corpo rigido è eguale al lavoro delle sole forze esterne. Di conseguenza nel resto del capitolo tralascieremo il simbolo $^{(E)}$ per le grandezze $\mathbf{R}^{(E)}$, $\mathbf{M}^{(E)}$, $W^{(E)}$ non essendo possibile fare confusioni e scriveremo così le leggi fondamentali:

$$\mathbf{R} = m \mathbf{a}_{CM} \quad , \quad \mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} \quad , \quad \Delta E_k = W \quad .$$

Gradi di libertà di un sistema

6.2 Moto di un corpo rigido

Per arrivare a stabilire quale sia il moto più generale di un corpo rigido cominciamo ad esaminare due tipi di moto, molto semplici da descrivere, che possono essere compiuti da un corpo rigido.

Il primo tipo è il *moto di traslazione*: tutti i punti descrivono traiettorie eguali, in generale curvilinee, percorse con la stessa velocità \mathbf{v} , che può variare nel tempo in modulo, direzione e verso: \mathbf{v} coincide con \mathbf{v}_{CM} , velocità del centro di massa. Pertanto, nel moto di traslazione, che può essere uniforme o vario, se è noto il moto del centro di massa è noto quello di qualsiasi altro punto.

Traslazione di un corpo rigido

Nella figura 6.3a vediamo una generica traslazione; si noti come l'angolo tra gli assi del sistema del centro di massa e gli assi del sistema solidale al corpo non cambi durante il moto.

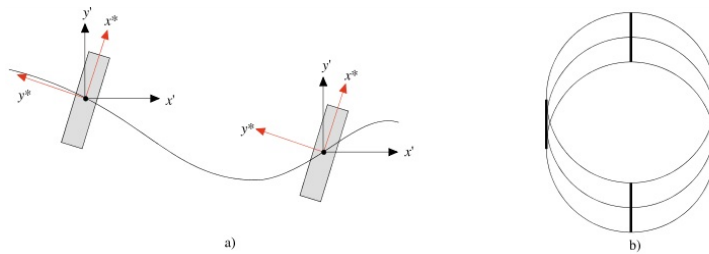


FIGURA 6.3

Qualsiasi segmento tracciato nel corpo rigido rimane parallelo a se stesso durante una traslazione. La figura 6.3b mostra un moto di traslazione in cui tutti i punti descrivono una traiettoria circolare: le circonferenze sono tutte eguali, ma non hanno lo stesso centro.

Rotazione di un corpo rigido

La dinamica è quella di un punto materiale e non c'è movimento rispetto al centro di massa:

$$\mathbf{L}' = 0 \quad , \quad E'_k = 0 \quad .$$

Le grandezze significative in una traslazione sono:

quantità di moto	:	$\mathbf{P} = m \mathbf{v}_{CM}$
energia cinetica	:	$E_k = E_{k,CM} = \frac{1}{2} m \mathbf{v}_{CM}^2 \quad .$

L'equazione del moto del centro di massa è

$$\mathbf{R} = M \mathbf{a}_{CM} \quad .$$

La conoscenza del momento angolare si ricava dalla conoscenza della quantità di moto e della posizione del centro di massa:

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_{CM} = \mathbf{r}_{CM} \times m \mathbf{v}_{CM} = \mathbf{r}_{CM} \times \mathbf{P} \quad ;$$

\mathbf{L} cioè non è indipendente da \mathbf{P} . Di conseguenza anche l'equazione $\mathbf{M} = d\mathbf{L}/dt$ non aggiunge alcuna informazione (si verifichi che risulta $\mathbf{M} = \mathbf{r}_{CM} \times \mathbf{R}$).

Implicitamente abbiamo usato le nozioni legate al moto di traslazione quando abbiamo trattato il moto di piccoli blocchetti, ad esempio lungo un piano inclinato, e i loro urti; infatti li abbiamo equiparati a punti materiali.

Il secondo tipo di moto è la *rotazione*: tutti i punti descrivono un moto circolare, le traiettorie sono archi di circonferenze diverse che stanno su piani tra loro paralleli e hanno il centro su uno stesso asse, l'asse di rotazione. La rigidità del corpo implica che tutti i punti abbiano in un dato istante la stessa velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$, che è parallela all'asse di rotazione; le velocità \mathbf{v}_i dei singoli punti sono diverse, a seconda della distanza R_i dall'asse di rotazione (in modulo $v_i = \omega R_i$). Se l'asse di rotazione è fisso nel tempo, $\boldsymbol{\omega}$ può cambiare solo in modulo e verso e abbiamo un moto circolare vario, in particolare uniforme se $\boldsymbol{\omega}$ è costante; nel caso più generale $\boldsymbol{\omega}$ può cambiare anche in direzione (asse di rotazione variabile).

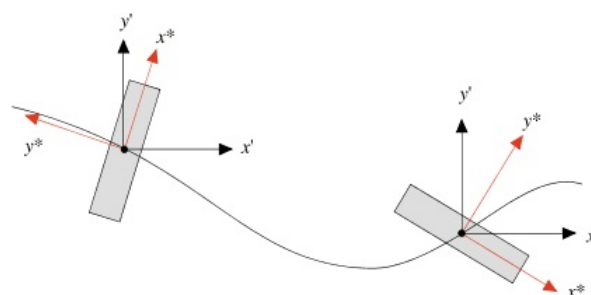
L'equazione dinamica di base del moto di rotazione è

$$\mathbf{M} = d\mathbf{L}/dt.$$

Vedremo in seguito come si calcola \mathbf{L} che nelle rotazioni è una delle grandezze significative, e come dall'equazione del moto si ricava l'accelerazione angolare α e quindi la velocità angolare ω . Vedremo anche che espressione assume l'energia cinetica.

I due moti considerati, traslazione e rotazione, sono gli unici da studiare in dettaglio, in quanto si dimostra che il *moto rigido più generale è una rototraslazione: ogni spostamento infinitesimo può sempre essere considerato come somma di una traslazione e di una rotazione infinitesime, individuate da \mathbf{v} e $\boldsymbol{\omega}$, variabili nel tempo*. La dimostrazione esula dai nostri scopi, però il risultato era già intuibile dalla conoscenza del numero di parametri necessari a descrivere un qualsiasi moto di un corpo rigido e dall'osservazione che il moto di un punto qualsiasi del corpo era esprimibile come somma del moto del centro di massa e del moto relativo al centro di massa, insieme al fatto che quest'ultimo non può essere che rotatorio.

In figura 6.5, estensione della figura 6.3a, è mostrata una possibile rototraslazione di una sbarretta rigida; si vede chiaramente che i vari punti descrivono traiettorie diverse.



Rotazione di un corpo rigido

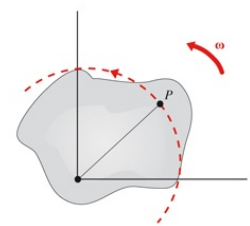


FIGURA 6.4

FIGURA 6.5

Per descrivere una rototraslazione si utilizzano sia il teorema del moto del centro di massa che il teorema del momento angolare, avendo preso come polo un punto fisso nel sistema inerziale o il centro di massa.

Una constatazione fondamentale da fare a questo punto è che la descrizione del moto di un corpo rigido non è univoca. Vediamolo prima in modo formale. Consideriamo due punti P e Q di un corpo rigido: per un moto di rototraslazione le velocità dei due punti sono:

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{OP} \quad , \quad \mathbf{v}_Q = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{OQ} \quad .$$

O è un punto generico, che potrebbe anche coincidere con il centro di massa: \mathbf{v}_O individua il moto di traslazione, $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{OP}$ e $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{OQ}$ una rotazione istantanea attorno ad un asse passante per O (*asse istantaneo di rotazione*). Sottraendo membro a membro

$$\mathbf{v}_P - \mathbf{v}_Q = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{OP} - \mathbf{OQ}) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{QP} \Rightarrow \mathbf{v}_P = \mathbf{v}_Q + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{QP} .$$

Il moto di P è ancora una rototraslazione, caratterizzata dalla velocità \mathbf{v}_Q e dalla stessa velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$, che individua l'asse di rotazione passante per Q . In particolare, se Q è fermo, $\mathbf{v}_Q = \mathbf{0}$ e il moto è una pura rotazione.

Quindi la rototraslazione che descrive il moto ad un certo istante è caratterizzata da \mathbf{v} e $\boldsymbol{\omega}$, ma mentre $\boldsymbol{\omega}$ è unica, \mathbf{v} dipende da quale asse di rotazione vogliamo considerare. Vedremo un esempio interessante di ciò nel paragrafo 6.8 che tratta il moto di puro rotolamento, cioè il moto ideale di una ruota. Facciamo subito un altro esempio. In figura 6.6 è mostrato un giro completo compiuto da un'asta rigida, giacente in un piano orizzontale, che ruota rispetto ad un asse verticale passante per il suo estremo O ; nella parte di destra vediamo il sistema dall'alto, guardando lungo l'asse di rotazione. Possiamo considerare questo moto una rotazione pura attorno all'asse indicato oppure una rototraslazione con rotazione istantanea attorno ad un asse passante per il centro di massa e parallelo al precedente (nel sistema del centro di massa si vede l'asta ruotare), mentre la traslazione è individuata dal moto circolare del centro di massa.

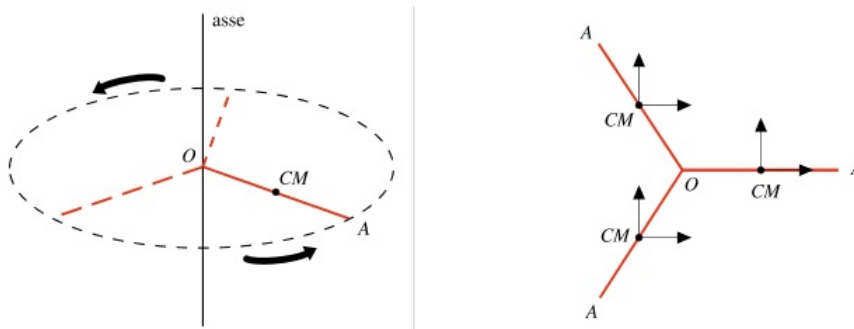


FIGURA 6.6

La velocità angolare delle due rotazioni è la stessa in quanto in un intervallo di tempo dt l'angolo $d\theta$ della prima rotazione coincide con l'angolo della rotazione rispetto al centro di massa. Pur potendo dunque descrivere il moto in vari modi vedremo che i valori del momento angolare e dell'energia cinetica del corpo non dipendono dalla descrizione.

Abbiamo già incontrato un moto di rototraslazione nello studio del moto relativo (paragrafo 3.1): la velocità di trascinamento (3.6), legata al moto di un sistema di riferimento rispetto all'altro, è composta da un termine di traslazione e da un termine di rotazione. E in effetti il sistema di riferimento relativo (come qualsiasi altro sistema di riferimento) è assimilabile ad un corpo rigido, essendo formato da tre assi in posizione fissa tra loro; diventa così evidente che la velocità angolare che compare nelle formule di Poisson deve essere la stessa.

Sottolineamo infine che in una generica rototraslazione i parametri \mathbf{v} e $\boldsymbol{\omega}$ sono indipendenti tra loro. Solo in particolari situazioni, tipicamente in presenza di qualche vincolo, la velocità di traslazione e la velocità di rotazione sono legate da una relazione analitica; un buon esempio è di nuovo quello della ruota, nel paragrafo 6.8.

6.3 Corpo continuo. Densità. Posizione del centro di massa

La schematizzazione di un corpo rigido come sistema di punti materiali necessita di un approfondimento. Un corpo esteso reale appare avere una struttura continua rispetto a qualsiasi suddivisione macroscopica; d'altra parte sappiamo che è costituito da atomi o molecole. Il singolo punto materiale va allora pensato come un piccolo volume dV contenente una massa dm ; dV è piccolo nella scala macroscopica (potrebbe essere un cubetto di spigolo 10^{-6} m), ma molto grande nella scala atomica (dove le dimensioni lineari sono dell'ordine di $10^{-9} \div 10^{-10}$ m), così da contenere un grandissimo numero di atomi: ad esempio in $1 \mu\text{m}^3$ di alluminio ci sono circa 10^{10} atomi.

Questa suddivisione concettuale ha vari vantaggi. Innanzitutto essa permette di utilizzare i risultati trovati per i sistemi discreti di punti nel capitolo 4; l'estensione ai sistemi continui di punti comporta la sostituzione di sommatorie con integrali, come vedremo subito. Ciò mette in luce un secondo vantaggio: la suddivisione della massa del corpo e del volume da essa occupato in un numero (praticamente) infinito di elementi (praticamente) infinitesimi consente di applicare i metodi del calcolo integrale per la determinazione di alcune grandezze di interesse. Il fatto che la suddivisione suddetta ignori l'effettiva struttura granulare del corpo solido non è significativo in quanto tale struttura è irrilevante ai fini della dinamica macroscopica.

Un ulteriore vantaggio è che si riesce a tener conto in modo semplice di come la massa è distribuita all'interno del corpo. Ciò viene fatto introducendo la grandezza *densità* (di massa), definita come rapporto tra la massa infinitesima e il volume da essa occupato:

$$\rho = \frac{dm}{dV} . \quad (6.1)$$

Anche supponendo che i volumi infinitesimi dV siano tutti eguali, non è detto che essi contengano tutti la stessa massa: dm può variare a seconda del volume considerato. Scrivendo da (6.1) $dm = \rho dV$ l'eventuale variazione della distribuzione di massa all'interno del corpo è espressa appunto dalla funzione ρ (x, y, z). La massa totale del corpo è quindi

$$m = \int dm = \int_V \rho dV , \quad (6.2)$$

dove l'integrale è esteso a tutto il volume del corpo.

Un corpo nel quale la densità è costante si dice omogeneo; per esso (6.1) e (6.2) diventano

$$\rho = \frac{m}{V} \quad , \quad m = \rho V \quad . \quad (6.3)$$

I corpi in cui ciò non succede si dicono non omogenei. In essi si usa comunque definire una densità media $\bar{\rho} = m/V$, valore medio nel volume V della funzione ρ .

Ripetiamo che la valutazione della variazione di densità è fatta sulla scala macroscopica tipica del volume dV , scala nella quale la materia appare continua.

Esempi di corpi omogenei sono un blocco di metallo o di vetro, una massa d'acqua o un volume di gas (il concetto di densità si estende anche ai fluidi, che tratteremo nel capitolo 8). Corpi non omogenei si possono trovare in natura, come certi tipi di legno o di roccia, oppure possono essere costruiti artificialmente, ad esempio incollando lamine di materiali diversi. Su grande scala non sono omogenee né la terra né l'atmosfera terrestre.

In casi particolari la massa può essere distribuita invece che in un volume su una superficie S , come avviene per membrane, dischi, bolle di sapone, oppure lungo una linea l , come per fili e bacchette sottili. In corrispondenza si introducono i concetti di *densità superficiale* e di *densità lineare*:

$$\rho_s = \frac{dm}{dS} \Rightarrow m = \int \rho_s dS \quad , \quad \rho_l = \frac{dm}{dl} \Rightarrow m = \int \rho_l dl \quad . \quad (6.4)$$

Densità superficiale
Densità lineare

La grandezza $v = 1/\rho = dV/dm$ si chiama *volume specifico*; mentre la densità può essere pensata come la massa contenuta nell'unità di volume, il volume specifico rappresenta il volume occupato dall'unità di massa.

Nella prima parte della tabella 6.1 sono riportati i valori della densità di alcune sostanze solide. Nella seconda parte diamo la densità media della terra, del sole, dell'ipotetico sole ridotto a buco nero citato nel paragrafo 5.5 e, per confronto, quella del nucleo del ferro. Per l'unità di misura si veda la successiva nota.

Tabella 6.1 Densità di alcune sostanze

berillio	$1.85 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$	ioduro di sodio	$3.67 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$
carbonio (grafite pura)	2.27	vetro comune	$2.4 \div 2.8$
alluminio	2.70	vetro Pyrex	2.23
silicio	2.33	quarzo	2.64
ferro	7.87	plexiglas	1.18
rame	8.96	ghiaccio	0.92
argento	10.5	legno (quercia)	$0.6 \div 0.9$
tungsteno	19.35	cemento armato	$2.4 \div 2.5$
platino	21.45	(mercurio	13.59)
piombo	11.35	(acqua a 4°C	1.00)

	$R \text{ (m)}$	$V \text{ (m}^3\text{)}$	$m \text{ (kg)}$	$\rho \text{ (kg/m}^3\text{)}$
terra	$6.37 \cdot 10^6$	$1.08 \cdot 10^{21}$	$5.98 \cdot 10^{24}$	$5.54 \cdot 10^3$
sole	$6.96 \cdot 10^8$	$1.41 \cdot 10^{27}$	$1.98 \cdot 10^{30}$	$1.40 \cdot 10^3$
sole collassato	880	$2.85 \cdot 10^9$	$1.98 \cdot 10^{30}$	$6.95 \cdot 10^{20}$
nucleo del ferro	$5.6 \cdot 10^{-15}$	$7.36 \cdot 10^{-43}$	$9.27 \cdot 10^{-26}$	$1.26 \cdot 10^{17}$

Unità di misura

La densità si misura in kg/m^3 ; la densità superficiale e quella lineare si misurano rispettivamente in kg/m^2 e kg/m .

Si faccia attenzione al fatto che talvolta le densità sono date in g/cm^3 e che $1 \text{ kg/m}^3 = 10^3 \text{ g/cm}^3$. Per esempio, la densità dell'acqua nel sistema internazionale è 10^3 kg/m^3 .

Calcolo della posizione del centro di massa

La posizione di ciascun punto di un corpo rigido, di massa $dm = \rho dV$, è individuata dal raggio vettore \mathbf{r} ; in accordo con la definizione (4.3) la posizione del centro di massa è data dalla somma degli infiniti vettori $\mathbf{r} dm$ divisa per la massa totale:

$$\mathbf{r}_{CM} = \frac{\int \mathbf{r} dm}{\int dm} = \frac{\int \mathbf{r} \rho dV}{m} \quad (6.5)$$

Se il corpo è omogeneo ($\rho = \text{costante}$),

$$\mathbf{r}_{CM} = \frac{\rho}{m} \int \mathbf{r} dV = \frac{1}{V} \int \mathbf{r} dV \quad (6.6)$$

Nel risolvere gli integrali si osservi che \mathbf{r} e ρ sono funzioni delle coordinate e che anche dV è esprimibile in termini di coordinate: per esempio, in coordinate cartesiane, $dV = dx dy dz$. L'integrale è un integrale triplo.

Dalla (6.6) è evidente che in un corpo omogeneo la posizione del centro di massa, data dal raggio vettore \mathbf{r}_{CM} che è la media della funzione vettoriale \mathbf{r} (x ,

y, z) nel volume V , non dipende dal valore della massa del corpo, ma solo dalla sua forma: ad esempio il centro di massa di un'asta omogenea è sempre nel centro, qualunque sia il materiale di cui essa è costituita (vedi esempio 6.3). Anche se meno evidente, ciò continua ad essere vero per un corpo non omogeneo se la distribuzione di massa, cioè la funzione $\rho(x, y, z)$, è la stessa indipendentemente dal materiale costituente.

Se un corpo omogeneo è simmetrico rispetto ad un punto, un asse o un piano, il centro di massa rispettivamente coincide col centro di simmetria o è un punto dell'asse o del piano di simmetria. Se esistono più assi o piani di simmetria, il centro di massa sta sulla loro intersezione. Ad esempio, in un triangolo piano qualsiasi ci sono tre assi di simmetria che sono le tre mediane; il centro di massa sta nel loro punto di intersezione.

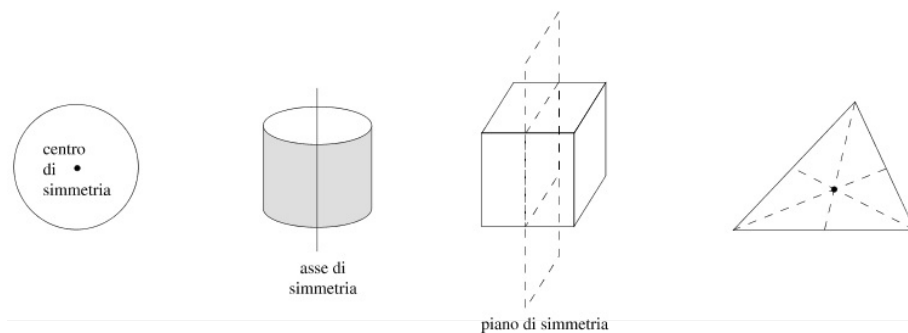


FIGURA 6.7

Esempio 6.1

Si calcoli la posizione del centro di massa di un semianello rigido omogeneo di massa m e raggio R .

Soluzione

La massa del semianello è data da $m = \rho_l \pi R$; ρ_l , densità lineare dell'anello, è costante poiché il corpo è omogeneo. Individuiamo un punto sull'anello tramite il vettore $\mathbf{r} = R \mathbf{u}_r$, dove $\mathbf{u}_r = \sin\phi \mathbf{u}_x + \cos\phi \mathbf{u}_y$. La posizione del centro di massa si calcola con (6.5), adattata al caso unidimensionale:

$$\begin{aligned} m \mathbf{r}_{CM} &= \int_l \rho_l \mathbf{r} dl = \int_l \rho_l R \mathbf{u}_r R d\phi = \rho_l R^2 \int_l \mathbf{u}_r d\phi = \rho_l R^2 \int_l (\sin\phi \mathbf{u}_x + \cos\phi \mathbf{u}_y) d\phi = \\ &= \rho_l R^2 \left[\mathbf{u}_x \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \sin\phi d\phi + \mathbf{u}_y \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos\phi d\phi \right]. \end{aligned}$$

Il primo integrale è nullo mentre il secondo vale 2. Pertanto

$$\mathbf{r}_{CM} = \frac{2 \rho_l R^2}{m} \mathbf{u}_y = \frac{2 \rho_l R^2}{\rho_l \pi R} \mathbf{u}_y = \frac{2 R}{\pi} \mathbf{u}_y = 0.637 R \mathbf{u}_y.$$

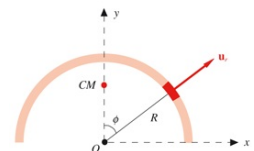


FIGURA 6.8
(Esempio 6.1)

Il centro di massa si trova sull'asse y , come poteva essere previsto per ragioni di simmetria.

Visualizza Soluzione

Esempio 6.2

Si trovi la posizione del centro di massa di una lamina piana omogenea di spessore trascurabile, avente la forma di un semicerchio; la massa è m , il raggio R .

Soluzione

Si consideri un elemento dS di lamina, definito da due rette parallele al diametro AB , a distanza y e $y + dy$ dall'origine (vedi figura 6.9). La lunghezza dell'elemento è $2x = 2\sqrt{R^2 - y^2}$, l'altezza dy , la massa $dm = \rho_S dS = \rho_S 2x dy$, con ρ_S densità superficiale della lamina, costante. La massa della lamina è $m = \rho_S \pi R^2$.

Per ragioni di simmetria il centro di massa si troverà sull'asse y , quindi calcoliamo l'ordinata y_{CM} del centro di massa, sempre da (6.5) opportunamente riscritta e proiettata sull'asse y :

$$m y_{CM} = \int_S y \rho_S 2x dy = 2 \rho_S \int_0^R x y dy .$$

Si osservi che la variabile y può andare da zero a R e che in corrispondenza la variabile x va da R a zero. Da $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ si ricava

$$dy = -\frac{x dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} = -\frac{x}{y} dx \Rightarrow y dy = -x dx$$

e quindi

$$m y_{CM} = -2 \rho_S \int_R^0 x^2 dx = 2 \rho_S \int_0^R x^2 dx = \frac{2}{3} \rho_S R^3 .$$

Sostituendo il valore di m si trova infine

$$y_{CM} = \frac{4 R}{3 \pi} = 0.424 R .$$

Un metodo alternativo consiste nel considerare una diversa superficie dS (vedi figura 6.10), con $dS = \pi r dr$ (base πr per altezza dr). Su dS è distribuita la massa $dm = \rho_S dS$.

Poiché dS è assimilabile a un semianello di raggio r , sappiamo dall'esempio 6.1 che il relativo centro di massa ha ordinata $y = 2r/\pi$. Il semicerchio è costituito da infiniti semianelli infinitesimi e quindi

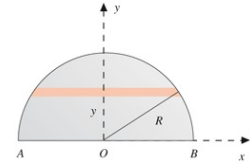


FIGURA 6.9
(Esempio 6.2)

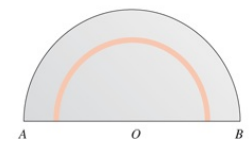


FIGURA 6.10
(Esempio 6.2)

$$m y_{CM} = \int_S y \rho_S dS = \int_0^R \frac{2r}{\pi} \rho_S \pi r dr = 2 \rho_S \int_0^R r^2 dr = \frac{2}{3} \rho_S R^3$$

e si ritrova il risultato precedente.

Sfruttando quanto visto e argomenti di simmetria si dimostri che il centro di massa di una lamina avente la forma di un quarto di cerchio ha le coordinate $x_{CM} = y_{CM} = 4 R/3 \pi$.

Visualizza Soluzione

Esempio 6.3

Si determini la posizione del centro di massa di una bacchetta rettilinea omogenea di massa m e lunghezza l .

Soluzione

Per ragioni di simmetria il centro di massa deve trovarsi al centro della bacchetta. Consideriamo un elemento di massa $dm = \rho_l dx$ posto a distanza x da un estremo della bacchetta, coincidente con l'origine dell'asse x lungo cui è disposta la bacchetta (vedi figura 6.11). Abbiamo

$$m x_{CM} = \int_0^l x \rho_l dx = \rho_l \frac{l^2}{2} .$$

Poiché la massa della bacchetta è $m = \rho_l l$ troviamo $x_{CM} = l/2$ come previsto.

Visualizza Soluzione

Esempio 6.4

Si determini la posizione del centro di massa di una bacchetta di massa m e lunghezza l , la cui densità lineare è ρ_1 nel primo tratto lungo $l/3$ e ρ_2 nel secondo tratto lungo $2l/3$.

Soluzione

Il centro di massa della prima parte della bacchetta si trova a distanza $l/6$ dall'estremo O , mentre il centro di massa della seconda parte si trova a distanza $(l/3 + 1/2 \cdot 2l/3) = 2l/3$ dallo stesso estremo. Calcoliamo ora la posizione del centro di massa di due punti materiali, di massa rispettivamente $\rho_1 l/3$ e $\rho_2 \cdot 2l/3$, posti nei centri di massa delle due parti della bacchetta. Abbiamo da (5.3):

$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{\rho_1 \frac{l}{3} \frac{l}{6} + \rho_2 \frac{2l}{3} \frac{2l}{3}}{\rho_1 \frac{l}{3} + \rho_2 \frac{2l}{3}} = \frac{l}{6} \frac{\rho_1 + 8 \rho_2}{\rho_1 + 2 \rho_2} .$$

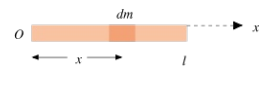


FIGURA 6.11
(Esempio 6.3)



FIGURA 6.12
(Esempio 6.4)

Ovviamente, se $\rho_1 = \rho_2$, $x_{CM} = l/2$.

Si noti che il risultato dipende solo dal rapporto tra le densità; a parità di valore di tale rapporto la posizione del centro di massa non cambia, qualunque siano i valori delle masse.

Visualizza Soluzione

Centro di massa e forza peso

Consideriamo un corpo continuo sottoposto alla forza peso; su ciascun elemento agisce la forza $\mathbf{g} dm$ e la risultante di tutte queste forze parallele è

$$\int \mathbf{g} dm = \mathbf{g} \int dm = m \mathbf{g} ,$$

applicata nel centro di massa. Rispetto ad un polo fisso, che potrebbe essere l'origine delle coordinate, il momento risultante è

$$\mathbf{M} = \int \mathbf{r} \times \mathbf{g} dm = \left(\int \mathbf{r} dm \right) \times \mathbf{g} = m \mathbf{r}_{CM} \times \mathbf{g} = \mathbf{r}_{CM} \times m \mathbf{g} ,$$

eguale al momento della risultante, cioè della forza peso, rispetto allo stesso polo. Questi risultati sono l'estensione ad un sistema continuo di punti di quanto visto nel paragrafo 4.15 per i sistemi di forze parallele.

Anche l'energia potenziale si calcola integrando:

$$E_p = \int g z dm = g \int z dm = m g z_{CM} ,$$

secondo (6.5) proiettata sull'asse z verticale; la formula è identica a (4.21), ricavata per un sistema discreto.

Se il corpo è libero e agisce solo la forza peso, la traiettoria del centro di massa è verticale rettilinea oppure parabolica a seconda delle condizioni iniziali.

Nota. Calcolo della tensione lungo un filo con massa non trascurabile

Nella nota del paragrafo 2.14 abbiamo mostrato che la tensione lungo un filo teso non può avere lo stesso valore se la massa del filo non è trascurabile. Calcoliamo ora la variazione della tensione lungo il filo, nell'ipotesi che la massa m_F sia distribuita lungo il filo con densità lineare $\rho_l = m_F/l$ costante; l è la lunghezza del filo.

Riprendiamo l'esempio 2.17 e la nota suddetta, riferendoci alla figura 2.39; ricordiamo che la tensione nell'estremo superiore vale $T_1 = (m + m_F) g$ e nell'estremo inferiore $T_2 = mg$. Un elemento dx di filo, distante x dall'estremo superiore, è tirato verso l'alto dalla tensione $T(x)$ che deve bilanciare la forza peso $g dm$ dell'elemento di filo e la tensione $T(x + dx)$ che tira l'elemento verso il basso. Supponiamo che $T(x + dx)$ sia inferiore di una quantità dT rispetto a $T(x)$ per cui

$$T(x) = g dm + T(x + dx) = g dm + T(x) - dT \Rightarrow dT = g dm = g \rho_l dx \quad ,$$

$$T_1 - T(x) = \int_0^x dT = g \rho_l x = m_F g \frac{x}{l} \quad ,$$

$$T(x) = T_1 - m_F g \frac{x}{l} = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{l} x \quad .$$

La tensione diminuisce linearmente lungo il filo.

In modo analogo si calcola la variazione nel caso dell'esempio 2.19. L'equazione del moto dell'elemento infinitesimo di filo è $T(x + dx) - T(x) = a dm$, essendo a l'accelerazione di tutto il sistema, e si ottiene la legge lineare $T(x) = T_Q + [(T_P - T_Q)/l] x$.

Applichiamo infine la stessa procedura al caso dell'esempio 2.18, in cui un punto di massa m ruota in un piano orizzontale attorno ad un punto O con velocità angolare ω (figura 2.33). Il filo ha massa m_F ed è lungo R , così che $\rho_l = m_F/R$. La tensione ha il valore incognito T_O nel centro e decresce fino al valore $T_P = m \omega^2 R$. L'equazione del moto dell'elemento di filo è

$$T(r) - T(r + dr) = dT = dm \omega^2 r = \rho_l \omega^2 r dr$$

$$\Rightarrow T_O - T(r) = \rho_l \omega^2 \frac{r^2}{2} = m_F \omega^2 \frac{r^2}{2R} \quad ,$$

$$T(r) = T_O - m_F \omega^2 \frac{r^2}{2R} \quad .$$

Abbiamo detto che per $r = R$ $T(R) = T_P = m \omega^2 R$ e quindi

$$T_O = m \omega^2 R + m_F \omega^2 \frac{R}{2} \quad :$$

nell'origine la tensione (e la reazione vincolare) è aumentata rispetto al caso $m_F = 0$, come se la massa del filo fosse concentrata nel centro del filo. In definitiva

$$T(r) = T_O - \frac{T_O - T_P}{R^2} r^2 \quad .$$

La legge di variazione è quadratica.

6.4 Rotazioni rigide attorno ad un asse fisso in un sistema di riferimento inerziale

Riprendiamo lo studio del moto rotatorio di un corpo rigido, iniziato nel paragrafo 6.2, e consideriamo la rotazione di un corpo rigido attorno ad un asse fisso in un sistema di riferimento inerziale, situazione particolare che però si presenta in molti problemi pratici, come ad esempio le rotazioni di parti di macchine o di motori. I punti dell'asse di rotazione sono punti fissi e quindi possono essere utilizzati come poli per il calcolo dei momenti. Si osservi che l'asse di rotazione può essere esterno al corpo e che il centro di massa non è detto sia un punto dell'asse stesso. Il vettore velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ ha direzione fissa, quella dell'asse di rotazione, mentre il modulo è in generale variabile nel tempo; il verso di $\boldsymbol{\omega}$ indica il verso della rotazione. Se $\boldsymbol{\omega}$ varia, è diverso da zero il vettore accelerazione angolare $\boldsymbol{\alpha} = d\boldsymbol{\omega}/dt$, anch'esso parallelo all'asse di rotazione. Ricordiamo che nella rotazione rigida ciascun punto P_i del corpo descrive in un piano ortogonale all'asse una traiettoria circolare con centro sull'asse e raggio R_i pari alla distanza di P_i dall'asse. La velocità del punto è \mathbf{v}_i , di modulo ωR_i , l'accelerazione è \mathbf{a}_i , con componente normale $\omega^2 R_i$ e tangente a R_i .

Nel seguito, per l'espressione di grandezze additive, useremo per comodità sommatorie sui singoli punti, proprie di un corpo rigido discontinuo. È chiaro peraltro come si passa alla struttura continua e agli integrali.

Calcolo del momento angolare. Momento d'inerzia

Assumiamo l'asse z come asse di rotazione; $\boldsymbol{\omega}$ è quindi parallelo all'asse z . Il polo dei momenti è il punto O sull'asse z . Il raggio vettore \mathbf{r}_i del punto P_i forma un angolo θ_i con l'asse z e un angolo di $\pi/2$ con la velocità \mathbf{v}_i del punto P_i . In figura 6.13 è mostrata anche la traiettoria del punto P_i , di raggio R_i , e si vede che $R_i = r_i \sin \theta_i$.

Il momento angolare del punto P_i rispetto al polo O è dato da $\mathbf{L}_i = \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i$: \mathbf{L}_i è ortogonale al piano individuato dai vettori \mathbf{r}_i , \mathbf{v}_i e forma un angolo $\pi/2 - \theta_i$ con l'asse z . Il modulo di \mathbf{L}_i è

$$L_i = m_i r_i v_i = m_i r_i R_i \omega \quad .$$

Calcoliamo ora la proiezione del momento angolare \mathbf{L}_i sull'asse di rotazione, ovvero il *momento angolare assiale*:

$$L_{i,z} = L_i \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_i\right) = L_i \sin \theta_i = m_i r_i \sin \theta_i R_i \omega = m_i R_i^2 \omega \quad .$$

Il momento angolare del corpo è $\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{L}_i$ e in generale non è parallelo

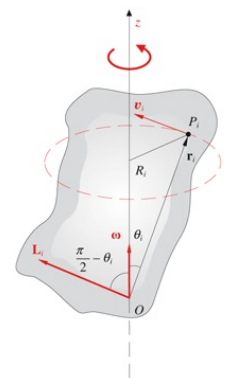


FIGURA 6.13

all'asse di rotazione: ciò vuol dire che in generale non esiste una relazione di proporzionalità tra \mathbf{L} e $\boldsymbol{\omega}$. La proiezione di \mathbf{L} sull'asse z è

$$L_z = \sum_i L_{iz} = (\sum_i m_i R_i^2) \omega = I_z \omega . \quad (6.7)$$

Il coefficiente I_z si chiama *momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse z* :

$$I_z = \sum_i m_i R_i^2 = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) . \quad (6.8)$$

Il momento d'inerzia dipende quindi dalle masse e dalla loro posizione rispetto all'asse di rotazione: non è una caratteristica del corpo che si possa calcolare nota la sua struttura (come la posizione del centro di massa), ma per definirlo è necessario conoscere anche la posizione rispetto al corpo dell'asse di rotazione.

La (6.8) pertanto dice che *la componente del momento angolare rispetto all'asse di rotazione è proporzionale alla velocità angolare e dipende, tramite il coefficiente I_z , solo dalla forma del corpo e dalla posizione dell'asse rispetto al corpo.*

Riassumendo: il momento angolare di un corpo rigido che ruota rispetto ad un asse non è in generale parallelo all'asse di rotazione e ruota attorno a questo assieme al corpo. La componente parallela all'asse può variare solo in modulo, è proporzionale a ω e non dipende dalla scelta del polo. Invece la *componente ortogonale all'asse* varia in direzione, può variare in modulo e dipende dalla scelta del polo; essa è data dalla somma vettoriale di contributi, ciascuno dei quali vale in modulo

$$L_{i,\perp} = L_i \cos\theta_i = m_i r_i R_i \omega \cos\theta_i . \quad (6.9)$$

Il momento angolare risulta certamente parallelo all'asse di rotazione e quindi a $\boldsymbol{\omega}$ quando l'asse di rotazione è un *asse di simmetria* del corpo (per ogni \mathbf{L}_i c'è un \mathbf{L}_j simmetrico rispetto all'asse così che la loro somma vettoriale è parallela all'asse) o, più in generale, quando l'asse di rotazione coincide con un *asse principale d'inerzia*, come vedremo nel paragrafo 6.10. In tali condizioni

$$\mathbf{L} = I_z \boldsymbol{\omega} , \quad L = L_z , \quad L_{\perp} = 0 . \quad (6.10)$$

Un moto come quello più generale di \mathbf{L} , che ruota attorno all'asse di rotazione, si chiama, come già discusso nel paragrafo 1.11, *moto di precessione* e in particolare moto di precessione uniforme se la velocità angolare è costante. In questo caso anche \mathbf{L} è costante in modulo e dalla (1.32) e (4.11) si ha

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L} . \quad (6.11)$$

La variazione di \mathbf{L} nel tempo, che si riferisce solo alla variazione di direzione e non del modulo, è espressa semplicemente da $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}$; $d\mathbf{L}$ è ortogonale a \mathbf{L} e

Momento d'inerzia rispetto ad un'asse

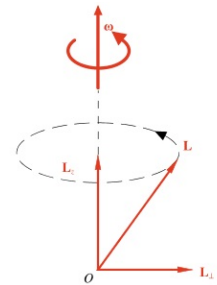


FIGURA 6.14

parallelo a \mathbf{M} e il suo modulo vale, in base alla figura 6.15, $dL = L_{\perp} d\Phi$.

Pertanto, sempre in modulo

$$M = \frac{dL}{dt} = L_{\perp} \frac{d\phi}{dt} = L_{\perp} \omega \quad (6.12)$$

La situazione dinamica dunque è la seguente, nel caso di ω costante: il momento angolare, che non è parallelo a ω , cambia nel tempo secondo (6.11) e ciò è dovuto al momento delle forze esterne, il cui modulo è dato da (6.12). Resta da determinare quali siano le forze esterne che agiscono durante la rotazione uniforme del corpo rigido. Per chiarire l'argomento ci serviamo degli esempi che seguono. Quando invece \mathbf{L} è parallelo a ω non c'è precessione e, se ω è costante, non c'è momento risultante delle forze esterne.

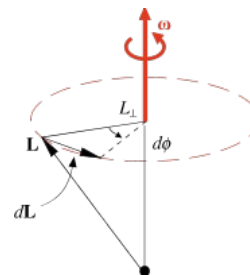


FIGURA 6.15

Esempi sugli effetti del non parallelismo tra \mathbf{L} e ω

Consideriamo il corpo rigido più semplice possibile, due punti materiali di eguale massa m collegati tra loro da un'asta di massa trascurabile e lunga $2r$. Facciamo ruotare questo corpo attorno all'asse di simmetria verticale passante per il centro di massa O e ortogonale all'asta di collegamento: in figura 6.16 S è il supporto dell'asse e C un cuscinetto che assicura la verticalità. Sia ora che nei casi successivi supponiamo costante la velocità angolare e che non ci siano attriti.

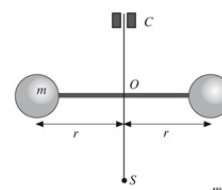


FIGURA 6.16

I momenti angolari dei due punti, qualunque sia il polo sull'asse, hanno la stessa componente lungo l'asse di rotazione e componenti opposte ortogonalmente all'asse, per cui

$$L = L_z = 2mr^2\omega = I_z\omega \quad , \quad L_{\perp} = 0 \quad .$$

\mathbf{L} è costante, il momento delle forze è nullo. Verifichiamo indipendentemente questo risultato. A ciascun punto è applicata la forza $m\mathbf{g}$ e, tramite l'aggancio all'asta, la forza centripeta che è eguale in modulo a $m\omega^2 r$: i momenti delle forze peso rispetto ad un polo sull'asse sono eguali ed opposti, le due forze centripete formano una coppia di braccio nullo. Per quanto riguarda le forze, la risultante vale $2m\mathbf{g}$ ed è applicata nel centro di massa O del corpo. Il supporto S sostiene il corpo esplicando la reazione $-2m\mathbf{g}$ e, a rigore, il cuscinetto C non ha alcuna funzione poiché in condizioni di perfetta simmetria l'asse resta spontaneamente verticale.

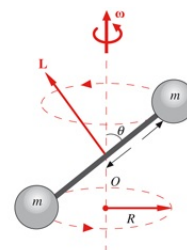


FIGURA 6.17

Ruotiamo adesso il sistema, come mostrato nella figura 6.17. I momenti angolari dei due punti, prendendo il centro di massa O come polo, sono eguali, la risultante \mathbf{L} non è parallela all'asse e ha le componenti

$$\begin{aligned} L_z &= 2m(r \sin\theta)^2 \omega = 2mR^2 \omega && \text{costante} \\ L_{\perp} &= 2m r R \omega \cos\theta && \text{variabile in direzione} \end{aligned} .$$

\mathbf{L} precessa uniformemente e la sua variazione è legata al momento delle forze esterne; in modulo, secondo (6.12),

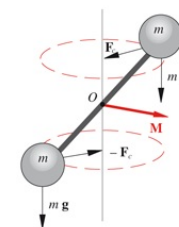


FIGURA 6.18

$$M = L_{\perp} \omega = 2m r R \omega^2 \cos\theta \quad .$$

Le forze peso rispetto ad O continuano ad avere momenti eguali ed opposti e non contribuiscono al momento risultante; invece le forze centripete, ciascuna pari a $m\omega^2 R$, sono ora una coppia di braccio $2r\cos\theta$ (vedi figura 6.18) con momento $2mrR\omega^2\cos\theta$. In conclusione, quando le masse sono distribuite in modo tale che \mathbf{L} e $\boldsymbol{\omega}$ non siano paralleli, esiste un momento esterno responsabile della variazione di \mathbf{L} nel tempo, pur essendo la rotazione uniforme: tale momento è il momento delle forze centripete che permettono il verificarsi del moto rotatorio. Il risultato non dipende dalla scelta del polo perché non ne dipende \mathbf{M} ; cambiando polo cambia il momento angolare, ma non la sua derivata rispetto al tempo.

Dalla figura 6.18 si capisce che l'azione del momento tende a modificare la direzione dell'asse di rotazione, per cui il cuscinetto C viene sollecitato; tutta la struttura di sostegno (non disegnata) reagisce sviluppando un momento eguale e contrario a \mathbf{M} , così da mantenere verticale l'asse di rotazione. La sollecitazione è proporzionale a ω^2 e richiede un adeguato dimensionamento di cuscinetto e sostegno per evitarne la rottura; ad ogni modo c'è un'usura nel tempo. In pratica conviene, quando ciò non sia in contrasto con altri requisiti, realizzare per sistemi in rotazione una configurazione per cui \mathbf{L} sia parallelo a $\boldsymbol{\omega}$. Questo è il motivo, per esempio, della procedura di equilibratura delle ruote di un'automobile.

La risultante delle forze invece non cambia passando dalla figura 6.16 alla figura 6.17; inoltre le reazioni in C sono certamente ortogonali all'asse e il sostegno S deve reagire soltanto al peso.

Il primo caso esaminato, quello della figura 6.16, può essere reso asimmetrico spostando l'asse di rotazione (figura 6.19). Il centro di massa non sta più sull'asse e dista da O di $r_{CM} = (r_2 - r_1)/2$. Le forze centripete hanno risultante $m\omega^2 (r_2 - r_1)$, come se la massa $2m$ fosse concentrata nel centro di massa, in accordo col teorema del moto del centro di massa. Le forze peso hanno, rispetto a qualsiasi punto dell'asse, il momento $\mathbf{r}_{CM} \times 2m\mathbf{g}$, di modulo $mg (r_2 - r_1)$. Durante il moto in ogni istante sono applicate all'asse in S e in C forze di reazione orizzontali la cui somma è eguale alla forza centripeta $m\omega^2 (r_2 - r_1)$ necessaria a mantenere il centro di massa in orbita circolare; inoltre S deve sostenere il peso del corpo e in C deve svilupparsi una forza il cui momento rispetto a S sia opposto al momento della forza peso. Queste conclusioni si applicano in generale ai casi in cui il centro di massa non sta sull'asse di rotazione.

Infine una combinazione dei vari effetti si ha se la configurazione asimmetrica viene anche inclinata (figura 6.20).

Ampliando quanto già rilevato, diciamo che la migliore situazione dinamica, dal punto di vista dell'equilibrio dell'asse di rotazione, si ha quando il centro di

massa sta sull'asse e questo è un asse di simmetria o, più in generale, un asse principale d'inerzia.

Equazione del moto

Nel caso più semplice in cui \mathbf{L} è parallelo a $\boldsymbol{\omega}$, valgono le (6.10) per cui

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d}{dt} (I_z \boldsymbol{\omega}) = I_z \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = I_z \boldsymbol{\alpha}$$

e la (4.11) si scrive

$$\mathbf{M} = I_z \boldsymbol{\alpha} \quad (6.13)$$

Questa è l'equazione del moto di rotazione: la conoscenza del momento delle forze esterne permette di calcolare l'accelerazione angolare, se è noto il momento di inerzia; sia $\boldsymbol{\alpha}$ che \mathbf{M} sono paralleli all'asse di rotazione, cioè a $\boldsymbol{\omega}$.

Si può quindi ottenere la legge oraria, note le condizioni iniziali del moto, cioè la posizione angolare e la velocità angolare iniziali:

$$\alpha = \frac{M}{I_z} \Rightarrow \omega(t) = \omega_0 + \int_0^t \alpha dt \Rightarrow \theta(t) = \theta_0 + \int_0^t \omega dt \quad ,$$

che sono le (1.28) e (1.29). Se $M = 0$ il corpo resta in quiete o si muove con moto circolare uniforme:

$$\alpha = 0 \quad , \quad \omega = \omega_0 \quad , \quad \theta = \theta_0 + \omega t \quad .$$

Nel caso che M sia costante il moto è circolare uniformemente accelerato:

$$\alpha = \text{costante} \quad , \quad \omega = \omega_0 + \alpha t \quad , \quad \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 \quad .$$

Infine con M generico, $\alpha = \alpha(t)$ e il moto è circolare vario. Quando invece \mathbf{L} non è parallelo a $\boldsymbol{\omega}$ si utilizza (6.7):

$$\frac{dL_z}{dt} = \frac{d}{dt} (I_z \omega) = I_z \frac{d\omega}{dt} = I_z \alpha$$

e proiettando (4.11) sull'asse di rotazione

$$M_z = I_z \alpha \quad (6.14)$$

Da questa si ricava $\alpha = M_z/I_z$ e la legge oraria, con le stesse formule appena scritte: il moto di rotazione dipende adesso dal momento assiale delle forze esterne.

Resta l'altra proiezione di (4.11) in direzione ortogonale all'asse di rotazione, cioè $dL_{\perp} / dt = M_{\perp}$. Questa non porta a variazione di α , ma è responsabile degli effetti descritti precedentemente negli esempi.

La situazione è analoga a quella vista nel moto circolare di un punto

Equazione del moto di rotazione

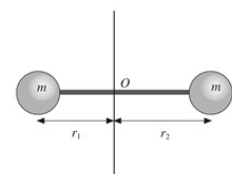


FIGURA 6.19

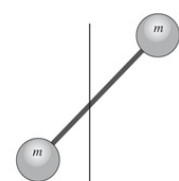


FIGURA 6.20

materiale. La legge $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ proiettata sulla tangente alla traiettoria determina l'accelerazione tangenziale \mathbf{a}_T e quindi la legge oraria, mentre la proiezione ortogonale alla traiettoria permette di calcolare la forza centripeta necessaria perché avvenga il moto, ma non ha influenza sulla legge oraria.

Per quanto riguarda in particolare il moto del centro di massa, se questo non sta sull'asse di rotazione, ma ne dista R_{CM} , l'accelerazione \mathbf{a}_{CM} si calcola a partire da a e ω : precisamente la componente tangente è $a_{CM,T} = \alpha R_{CM}$, quella normale è $a_{CM,N} = \omega^2 R_{CM}$.

Calcolo dell'energia cinetica e del lavoro

L'energia cinetica del corpo rigido nel moto di rotazione è data da

$$E_k = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i R_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} I_z \omega^2 \quad . \quad (6.15)$$

Anche l'energia cinetica dipende dal momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse di rotazione. La (6.15) mostra l'altra possibile maniera per arrivare alla definizione di questa grandezza, in accordo con (6.8).

Se il momento angolare è parallelo a $\boldsymbol{\omega}$, da (6.10) abbiamo

$$E_k = \frac{L^2}{2I_z} \quad ;$$

nel caso contrario $E_k = L^2 / 2I_z$.

Quando un corpo rigido in quiete o in rotazione con velocità angolare ω_{in} viene portato a ruotare con velocità angolare ω_{fin} a seguito dell'applicazione di un momento esterno, l'energia cinetica subisce una variazione e quindi è stato compiuto un lavoro. La (4.18) si scrive nel caso in esame

$$W = \Delta E_k = \frac{1}{2} I_z \omega_{fin}^2 - \frac{1}{2} I_z \omega_{in}^2 \quad . \quad (6.16)$$

Ricaviamo ora la relazione tra momento e lavoro. La (6.16) in forma infinitesima dà, tenendo conto di (6.15) e (6.14),

$$dW = dE_k = I_z \omega d\omega = I_z \frac{d\theta}{dt} \alpha dt = I_z \alpha d\theta = M_z d\theta \quad .$$

Integrando dalla posizione iniziale a quella finale

$$W = \int_0^\theta M_z d\theta \quad . \quad (6.17)$$

Se in particolare $\mathbf{L} = I_z \boldsymbol{\omega}$, a M_z va sostituito M . In ogni caso per eseguire il calcolo bisogna conoscere la dipendenza del momento dall'angolo.

La potenza istantanea è data da

$$\frac{dW}{dt} = M_z \frac{d\theta}{dt} = M_z \omega \quad .$$

Nella trattazione della rotazione di un corpo rigido abbiamo incontrato situazioni già viste nel moto circolare; anche la (6.17) è formalmente identica alla (2.25). Questo fatto non deve sorprendere perché si tratta sempre di moto circolare, anche se non di un punto, ma di un insieme di punti con distanze mutue invariabili. La legge dinamica è diversa: in essa l'azione esterna è rappresentata dal momento delle forze e l'inerzia del corpo dal momento d'inerzia (come discuteremo nel paragrafo 6.5), però alla fine si arriva a calcolare l'accelerazione angolare α , che è identica per tutti i punti come lo è la velocità angolare, e da questo punto in poi la cinematica è la stessa. Altro fatto in comune, che abbiamo già sottolineato, è la presenza di forze centripete, necessarie perché ci sia un moto circolare.

Esempio 6.5

Si consideri un disco omogeneo, di raggio r e massa m_2 , che può ruotare senza attrito attorno ad un asse fisso orizzontale passante per il suo centro di massa O . Sul bordo del disco è avvolto un filo inestensibile che non slitta rispetto al disco e sostiene un punto materiale di massa m_1 . Si determini il moto del sistema, la tensione del filo e la reazione dei supporti che sostengono l'asse di rotazione. Il momento d'inerzia del disco rispetto all'asse di rotazione vale $I = \frac{1}{2} m_2 r^2$.

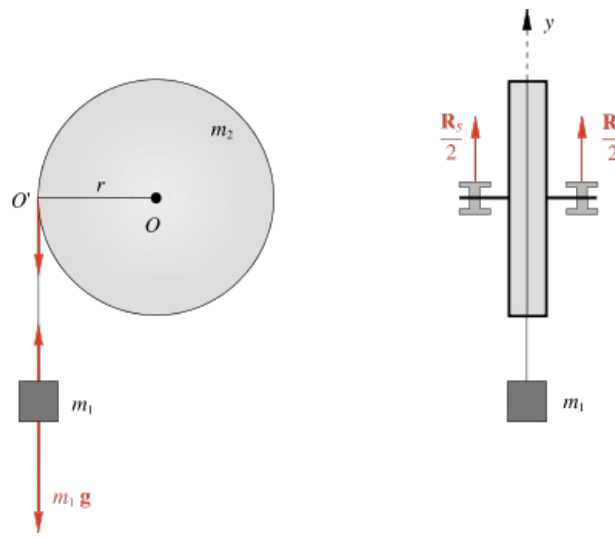


FIGURA 6.21

Soluzione

Per l'equilibrio verticale del disco vale l'equazione

$$m_2 \mathbf{g} + \mathbf{T} + \mathbf{R}_s = 0$$

dove \mathbf{T} è la tensione del filo e \mathbf{R}_s la reazione dei supporti, ciascuno dei quali esercita una reazione $\mathbf{R}_s / 2$ (si veda la figura 6.21).

Come polo dei momenti scegliamo il centro di massa del disco O . Rispetto a tale polo il momento della forza peso è nullo come pure quello di \mathbf{R}_s . Solo la tensione del filo ha momento diverso da zero e l'equazione del moto del disco è

$$I \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{T} \quad .$$

Per il punto di massa m_1 l'equazione del moto è

$$m_1 \mathbf{g} + \mathbf{T} = m_1 \mathbf{a} \quad .$$

Inoltre, data la situazione di non slittamento del filo rispetto al disco, si ha $a = ar$: l'accelerazione di m_1 è eguale a quella di tutti i punti del filo e quindi anche di O' , che sta sul bordo.

Dalla seconda e terza relazione, riscritte come

$$\frac{1}{2} m_2 r^2 \frac{a}{r} = rT \quad , \quad m_1 g - T = m_1 a \quad ,$$

si ottiene

$$a = \frac{2 m_1}{2 m_1 + m_2} g \quad , \quad T = \frac{m_1 m_2}{2 m_1 + m_2} g \quad .$$

Si sostituisce nella prima relazione e si ha

$$R_s = m_2 g + T = \frac{3 m_1 + m_2}{2 m_1 + m_2} m_2 g \quad ,$$

che risulta minore di $(m_1 + m_2) g$, reazione dei supporti quando il sistema è fermo.

Il moto del punto materiale è rettilineo uniformemente accelerato (con accelerazione minore di g), mentre per il disco il moto è circolare uniformemente accelerato con accelerazione angolare $\alpha = a/r$. Sugeriamo, per esercizio, di prendere come polo il punto O' e verificare che la soluzione è la stessa. L'accelerazione di m_1 e quindi del disco può essere calcolata anche utilizzando la conservazione dell'energia:

$$\frac{1}{2} m_1 v^2 + m_1 g y + \frac{1}{2} I \omega^2 = \text{costante} \quad .$$

L'asse verticale y è orientato verso l'alto per cui la velocità del punto materiale è $v = - dy/dt$. Deriviamo la precedente relazione, tenendo conto che $v = \omega r$:

$$m_1 v \frac{dv}{dt} - m_1 g v + \frac{1}{2} m_2 r^2 \omega \frac{d\omega}{dt} = 0 \Rightarrow m_1 v a - m_1 g v + \frac{1}{2} m_2 r^2 \frac{v}{r} \frac{a}{r} = 0$$

$$\Rightarrow a = \frac{2 m_1}{2 m_1 + m_2} \quad .$$

Dalla conservazione dell'energia possiamo ottenere direttamente la velocità v e la velocità angolare ω in funzione della quota y .

Visualizza Soluzione

6.5 Momento d'inerzia

Nello studio delle rotazioni rigide il momento d'inerzia ha un ruolo fondamentale, analogo a quello della massa nella legge di Newton: a parità di momento applicato un corpo assume un'accelerazione angolare maggiore o minore a seconda del valore del momento d'inerzia rispetto all'asse di rotazione. C'è però una profonda differenza nel paragone tra il ruolo della massa e del momento d'inerzia, come abbiamo già sottolineato: mentre possiamo associare ad ogni corpo una certa massa, non ha senso parlare di momento d'inerzia di un corpo di determinata forma, ma bisogna sempre specificare l'asse di rotazione a cui si fa riferimento.

Il *momento d'inerzia per un corpo continuo* si deduce da (6.8) con lo stesso procedimento che porta da (4.3) a (6.5) per la posizione del centro di massa:

$$I = \int R^2 dm = \int \rho R^2 dV = \int \rho (x^2 + y^2) dV ; \quad (6.18)$$

R è la distanza dell'elemento di massa dm dall'asse z , assunto come asse di rotazione.

Essendo il momento d'inerzia additivo, cioè definito attraverso sommatorie o integrali, se si suddivide un corpo in tante parti *il momento d'inerzia totale è la somma dei momenti d'inerzia parziali, calcolati tutti rispetto allo stesso asse*; si ricordi il ragionamento analogo fatto per la posizione del centro di massa.

Nella tabella sono riportati i momenti d'inerzia di alcuni corpi rigidi omogenei, rispetto agli assi indicati, che sono assi di simmetria passanti per il centro di massa.

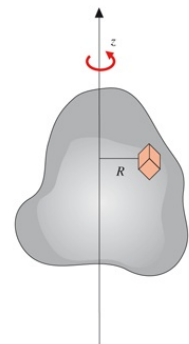
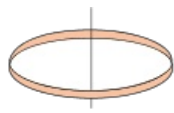
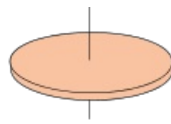


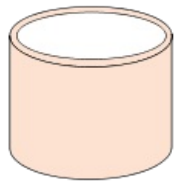
FIGURA 6.22



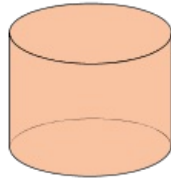
anello $I = m R^2$



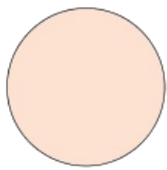
disco $I = \frac{1}{2} m R^2$



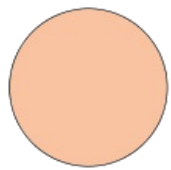
guscio cilindrico
sottile
 $I = m R^2$



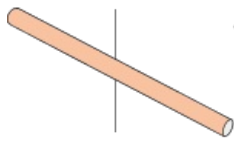
cilindro pieno
 $I = \frac{1}{2} m R^2$



guscio sferico sottile
 $I = \frac{2}{3} m R^2$

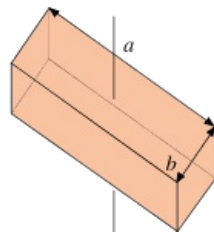


sfera piena
 $I = \frac{2}{5} m R^2$



asta sottile

$$I = \frac{1}{12} m d^2$$



lastra

$$I = \frac{1}{12} m (a^2 + b^2)$$

Negli esempi che seguono è indicato il metodo di calcolo di alcuni momenti d'inerzia.

Esempio 6.6

Calcolare il momento d'inerzia di un anello omogeneo, di massa m e raggio R , rispetto ad un asse z passante per il centro dell'anello e ortogonale al piano dell'anello, come nella relativa figura della tabella. Estendere il calcolo a un guscio cilindrico sottile.

Soluzione

Consideriamo prima l'anello: la massa è distribuita uniformemente lungo una circonferenza e pertanto ciascun elemento di massa dell'anello dista della stessa quantità R dall'asse z ; il momento d'inerzia vale quindi $I_z = m R^2$.

Eseguiamo a scopo didattico il calcolo partendo da (6.18) e tenendo conto che la densità è lineare:

$$I_z = \int R^2 dm = \int \rho_l R^2 dl = \rho_l R^2 \int dl = \rho_l R^2 2 \pi R \quad .$$

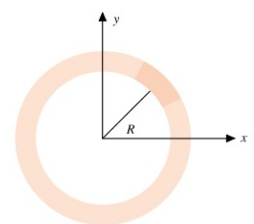


FIGURA 6.23
(Esempio 6.6)

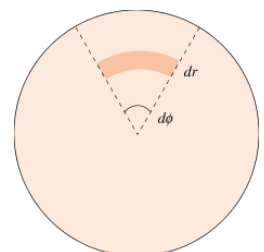


FIGURA 6.24

Poiché la massa dell'anello è $m = \rho_l 2\pi R$, si ottiene $I_z = m R^2$. Il guscio cilindrico sottile si può considerare come un insieme di anelli sovrapposti e, se m è la massa totale, di nuovo si ha $I_z = m R^2 (= \sum_i m_i R^2)$.

Visualizza Soluzione

Esempio 6.7

Calcolare il momento d'inerzia di un disco sottile omogeneo, di massa m e raggio R , rispetto ad un asse z ortogonale al piano del disco e passante per il suo centro. Estendere il calcolo a un disco spesso, ovvero a un cilindro pieno.

Soluzione

La massa è distribuita uniformemente sulla superficie del disco, con densità superficiale ρ_s : $m = \rho_s \pi R^2$; il momento d'inerzia è

$$I_z = \int r^2 dm = \int \rho_s r^2 dS \quad ,$$

dove r rappresenta la distanza dell'elemento di massa dm dall'asse e varia tra zero e R . Per eseguire il calcolo è più semplice utilizzare le coordinate polari nel piano. La superficie infinitesima dS è quella tratteggiata in figura 6.24 e la sua area vale, a meno di infinitesimi di ordine superiore, $dS = r dr d\Phi$. Pertanto si ha

$$I_z = \rho_s \int r^2 r dr d\Phi = \rho_s \int r^3 dr d\Phi \quad .$$

Dato che la funzione integranda non dipende da Φ , è possibile spezzare l'integrale:

$$I_z = \rho_s \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} d\Phi = 2\pi \rho_s \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{2} \pi \rho_s R^4 \quad .$$

Utilizzando l'espressione della massa, $I_z = \frac{1}{2} m R^2$. Un cilindro è equivalente ad un insieme di dischi sottili sovrapposti e quindi $I_z = \frac{1}{2} m R^2$ se m è la massa totale. A questo risultato si può arrivare attribuendo ad ogni disco sottile la massa dm e il momento d'inerzia $dI = R^2 dm/2$ e sommando tutti i contributi: $I_z = \int dI$; oppure si può pensare alla somma di tanti termini finiti, come fatto per il guscio cilindrico nell'esempio 6.6.

Visualizza Soluzione

Esempio 6.8

Calcolare il momento d'inerzia di un guscio sferico sottile, di massa m e raggio R , rispetto ad un asse z coincidente con un diametro.

Soluzione

La massa è distribuita uniformemente con densità ρ_S su una superficie sferica; l'elemento di superficie dS mostrato in figura 6.25 ha l'area

$$dS = r \, d\phi \, R \, d\theta$$

e su di esso si trova la massa $dm = \rho_S dS$, che dista dall'asse di rotazione $r = R \sin\theta$. Pertanto:

$$\begin{aligned} I_z &= \int r^2 dm = \int r^2 \rho_S r \, d\phi \, R \, d\theta = \rho_S R^4 \int \sin^3 \theta \, d\theta \, d\phi = \rho_S R^4 \int_0^\pi \sin^3 \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \\ &= 2\pi \rho_S R^4 \int_0^\pi \sin^3 \theta \, d\theta . \end{aligned}$$

L'integrale $\int_0^\pi \sin^3 \theta \, d\theta$ si può scrivere $-\int_0^\pi (1 - \cos^2 \theta) \, d\cos\theta = \frac{4}{3}$; per cui

$$I_z = \frac{8}{3} \pi \rho_S R^4 = \frac{2}{3} m R^2$$

considerando che $m = \rho_S 4\pi R^2$.

Visualizza Soluzione

Esempio 6.9

Calcolare il momento d'inerzia di una sfera omogenea, di massa m e raggio R , rispetto ad un asse z coincidente con un diametro.

Soluzione

La massa, distribuita uniformemente all'interno della sfera con densità ρ , vale $m = \rho \frac{4}{3} \pi R^3$. Dividiamo la sfera in sezioni circolari di raggio $r = R \sqrt{1 - \frac{z^2}{R^2}}$.

Ciascuna è assimilabile a un disco di massa $dm = \rho \pi r^2 dz$ e momento d'inerzia $dI = \frac{1}{2} dm r^2 = \frac{1}{2} \rho \pi (R^2 - z^2)^2 dz$.

$$dm = \rho \, dV = \rho \, \pi r^2 \, dz$$

e momento d'inerzia

$$dI = \frac{1}{2} dm r^2 = \frac{1}{2} \rho \pi (R^2 - z^2)^2 dz$$

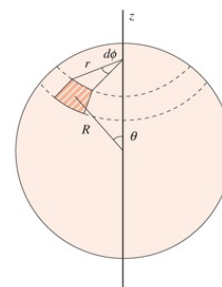


FIGURA 6.25 (Esempio 6.8)

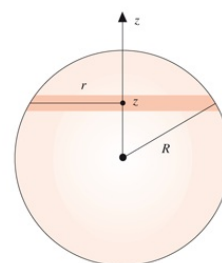


FIGURA 6.26 (Esempio 6.9)

Integriamo per z variabile da zero a R , moltiplicando il risultato per due così da coprire l'intera sfera:

$$I_z = \rho \pi \int_0^R (R^4 + z^4 - 2R^2 z^2) dz = \rho \pi \left(R^5 + \frac{R^5}{5} - \frac{2}{3} R^5 \right) = \rho \pi R^5 \frac{8}{15} = \frac{2}{5} m R^2 .$$

Alternativamente, si può considerare la sfera come formata da gusci sferici infinitesimi, cioè di raggio r e spessore dr , con r variabile da zero a R . Ciascun guscio ha massa

$$dm = \rho dV = \rho 4 \pi r^2 dr$$

e momento d'inerzia, secondo l'esempio 6.8,

$$dI = \frac{2}{3} r^2 dm = \frac{8}{3} \rho \pi r^4 dr \Rightarrow I_z = \frac{8}{3} \rho \pi \int_0^R r^4 dr = \frac{8}{15} \rho \pi R^5 = \frac{2}{5} m R^2 .$$

Visualizza Soluzione

Esempio 6.10

Calcolare il momento d'inerzia di una sottile asta omogenea, di massa m e lunghezza d , rispetto ad un asse ortogonale all'asta e passante per il suo centro. Ripetere il calcolo se invece l'asse passa per un estremo dell'asta.

Soluzione

Detta S la sezione dell'asta, la massa è $m = \rho S d$; un elemento di massa $dm = \rho S dx$ si trova a distanza x dall'asse (si assume che le dimensioni trasversali siano trascurabili rispetto a d). Pertanto

$$I_z = \int_{-d/2}^{d/2} x^2 dm = \rho S \int_{-d/2}^{d/2} x^2 dx = \frac{1}{12} \rho S d^3 .$$

Utilizzando la massa dell'asta, $I_z = \frac{1}{12} m d^2$

Nel secondo caso

$$I_z = \int_0^d x^2 dm = \rho S \int_0^d x^2 dx = \frac{1}{3} \rho S d^3 = \frac{1}{3} m d^2 .$$

Visualizza Soluzione

Esempio 6.11

Dato un corpo piatto, per esempio una lamina sottile, che ha una dimensione trascurabile rispetto alle altre due, calcolare i momenti di inerzia rispetto ai tre assi, x , y , z della figura 6.28.

Soluzione

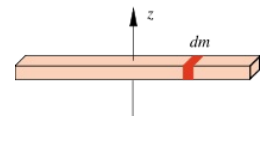


FIGURA 6.27
(Esempio 6.10)

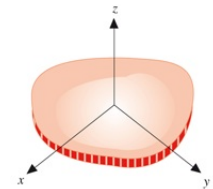


FIGURA 6.28
(Esempio 6.11)

Si può assumere, dato lo spessore trascurabile del corpo, $z = 0$, per cui

$$I_x = \int \rho (y^2 + z^2) dV = \int \rho y^2 dV$$

$$I_y = \int \rho (x^2 + z^2) dV = \int \rho x^2 dV$$

$$I_z = \int \rho (x^2 + y^2) dV = I_x + I_y \quad .$$

Se il corpo piatto è un anello con centro nell'origine

$$I_x = I_y = \frac{1}{2} I_z = \frac{1}{2} m R^2 \quad .$$

Analogamente, per un disco, $I_x = I_y = \frac{1}{2} I_z = \frac{1}{4} m R^2$

Visualizza Soluzione

In tutte le formule trovate il momento d'inerzia ha un'espressione del tipo $I = f m d^2$, dove m è la massa del corpo, d una dimensione significativa (ad esempio il raggio per una sfera, la lunghezza per un'asta ecc.) e f un fattore numerico legato alla struttura del sistema (forma del corpo e posizione dell'asse di rotazione). Pertanto il momento d'inerzia si può sempre scrivere come

$$I = m k^2 \quad , \quad k = \sqrt{f} d = \sqrt{\frac{I}{m}} \quad ; \quad (6.19)$$

Raggio giratore

k è il *raggio giratore* del corpo. Dato un corpo con momento d'inerzia I rispetto ad un asse, si immagini di concentrare la sua massa in un punto: k rappresenta la distanza dall'asse a cui bisogna porre questo punto per avere lo stesso momento d'inerzia I .

Unità di misura

Il momento d'inerzia, somma di prodotti massa per distanza al quadrato, si misura in kg m^2 .

Il raggio giratore si misura ovviamente in metri.

6.6 Teorema di Huygens-Steiner

Abbiamo già messo in evidenza, nei precedenti calcoli di momenti d'inerzia, come siano stati scelti assi di rotazione particolari, cioè assi di simmetria passanti per il centro di massa. Se si sceglie un altro asse per il quale vengono meno le condizioni di simmetria il calcolo dei vari integrali può diventare a volte assai complicato.

Il *teorema di Huygens-Steiner* (H.S.) semplifica enormemente il problema. Esso stabilisce che il momento d'inerzia di un corpo di massa m rispetto ad un asse che si trova a una distanza a dal centro di massa del corpo è dato da

$$I = I_c + m a^2 \quad (6.20)$$

dove I_c è il momento d'inerzia del corpo rispetto ad un asse parallelo al primo e passante per il centro di massa.

Per dimostrare il teorema, consideriamo due assi z e z' , tra loro paralleli, distanti a ; l'asse z' passa per il centro di massa. La relazione tra le coordinate nei due sistemi, con centro in O e nel centro di massa, è dato da

$$x = x' \quad , \quad y = y' + a \quad , \quad z = z' \quad .$$

Il momento d'inerzia di un punto generico P_i rispetto all'asse z è dato da

$$m_i (x_i^2 + y_i^2) .$$

Sommiamo su tutti i punti utilizzando le formule di trasformazione:

$$I_z = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) = \sum_i [x_i'^2 + (y_i' + a)^2] = \sum_i m_i (x_i'^2 + y_i'^2) + \sum_i m_i a^2 + 2 a \sum_i m_i y_i' .$$

Il primo termine è il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse z' , il secondo è ma^2 e il terzo è nullo in quanto $\sum_i m_i y_i' = m y'_{CM}$ e y'_{CM} , coordinata del centro di massa nel sistema del centro di massa, è nulla. Abbiamo quindi trovato la (6.20).

Il teorema di H.S. si rivela così un utilissimo strumento di calcolo: è sufficiente determinare il momento d'inerzia rispetto ad un asse passante per il centro di massa e lo si può ricavare rispetto a qualunque altro asse parallelo; notiamo che è sempre $I_{z'} < I_z$.

Per esempio, il momento d'inerzia di un disco rispetto ad un asse ortogonale al disco e passante per il bordo vale

$$I = \frac{1}{2} m R^2 + m R^2 = \frac{3}{2} m R^2 .$$

Analogamente il momento d'inerzia di un'asta lunga d rispetto ad un asse passante per un estremo e ortogonale all'asta si scrive

Teorema di
HuygensSteiner

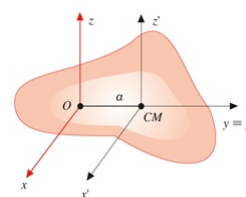


FIGURA 6.29

$$I = \frac{1}{12} m d^2 + m \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} m d^2 \quad ,$$

come ricavato direttamente nell'esempio 6.10.

Esempio 6.12

Calcolare il momento d'inerzia di una lastra piana omogenea rettangolare, di lati a e b e massa m , rispetto ad un asse z di rotazione ortogonale alla lastra e passante per il suo centro.

Soluzione

Sulla lastra della figura 6.30 è tracciato un elemento a forma di asta sottile, lungo a , largo dy , con il centro distante y dall'origine e di massa $dm = \rho dS = \rho a dy$. Il suo momento d'inerzia, per (6.20), è

$$dI = \frac{1}{12} dm a^2 + dm y^2$$

e il momento d'inerzia della lastra, di massa $m = \rho ab$, risulta

$$\begin{aligned} I_z &= \int_S dI = \frac{1}{12} m a^2 + \int y^2 dm = \frac{1}{12} m a^2 + \rho a \int_{-b/2}^{b/2} y^2 dy \\ &= \frac{1}{12} m a^2 + \rho a \frac{b^3}{12} = \frac{1}{12} m (a^2 + b^2). \end{aligned}$$

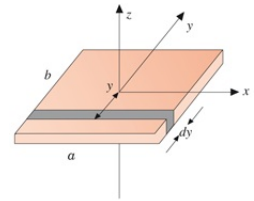


FIGURA 6.30
(Esempio 6.12)

Visualizza Soluzione

Esempio 6.13

Calcolare il momento d'inerzia di un sistema costituito da un'asta omogenea di lunghezza d e massa m , con agli estremi due sfere omogenee di raggio R e massa M (i centri delle sfere si trovano sulla retta individuata dall'asta) rispetto ad un asse passante per il centro C dell'asta e a questa ortogonale.

Soluzione

Calcoliamo il momento di inerzia di una delle due sfere rispetto all'asse di rotazione, applicando il teorema di H.S.:

$$I_s = \frac{2}{5} M R^2 + M \left(\frac{d}{2} + R\right)^2 \quad ;$$

$d/2 + R$ è la distanza tra il centro della sfera e il centro dell'asta. Per l'asta

$I_a = \frac{1}{12} m d^2$ e in totale

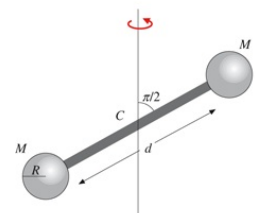


FIGURA 6.31
(Esempio 6.13)

$$I = 2 I_s + I_a = 2 M \left[\frac{2}{5} R^2 + \left(\frac{d}{2} + R \right)^2 \right] + \frac{1}{12} m d^2 .$$

Visualizza Soluzione

Esempio 6.14

Calcolare il momento d'inerzia di un cilindro cavo sottile che ruota attorno ad un asse ortogonale all'asse del cilindro e passante per il centro. La massa del cilindro è m , il raggio R , la lunghezza d .

Soluzione

Suddividiamo il cilindro in tanti anelli sottili; ciascun anello, di massa dm , dista x dall'asse di rotazione e ha rispetto a questo il momento d'inerzia

$$dI = \frac{1}{2} dm R^2 + dm x^2 ,$$

secondo l'esempio 6.11 e il teorema di H.S. La massa dell'anello spesso dx è $dm = 2\pi R \rho dx$, la massa del cilindro è $m = 2\pi R \rho d$.

Il momento d'inerzia totale si ottiene integrando tra zero e $d/2$ e moltiplicando per 2:

$$\begin{aligned} I &= \int dm R^2 + \int 2 dm x^2 = 2\pi R^3 \rho \int_0^{d/2} dx + 4\pi R \rho \int_0^{d/2} x^2 dx \\ &= \pi R^3 \rho d + \frac{1}{6} \pi R \rho d^3 = \frac{1}{2} m R^2 + \frac{1}{12} m d^2 . \end{aligned}$$

Se il cilindro fosse pieno, sarebbe $I = \frac{1}{2} m R^2 + \frac{1}{12} m d^2$

feaagKart1ev2aaatCvAUfeBSjuyZL2yd9gzLbvyNv2CaerbuLwBLn
hiov2DGi1BTfMBaeXatLxBI9gBaerbd9wDYLwzYbItLDharqqubsr
4rNCHbGeaGqiVu0Je9sqqrpepCoxbbL8F4rqrFfpeeaOxe9Lq=Jc9
vqaqppemoxbba9pwe9Q8fso=yqaqpepae9pg0FirpepeKkFroxf=x
fr=xb9adbaqaeeGaciGaaiaabeqaamaabaabaaGcbaGaamysaiabg2
da9maalaabaGaaGymaaqaaiaaisdaaaGaamyBaiaadkfadaahaaWc
beqaiaaikdaaaGccqGHRaWkdaWcaaqaiaaigdaaeacaaIXaGaaG
OmaaaacaWGTbGaamizamaaCaaaleqabaGaaGOmaaaaaa@41F7@ .

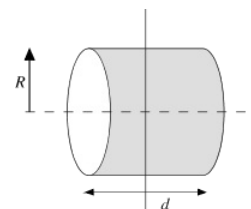


FIGURA 6.32

(Esempio 6.14)

Visualizza Soluzione

Teorema di H.S. e teorema di König

Riprendiamo in esame l'espressione (6.15) dell'energia cinetica di rotazione, dove I_z è il momento d'inerzia del corpo rigido rispetto all'asse z di rotazione, e applichiamo il teorema di H.S. (6.20):

$$E_k = \frac{1}{2} (I_z + m a^2) \omega^2 = \frac{1}{2} I_z \omega^2 + \frac{1}{2} m a^2 \omega^2 ;$$

I_z' è il momento d'inerzia rispetto ad un asse passante per il centro di massa e parallelo all'asse z , mentre a è la distanza tra i due assi. D'altra parte $a\omega$ rappresenta la velocità v_{CM} del centro di massa, che percorre una traiettoria circolare di raggio a rispetto all'asse z ; quindi

$$E_k = \frac{1}{2} I_z \omega^2 + \frac{1}{2} m v_{CM}^2 ,$$

in accordo col risultato del teorema di König per l'energia cinetica (4.17) e con le caratteristiche del moto rigido: quando il centro di massa non è sull'asse di rotazione, l'energia cinetica è data dalla somma di $E_k = \frac{1}{2} I_z \omega^2$, tipico della rotazione che costituisce il moto rispetto al centro di massa, e di $E_{k, CM} = \frac{1}{2} m v_{CM}^2$, energia cinetica del centro di massa.

Avevamo preannunciato questo risultato nel paragrafo 6.2 con riferimento alla figura 6.6. Abbiamo adesso la prova quantitativa che l'energia cinetica non dipende dal fatto di considerare il moto una pura rotazione rispetto all'asse z oppure una rototraslazione, con rotazione rispetto all'asse z' passante per il centro di massa. Si noti che in questo tipo di rototraslazione la velocità di traslazione e quella di rotazione non sono indipendenti.

Esempio 6.15

Un disco posto in un piano orizzontale ruota attorno ad un asse verticale distante $a = 0.1$ m dal suo centro; la massa del disco è $m = 6$ kg, il raggio è $R = 0.2$ m; la velocità angolare vale $\omega = 12$ rad/s. Calcolare la forza che deve essere esercitata dai supporti sull'asse per permettere la rotazione, il momento della forza peso rispetto al punto O , l'energia cinetica del disco. Se, partendo da fermo, il disco deve raggiungere la velocità di regime in 4 s, che momento costante bisogna applicare? Quanto vale durante la fase di accelerazione l'accelerazione tangente del centro di massa?

Soluzione

La forza sull'asse deve eguagliare la forza centripeta applicata al centro di massa, $m\omega^2 a = 86.4$ N. Il momento della forza peso è $M = mga = 5.9$ Nm. Il momento d'inerzia rispetto all'asse di rotazione è

$$I = \frac{1}{2} m R^2 + m a^2 = 0.12 + 0.06 = 0.18 \text{ kg m}^2 \Rightarrow E_k = \frac{1}{2} I \omega^2 = 12.96 \text{ J} .$$

Oppure $E_k = \frac{1}{2} I' \omega^2 + \frac{1}{2} m v_{CM}^2 = \frac{1}{2} (\frac{1}{2} m R^2) \omega^2 + \frac{1}{2} m (\omega a)^2 = 8.64 + 4.32 = 12.96 \text{ J}$

il primo valore è l'energia di rotazione rispetto al centro di massa, il

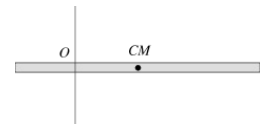


FIGURA 6.33
(Esempio 6.15)

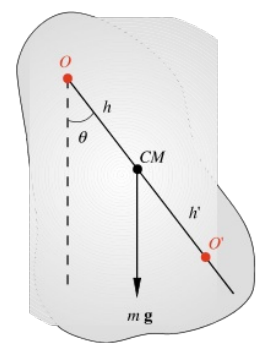


FIGURA 6.34
Esempio 6.15

secondo l'energia di traslazione del centro di massa. Da $\omega = \alpha t$ si ricava $\alpha = 3 \text{ rad/s}^2$ e $M = I\alpha = 0.54 \text{ Nm}$. Infine $a_{CM, T} = \alpha a = 0.3 \text{ m/s}^2$.

Visualizza Soluzione

6.7 Pendolo composto

Si chiama *pendolo composto*, o pendolo fisico, ogni corpo rigido che possa oscillare, per azione del suo peso, in un piano verticale attorno ad un asse orizzontale non passante per il centro di massa. In figura 6.34 è rappresentata la sezione del pendolo contenente il centro di massa CM ; O è la traccia dell'asse di rotazione, ortogonale al foglio, e h è la distanza del centro di massa da O .

Se si sposta il pendolo composto dalla posizione di equilibrio statico ($\theta = 0$, centro di massa sulla retta verticale passante per O), sia a destra che a sinistra, l'azione del peso è tale da riportare il pendolo verso la posizione di equilibrio.

Il momento della forza peso, che agisce come un momento di richiamo verso $\theta = 0$, è parallelo all'asse di rotazione e vale $M = -mgh \sin\theta$. Se non esistono momenti di forze di attrito nella rotazione attorno all'asse, gli eventuali momenti dovuti alle reazioni dei supporti sono ortogonali all'asse stesso e pertanto l'equazione del moto è (6.14):

$$\frac{dL_z}{dt} = I_z \alpha = I_z \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgh \sin\theta \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgh}{I_z} \sin\theta = 0 \quad ;$$

I_z è il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse di rotazione orizzontale, z ; per il teorema di H.S., $I_z = I_c + m h^2$.

Se l'ampiezza delle oscillazioni è piccola, $\sin\theta \cong \theta$, e si ottiene

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgh}{I_z} \theta = 0 \quad ,$$

che è l'equazione del moto armonico e ha la soluzione

$$\theta = \theta_0 \sin(\Omega t + \phi) \quad .$$

La pulsazione è $\Omega = \sqrt{mgh / I_z}$ e il periodo vale

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I_z}{mgh}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad ; \quad (6.21)$$

$l = I_z / mh$ rappresenta la *lunghezza ridotta del pendolo composto* e corrisponde alla lunghezza del filo di un pendolo semplice che oscilla con lo stesso periodo.

Lunghezza ridotta del pendolo composto

Quando l'ampiezza dell'oscillazione è grande il pendolo si muove ancora di moto periodico, ma non più armonico (si riveda la discussione a proposito del pendolo semplice nel paragrafo 2.13).

Osserviamo che, posto $h' = I_c / mh$ ovvero $I_c = mh h'$, si ha

$$l = \frac{I_z}{mh} = \frac{I_c + mh^2}{mh} = \frac{I_c}{mh} + h = h' + h > h \quad ;$$

la lunghezza l individua rispetto a O un punto O' distante h' dal centro di massa (come mostrato in figura 6.34). Se facciamo oscillare il pendolo rispetto ad un asse orizzontale passante per O' (e parallelo al precedente asse), la distanza tra il centro di oscillazione e il centro di massa è ora h' . Chiamiamo I' il momento d'inerzia del corpo rispetto al nuovo asse di rotazione; la nuova lunghezza ridotta è

$$l' = \frac{I'}{m h'} = \frac{I_c + m h^2}{m h'} = \frac{m h h' + m h^2}{m h'} = h + h' = l \quad ,$$

eguale alla precedente. I due assi passanti per O e O' si chiamano *assi reciproci* e concludiamo che il periodo di oscillazione attorno ai due assi reciproci è lo stesso.

Il pendolo fisico viene impiegato per misurare accuratamente il valore dell'accelerazione di gravità g : la precisione può raggiungere una parte su 10^6 . Nel dispositivo detto pendolo reversibile di Kater il corpo è un'asta che può essere sospesa in due punti O e O' : i due assi di rotazione passanti per O e O' sono all'incirca reciproci. Si possono fare scorrere lungo l'asta due piccole masse, in modo da variare il momento d'inerzia e la posizione del centro di massa, fino a trovare una configurazione in cui i periodi di oscillazione rispetto ai due assi sono eguali. D'altra parte la distanza fissa $l = OO'$ è misurabile con precisione. Pertanto dalla misura del periodo si ricava g attraverso (6.21).

6.8 Moto di puro rotolamento

Passiamo adesso a considerare una situazione fisica differente in cui l'asse di rotazione non è un asse materiale, con supporti e cuscinetti, bensì un asse geometrico che si sposta insieme al corpo rigido. Questo, di forma cilindrica o sferica, si trova sopra un piano e si muove rispetto ad esso. Se le velocità di tutti i punti sono eguali tra loro e parallele al piano abbiamo un moto di traslazione e il corpo striscia sul piano. In generale però il corpo in questione rotola sul piano e il punto di contatto ha velocità non nulla rispetto al piano: si dice allora che il *corpo rotola e striscia*. Se invece la velocità del punto di contatto è nulla, si ha un *moto di puro rotolamento*, le cui proprietà vogliamo studiare. L'esempio pratico immediato di questo problema è il moto di una ruota.

In ogni intervallo di tempo dt il corpo che rotola senza strisciare può venire considerato come se ruotasse rispetto ad un asse, fisso durante dt , passante per il punto di contatto C e ortogonale al piano della figura 6.35, con velocità angolare ω .

La velocità di ogni punto del corpo di conseguenza è ortogonale alla linea che congiunge il punto con C ed è in modulo proporzionale alla distanza da C , $v_p = \omega |PC|$. In un intervallo dt successivo il contatto avviene in un altro punto C' , infinitamente vicino a C , e si ripete la rotazione attorno ad un altro asse fisso passante per C' e così di seguito.

È evidente che deve agire una forza per tenere fermo, nell'intervallo dt , il punto C : si tratta di una *forza di attrito statico* (il punto C è fermo) che si esercita tra il piano e il corpo.

La velocità del punto C , distante r dal centro di massa, si può sempre scrivere $\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_{CM} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, somma della velocità del centro di massa e della velocità di C relativa al centro di massa; si ricordi che la velocità angolare, rispetto ad un asse passante per il centro di massa parallelo all'asse fisso o rispetto a quest'ultimo, è sempre la stessa. La condizione di puro rotolamento è $\mathbf{v}_C = 0$ e quindi

$$\mathbf{v}_{CM} = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

(nella figura 6.36 $\boldsymbol{\omega}$ è diretto verso il foglio, \mathbf{r} da CM a C e quindi $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ risulta opposto a \mathbf{v}_{CM}). In modulo

$$v_{CM} = \omega r \Rightarrow a_{CM} = \alpha r ; \quad (6.22)$$

nel moto di puro rotolamento esiste una precisa relazione tra la velocità con cui avanza il centro di massa e la velocità angolare, cioè queste due grandezze non sono indipendenti.

Nel complesso la successione di rotazioni infinitesime attorno al punto di contatto istantaneo equivale ad una rototraslazione in cui il centro di massa

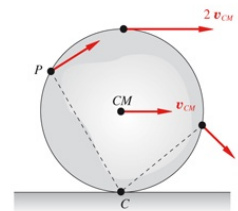


FIGURA 6.35

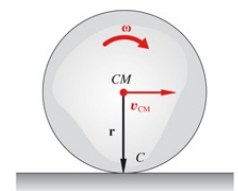


FIGURA 6.36

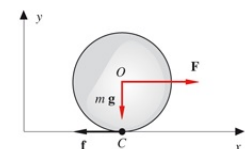


FIGURA 6.37

avanza con velocità v_{CM} mentre il corpo ruota con velocità angolare ω rispetto al centro di massa.

Trattiamo inizialmente il caso di un corpo di massa m e raggio r che rotola senza strisciare su una superficie piana orizzontale sotto l'azione di una forza orizzontale \mathbf{F} costante applicata all'asse (figura 6.37). Sul corpo agiscono anche la forza peso $m\mathbf{g}$ e la reazione del piano \mathbf{R} , che ha una componente normale \mathbf{N} e una componente tangenziale \mathbf{f} (forza di attrito statico). Dato che la forza \mathbf{F} spinge tutto il corpo verso destra, la reazione \mathbf{f} deve avere il verso indicato in figura per tenere fermo il punto di contatto.

La legge del moto del centro di massa è

$$\mathbf{F} + \mathbf{R} + m\mathbf{g} = m\mathbf{a}_{CM} \quad ,$$

che proiettata sugli assi x e y dà rispettivamente

$$F - f = ma_{CM} \quad , \quad N - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad N = mg \quad .$$

Il teorema del momento angolare, scelto il centro di massa O come polo, si scrive

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{f} = I\boldsymbol{\alpha} \quad \Rightarrow \quad rf = I\alpha = I \frac{a_{CM}}{r} \quad .$$

Facendo sistema tra questa equazione e l'equazione del moto lungo l'asse x si ricavano le due incognite a_{CM} e f :

$$a_{CM} = \frac{F}{m \left(1 + \frac{I}{mr^2} \right)} \quad , \quad f = \frac{F}{1 + \frac{mr^2}{I}} \quad . \quad (6.23)$$

È essenziale notare che f non può assumere qualsiasi valore: essa non può superare la massima forza di attrito statico, ovvero deve essere soddisfatta la disequaglianza

$$f \leq \mu_s N = \mu_s mg \quad \Rightarrow \quad F \leq \mu_s mg \left(1 + \frac{mr^2}{I} \right) = F_{\text{lim}} \quad .$$

Pertanto il moto può essere di puro rotolamento solo se la forza applicata non supera il valore limite indicato; altrimenti il corpo rotola e striscia contemporaneamente.

Invece di spingere il corpo, si può applicare all'asse un momento costante \mathbf{M} (figura 6.38), per esempio tramite un motore. Questa volta l'azione del momento tende a far slittare verso sinistra il punto di contatto e \mathbf{f} deve avere il verso indicato.

Dalle equazioni

$$\mathbf{R} + m\mathbf{g} = m\mathbf{a}_{CM} \quad , \quad \mathbf{M} + \mathbf{r} \times \mathbf{f} = I\boldsymbol{\alpha}$$

ricaviamo

$$N = mg \quad , \quad f = ma_{CM} \quad , \quad M - rf = I \frac{a_{CM}}{r}$$

$$\Rightarrow a_{CM} = \frac{M}{mr \left(1 + \frac{I}{mr^2}\right)} \quad , \quad f = \frac{M}{r \left(1 + \frac{I}{mr^2}\right)} \quad . \quad (6.24)$$

Anche ora bisogna verificare che

$$f \leq \mu_s N = \mu_s mg \quad \Rightarrow \quad M \leq \mu_s mgr \left(1 + \frac{I}{mr^2}\right) = M_{\text{lim}} \quad .$$

Mentre sotto l'azione di \mathbf{F} la reazione tangente \mathbf{f} si oppone al moto, a causa dell'azione di \mathbf{M} \mathbf{f} favorisce il moto, anzi è la forza che causa l'accelerazione del centro di massa: quando un motore fa girare una ruota, è l'attrito col suolo che la spinge avanti.

Nel caso più generale si ha l'azione contemporanea di una forza e di un momento, applicati come nelle figure 6.37 e 6.38. Non possiamo decidere a priori qual è il verso della forza di attrito \mathbf{f} , per cui la assumiamo parallela e concorde all'asse x , salvo capire il verso effettivo dal segno della soluzione. Le equazioni del moto sono

$$F + f = ma_{CM} \quad , \quad M - rf = I \frac{a_{CM}}{r}$$

$$\Rightarrow a_{CM} = \frac{1}{m} \frac{F + \frac{M}{r}}{1 + \frac{I}{mr^2}} \quad , \quad f = \frac{\frac{M}{r} - \frac{I}{mr^2} F}{1 + \frac{I}{mr^2}} \quad , \quad (6.25)$$

con $f \leq \mu_s N = \mu_s mg$. La forza di attrito risulta concorde o discorde rispetto all'asse x a seconda che M sia maggiore o minore di IF/mr . In particolare, se $M = IF/mr$, f è nulla e $a_{CM} = F/m$: è possibile un moto accelerato anche in assenza di attrito, ad esempio su una superficie ghiacciata.

Discutiamo alcuni aspetti comuni a tutti e tre gli esempi visti. Il moto di traslazione e il moto di rotazione sono entrambi uniformemente accelerati: a_{CM} e α sono costanti se la sollecitazione esterna è costante. Conoscendo le condizioni iniziali da a_{CM} si calcola $v_{CM}(t)$ e da α si calcola $\omega(t)$; in realtà basta un solo calcolo perché vale (6.22). In assenza di forze e momenti il corpo resta in quiete o compie una rototraslazione uniforme: a_{CM} e α sono nulle, v_{CM} e ω costanti. Può anche accadere che al corpo in movimento venga applicata una forza costante negativa, nel senso che si oppone al moto, oppure un momento frenante: avremo allora un moto uniformemente decelerato.

Le forme più semplici di corpi che rotolano sono l'anello, il cilindro cavo, il disco, il cilindro pieno, la sfera (piena o cava), i cui momenti d'inerzia rispetto ad un asse passante per il centro di massa e parallelo all'asse di rotazione

istantanea passante per il punto di contatto sono stati dati nella tabella del paragrafo 6.5. Spesso nelle formule che abbiamo ricavato viene utilizzata (6.19), così che al posto di I/m compare k^2 .

Suggeriamo come esercizio di scrivere l'equazione del momento angolare assumendo C come polo invece di O . Le equazioni sono modificate e bisogna ricordare anche di sostituire I con $I + mr^2$, in accordo col teorema di H.S.; le soluzioni sono ovviamente le stesse.

Le situazioni che abbiamo descritto sono tra le più semplici; in altri casi la forza può essere applicata in un punto diverso dal centro e non essere orizzontale, possono esserci più forze, la superficie di rotolamento può essere inclinata o curva (vedi esempi 6.17 e 6.19). Le equazioni vettoriali di partenza sono quelle viste; salvo casi particolari, la forza di attrito statico risulta diversa da zero e bisogna sempre verificare che sia inferiore al valore massimo possibile.

In conclusione, nel moto di rotolamento di un corpo rigido è possibile, con opportuni valori delle forze e dei momenti esterni, realizzare le condizioni per cui la reazione del piano è tale da tenere fermo il punto di contatto, così che il corpo rotola senza strisciare. Il puro rotolamento è la situazione che si cerca sempre di ottenere quando un corpo deve rotolare, ad esempio per le ruote di un qualsiasi veicolo, su strada o su rotaia, anche nella fase di frenata.

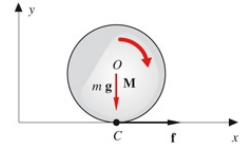


FIGURA 6.38

Conservazione dell'energia. Attrito volvente

Al moto di puro rotolamento sotto l'azione di forze conservative, come sono le forze costanti e in particolare la forza peso, si può applicare la legge di conservazione dell'energia meccanica. Infatti la forza di attrito, che è normalmente diversa da zero, agisce su un punto fermo per cui lo spostamento è nullo ed è quindi nullo il lavoro. Vedremo vari esempi tra breve.

Come avviene sempre in meccanica, la conservazione dell'energia è in realtà un caso limite. Si osserva sperimentalmente che un corpo che rotola senza strisciare sopra un piano orizzontale, in assenza di forze e momenti applicati, si arresta dopo un certo tempo. Deve esistere perciò un'altra forma di attrito (*attrito volvente o di rotolamento*), che viene attribuito alla deformazione locale del piano ed è schematizzato con l'azione di un momento $M_v = h m g$, che si oppone al moto; h è il *coefficiente di attrito volvente*, espresso in metri. Per vincere il momento dovuto all'attrito volvente si deve applicare al corpo di forma circolare, di massa m e raggio r , una forza di trazione $F_2 \geq h m g/r$.

Attrito volvente

Consideriamo ad esempio un cilindro di acciaio ($m = 10^3$ kg, $r = 0.2$ m) posto sopra un piano di acciaio; siano $\mu_s = 0.2$ e $h = 5 \cdot 10^{-5}$ m rispettivamente il coefficiente di attrito statico e di attrito volvente. La trazione limite per farlo strisciare è $F_1 = \mu_s m g = 1960$ N, mentre quella per farlo rotolare è $F_2 = h m g/r = 2.5$ N. Dato che $F_2 \ll F_1$ si capisce il vantaggio della ruota rispetto alla slitta!

Proprio per la piccolezza dell'effetto, dopo averlo qui menzionato noi trascureremo sempre il momento di attrito volvente.

Esempio 6.16

Un disco rigido rotola senza strisciare su un piano orizzontale; la sua massa è $m = 5$ kg, il raggio è $r = 0.2$ m, il coefficiente di attrito statico è $\mu_s = 0.3$. Al disco è applicata la forza $F = 21$ N, come in figura 6.37. Calcolare il valore del momento che bisogna applicare alla ruota, come in figura 6.38, per avere la stessa accelerazione del centro di massa e il valore della forza di attrito statico nei due casi.

Soluzione

Utilizziamo le relazioni (6.23), con $I = \frac{1}{2} mr^2$ e quindi $I/mr^2 = \frac{1}{2}$:

$$a_{CM} = \frac{21}{5 \left(1 + \frac{1}{2}\right)} = 2.8 \text{ m/s}^2, \quad f_1 = \frac{21}{1 + 2} = 7 \text{ N}.$$

La massima forza di attrito statico è $\mu_s mg = 14.7$ N, superiore a f per cui il moto di puro rotolamento può avvenire (F_{lim} vale 44.1 N).

Dal confronto tra (6.23) e (6.24) si vede che con un momento $M = rF$ si produce la stessa accelerazione, quindi $M = 4.2$ Nm. La corrispondente forza di attrito statico è

$$f_2 = \frac{4.2}{0.2 \left(1 + \frac{1}{2}\right)} = 14 \text{ N} = 2f_1,$$

anch'essa inferiore, seppur di poco, al valore limite 14.7 N (M_{lim} vale 4.4 Nm). Se prendiamo le espressioni delle forze di attrito nei due casi e imponiamo $f_1 < f_2$ troviamo, se $M = rF$,

$$\frac{F}{1 + \frac{mr^2}{I}} < \frac{F}{1 + \frac{I}{mr^2}} \Rightarrow I^2 < (mr^2)^2.$$

In effetti, per i corpi di forma semplice che abbiamo elencato, I è sempre minore di mr^2 eccettuato il caso dell'anello (o del guscio cilindrico) in cui $I = mr^2$. Ciò vuol dire che $f_1 \leq f_2$: a parità di accelerazione quando agisce un momento la forza di attrito richiesta è maggiore (o eguale) che quando agisce una forza. Nel nostro caso numerico se raddoppiamo la forza il moto è ancora di puro rotolamento, ma se raddoppiamo il momento il corpo rotola e striscia.

Visualizza Soluzione

Esempio 6.17

Determinare la velocità che raggiunge alla fine del percorso un corpo rigido che rotola senza strisciare lungo un piano inclinato.

Soluzione

Applichiamo la conservazione dell'energia, assumendo che per $t = 0$ il corpo sia in quiete. La variazione di energia potenziale, data da (4.21), è mgh ; per l'energia cinetica finale utilizziamo il teorema di König (4.17) e (6.19):

$$m g h = \frac{1}{2} I_c \omega^2 + \frac{1}{2} m v_{CM}^2 = \frac{1}{2} m k^2 \frac{v_{CM}^2}{r^2} + \frac{1}{2} m v_{CM}^2 \quad .$$

Pertanto

$$v_{CM} = \sqrt{\frac{2 g h}{1 + \frac{k^2}{r^2}}} < \sqrt{2 g h} \quad .$$

Se il corpo scivolasse senza attrito arriverebbe in fondo con velocità maggiore, $v_{CM} = \sqrt{2gh}$. Invece, se rotola senza strisciare, l'energia potenziale si trasforma in energia cinetica di traslazione $\frac{1}{2} m v_{CM}^2$ e in energia cinetica di rotazione nel moto rispetto al centro di massa $\frac{1}{2} I_c \omega^2$. Per questa ragione la velocità finale deve essere inferiore a $\sqrt{2gh}$.

L'accelerazione e la forza di attrito statico agente durante il moto di puro rotolamento si ottengono dalle equazioni

$$m g \sin\theta - f = m a_{CM} \quad , \quad f r = I_c \alpha = m k^2 \frac{a_{CM}}{r} \quad ,$$

$$a_{CM} = \frac{g \sin\theta}{1 + \frac{k^2}{r^2}} \quad , \quad f = \frac{m g \sin\theta}{1 + \frac{r^2}{k^2}} \quad ,$$

che sono le (6.23) con $I = m k^2$ e $F = m g \sin\theta$. Inoltre deve essere soddisfatta la condizione

$$f \leq \mu_s m g \cos\theta \Rightarrow \tan\theta \leq \mu_s \left(1 + \frac{r^2}{k^2} \right) \quad .$$

Il significato di quest'ultimo risultato è che, per avere moto di puro rotolamento, l'angolo di inclinazione del piano non deve superare il valore

$$\theta_M = \arctg \mu_s \left(1 + \frac{r^2}{k^2} \right) \quad .$$

Osserviamo, per curiosità, che in una gara tra un anello, un disco e una sfera, di eguale massa e raggio, che scendono rotolando senza strisciare lungo un piano inclinato, la vittoria spetta alla sfera e l'ultimo posto all'anello. Infatti dalla tabella del paragrafo 6.5 per l'anello $k^2 / r^2 = 1$ e $v_{CM} = \sqrt{gh}$, per il disco $k^2 / r^2 = 1/2$ e $v_{CM} = \sqrt{1.33gh}$, per la sfera $k^2 / r^2 = 2/5$ e $v_{CM} = \sqrt{1.43gh}$. A parità di massa e raggio, la differenza sta nella distribuzione della massa rispetto all'asse di rotazione.

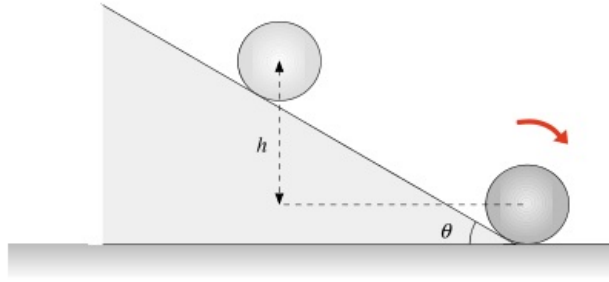


FIGURA 6.39

Visualizza Soluzione

Esempio 6.18

Un disco, di raggio r e massa m , scende srotolando un filo, che non slitta rispetto al bordo del disco. Determinare l'accelerazione del centro di massa e la tensione del filo.

Soluzione

Il moto del centro di massa obbedisce alla relazione

$$m g - T = m a_{CM}$$

mentre per il moto rispetto al centro di massa si ha

$$T r = I_c \alpha = \frac{1}{2} m r^2 \frac{a_{CM}}{r} .$$

Pertanto

$$a_{CM} = \frac{2}{3} g \quad , \quad T = \frac{1}{3} m g .$$

Il moto è uniformemente accelerato con velocità

$$v_{CM} = \frac{2}{3} g t \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{2 g t}{3 r}$$

se la velocità iniziale è nulla.

Si noti che la tensione del filo quando il disco è in moto è inferiore al valore mg che si avrebbe se il disco fosse fermo.

Il problema può essere risolto anche con la conservazione dell'energia, analogamente a quanto visto nell'esempio 6.5. Assumendo l'asse y verticale orientato verso l'alto

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_c \omega^2 + m g y_{CM} &= \text{costante} \\ \Rightarrow \frac{3}{4} m v_{CM}^2 + m g y_{CM} &= \text{costante} \end{aligned}$$

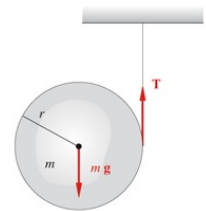


FIGURA 6.40

(Esempio 6.18)

in quanto $\omega = v_{CM}/r$ e $I_c = \frac{1}{2} m r^2$. Si deriva rispetto al tempo:

$$\frac{3}{2} m v_{CM} a_{CM} - m g v_{CM} = 0 \Rightarrow a_{CM} = \frac{2}{3} g .$$

Visualizza Soluzione

Esempio 6.19

Un cilindro di raggio $R/4$ rotola senza strisciare dentro un tubo di raggio R . Nella metà di destra del tubo l'attrito è nullo. Se all'istante iniziale il cilindro è fermo e la quota del centro di massa è $R/2$, determinare la posizione di arrivo del cilindro e la velocità angolare ω .

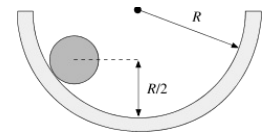


FIGURA 6.41
(Esempio 6.19)

Nel punto più basso il centro di massa è sceso della quantità $R/2 - R/4 = R/4$

rispetto alla posizione iniziale. Pertanto, conservando l'energia,

$$m g \frac{R}{4} = \frac{1}{2} I_c \omega^2 + \frac{1}{2} m v_{CM}^2$$

con $I_c = \frac{1}{2} m (R/4)^2$ e $v_{CM} = \omega R/4$. Allora, nel punto più basso

$$v_{CM} = \sqrt{\frac{gR}{3}} \quad , \quad \omega = 4 \sqrt{\frac{g}{3R}} .$$

Quando risale nella parte destra il cilindro non incontra attrito e quindi ω rimane costante, come pure l'energia cinetica di rotazione:

$$\frac{1}{2} I_c \omega^2 = \frac{1}{12} m g R = \frac{1}{3} m g \left(\frac{R}{4} \right) = \text{costante} .$$

L'energia cinetica di traslazione si trasforma invece in energia potenziale:

$$\frac{1}{2} m v_{CM}^2 = \frac{1}{6} m g R = \frac{2}{3} m g \left(\frac{R}{4} \right) = m g \Delta h \Rightarrow \Delta h = \frac{R}{6} = \frac{2}{3} \frac{R}{4} .$$

La quota finale del centro di massa è $R/4 + 2/3 R/4 = 5/3 R/4$; questo valore è pari a $5/6$ del valore iniziale $R/2$. In conclusione, il centro di massa è sceso di $R/4$ e poi risale di $2/3 R/4$: un terzo dell'energia potenziale iniziale si è

trasformata in energia cinetica di rotazione, come visto prima.

Nell'istante in cui il corpo si ferma e torna indietro, la sua energia è dunque cinetica di rotazione e potenziale; quando ripassa nel punto più basso, l'energia è tutta cinetica. Nella risalita lungo il tratto con attrito il moto non è di puro rotolamento (il corpo ruota nel verso sbagliato) e il momento dell'attrito frena la rotazione, con conseguente dissipazione di energia. Perciò alla fine, dopo una serie di oscillazioni, il corpo si ferma.

Visualizza Soluzione

Esempio 6.20

Un cilindro pieno, di massa $m_1 = 20$ kg e raggio $r = 0.25$ m, rotola senza strisciare su un piano orizzontale; all'asse del cilindro è applicato il momento costante $M = 30$ Nm ed è appeso, tramite un filo inestensibile e di massa trascurabile, un corpo di massa $m_2 = 10$ kg, come in figura 6.42. Calcolare l'accelerazione del centro di massa del cilindro, la tensione del filo e il minimo valore ammesso per il coefficiente di attrito.

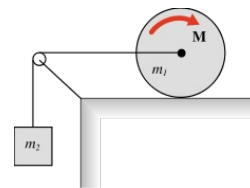


FIGURA 6.42

Soluzione

Scriviamo le tre equazioni del moto:

$$\begin{array}{ll} \text{moto del CM} & f - T = m_1 a_{CM} \\ \text{rotazione} & M - rf = I a_{CM} / r \\ \text{moto di } m_2 & T - m_2 g = m_2 a_{CM} \end{array}$$

con $I = \frac{1}{2} m_1 r^2 = 0.625$ kgm²; **f** deve essere opposta a **T**. Risolviamo il sistema trovando per l'accelerazione

$$a_{CM} = \frac{\frac{M}{r} - m_2 g}{\frac{3}{2} m_1 + m_2} = 0.55 \text{ m/s}^2 .$$

Dalla terza equazione si ricava $T = 103.5$ N e dalla prima $f = 114.5$ N. Dovendo essere $f \leq \mu_s m_1 g$ risulta $\mu_s \geq 0.58$.

Visualizza Soluzione

6.9 Impulso angolare. Momento dell'impulso

Nel paragrafo 2.3 abbiamo visto la forma integrale (2.3) della legge di Newton (2.2): l'impulso della forza è eguale alla variazione della quantità di moto, proprietà nota come teorema dell'impulso.

Una deduzione analoga si può fare a proposito dell'equazione (4.11). L'azione di un momento durante un intervallo finito di tempo causa una variazione finita del momento angolare:

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M} dt = \mathbf{L}(t_2) - \mathbf{L}(t_1) = \Delta \mathbf{L} \quad . \quad (6.26)$$

L'integrale del momento nel tempo si chiama *impulso angolare* o *impulso del momento* e la (6.26) si può chiamare teorema dell'impulso angolare. Il rapporto $\Delta \mathbf{L} / (t_2 - t_1)$ dà il valor medio del momento nell'intervallo di integrazione.

Un modo particolare per mettere in rotazione rispetto ad un asse fisso o per fare rotolare un corpo rigido consiste nell'applicazione in un punto determinato del corpo di una forza intensa per un tempo molto breve (forza impulsiva, vedi paragrafo 4.9), ovvero nell'applicazione di un impulso. Con riferimento alla figura 6.43 utilizziamo (6.26) prendendo come polo il centro O di sospensione del corpo:

$$\int \mathbf{M} dt = \int (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) dt = \mathbf{r} \times \int \mathbf{F} dt = \mathbf{r} \times \mathbf{J} = \Delta \mathbf{L} \quad . \quad (6.27)$$

È possibile portare \mathbf{r} fuori dall'integrale perché non dipende dal tempo.

La grandezza $\mathbf{r} \times \mathbf{J}$ si chiama *momento dell'impulso* (della forza). L'applicazione dell'impulso provoca, oltre ad una variazione di quantità di moto, una variazione di momento angolare eguale al momento dell'impulso. Osserviamo che nell'integrale non compaiono le forze di reazione del vincolo perché hanno momento nullo essendo applicate nel polo O . Non compare nemmeno la forza peso perché il suo impulso angolare si assume trascurabile rispetto all'impulso angolare dovuto a \mathbf{F} .

Abbiamo già ricavato nel paragrafo 2.22 espressioni formalmente identiche a (6.26) e (6.27), valide per un punto materiale. La principale differenza, nel caso del corpo rigido, sta nell'espressione del momento angolare oltre che, ovviamente, al tipo di moto che può compiere. Con riferimento a (6.26) poi ricordiamo che \mathbf{M} è il momento risultante delle forze esterne, in generale indipendente dalla loro risultante.

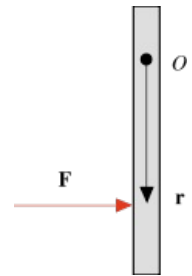


FIGURA 6.43

Esempio 6.21

Un'asta rigida ($m = 2.4$ kg, $d = 0.4$ m) è posata sopra un piano orizzontale liscio ed è collegata in un

estremo ad un asse verticale. In un intervallo di tempo $\Delta t = 0.2$ s viene applicato all'asse un momento (ad esempio accendendo un motore elettrico per il tempo Δt). A seguito di ciò l'asta, inizialmente ferma, entra in rotazione e descrive un giro completo nel piano orizzontale in un tempo $T = 10$ s. Calcolare l'impulso angolare e il valor medio del momento nel tempo Δt . Calcolare anche l'impulso della forza e discutere qualitativamente le reazioni sull'asse.

Soluzione

La velocità angolare dell'asta è $\omega = 2\pi/T = 0.63$ rad/s; il suo momento d'inerzia rispetto all'asse passante per un estremo è $I = md^2/3 = 0.13$ kg m². Pertanto l'asta, inizialmente ferma, ha acquistato il momento angolare

$$L = \Delta L = I\omega = 8.2 \cdot 10^{-2} \text{ kg m}^2/\text{s} = M_m \Delta t \quad .$$

Il valore trovato è eguale all'impulso angolare (6.26) e il valore medio del momento risulta $M_m = L/\Delta t = 0.41$ Nm.

Nell'intervallo Δt la velocità del centro di massa dell'asta passa dal valore zero al valore $v_{CM} = \omega d/2 = 0.13$ m/s; la variazione di quantità di moto è

$$\Delta p = p = m v_{CM} = 0.31 \text{ kg m/s} = J = F_m \Delta t \quad .$$

Abbiamo così trovato l'impulso della forza applicata al corpo, la quale ha valor medio $F_m = \Delta p/\Delta t = 1.55$ N. Si noti che M_m non è eguale a $F_m d/2$ e che dentro F_m ci sono tutte le varie reazioni vincolari. I supporti dell'asse devono applicare la forza centripeta (vedi paragrafo 6.4) e, durante il tempo Δt , esplicitare opportune reazioni impulsive.

Visualizza Soluzione

Esempio 6.22

Si consideri un pendolo composto, costituito da un'asta di lunghezza l e massa m , libera di ruotare attorno ad un asse orizzontale, passante per un suo estremo O . Inizialmente l'asta è ferma in posizione verticale. Si determini l'impulso \mathbf{J} , ortogonale all'asta, che si deve applicare a distanza $r \leq l$ da O per far compiere all'asta una rotazione di 90° .

Soluzione

Il momento dell'impulso, rispetto ad O , è dato in modulo da rJ . Appliciamo (6.27) con $L_{in} = 0$ e quindi $L_{fin} = I\omega = rJ$. I è il momento d'inerzia rispetto all'asse passante per O e vale $\frac{1}{3} ml^2$. La velocità angolare che l'asta acquista a seguito dell'applicazione dell'impulso è

$$\omega = \frac{3 r J}{m l^2} \quad .$$

L'applicazione dell'impulso ha durata così breve da poter considerare l'asta

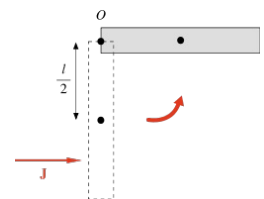


FIGURA 6.44
(Esempio 6.22)

ferma in tale intervallo di tempo.

Subito dopo però l'asta inizia a ruotare e, dopo una rotazione di 90° , il centro di massa si è sollevato di $l/2$, per cui l'energia potenziale dell'asta è aumentata di $mgl/2$. Per la conservazione dell'energia

$$m g \frac{l}{2} = \frac{1}{2} I \omega^2 \Rightarrow J = \frac{m}{r} \sqrt{\frac{g l^3}{3}} .$$

Come nell'esempio 6.21 da ω possiamo calcolare la velocità del centro di massa subito dopo l'applicazione dell'impulso. Risulta

$$v_{CM} = \omega \frac{l}{2} = \frac{3 r J}{2 m l} ,$$

diversa da J/m . Questo perché durante l'applicazione di \mathbf{J} si sviluppa nel polo O una reazione vincolare impulsiva, di cui bisogna tener conto. Anzi, proprio dal calcolo della variazione di quantità di moto, che è $m v_{CM}$, e da J si può determinare l'impulso della reazione. L'impulso di reazione non compare invece nel momento dell'impulso perché rispetto ad O ha momento nullo. In conclusione, bisogna fare attenzione e considerare tutti i possibili contributi nella relazione

$$(m \mathbf{v}_{CM})_{fin} - (m \mathbf{v}_{CM})_{in} = \mathbf{J} ,$$

soprattutto quando il corpo è vincolato.

Visualizza Soluzione

Esempio 6.23

Una sfera omogenea di massa m e raggio r è posta sopra un piano orizzontale scabro; inizialmente la sfera è in quiete. Viene applicato un impulso orizzontale \mathbf{J} , la cui retta di azione passa per il centro della sfera. Determinare il moto della sfera.

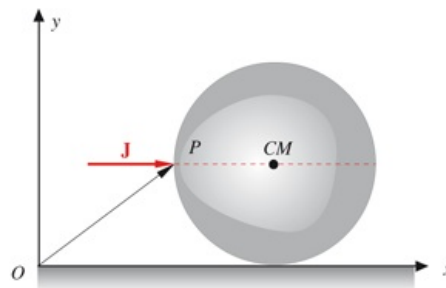


FIGURA 6.45

Soluzione

La velocità iniziale del centro di massa nell'istante successivo all'azione di \mathbf{J} si ottiene applicando il teorema dell'impulso:

$$\mathbf{J} = m \mathbf{v}_{CM} \Rightarrow v_{CM}(0) = \frac{J}{m}$$

(la sfera non è vincolata, la forza di attrito non è impulsiva).

Inoltre da (6.27) prendendo come polo l'origine O del sistema di riferimento, si ha:

$$\mathbf{OP} \times \mathbf{J} = \mathbf{L}_O = \mathbf{L}' + \mathbf{r}_{CM} \times m \mathbf{v}_{CM} = \mathbf{L}' + \mathbf{r}_{CM} \times \mathbf{J} ,$$

dove si è utilizzata (4.16). In modulo $r J = I_c \omega + r J$ e quindi $\omega = 0$: il corpo, nell'istante successivo all'azione dell'impulso, inizia a strisciare con velocità $v_{CM}(0)$, ma non rotola, $\omega(0) = 0$. Successivamente agisce solo la forza di attrito $\mu_d mg$ opposta al moto:

$$m \mathbf{a}_{CM} = -\mu_d m \mathbf{g} \quad , \quad \mathbf{a}_{CM} = -\mu_d \mathbf{g} \quad ,$$

$$v_{CM}(t) = v_{CM}(0) - \mu_d g t = \frac{J}{m} - \mu_d g t \quad .$$

Per effetto del momento della forza di attrito il corpo inizia a rotolare, pur continuando a strisciare. Assumendo come polo il centro di massa

$$\mu_d m g r = I_c \alpha = \frac{2}{5} m r^2 \alpha \quad , \quad \alpha = \frac{5}{2} \mu_d \frac{g}{r} \quad ,$$

$$\omega(t) = \alpha t = \frac{5}{2} \frac{\mu_d g t}{r} \quad .$$

All'istante iniziale $v_{CM} > \omega r$ e finché vale questa diseuguaglianza il corpo prosegue nel suo moto di rotolamento con strisciamento. Poiché però v_{CM} decresce e ω aumenta, ad un certo istante t^* $v_{CM} = \omega r$ ovvero

$$\frac{J}{m} - \mu_d g t^* = \frac{5}{2} \mu_d g t^* \Rightarrow t^* = \frac{2}{7} \frac{J}{\mu_d m g} \quad , \quad v_{CM}(t^*) = \frac{5J}{7m} = \frac{5}{7} v_{CM}(0) \quad .$$

Considerato che non agiscono sulla sfera forze motrici o momenti motori e che è soddisfatta la condizione $v_{CM} = \omega r$, per $t > t^*$ il moto della sfera diventa uniforme e di puro rotolamento.

Notiamo che durante il moto il momento della forza di attrito rispetto ad O è sempre nullo e che quindi, rispetto ad O , si conserva il momento angolare. All'inizio $L = Jr$, durante il moto $L = I_c \omega + r m v_{CM}$; eguagliando e imponendo $v_{CM} = \omega r$ si trova subito $v_{CM} = 5J/7m$. Questo tipo di soluzione non ci dà però il valore di t^* .

Applichiamo ora l'impulso \mathbf{J} ad un'altezza h rispetto al piano del moto, diversa da r , e cerchiamo qual è il valore di h per cui la sfera inizia a muoversi con moto di puro rotolamento.

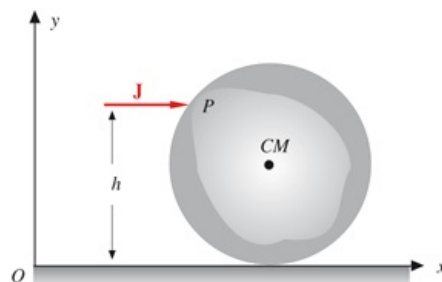


FIGURA 6.46

È sempre $v_{CM}(0) = J / m$. Applichiamo (6.27) con polo nel centro di massa:

$$\mathbf{r} \times \mathbf{J} = \mathbf{L} = I_c \boldsymbol{\omega} \quad , \quad (h - r) J = \frac{2}{5} m r^2 \omega \quad ,$$

$$\omega = \frac{5}{2} \frac{(h - r) J}{m r^2} \quad .$$

Imponendo $J / m = \omega r$ si ottiene $h = 7/5 r$.

Si osservi che con $h > r$ $\mathbf{r} \times \mathbf{J}$ ovvero $\boldsymbol{\omega}$ è diretto verso il foglio, cioè il moto di rotazione è orario, come deve in questo caso. Se fosse $h < r$ $\boldsymbol{\omega}$ sarebbe invece diretto verso il lettore e non si potrebbe realizzare un moto di puro rotolamento (verso destra).

Le situazioni descritte sono tipiche del moto di una palla di biliardo colpita con la stecca.

Visualizza Soluzione

6.10 Teorema di Poinsot. Ellissoide d'inerzia

Affrontiamo adesso il problema del legame tra \mathbf{L} e $\boldsymbol{\omega}$ in generale per arrivare a dimostrare l'esistenza degli assi principali d'inerzia e le relative proprietà. Consideriamo, figura 6.47, un punto qualsiasi O di un corpo rigido e assumiamo un sistema di riferimento con origine in O e con i tre assi x, y, z solidali al corpo stesso. Il versore di un qualsiasi asse di rotazione passante per O si scrive $\mathbf{u} = \alpha \mathbf{u}_x + \beta \mathbf{u}_y + \gamma \mathbf{u}_z$, dove α, β, γ , coseni direttori dell'asse, sono le componenti di \mathbf{u} rispetto ai tre assi di riferimento (si veda il paragrafo 6.1).

Un punto P_i del corpo è individuato dal vettore posizione

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{OP}_i = x_i \mathbf{u}_x + y_i \mathbf{u}_y + z_i \mathbf{u}_z \quad .$$

La sua distanza dall'asse di rotazione è

$$R_i = r_i \sin \theta_i = | \mathbf{u} \times \mathbf{r}_i |$$

e il momento d'inerzia vale

$$m_i R_i^2 = m_i (\mathbf{u} \times \mathbf{r}_i)^2 \quad .$$

Il prodotto vettoriale, espresso tramite le componenti di \mathbf{u} e \mathbf{r}_i (vedi appendice C), si scrive

$$\mathbf{u} \times \mathbf{r}_i = (\beta z_i - \gamma y_i) \mathbf{u}_x + (\gamma x_i - \alpha z_i) \mathbf{u}_y + (\alpha y_i - \beta x_i) \mathbf{u}_z \quad .$$

Eseguendo il quadrato di $\mathbf{u} \times \mathbf{r}_i$ abbiamo il momento d'inerzia di P_i rispetto all'asse di rotazione. Il *momento d'inerzia del corpo* si ottiene sommando su tutti i punti:

$$I = I_{xx} \alpha^2 + I_{yy} \beta^2 + I_{zz} \gamma^2 - 2 I_{xy} \alpha \beta - 2 I_{yz} \beta \gamma - 2 I_{zx} \gamma \alpha \quad , \quad (6.28)$$

dove i coefficienti $I_{j,i}$ hanno le seguenti espressioni:

$$I_{xx} = \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2) \quad \text{momento d'inerzia rispetto all'asse } x$$

$$I_{yy} = \sum_i m_i (x_i^2 + z_i^2) \quad \text{momento d'inerzia rispetto all'asse } y$$

$$I_{zz} = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) \quad \text{momento d'inerzia rispetto all'asse } z$$

$$I_{xy} = \sum_i m_i x_i y_i \quad , \quad I_{yz} = \sum_i m_i y_i z_i \quad , \quad I_{zx} = \sum_i m_i z_i x_i \quad .$$

Gli ultimi tre termini sono detti *prodotti d'inerzia*.

La formula (6.28), che fornisce il momento d'inerzia in funzione dei coseni direttori dell'asse di rotazione, è valida qualunque sia l'asse di rotazione.

Prendiamo ora sull'asse di rotazione il punto geometrico P , la cui distanza da O vale $d = 1 / I$; le coordinate di tale punto sono

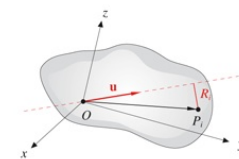


FIGURA 6.47

$$X = \frac{\alpha}{\sqrt{I}} \quad , \quad Y = \frac{\beta}{\sqrt{I}} \quad , \quad Z = \frac{\gamma}{\sqrt{I}} \quad .$$

Infatti, per ricavare i valori delle coordinate di P basta ricordare che l'estremo del vettore \mathbf{u} , che dista di una lunghezza unitaria da O , ha coordinate α, β, γ e quindi un punto che dista d ha coordinate $\alpha d, \beta d, \gamma d$. Dividiamo l'espressione (6.28) proprio per I :

$$1 = I_{xx} X^2 + I_{yy} Y^2 + I_{zz} Z^2 - 2 I_{xy} XY - 2 I_{yz} YZ - 2 I_{zx} ZX. \quad (6.29)$$

Questa relazione dà la condizione a cui soddisfano le coordinate di un qualsiasi punto che dista dall'origine di una lunghezza $1/\sqrt{I}$, essendo I il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse di rotazione individuato dai punti O e P . Geometricamente, il luogo dei punti che soddisfano (6.29) è una superficie tridimensionale detta ellissoide di centro O : nel caso specifico esso prende il nome di *ellissoide d'inerzia del corpo relativo al punto O* .

Il risultato ora ottenuto, valido qualunque sia la distribuzione di massa del corpo e comunque si scelga il punto O , rappresenta il *teorema di Poinsot*: fissato il punto O , in base alle caratteristiche del problema, e tre assi cartesiani con centro in O , è possibile immediatamente calcolare i coefficienti I_{ij} e determinare l'equazione dell'*ellissoide d'inerzia*, che è *fisso rispetto al corpo* e quindi *non dipende dalla scelta del sistema di riferimento, ma solo da O* . Se si prende ora un qualsiasi asse di rotazione, passante per O , e si calcola la distanza tra O e il punto geometrico P di intersezione dell'asse con l'ellissoide, questa vale $1/\sqrt{I}$ e quindi è ottenuto il momento d'inerzia del corpo rispetto a quell'asse. La determinazione, sempre possibile, dell'ellissoide d'inerzia fornisce la conoscenza del momento d'inerzia del corpo rispetto a qualsiasi asse di rotazione passante per il centro dell'ellissoide.

Nel tipo più generale di ellissoide si possono individuare, nel piano equatoriale, un diametro massimo ed uno minimo, tra loro perpendicolari; tali assi, con un terzo perpendicolare a entrambi, vengono chiamati *assi dell'ellissoide*. Se come assi x, y, z solidali al corpo si scelgono proprio gli assi dell'ellissoide, si può dimostrare che la (6.29) assume la forma

$$I_x X^2 + I_y Y^2 + I_z Z^2 = 1, \quad (6.30)$$

dove I_x, I_y, I_z sono i momenti d'inerzia del corpo rispetto agli assi dell'ellissoide e si chiamano *momenti principali d'inerzia*. Gli assi dell'ellissoide, fissi rispetto al corpo, si chiamano *assi principali d'inerzia*. I tre semiassi dell'ellissoide (vedi figura 6.49) hanno lunghezze rispettivamente

$$1/\sqrt{I_x} \quad , \quad 1/\sqrt{I_y} \quad , \quad 1/\sqrt{I_z} \quad .$$

Se il punto O coincide con il centro di massa, si parla di *ellissoide centrale d'inerzia* e di *assi centrali d'inerzia*.

Gli assi centrali d'inerzia, come gli assi principali d'inerzia, sono sempre

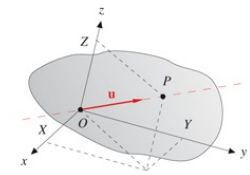


FIGURA 6.48

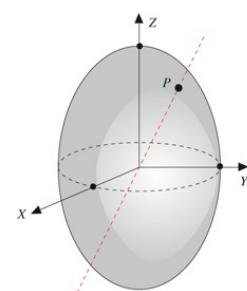


FIGURA 6.49

almeno tre, ma possono essere di numero superiore se il corpo è dotato di particolari simmetrie. Ciò è evidente dalla forma dell'ellissoide d'inerzia: se si tratta, ad esempio, di un ellissoide di rotazione rispetto all'asse Z , cioè ottenuto facendo ruotare un'ellisse attorno ad un suo asse, qualsiasi asse nel piano X, Y passante per il centro è asse centrale d'inerzia. Se inoltre l'ellissoide si riduce ad una superficie sferica, qualsiasi asse passante per il centro è asse centrale d'inerzia.

Rivediamo, alla luce di quanto discusso in questo paragrafo, la relazione tra il momento angolare \mathbf{L} e il vettore velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$. Il momento angolare, rispetto al polo O , è dato da:

$$\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times m_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) ;$$

$\boldsymbol{\omega}$ è parallelo all'asse di rotazione e può essere espresso come

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_x \mathbf{u}_x + \omega_y \mathbf{u}_y + \omega_z \mathbf{u}_z .$$

Ellissoide centrale d'inerzia

Sviluppando il prodotto vettoriale $\sum_i \mathbf{r}_i \times m_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)$ e calcolando le componenti si ottiene

$$\begin{aligned} L_x &= I_{xx} \omega_x - I_{xy} \omega_y - I_{xz} \omega_z \\ L_y &= -I_{xy} \omega_x + I_{yy} \omega_y - I_{yz} \omega_z \\ L_z &= -I_{xz} \omega_x - I_{yz} \omega_y + I_{zz} \omega_z . \end{aligned}$$

Gli elementi della matrice simmetrica detta *matrice d'inerzia*

$$\begin{vmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{vmatrix}$$

Matrice d'inerzia

sono gli stessi che compaiono nella (6.28).

Se scegliamo come assi di riferimento gli assi principali d'inerzia relativi ad O la matrice d'inerzia risulta diagonalizzata e la relazione tra \mathbf{L} e $\boldsymbol{\omega}$ si semplifica:

$$\mathbf{L} = I_x \omega_x \mathbf{u}_x + I_y \omega_y \mathbf{u}_y + I_z \omega_z \mathbf{u}_z , \quad (6.31)$$

dove I_x, I_y, I_z hanno lo stesso significato che nella (6.30).

La (6.31) evidenzia che per un generico asse di rotazione passante per O , ossia per una generica direzione di $\boldsymbol{\omega}$ rispetto al corpo, \mathbf{L} non è parallelo a $\boldsymbol{\omega}$: infatti il coefficiente di proporzionalità tra L_x e ω_x , L_y e ω_y , L_z e ω_z non è lo stesso (sarebbe $I_x = I_y = I_z$ solo nel caso particolare che l'ellissoide d'inerzia relativo ad O fosse sferico). Però, se si sceglie come asse di rotazione proprio un asse principale d'inerzia, $\boldsymbol{\omega}$ è parallelo a quell'asse e quindi ha componente solo

lungo quell'asse (le altre due componenti sono nulle); conseguentemente risulta $\mathbf{L} = I \boldsymbol{\omega}$, dove I rappresenta il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse principale d'inerzia coincidente con l'asse di rotazione.

Quest'ultimo argomento mette in luce l'importanza degli assi principali d'inerzia: dato un corpo rigido e fissato un suo punto O , *esistono sempre almeno tre assi passanti per quel punto e ortogonali tra loro tali che quando il corpo ruota rispetto ad uno di essi il momento angolare \mathbf{L} è parallelo a $\boldsymbol{\omega}$, ovvero all'asse di rotazione.* È quindi possibile, nella pratica, realizzare nelle parti rotanti di una macchina la condizione $\mathbf{L} = I \boldsymbol{\omega}$, essenziale per ridurre al minimo le sollecitazioni ai supporti dell'asse di rotazione, come discusso nel paragrafo 6.4.

Valutiamo ora l'energia cinetica del corpo nel sistema di riferimento degli assi principali d'inerzia. Con sviluppi analoghi a quelli precedenti si trova

$$E_k = \frac{1}{2} (I_x \omega_x^2 + I_y \omega_y^2 + I_z \omega_z^2) \quad . \quad (6.32)$$

Utilizzando (6.31) si ottiene

$$E_k = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L}) = \frac{1}{2} \left(\frac{L_x^2}{I_x} + \frac{L_y^2}{I_y} + \frac{L_z^2}{I_z} \right) \quad . \quad (6.33)$$

Se l'asse di rotazione è un asse principale d'inerzia l'energia cinetica vale

$$E_k = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{L^2}{2I}$$

dove I coincide con I_x o I_y o I_z .

In situazioni nelle quali l'energia cinetica resta costante qualunque sia l'asse di rotazione si può definire un *ellissoide dell'energia*. Nella (6.32) dividiamo entrambi i membri per E_k , ottenendo

$$\frac{L_x^2}{I_x E_k} + \frac{L_y^2}{I_y E_k} + \frac{L_z^2}{I_z E_k} = 1 \quad (6.34)$$

che, se i coefficienti sono costanti, è un ellissoide nelle coordinate $\omega_x, \omega_y, \omega_z$

. Si può immaginare, sovrapposto al sistema di riferimento con origine in O e avente per assi gli assi principali di inerzia, con coordinate X, Y, Z , un secondo sistema con la stessa origine e gli stessi assi, sui quali però le coordinate sono le componenti di $\boldsymbol{\omega}$. La punta del vettore $\boldsymbol{\omega}$, che è applicato in O ed è parallelo all'asse di rotazione, descrive la superficie dell'ellissoide dell'energia al variare dell'asse di rotazione (la costanza di E_k non implica quella di $\boldsymbol{\omega}$). Anche l'ellissoide dell'energia è fisso rispetto al corpo.

Come osservazione conclusiva sottolineiamo un aspetto del teorema di Poincot: anche se a livello della distribuzione geometrica delle masse, cioè a livello della forma del corpo, non ci sono evidenti simmetrie, c'è sempre una simmetria nei momenti d'inerzia, che si manifesta con l'esistenza dell'ellissoide d'inerzia.

6.11 Giroscopi

Si chiama *giroscopio un corpo rigido con un punto che è mantenuto fisso da un opportuno sistema di vincoli*. Il moto del giroscopio risulta in una rotazione rispetto ad un asse passante per il punto fisso, asse che in generale varia nel tempo. Il moto è piuttosto complicato e ci limitiamo, pertanto, ad esaminare solo qualche caso semplice. Avremo modo, in questo studio, di utilizzare le nozioni del paragrafo 6.10.

1° Caso

Il punto fisso coincide con il centro di massa, non ci sono momenti esterni rispetto al centro di massa ($\mathbf{M} = 0$) e la rotazione avviene attorno ad un asse centrale d'inerzia, per cui $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$.

Tale situazione si realizza tramite dispositivi a *sospensione cardanica*, come in figura 6.50. Il giroscopio è il disco interno che ruota intorno all'asse z . L'anello esterno può ruotare attorno all'asse x , mentre quello interno attorno all'asse y . L'asse di rotazione z può essere orientato in qualsiasi direzione. Il peso del giroscopio è equilibrato dalla reazione dei supporti dell'asse x .

Dato che $\mathbf{M} = 0$, $\mathbf{L} = \text{costante}$ e quindi anche $\boldsymbol{\omega} = \text{costante}$. *L'asse di rotazione resta fisso nel tempo.*

Un'applicazione di questa proprietà si realizza negli stabilizzatori di direzione. Un giroscopio, montato su un corpo in movimento, mantiene la direzione del suo asse fisso, ad esempio posizionata, all'inizio del moto del corpo, parallelamente alla direzione da seguire.

Se il corpo devia da questa direzione cambia l'orientazione relativa tra corpo e giroscopio. Questa deviazione, evidenziata da opportuni sensori, attiva il dispositivo per la correzione automatica della rotta.

2° Caso

Il punto fisso coincide con il centro di massa, la rotazione ha luogo attorno ad un asse centrale d'inerzia, $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$, ma agisce rispetto al punto fisso un momento esterno.

Avendo come riferimento la figura 6.50, supponiamo che l'asse di rotazione sia orizzontale e che venga applicata una forza verticale, come in figura 6.51a. Il momento rispetto al centro di massa è $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ e giace in un piano orizzontale. la variazione di \mathbf{L} è $d\mathbf{L} = \mathbf{M} dt$, parallela a \mathbf{M} : l'asse si sposta in un piano orizzontale e non verso il basso (\mathbf{L} , costante in modulo, *precede* rispetto ad un asse verticale con velocità angolare $\boldsymbol{\Omega}$ tale che $\mathbf{M} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{L}$). Se invece la forza applicata è orizzontale (figura 6.51b) l'asse ruota in un piano verticale.

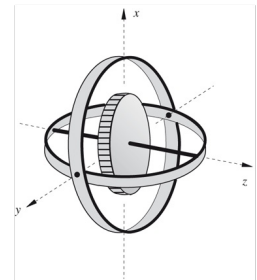


FIGURA 6.50

Precessione del
giroscopio

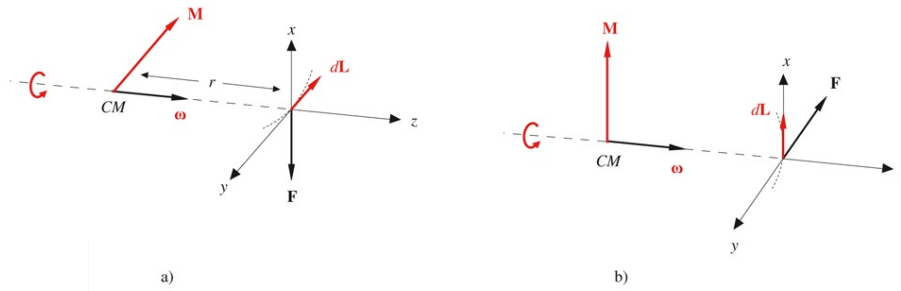


FIGURA 6.51

Il comportamento sarebbe ben diverso se fosse $\boldsymbol{\omega} = 0$: lo spostamento dell'asse seguirebbe \mathbf{F} e non sarebbe a 90° rispetto a \mathbf{F} , i momenti sarebbero ancora quelli disegnati, ma sia \mathbf{L} che $d\mathbf{L}$ risulterebbero paralleli a \mathbf{M} .

3° Caso

Il punto fisso coincide con il centro di massa, non ci sono momenti esterni, però l'asse di rotazione non è un asse centrale d'inerzia, \mathbf{L} e $\boldsymbol{\omega}$ non sono paralleli. Nel dispositivo di figura 6.50 si può realizzare questa situazione applicando un impulso all'asse di rotazione con il che il momento dell'impulso fa cambiare \mathbf{L} , rendendolo non parallelo all'asse di rotazione.

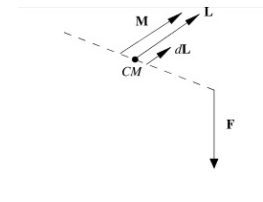


FIGURA 6.52

Dalla condizione $\mathbf{M} = 0$ si ha sempre che \mathbf{L} è costante in direzione e modulo. Inoltre, non essendoci attriti, l'energia cinetica di rotazione resta costante. Da (6.33) segue $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L} = \text{costante}$: la proiezione di $\boldsymbol{\omega}$ sulla direzione fissa di \mathbf{L} deve restare costante durante il moto. Pertanto la punta del vettore $\boldsymbol{\omega}$ sta sempre su un piano ortogonale a \mathbf{L} (figura 6.53). D'altra parte la punta di $\boldsymbol{\omega}$ descrive l'ellissoide dell'energia (6.34). Poincot ha dimostrato che l'ellissoide e il suddetto piano hanno un solo punto in comune in ogni istante e che durante il moto l'ellissoide rotola senza strisciare sul piano.

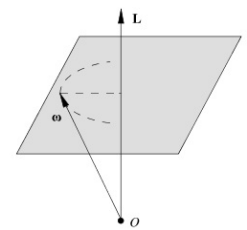


FIGURA 6.53

Nei casi più semplici $\boldsymbol{\omega}$ ruota rispetto a \mathbf{L} con un moto di precessione e ruota rispetto all'ellissoide dell'energia, cioè non ha una posizione costante nel corpo. In questo tipo di moto, che si chiama *nutazione*, vediamo dunque il giroscopio ruotare rispetto ad un asse che non è fisso rispetto al giroscopio stesso e che a sua volta ruota rispetto ad una direzione fissa.

Nutazione

4° Caso

Il punto fisso O è diverso dal centro di massa e quindi, rispetto a O , è diverso da zero il momento della forza peso.

L'esempio tipico è costituito dal moto di una trottola (figura 6.54). Il punto fisso, assunto come polo, è il punto di contatto della trottola con il piano di appoggio. L'asse di rotazione, che è un asse centrale d'inerzia, passa per O e per il centro di massa. Abbiamo $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$ con $\boldsymbol{\omega}$ costante in modulo.

Il momento della forza peso è $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times m \mathbf{g}$, mentre il momento della reazione del piano è nullo. Pertanto

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \times m \mathbf{g}$$

e, siccome \mathbf{L} è costante in modulo, vale anche la (6.11):

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{L} = \boldsymbol{\Omega} \times I \boldsymbol{\omega} ;$$

$\boldsymbol{\Omega}$ è la *velocità angolare di precessione del vettore \mathbf{L}* , ovvero dell'asse di rotazione della trottola, rispetto all'asse verticale passante per O . Eguagliando

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega} \times I \boldsymbol{\omega} &= \mathbf{r} \times m \mathbf{g} \\ \Rightarrow \boldsymbol{\Omega} &= -\frac{m r}{I \omega} \mathbf{g} . \end{aligned}$$

La *velocità angolare di precessione* è inversamente proporzionale alla velocità angolare della trottola. Il *periodo del moto di precessione* è

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi I \omega}{m g r} .$$

La precessione descritta qui è analoga a quella vista nel secondo caso. Il fenomeno si verifica quando è applicata all'asse di rotazione una forza costante con momento normale all'asse.

Osserviamo, anche se a posteriori, che nell'analisi del moto della trottola abbiamo fatto un'approssimazione: \mathbf{L} non coincide completamente con $I\boldsymbol{\omega}$ perché il corpo, oltre a ruotare attorno all'asse passante per O e per il centro di massa, ruota anche rispetto ad un asse verticale. Tuttavia, se ω è grande la precessione è molto lenta e il suo contributo al momento angolare è piccolo.

Se l'asse di rotazione non è un asse centrale di inerzia alla precessione si aggiunge la nutazione. In questo caso la punta di $\boldsymbol{\omega}$ non descrive la circonferenza della figura 6.54, ma oscilla rispetto a questa, salendo e scendendo (figura 6.56).

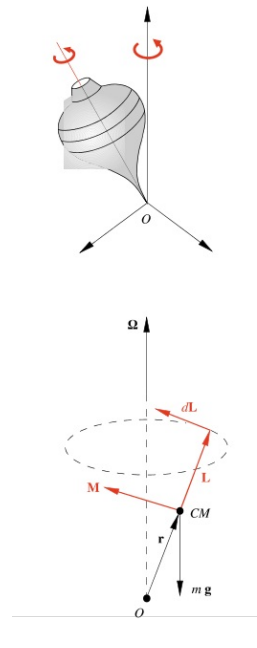


FIGURA 6.54

6.12 Corpo rigido libero

Nello studio del moto di un corpo rigido libero, cioè di un corpo in cui nessun punto è vincolato, si utilizzano le due equazioni:

$$\mathbf{R} = m \mathbf{a}_{CM} \quad \text{moto del centro di massa,}$$

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} \quad \text{moto rispetto al centro di massa.}$$

Il moto è in generale complicato in quanto l'asse di rotazione può variare nel tempo, anche rispetto al corpo. Se rispetto al centro di massa $\mathbf{M} = \mathbf{0}$, come nel caso agisca solo la forza peso, $\mathbf{L} = \text{costante}$. Si ha $\boldsymbol{\omega} = \text{costante}$ solo se la rotazione avviene attorno ad un asse centrale d'inerzia.

Un esempio molto semplice di corpo rigido libero è un disco che ruota attorno ad un asse verticale passante per il suo centro e contemporaneamente si sposta in un piano in assenza di attrito ($v_{CM} = \text{costante}$, $\omega = \text{costante}$, non legate tra loro).

Un caso interessante si ricava dall'esempio 6.22. Nell'istante in cui si applica l'impulso \mathbf{J} in un punto posto alla distanza d dal centro di massa supponiamo che l'asta sia lasciata libera. La velocità con cui si muove il centro di massa subito dopo l'applicazione dell'impulso è $\mathbf{v}_{CM} = \mathbf{J}/m$. Inoltre l'asta inizia a ruotare, attorno ad un asse orizzontale passante per il centro di massa, in verso antiorario e con velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ ricavabile tramite il momento dell'impulso:

$$\mathbf{d} \times \mathbf{J} = \mathbf{L} = I_c \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{12} m l^2 \boldsymbol{\omega} \quad , \quad \omega = \frac{12 d J}{m l^2} \quad .$$

Successivamente l'asta continua a ruotare con velocità angolare costante ω attorno all'asse orizzontale passante per il centro di massa, che a sua volta percorre una traiettoria parabolica in un piano verticale. L'equazione del moto del centro di massa è $m \mathbf{a}_{CM} = m \mathbf{g}$, con la condizione iniziale $\mathbf{v}_{CM}(0) = \mathbf{J}/m$.

Consideriamo infine il moto della terra. Le forze esercitate dal sole e dalla luna hanno momento non nullo rispetto al centro di massa della terra e pertanto si ha una precessione dell'asse di rotazione terrestre rispetto ad un asse ortogonale al piano dell'orbita. L'angolo di precessione è di $23^\circ 27'$, mentre il periodo della precessione, detta degli equinozi, è di 27725 anni. Inoltre l'asse di rotazione non è un asse centrale d'inerzia per cui alla precessione si sovrappone la *nutazione* con periodo di 19 anni.

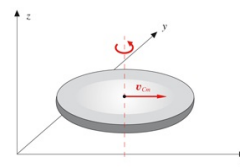


FIGURA 6.55

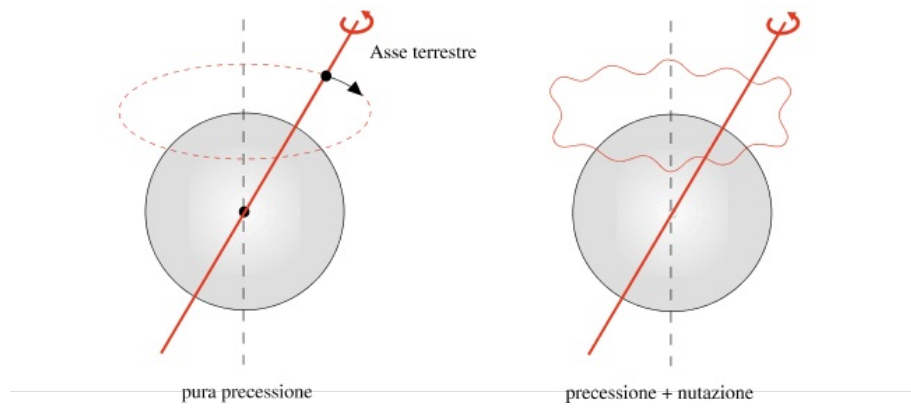


FIGURA 6.56

6.13 Leggi di conservazione nel moto di un corpo rigido

Puntualizziamo in questo paragrafo considerazioni già fatte sulle leggi di conservazione, adattandole alle caratteristiche specifiche dei moti dei corpi rigidi.

Iniziamo dalla *conservazione della quantità di moto del sistema*, $\mathbf{P} = m \mathbf{v}_{CM}$. Se la risultante delle forze esterne è nulla, il centro di massa si muove di moto rettilineo uniforme, ma il moto dei singoli punti non è detto sia traslatorio rettilineo uniforme. Si guardi, ad esempio, un punto di un corpo che compie un moto di puro rotolamento uniforme oppure un punto di un disco, posto su un piano orizzontale senza attrito, che ruota attorno ad un asse verticale passante per il centro di massa e contemporaneamente si muove nel piano con $\mathbf{v}_{CM} = \text{costante}$ (figura 6.55). L'argomento si estende da un solo corpo rigido ad un sistema di corpi rigidi in moto.

Assumendo come polo un punto fisso in un sistema di riferimento inerziale o il centro di massa, se $\mathbf{M} = 0$ il momento angolare resta costante in modulo, direzione e verso. Questo però non comporta $\boldsymbol{\omega} = \text{costante}$, in quanto non è detto che il moto di rotazione avvenga attorno ad un asse principale d'inerzia, cioè che sia $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$.

Sono di particolare interesse i casi in cui si ha conservazione del momento angolare in un sistema formato da più corpi rigidi, dove la variazione della posizione relativa delle singole parti determina una variazione del momento d'inerzia del sistema.

Si abbiano ad esempio due sferette eguali, ciascuna di massa m e raggio r , collegate da un'asta orizzontale di lunghezza variabile e di momento d'inerzia trascurabile. Le due sfere, inizialmente poste a distanza $2r_1 \gg r$, sono in rotazione con velocità angolare costante ω_1 attorno ad un asse verticale equidistante dalle due sferette. Rispetto al centro di massa del sistema, posto sull'asse di rotazione, tutti i momenti esterni sono nulli, pertanto il momento angolare resta costante:

$$L = I_1 \omega_1 = \text{costante} \quad , \quad I_1 = 2 \left[\frac{2}{5} m r^2 + m (r + r_1)^2 \right] \cong 2 m r_1^2 \quad .$$

Riduciamo la distanza tra le due sferette, avvicinandole da $2r_1$ a $2r_2$, con $r_2 < r_1$. Il momento d'inerzia diventa $I_2 = 2 m r_2^2 < I_1$. Le forze che applichiamo per avvicinare le sferette hanno momento nullo rispetto al centro di massa e quindi $L_2 = L_1$:

$$2 m r_2^2 \omega_2 = 2 m r_1^2 \omega_1 \Rightarrow \omega_2 = \frac{r_1^2}{r_2^2} \omega_1 > \omega_1 \quad .$$

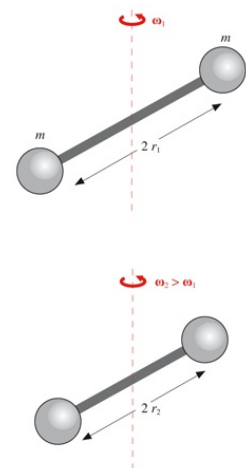


FIGURA 6.57

La variazione del momento d'inerzia porta a una variazione della velocità angolare, anche se \mathbf{L} è costante.

Questo caso, nell'approssimazione in cui si trascuri il raggio delle sfere rispetto alla distanza dall'asse, è lo stesso che abbiamo visto negli esempi 4.8 e 4.11. Anche l'aspetto energetico è lo stesso: c'è una variazione di energia cinetica, eguale al lavoro delle forze centripete, che ha l'espressione trovata negli esempi suddetti. Possiamo quindi verificare, in un caso differente da quelli visti precedentemente, l'indipendenza della legge di conservazione del momento angolare da quella dell'energia. Nel sistema esaminato \mathbf{L} è costante, però a diverse configurazioni con lo stesso momento angolare corrispondono energie diverse, cioè l'energia non si conserva (e in altre situazioni può succedere il contrario). Un modo più generale di calcolare il lavoro è il seguente:

$$W = \Delta E_k = E_{k, \text{fin}} - E_{k, \text{in}} = \frac{L^2}{2 I_{\text{fin}}} - \frac{L^2}{2 I_{\text{in}}}$$

e si verifica subito che il risultato è lo stesso.

La legge di conservazione dell'energia meccanica nel moto di un corpo è valida quando non ci sono attriti o quando, come nel moto di puro rotolamento, le forze di attrito non compiono lavoro, pur essendo presenti. Osserviamo inoltre che le reazioni vincolari che tengono fissi uno o più punti del corpo, non compiono lavoro, mentre la presenza di momenti di attrito che agiscono sull'asse di rotazione determina un lavoro che provoca una diminuzione dell'energia meccanica.

Supponendo che siano verificate le condizioni per la conservazione dell'energia meccanica e che agisca solo la forza peso, se il centro di massa resta in un piano orizzontale $\Delta E_p = 0$ ed è sufficiente considerare solo l'energia cinetica; se invece cambia la quota del centro di massa, $\Delta E_p = m g \Delta z_{CM}$.

Consideriamo ad esempio un'asta, di massa m e lunghezza l , che può ruotare in un piano verticale attorno ad un suo estremo (come nell'esempio 6.22). Se viene lasciata cadere, con velocità iniziale nulla, dalla posizione orizzontale, quando raggiunge la posizione verticale ha velocità angolare ω e il suo centro di massa ha velocità v_{CM} che si possono calcolare imponendo la conservazione dell'energia meccanica:

$$E_{\text{in}} = m g l = E_{\text{fin}} = \frac{1}{2} I \omega^2 + m g \frac{l}{2}$$

con $I = \frac{1}{3} m l^2$. Pertanto

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{l}}, \quad v_{CM} = \omega \frac{l}{2} = \sqrt{\frac{3gl}{4}}$$

Se si ha un sistema di corpi rigidi bisogna esaminare anche la natura delle forze interne prima di una eventuale applicazione della legge di conservazione dell'energia.

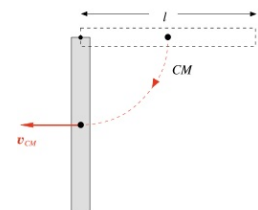


FIGURA 6.58

Esempio 6.24

L'asta della figura 6.58 è tenuta ferma ad un angolo θ_0 rispetto alla verticale. Ad un certo istante essa viene abbandonata con velocità iniziale nulla e inizia ad oscillare in assenza di attriti. Calcolare, in funzione dell'angolo θ rispetto alla verticale, l'accelerazione angolare, le componenti tangente e normale dell'accelerazione del centro di massa, le analoghe componenti della reazione \mathbf{R} nel perno di sostegno. Scrivere i risultati per un pendolo composto generico di momento d'inerzia $m k^2$ rispetto all'asse di rotazione e poi per l'asta. Per quest'ultima in particolare, con $\theta_0 = \pi/2$, applicare le formule ai casi $\theta = \pi/2$ e $\theta = 0$.

Soluzione

Chiamiamo h la distanza del centro di massa del corpo dall'asse di rotazione (vedi paragrafo 6.7). Per l'accelerazione angolare abbiamo:

$$M = -m g h \sin\theta = I \alpha \quad , \quad \alpha = -\frac{g h}{k^2} \sin\theta \Rightarrow a_{CM,T} = \alpha h = -g \frac{h^2}{k^2} \sin\theta \quad .$$

Il segno meno ha il significato già visto nel moto del pendolo e, più in generale, nel moto armonico semplice: esso segnala che le forze agenti tendono a riportare il corpo verso la posizione di equilibrio.

Per l'asta ($I = ml^2/3$, $h = l/2$, $k^2 = l^2/3$) i due risultati si scrivono

$$\alpha = -\frac{3g}{2l} \sin\theta \quad , \quad a_{CM,T} = -\frac{3}{4} g \sin\theta \quad .$$

Applichiamo ora la conservazione dell'energia:

$$m g h (1 - \cos\theta_0) = m g h (1 - \cos\theta) + \frac{1}{2} m k^2 \omega^2 \Rightarrow \omega^2 = 2 g \frac{h}{k^2} (\cos\theta - \cos\theta_0)$$

$$a_{CM,N} = \omega^2 h = 2 g \frac{h^2}{k^2} (\cos\theta - \cos\theta_0) \quad ,$$

diretta verso il centro di sospensione. Per l'asta

$$a_{CM,N} = \frac{3}{2} g (\cos\theta - \cos\theta_0) \quad .$$

La forza di reazione entra nell'equazione del moto del centro di massa

$$\mathbf{R} + m \mathbf{g} = m \mathbf{a}_{CM} \quad .$$

Proiettando lungo la direzione tangente e normale alla traiettoria

$$R_T - m g \sin\theta = m a_{CM,T} \quad , \quad R_N - m g \cos\theta = m a_{CM,N} \quad .$$

Di R_N sappiamo che deve essere opposta alla componente della forza peso per comunicare l'accelerazione centripeta al centro di massa, per R_T

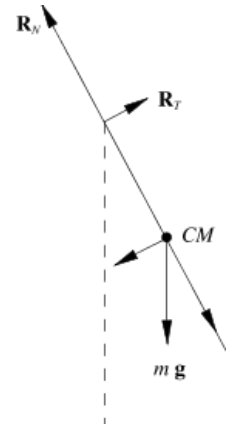


FIGURA 6.59
(Esempio 6.24)

vedremo il segno dalla soluzione. Si ha

$$R_T = mg \left(1 - \frac{h^2}{k^2} \right) \operatorname{sen} \theta \quad ,$$

$$R_N = 2 mg \frac{h^2}{k^2} (\cos \theta - \cos \theta_0) + mg \cos \theta \quad .$$

Dato che $I = m k^2 = I_C + m h^2$, k^2 è maggiore di h^2 ; nella situazione della figura 6.59 R_T risulta positiva, ovvero opposta a $mg \operatorname{sen} \theta$ (in modulo R_T è minore di $mg \operatorname{sen} \theta$). Nel caso dell'asta

$$R_T = \frac{1}{4} mg \operatorname{sen} \theta \quad , \quad R_N = \frac{1}{2} mg (5 \cos \theta - 3 \cos \theta_0) \quad .$$

Con $\theta_0 = \pi/2$, la prima situazione ($\theta = \pi/2$) è quella dell'istante di partenza:

$$\alpha = -\frac{3g}{2l} \quad , \quad a_{CM,T} = -\frac{3}{4}g \quad , \quad a_{CM,N} = 0 \quad , \quad R_T = \frac{1}{4}mg \quad , \quad R_N = 0 \quad .$$

La seconda situazione ($\theta = 0$) è quella del passaggio del centro di massa sulla verticale:

$$\alpha = 0 \quad , \quad a_{CM,T} = 0 \quad , \quad a_{CM,N} = \frac{3}{2}g \quad , \quad R_T = 0 \quad , \quad R_N = \frac{5}{2}mg \quad .$$

Visualizza Soluzione

Esempio 6.25

Un'asta è tenuta ferma in posizione verticale, come in figura 6.60. Abbandonata con velocità iniziale nulla l'asta ruota e ad un certo istante passa per la posizione indicata, a 90° con la precedente; sull'asse agisce un momento costante di attrito. Calcolare quanto valgono le componenti tangenziale e normale dell'accelerazione dell'estremo P dell'asta. La massa dell'asta è $m = 4.2$ kg, la lunghezza $l = 0.8$ m, il momento d'attrito vale $M_a = 4.5$ Nm.

Soluzione

Per il calcolo di $a_{P,T}$ ricorriamo all'equazione del moto, come fatto nell'esempio 6.24. Il modulo di α è dato dall'equazione (valida per $\theta = \pi/2$)

$$mg \frac{l}{2} - M_a = I \alpha = \frac{1}{3} m l^2 \alpha \Rightarrow \alpha = 13.4 \operatorname{rad/s}^2 \quad , \quad a_{P,T} = \alpha l = 10.7 \operatorname{m/s}^2 \quad .$$

A causa della presenza dell'attrito non possiamo utilizzare la conservazione dell'energia; ricorriamo invece alla relazione che lega la variazione di energia meccanica al lavoro delle forze dissipative,

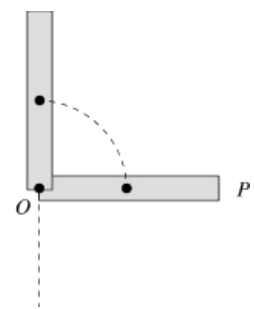


FIGURA 6.60
(Esempio 6.25)

$$E_{m,\text{fin}} - E_{m,\text{in}} = W_{\text{diss}} \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{1}{3} m l^2 \omega^2 - mg \frac{l}{2} = -M_a \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \omega^2 = 21.0 \text{ (rad/s)}^2 \quad , \quad a_{p,N} = \omega^2 l = 16.8 \text{ m/s}^2 .$$

Visualizza Soluzione

Esempio 6.26

Un disco, di massa $m_1 = 9 \text{ kg}$ e raggio r , ruota senza attrito in un piano orizzontale attorno ad un asse verticale passante per il suo centro. Lungo un diametro del disco è scavata una scanalatura nella quale può scorrere un punto materiale di massa $m_2 = 1.5 \text{ kg}$. Inizialmente il disco ruota con velocità angolare $\omega_0 = 6 \text{ rad/s}$ e il punto si trova quasi nel centro. Si lascia libero il punto che inizia a scorrere lungo la scanalatura e ad un certo istante raggiunge il bordo del disco. Calcolare il valore della velocità angolare in quell'istante.

Soluzione

Durante lo scorrimento la velocità del punto ha una componente ortogonale alla scanalatura e una parallela; al moto lungo il diametro però non è associato momento angolare rispetto al centro perché raggio vettore e velocità sono paralleli. Le forze di reazione, con componente normale ed eventualmente parallela (se c'è attrito tra punto e disco), sono forze interne e hanno momento nullo. Il momento della forza peso di m_2 è ortogonale all'asse. Possiamo quindi conservare il momento angolare lungo l'asse e scrivere

$$\frac{1}{2} m_1 r^2 \omega_0 = \frac{1}{2} m_1 r^2 \omega + m_2 r^2 \omega \quad ,$$

dove l'ultimo addendo esprime il momento angolare del punto quando raggiunge il bordo del disco. Segue

$$\omega = \frac{m_1}{m_1 + 2 m_2} \omega_0 = 4.5 \text{ rad/s} \quad .$$

Visualizza Soluzione

6.14 Urti tra punti materiali e corpi rigidi o tra corpi rigidi

Nei problemi d'urto trovano in generale applicazione le leggi di conservazione che abbiamo discusso nel paragrafo precedente.

Riassumendo sinteticamente, in un urto l'energia cinetica del sistema rimane costante solo se l'urto è dichiaratamente elastico. Se agiscono solo forze interne, o quelle esterne non sono di tipo impulsivo, si conserva la quantità di moto totale. Se invece esiste un vincolo che tiene fermo un punto del corpo rigido, e quindi sviluppa una forza di tipo impulsivo durante l'urto, non si verifica la conservazione della quantità di moto. Infine, qualora rispetto a un certo polo, fisso in un sistema di riferimento inerziale o coincidente con il centro di massa, il momento delle forze esterne, comprese quelle vincolari, è nullo, si conserva il momento angolare rispetto a tale polo. Se agiscono solo forze interne \mathbf{L} si conserva sempre, indipendentemente dalla scelta del polo.

Quando il corpo urtato è vincolato, il sistema di vincoli può esplicare durante l'urto un sistema di forze che ha una risultante \mathbf{R} e un momento risultante \mathbf{M} . L'effetto complessivo, nel brevissimo tempo di durata dell'urto, è dato dall'impulso della forza $\mathbf{J} = \int \mathbf{R} dt$ e dall'impulso angolare $\int \mathbf{M} dt$, eguali rispettivamente alla variazione della quantità di moto e alla variazione del momento angolare del sistema.

Essendo la quantità di moto e il momento angolare grandezze vettoriali, è possibile realizzare situazioni in cui la loro conservazione è parziale; per esempio, P_x e P_y si conservano, P_z cambia: questo vuol dire che l'impulso ha componenti J_x e J_y nulle, mentre J_z è diversa da zero. Analogamente per \mathbf{L} e l'impulso angolare.

Esempio 6.27

Un'asta è ferma sopra un piano orizzontale liscio; la massa è m_1 , la lunghezza l . Un punto materiale, di massa m_2 e velocità \mathbf{v} perpendicolare all'asta, colpisce l'asta a distanza x dal centro O e vi resta attaccato. Determinare la velocità lineare e quella angolare del sistema dopo l'urto.

Soluzione

Durante l'urto, completamente anelastico, agiscono solo forze interne e pertanto si ha conservazione della quantità di moto \mathbf{P} e del momento angolare \mathbf{L} .

La conservazione di \mathbf{P} fornisce la velocità del centro di massa prima e dopo l'urto. Dopo l'urto coincide con quella del sistema asta più punto materiale attaccato all'asta:

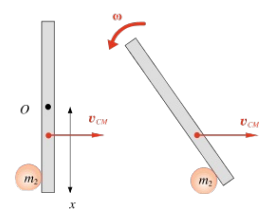


FIGURA 6.61
(Esempio 6.27)

$$m_2 \mathbf{v} = (m_1 + m_2) \mathbf{v}_{CM} \quad , \quad \mathbf{v}_{CM} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{v} \quad .$$

Determiniamo la posizione del centro di massa rispetto al centro dell'asta nell'istante in cui avviene l'urto:

$$(m_1 + m_2) x_{CM} = m_2 x \quad \Rightarrow \quad x_{CM} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} x \quad .$$

Prima e dopo l'urto il centro di massa si muove lungo la linea tratteggiata in figura 6.61, con velocità \mathbf{v}_{CM} .

Per quanto riguarda la conservazione di \mathbf{L} , assumendo come polo il centro di massa possiamo scrivere

$$(x - x_{CM}) m_2 v = I \omega \quad , \quad I = m_1 \frac{l^2}{12} + m_1 x_{CM}^2 + m_2 (x - x_{CM})^2$$

e quindi

$$\omega = \frac{(x - x_{CM}) m_2 v}{m_1 \frac{l^2}{12} + m_1 x_{CM}^2 + m_2 (x - x_{CM})^2} = \frac{m_2 x v}{(m_1 + m_2) \frac{l^2}{12} + m_2 x^2} \quad .$$

La rotazione avviene in senso antiorario. Se l'urto avesse luogo dall'altra parte rispetto al centro dell'asta il verso di rotazione sarebbe orario. Non si ha rotazione solo con un urto al centro dell'asta ($x = 0, \omega = 0$).

Dopo l'urto il centro di massa si muove con moto rettilineo uniforme, mentre gli altri punti hanno un moto composto da una traslazione con velocità \mathbf{v}_{CM} e da una rotazione, con velocità angolare ω , rispetto ad un asse verticale passante per il centro di massa.

In particolare, se $m_1 = m_2 = m$, $x_{CM} = x/2$

feaagKart1ev2aqatCvAUfeBSjuyZL2yd9gzLbvyNv2CaerbuLwBLn
hiov2DGi1BTfMBaeXatLxBI9gBaerbd9wDYLwzYbItLDharqqubsr
4rNCHbGeaGqiVu0Je9sqqrpepCoxbbL8F4rqrFfpeea0xe9Lq=Jc9
vqaqpepmoxbba9pwe9Q8fso=yqaqpepae9pg0FirpepeKkFroxfr=x
fr=xb9adbeqaaeGaciGaiaabeqaamaabaabaaGcbaGaamyBamaaBa
aaleaacaalIXaGaaGPaVdqabaGccqGH9aqpcaaMc8UaaGPaVlaad2ga
daWgaaWcbaGaaGomaqabaGccaaMc8UaeyypaoJaaGPaVlaaykW7ca
WGTbGaaGPaVlaaykW7caGGSaGaaGPaVlaaykW7caWG4bWaaSbaaSqa
aiaadoeacaWGnbaabeaakiaaykW7cqGH9aqpcaaMc8UaaGPaVpaala
aabaGaamiEaaqaaiaaikdaaaaaa@5718@

$$v_{CM} = \frac{v}{2} \quad , \quad \omega = \frac{x v}{l^2/6 + x^2} \quad .$$

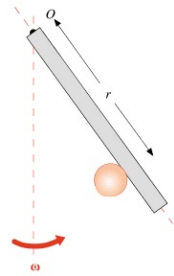


FIGURA 6.62
(Esempio 6.28)

Esempio 6.28

Nell'esempio precedente assumiamo che l'asta sia vincolata ad un estremo, attorno al quale può ruotare senza attrito. Per semplicità sia $m_1 = m_2 = m$; indichiamo con r la distanza del punto d'impatto dall'estremo fisso. Determinare la velocità angolare ω del sistema asta più punto materiale dopo l'urto e l'impulso della reazione vincolare durante l'urto.

Soluzione

In questo caso non possiamo conservare la quantità di moto del sistema, in quanto durante l'urto agisce una forza esterna di tipo impulsivo esplicita dal vincolo. È possibile però conservare il momento angolare rispetto al punto fisso perché il momento angolare delle forze vincolari è nullo rispetto a tale polo:

$$r m v = I \omega \quad , \quad I = m \frac{l^2}{3} + m r^2 \Rightarrow \omega = \frac{r v}{l^2/3 + r^2} \quad .$$

Durante l'urto la quantità di moto del sistema varia per effetto dell'impulso \mathbf{J} delle forze vincolari:

$$\mathbf{J} = \Delta \mathbf{P} = \mathbf{P}_{\text{fin}} - \mathbf{P}_{\text{in}} \quad .$$

$\mathbf{P}_{\text{in}} = m \mathbf{v}$ mentre \mathbf{P}_{fin} può essere calcolata come somma delle quantità di moto del punto e dell'asta o come quantità di moto del centro di massa del sistema, nell'istante successivo all'urto. Nel primo caso:

$$\mathbf{P}_{\text{fin}} = m \omega r \mathbf{u}_v + m \omega \frac{l}{2} \mathbf{u}_v = m \left(r + \frac{l}{2} \right) \omega \mathbf{u}_v \quad ,$$

dove ωr è la velocità del punto, $\omega \frac{l}{2}$ la velocità del centro di massa dell'asta, subito dopo l'urto, e \mathbf{u}_v è il versore della velocità \mathbf{v} del punto prima dell'urto. Con la seconda procedura, bisogna prima calcolare la posizione del centro di massa del sistema nell'istante dell'urto:

$$x_{CM} = \frac{m \frac{l}{2} + m r}{2 m} = \frac{1}{2} \left(r + \frac{l}{2} \right)$$

e quindi $\mathbf{P}_{\text{fin}} = 2m v_{CM} = 2m x_{CM} \omega \mathbf{u}_v = m \left(r + \frac{l}{2} \right) \omega \mathbf{u}_v$. Solo durante l'urto \mathbf{P}_{fin} e \mathbf{P}_{in} hanno la stessa direzione, dopo \mathbf{P} cambia anche di direzione.

Pertanto l'impulso della reazione vincolare è dato da

$$\mathbf{J} = m \left[\omega \left(r + \frac{l}{2} \right) - v \right] \mathbf{u}_v = m l v \frac{\frac{r}{2} - \frac{l}{3}}{\frac{l^2}{3} + r^2} \mathbf{u}_v .$$

Osserviamo che per $r > \frac{2}{3} l$ l'impulso è parallelo e concorde a \mathbf{v} , mentre per $r < \frac{2}{3} l$ esso è opposto a \mathbf{v} . L'impulso è nullo se $r = \frac{2}{3} l$: in tale caso durante l'urto il vincolo non agisce, è come se fossimo nell'esempio precedente con $x = (\frac{2}{3} l - \frac{l}{2}) = \frac{l}{6}$ e infatti troviamo, in ambedue i casi, lo stesso valore della velocità angolare, $\omega = \frac{6}{7} v l$ (naturalmente il vincolo agisce dopo l'urto, facendo ruotare l'asta attorno all'estremo fisso).

Questi risultati si spiegano considerando che a causa dell'urto il sistema tende ad avanzare sul piano, ma anche a ruotare. Pertanto l'estremo, che resta fisso, è sollecitato sia ad avanzare, dal che deriva una reazione vincolare negativa, che a ruotare rispetto ad un asse verticale passante per il centro di massa del sistema, fatto che dà origine a una reazione 2 vincolare positiva o negativa a seconda del punto di impatto. Solo se $r = \frac{2}{3} l$ i due effetti sono eguali e contrari.

Visualizza Soluzione

Esempio 6.29

Un'asta, di massa m_1 e lunghezza l , è libera di ruotare in un piano verticale attorno ad un asse fisso orizzontale passante per il suo centro, figura 6.63. Un punto materiale, di massa m_2 e velocità \mathbf{v} parallela all'asse di rotazione, colpisce l'asta a un estremo e vi resta attaccato. Nell'istante dell'urto l'asta sta ruotando con velocità angolare ω in verso antiorario. Determinare la velocità angolare ω' dopo l'urto, l'impulso e l'impulso angolare delle reazioni vincolari.

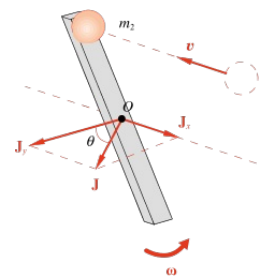


FIGURA 6.63
(Esempio 6.29)

Soluzione

Nell'urto si conserva la componente del momento angolare parallela all'asse di rotazione non essendoci momenti esterni con questa direzione. Invece il momento angolare del punto materiale, ortogonale all'asse di rotazione, viene annullato nell'urto dal momento esplicito dai supporti vincolari dell'asse, che impediscono la modifica dell'asse di rotazione. Ovviamente non si conservano quantità di moto e energia.

Assumendo come polo il centro dell'asta abbiamo

$$I \omega = \left(I + m_2 \frac{l^2}{4} \right) \omega' \quad , \quad I = m_1 \frac{l^2}{12} \quad , \quad \omega' = \frac{m_1}{m_1 + 3 m_2} \omega .$$

La rotazione è sempre in verso antiorario. Dopo l'urto, per effetto del momento della forza peso del punto materiale, la velocità angolare cambierà.

L'impulso delle forze vincolari si calcola tramite la variazione della quantità

di moto del sistema. L'impulso ha due componenti, una lungo la direzione dell'asse di rotazione x , dovuta all'arresto del proiettile, l'altra lungo una direzione ortogonale y , dovuta all'inizio della rotazione del proiettile (l'asta non contribuisce) :

$$P_{in,x} = m_2 v \quad , \quad P_{fin,x} = 0 \quad , \quad P_{in,y} = 0 \quad , \quad P_{fin,y} = m_2 \frac{l}{2} \omega' \quad .$$

Pertanto il modulo dell'impulso è dato da

$$J = \sqrt{(m_2 v)^2 + (m_2 \frac{l}{2} \omega')^2} = m_2 \sqrt{v^2 + \frac{l^2}{4} \omega'^2} \quad .$$

In figura 6.63 \mathbf{J} , che sta nel piano x, y ortogonale al piano in cui ruota l'asta, forma con questo l'angolo

$$\theta = \arctg \frac{J_x}{J_y} = \frac{2v}{l \omega'} \quad .$$

L'impulso angolare esplicito dai supporti agenti sull'asse di rotazione è eguale alla variazione della componente del momento angolare ortogonale all'asse di rotazione (la componente parallela si conserva) e quindi è eguale ed opposto al momento iniziale del punto materiale:

$$\int \mathbf{M} dt = -\mathbf{OP} \times m_2 \mathbf{v}$$

essendo \mathbf{OP} il raggio vettore dal centro dell'asta al punto d'impatto. In modulo l'impulso angolare vale $m_2 l v$.

Pertanto, durante l'urto, le reazioni vincolari fanno cambiare in direzione e modulo la quantità di moto del punto materiale, mentre il loro momento risultante mantiene orizzontale l'asse di rotazione.

Visualizza Soluzione

Esempio 6.30

Un disco, di massa m_1 e raggio R , ruota con velocità angolare ω in un piano orizzontale attorno ad un asse verticale passante per il centro. Da un'altezza h viene lasciato cadere sul disco un punto materiale di massa m_2 . Il punto urta il disco ad una distanza $d < R$ dal centro del disco e vi rimane attaccato. Determinare la velocità angolare del sistema nell'istante successivo all'urto, l'impulso e l'impulso angolare delle reazioni vincolari.

Soluzione

Il problema è analogo al precedente, per cui diamo una spiegazione concisa: conservazione del momento angolare parallelamente all'asse di

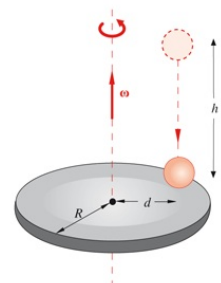


FIGURA 6.64
(Esempio 6.30)

rotazione

$$I \omega = (I + m_2 d^2) \omega' \quad , \quad I = \frac{1}{2} m_1 R^2$$

$$\omega' = \frac{m_1 R^2}{2 m_1 R^2 + 2 m_2 d^2} \omega \quad ;$$

componente dell'impulso nel piano orizzontale $m_2 d \omega'$; componente verticale dello impulso $m_2 g h$; modulo dell'impulso $J = m_2 d \sqrt{\omega'^2 + 2gh}$; angolo di \mathbf{J} rispetto alla verticale $\theta = \arctg d \omega' / \sqrt{2gh}$; modulo dell'impulso angolare $m_2 d \sqrt{2gh}$

Visualizza Soluzione

Esempio 6.31

Un'asta, di massa m_1 e lunghezza l , è libera di ruotare in un piano verticale attorno ad un asse orizzontale passante per il suo centro. Inizialmente l'asta è in quiete in posizione orizzontale. Un punto materiale, di massa m_2 , colpisce con velocità \mathbf{v} , ortogonale all'asta in direzione verticale, l'estremo dell'asta. Assumendo che l'urto sia elastico e che la velocità \mathbf{v}' del punto materiale dopo l'urto sia parallela a \mathbf{v} , determinare nell'istante successivo all'urto la velocità angolare ω dell'asta e il modulo e il verso di \mathbf{v}' .

Soluzione

Data la presenza di una forza vincolare in O non è possibile conservare la quantità di moto; possiamo però conservare rispetto ad O il momento angolare e, dato che l'urto è elastico, possiamo utilizzare la conservazione dell'energia. Pertanto, assumendo v' positiva se ha il verso indicato in figura,

$$m_2 v \frac{l}{2} = I \omega - m_2 v' \frac{l}{2} \quad , \quad I = m_1 \frac{l^2}{12} \quad ; \quad \frac{1}{2} m_2 v^2 = \frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{1}{2} m_2 v'^2 \quad .$$

Risolvendo il sistema si trova

$$\omega = \frac{12 m_2}{m_1 + 3 m_2} \frac{v}{l} \quad , \quad v' = \frac{m_1 - 3 m_2}{m_1 + 3 m_2} v \quad .$$

Il punto materiale prosegue il suo moto nello stesso verso se $3 m_2 > m_1$ ($v' < 0$), rimbalza se $3 m_2 < m_1$ ($v' > 0$), si ferma nell'istante dell'urto se $3 m_2 = m_1$ ($v' = 0$).

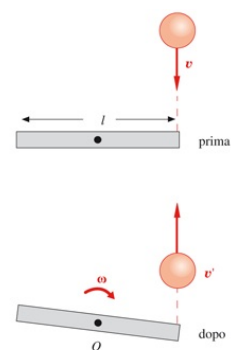


FIGURA 6.65
(Esempio 6.31)

Visualizza Soluzione

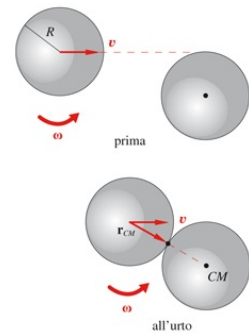


FIGURA 6.66
(Esempio 6.32)

Esempio 6.32

Un disco, di massa m e raggio R , scivola con velocità \mathbf{v} su un piano orizzontale liscio. Esso urta un altro disco identico, inizialmente in quiete e con il centro a distanza R dalla retta percorsa dal centro del primo disco (vedi figura 6.66). Dopo l'urto i due dischi restano attaccati e procedono come un unico corpo rigido. Determinare che velocità angolare deve avere il primo disco affinché dopo l'urto la velocità angolare del sistema sia nulla.

Soluzione

Nell'urto si conserva il momento angolare, rispetto a qualsiasi polo. Prendendo come polo il centro di massa del sistema e volendo che dopo l'urto il moto sia traslatorio, abbiamo $\mathbf{L}_{\text{fin}} = 0$; quindi, rispetto al centro di massa, deve essere $\mathbf{L}_{\text{in}} = 0$. Prima dell'urto solo il disco in movimento contribuisce al momento angolare, per cui abbiamo

$$\mathbf{L}_{\text{in}} = I\boldsymbol{\omega} + \mathbf{r}_{CM} \times m \mathbf{v} ,$$

secondo il teorema di König; $I\boldsymbol{\omega}$ è il momento angolare del disco rispetto al proprio centro di massa ($I = \frac{1}{2} m R^2$), $\mathbf{r}_{CM} \times m \mathbf{v}$ è il momento angolare del centro di massa del disco rispetto al centro di massa del sistema e vale in modulo $R/2 m v$ (il centro di massa del sistema dista $R/2$ dalla retta individuata da \mathbf{v}). Si osservi che $\mathbf{r}_{CM} \times m \mathbf{v}$ è diretto verso il foglio; se $\mathbf{L}_{\text{in}} = 0$, $I\boldsymbol{\omega}$ deve essere diretto verso il lettore, cioè il primo disco deve ruotare in senso antiorario. Allora in modulo

$$I\omega - \frac{R}{2} m v = 0 \quad , \quad \text{per cui} \quad \omega = \frac{v}{R} .$$

Visualizza Soluzione

Quando due corpi estesi si urtano, come è il caso dell'esempio 6.32, ma non restano attaccati, le quantità di moto dopo l'urto formano normalmente un certo angolo con la direzione che avevano prima dell'urto. Infatti la forza interna impulsiva $\mathbf{F}_{2,1}$ agente sul primo corpo non è parallela a $\mathbf{p}_{1, \text{in}}$ e quindi $\mathbf{p}_{1, \text{fin}}$ risulta deviata rispetto alla direzione iniziale del moto; lo stesso succede per il secondo corpo. La situazione è mostrata qualitativamente in figura 6.67 riferita a

due dischetti che non ruotano prima dell'urto. Essi non ruotano nemmeno dopo se non c'è attrito al contatto, cioè se le forze interne non hanno componente tangente. Altrimenti il momento dell'attrito mette in rotazione i dischetti.

Solo se i centri dei due dischetti si muovono lungo la stessa retta non si ha deviazione e si parla di urto centrale; l'urto della figura 6.67 non è centrale.

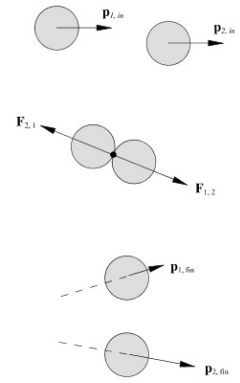


FIGURA 6.67

6.16 Riepilogo

Riassumiamo gli argomenti più importanti sviluppati in questo capitolo. Il *moto più generale* di un corpo rigido è *rototraslatorio*. Nella traslazione tutti i punti hanno lo stesso moto, pari a quello del centro di massa, e pertanto possiamo utilizzare le relazioni fisiche introdotte nello studio del moto di un punto materiale. L'*energia cinetica* è $E_k = \frac{1}{2} m v_{CM}^2$, mentre il *momento angolare* è dato da $\mathbf{L} = \mathbf{r}_{CM} \times m \mathbf{v}_{CM}$.

Nella rotazione tutti i punti ruotano con la stessa velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ attorno all'asse di rotazione, parallelo a $\boldsymbol{\omega}$. Il *momento d'inerzia rispetto all'asse* è dato da $I = \sum_i m_i R_i^2$ (o utilizzando l'espressione per un corpo continuo $I = \int R^2 dm$), il *momento angolare* rispetto all'asse o momento angolare assiale è $L_z = I\omega$ e l'*energia cinetica* è $E_k = \frac{1}{2} I\omega^2$.

Se l'asse è fisso in un sistema di riferimento inerziale e s'identifica con un *asse principale d'inerzia*, $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$ e l'equazione del moto di rotazione è

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = I \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = I\boldsymbol{\alpha} .$$

Se invece l'asse di rotazione non è un asse principale d'inerzia, nell'equazione del moto compaiono i momenti assiali: $M_z = dL_z / dt = I\alpha$.

Il problema si complica se l'asse di rotazione è variabile nel tempo, pur restando sempre valido il teorema del momento angolare. Nel caso che un punto sia fisso, si hanno i cosiddetti fenomeni giroscopi.

Un caso interessante di moto di rototraslazione è il moto di *puro rotolamento*.

Richiamiamo adesso alcune regole di opportunità nella scelta del polo per \mathbf{L} e per \mathbf{M} , utili soprattutto nella risoluzione di problemi.

Se il moto di rotazione avviene rispetto ad un asse fisso il polo viene scelto di norma tra i punti dell'asse.

Se un punto P del corpo è mantenuto fisso conviene sceglierlo come polo, in modo tale da annullare il momento delle forze che sono applicate in P (forze vincolari in genere). È importante l'applicazione negli *urti con corpi vincolati*. In ogni caso, si deve sempre considerare la possibilità di scegliere come polo il centro di massa, facendo attenzione, nel caso di sistemi composti, a prendere il centro di massa di tutti i punti.

Ricordiamo infine che se il centro di massa è fermo, $\mathbf{R} = \mathbf{0}$, \mathbf{L} e \mathbf{M} non dipendono dal polo.

I corpi solidi di norma hanno una forma e un volume non facilmente modificabili; da questo fatto deriva per astrazione la nozione di corpo ideale indeformabile o corpo rigido. In realtà tutti i corpi solidi si deformano sotto l'azione di sollecitazioni meccaniche.

Le deformazioni descritte nel seguito sono tutte di tipo elastico, intendendo con questo termine che al cessare della sollecitazione il corpo ritorna nella configurazione originaria. A parte i casi degli esempi 7.3 e 7.4, tratteremo sempre situazioni di equilibrio statico: la sollecitazione, applicata ad un corpo in quiete, lo deforma e ciò causa da parte del corpo una reazione eguale e contraria. Inoltre assumeremo che i processi siano *isotermi*, cioè si svolgano a temperatura costante.

7.1 Trazione e compressione

Quando un materiale viene sollecitato tramite una forza, che chiamiamo carico, di piccola intensità, esso subisce una deformazione proporzionale al carico; tale deformazione è elastica nel senso sopra precisato.

La proporzionalità tra deformazione e carico costituisce la *legge di Hooke*, già evidenziata nello studio di una molla. Se applichiamo una forza F all'estremo di una molla, fissata nell'altro estremo ad un punto vincolato, essa subisce un allungamento Δx , raggiungendo una configurazione di equilibrio, con Δx proporzionale a F . L'allungamento origina nella molla una reazione elastica, proporzionale all'allungamento stesso, la quale fa equilibrio a F .

Uno studio della deformazione elastica di un corpo solido può essere realizzato utilizzando il semplice dispositivo in figura 7.1. Una sbarra solida omogenea è posata su un tavolo e bloccata a una estremità; all'altra estremità viene applicata una forza di modulo F , per esempio dovuta alla forza peso della massa m . In questo caso il carico è di *trazione* e, come nella situazione con una molla, si raggiunge un equilibrio in cui la reazione elastica della sbarra eguaglia la forza applicata. Se la sbarra subisce l'azione di una forza di verso contrario alla precedente, si parla di *compressione*.

Nella pratica, più che i valori assoluti della deformazione e del carico, si utilizzano quelli specifici o unitari. Si definisce come *carico specifico* o unitario σ il rapporto tra la forza applicata ortogonalmente a una superficie e la superficie stessa, ovvero la forza applicata ortogonalmente all'unità di superficie. Analogamente la *deformazione specifica* o unitaria ε , detta anche *allungamento lineare unitario*, è l'allungamento subito da un materiale di lunghezza unitaria ovvero il rapporto tra allungamento e lunghezza. In formule

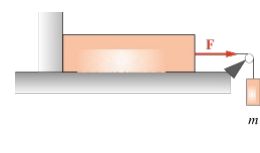


FIGURA 7.1

Carico specifico

Deformazione
specifico

$$\sigma = \frac{F}{S}, \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \quad (7.1)$$

Secondo la legge di Hooke, carico specifico e allungamento unitario per piccoli valori del carico sono proporzionali ed il loro rapporto è definito come *modulo di Young o modulo di elasticità E*:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \Rightarrow \varepsilon = \frac{1}{E} \sigma \rightarrow \frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E} \frac{F}{S} \quad (7.2)$$

Modulo di Young

La (7.2) rappresenta la relazione tra allungamento lineare e forza applicata, in funzione delle dimensioni geometriche del solido e delle sue caratteristiche elastiche. Un alto valore di E determina, a parità di carico specifico, un allungamento specifico minore. In figura 7.2 è riportato il grafico comunemente usato nello studio delle proprietà elastiche di un corpo sottoposto a trazione o compressione.

Nella tabella 7.1 sono elencati i valori del modulo di Young di alcuni materiali, alla temperatura di 20°C. Da (7.1) e (7.2) si vede che l'unità di misura di E , eguale a quella di σ , è il N/m²; ε invece è adimensionale.

Tabella 7.1 Modulo di Young

Materiale	E
acciaio	$2.1 \cdot 10^{11}$ N/m ²
alluminio	$7.0 \cdot 10^{10}$
argento	$7.5 \cdot 10^{10}$
ferro	$2.0 \cdot 10^{11}$
gomma	$5-80 \cdot 10^6$
ottone	$9.1 \cdot 10^{10}$
piombo	$1.4 \cdot 10^{10}$
platino	$1.5 \cdot 10^{11}$
polietilene	$1-14 \cdot 10^8$
rame	$1.1 \cdot 10^{11}$
tungsteno	$3.5 \cdot 10^{11}$
vetro per finestre	$7.0 \cdot 10^{10}$

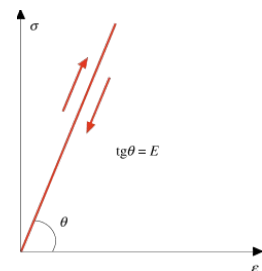
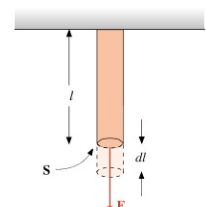


FIGURA 7.2

Il modulo di Young presenta, in genere, per i metalli, valori decrescenti al crescere della temperatura, fino a che non si verifichi una trasformazione di fase cioè una modifica della struttura cristallina. Ad esempio, per l'alluminio, il modulo di Young varia da $7 \cdot 10^{10}$ N/m² alla temperatura di 20°C (temperatura ambiente) a $5 \cdot 10^{10}$ N/m² a 500°C, mentre per il ferro varia da $2 \cdot 10^{11}$ N/m², a 20°C, a $1.5 \cdot 10^{11}$ N/m² a 500°C.

Esempio 7.1

Determinare, per un filo di alluminio, di diametro $d = 2$ mm e lunghezza $l = 1.2$ m, l'allungamento per effetto di una sollecitazione a trazione con carico



$$F = 120 \text{ N.}$$

Soluzione

La sezione del filo è

$$S = \pi \left(\frac{d}{2} \right)^2 = \pi (10^{-3})^2 = 3.14 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 ,$$

pertanto il carico specifico vale

$$\sigma = \frac{F}{S} = \frac{120}{3.14 \cdot 10^{-6}} = 3.82 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2 .$$

L'allungamento è dato da (7.2), con $E = 7 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$ (vedi tabella 7.1):

$$\Delta l = l \frac{\sigma}{E} = 1.2 \frac{3.82 \cdot 10^7}{7 \cdot 10^{10}} = 0.65 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 0.65 \text{ mm};$$

l'allungamento unitario ε vale $\Delta l / l = 0.54 \cdot 10^{-3}$.

Visualizza Soluzione

Esempio 7.2

Un filo è costituito da un tratto di alluminio, lungo 30 cm e di diametro 1 mm, e da un tratto di ferro, lungo 40 cm e di diametro 0.4 mm. Al filo è appesa la massa m e l'allungamento totale è $\Delta l = 0.82$ mm. Calcolare di quanto si è allungato ciascun filo e quanto vale m .

Soluzione

Scriviamo (7.2) per ciascun tratto di filo, indicando con 1 l'alluminio e 2 il ferro e notando che in equilibrio statico il carico è lo stesso (la tensione lungo il filo è costante):

$$\frac{\Delta l_1}{l_1} = \frac{1}{E_1} \frac{F}{S_1} , \quad \frac{\Delta l_2}{l_2} = \frac{1}{E_2} \frac{F}{S_2}$$

con $S_1 = \pi d_1^2 / 4$, $S_2 = \pi d_2^2 / 4$. Pertanto

$$\frac{\Delta l_1}{\Delta l_2} = \frac{l_1 E_2 d_2^2}{l_2 E_1 d_1^2} = 0.34 .$$

Sappiamo che $\Delta l_1 + \Delta l_2 = \Delta l = 0.82$ mm e ricaviamo

$$\Delta l_1 = 0.21 \text{ mm} , \quad \Delta l_2 = 0.61 \text{ mm} .$$

Segue $F = 38.5 \text{ N} = mg$, $m = 3.9 \text{ kg}$.

Visualizza Soluzione

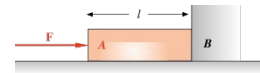


FIGURA 7.4
(Esempio 7.3)

Esempio 7.3

Una sbarra omogenea AB , di sezione S e lunghezza l , è posta su un piano orizzontale con un estremo B vincolato ad un supporto fisso. All'estremo libero A viene applicata una forza F costante e distribuita uniformemente sulla sezione. Determinare la variazione di lunghezza nei due casi:

- in presenza di vincolo
- senza vincolo

Soluzione

In presenza di vincolo, da (7.2)

$$\Delta l = \frac{\sigma}{E} = \frac{l F}{E S} .$$

In assenza di supporto la sbarra si muove con moto uniformemente accelerato. La forza di compressione su una sezione a distanza x dall'estremo A è data da

$$T = F \left(1 - \frac{x}{l} \right) .$$

Infatti, detta a l'accelerazione del centro di massa della sbarra, e quindi di tutti i punti materiali che la costituiscono, si ha

$$a = \frac{F}{m} = \frac{F}{\rho l S}$$

con ρ densità della sbarra. Un elemento di lunghezza $l - x$, che si muove con la stessa accelerazione, risente della forza

$$F_x = \rho S (l - x) a = \rho S (l - x) \frac{F}{\rho l S} = F \left(1 - \frac{x}{l} \right) = T .$$

In sostanza questa è la forza che attraverso la parte lunga x viene trasmessa alla successiva parte lunga $l - x$; tale forza di compressione decresce linearmente lungo la sbarra dal valore F per $x = 0$ al valore zero per $x = l$. La variazione di lunghezza di un elemento dx posto a distanza x da A è

$$d\xi = \frac{T}{E S} dx = \frac{F}{E S} \left(1 - \frac{x}{l} \right) dx ,$$

avendo usato (7.2) con $\varepsilon = d\xi / dx$. La variazione di lunghezza della sbarra in moto è

$$\Delta l' = \int_0^l d\xi = \frac{F}{E S} \int_0^l \left(1 - \frac{x}{l} \right) dx = \frac{1}{2} \frac{l F}{E S} ;$$

la variazione $\Delta l'$ è la metà della variazione Δl per la sbarra vincolata.

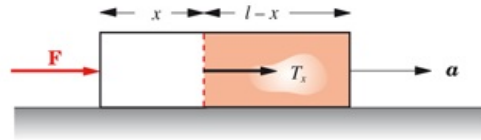


FIGURA 7.5

Osserviamo che tutti gli elementi dx si muovono con l'accelerazione a , come detto: per ciascuno il prodotto massa per accelerazione vale

$$\rho S dx \frac{F}{\rho S l} = \frac{F}{l} dx$$

e si verifica che è eguale a $T(x) - T(x + dx)$. Sull'elemento agiscono quindi la forza motrice dell'elemento che lo precede e la forza resistente dell'elemento che lo segue. Nella (7.2) però la forza che compare è la forza $T(x)$ di compressione e non la reazione del supporto contro cui l'elemento è compresso. In effetti, se l'elemento è fermo, la forza di compressione è eguale in modulo alla reazione ed è sottinteso che la deformazione avviene sotto l'azione di queste due forze. Se il corpo è in moto sotto l'azione di una forza, per ciascun elemento dx la situazione è quasi identica: esso è compresso contro l'elemento successivo, però le forze non sono esattamente eguali e contrarie e anzi è proprio la differenza tra di esse che fornisce la forza necessaria per il moto; eseguendo il calcolo si trova che la differenza di deformazione tra moto e quiete è di un fattore 2. Se invece il moto fosse uniforme, $\Delta l' = 0$: lungo la sbarra non c'è compressione, gli elementi dx non premono l'uno contro l'altro.

Visualizza Soluzione

Esempio 7.4

Un'asta sottile, di sezione S , lunghezza l e massa m , ruota con velocità angolare costante ω attorno ad un asse verticale, perpendicolare all'asta stessa e passante per un suo estremo. Determinare la variazione di lunghezza Δl .

Soluzione

Si segue il ragionamento dell'esempio precedente. Attraverso la sezione distante x dall'asse viene esercitata sul resto dell'asta la forza $T(x)$ necessaria per il moto circolare.

Questa forza è la risultante delle forze agenti su tutti gli elementi dx compresi tra x e l , cioè delle forze

$$dm \omega^2 x = \rho S \omega^2 x dx \quad ;$$

$$T(x) = \int_x^l \rho S \omega^2 x dx = \frac{1}{2} \rho S \omega^2 (l^2 - x^2) \quad .$$

La variazione di lunghezza $d\xi$ di un elemento dx distante x dall'asse è dato da (7.2):

$$d\xi = \frac{T}{SE} dx = \frac{1}{2} \rho \frac{\omega^2}{E} (l^2 - x^2) dx \quad ;$$

integrando su tutta la lunghezza della sbarra

$$\Delta l = \int_0^l d\xi = \frac{1}{2} \rho \frac{\omega^2}{E} \int_0^l (l^2 - x^2) dx = \frac{1}{3} \rho \frac{\omega^2}{E} l^3 = \frac{1}{3} m l^2 \frac{\omega^2}{S E} .$$

Per esempio un'asta di acciaio, $E = 2.11 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$, lunga 1 m, di sezione 1 cm^2 e massa 0.78 kg, che ruota con velocità angolare $\omega = 100 \text{ rad/s}$, si allunga di $\Delta l = 0.12 \text{ mm}$.

Visualizza Soluzione

Esempio 7.5

Dimostrare che in una sbarra sottoposta a trazione si può definire un'energia potenziale elastica per unità di volume che vale $\sigma \varepsilon / 2$. Utilizzare per il calcolo numerico i dati dell'esempio 7.1.

Soluzione

Per un dato valore F del carico l'allungamento sia Δl , ovvero consideriamo una situazione caratterizzata da σ ed ε . Ad un incremento dF del carico segue uno spostamento dl e quindi un lavoro

$$dW = (F + dF) dl = S(\sigma + d\sigma) dl \approx S \sigma dl = S l \sigma d\varepsilon .$$

Per unità di volume il lavoro risulta $\sigma d\varepsilon = E \varepsilon d\varepsilon$; si integra su un allungamento finito e si ottiene

$$\int_0^\varepsilon E \varepsilon d\varepsilon = \frac{1}{2} E \varepsilon^2 = \frac{\sigma^2}{2E} = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon .$$

Questo lavoro è immagazzinato nella sbarra sotto forma di energia potenziale, come avviene in una molla.

Con $\varepsilon = 0.54 \cdot 10^{-3}$, $\sigma = 3.82 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2$, la densità di energia potenziale è $2.06 \cdot 10^4 \text{ J/m}^3$; $-63 \cdot 10^{-2}$ nel volume ($3.77 \cdot 10 \text{ m}^3$) l'energia è $7.77 \cdot 10 \text{ J}$.

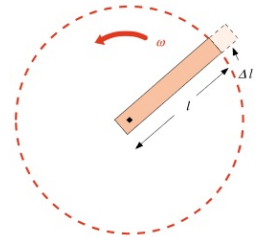


FIGURA 7.6
(Esempio 7.4)

Visualizza Soluzione

Legge di Poisson

Per effetto della trazione la sbarra non solo si allunga, ma subisce anche una variazione di sezione. Se r è una dimensione trasversale, ad esempio il raggio per una sbarra cilindrica, si trova, ricordando (7.1) e (7.2), la *legge di Poisson*:

$$\frac{\Delta r}{r} = -\nu \frac{\Delta l}{l} = -\nu \varepsilon = -\nu \frac{\sigma}{E} ; \quad (7.3)$$

ν , grandezza adimensionale, rappresenta il *coefficiente di Poisson*. I suoi valori sono compresi tra zero, per il sughero, e 0.5, per il caucciù. La (7.3) è

valida per valori non troppo elevati di σ .

In tabella 7.2 riportiamo i valori di ν per alcuni materiali alla temperatura di 20°C.

Nella trazione il volume della sbarra non diminuisce. Consideriamo infatti una sbarra cilindrica (anche se la trattazione è applicabile in generale) di volume iniziale $V = \pi r^2 l$. Dopo la trazione il volume diventa

$$V + \Delta V = \pi (r + \Delta r)^2 (l + \Delta l) = \pi r^2 l + \pi r^2 \Delta l + 2 \pi r l \Delta r ,$$

trascurando i termini, di ordine superiore al primo, contenenti $(\Delta r)^2$, $\Delta r \Delta l$ e $(\Delta r)^2 \Delta l$. Se supponiamo $\Delta V \geq 0$ deve essere $\Delta l / l \geq - 2 \Delta r / r$. Dalla (7.3) deriva $\nu \leq 0.5$ come condizione perché sia $\Delta V \geq 0$.

Sperimentalmente $\nu \leq 0.5$: concludiamo pertanto che il volume della sbarra sottoposta a trazione non diminuisce mai, qualunque sia il materiale di cui è composta la sbarra. Il volume rimane costante se $\nu = 0.5$, mentre aumenta per $\nu < 0.5$. Al contrario, il volume di una sbarra sottoposta ad un carico di compressione non aumenta mai.

Tabella 7.2 Coefficiente di Poisson

Materiale	ν
acciaio	0.30
alluminio	0.33
caucciù	0.50
ferro	0.30
ottone	0.35
piombo	0.40
platino	0.38
rame	0.34
vetro per finestre	0.25

7.2 Deformazione plastica. Rottura. Isteresi elastica

Il comportamento elastico del materiale si manifesta entro certi valori del carico. Al di sopra di un *valore critico del carico*, che dipende dal tipo di materiale, si determina una deformazione permanente, che prende il nome di *deformazione plastica*, e che non è reversibile quando viene rimosso il carico.

Il carico specifico sotto cui avviene l'inizio della deformazione plastica è definito come *carico specifico di snervamento* σ_s . Per valori superiori a σ_s si osserva un notevole aumento della deformazione, anche per aumenti limitati del carico, come si vede in figura 7.7: nel tratto lineare si ha deformazione elastica (reversibile), per $\sigma > \sigma_s$ si ha deformazione plastica (non reversibile, nel senso che preciseremo tra breve).

Per l'acciaio $\sigma_s = 30$, per il rame è compreso tra 7 e 30, per il piombo è dell'ordine di 1, in unità 10^7 N/m^2 .

L'inizio della deformazione plastica può manifestarsi in certi materiali bruscamente, così che è facile individuare il valore σ_s , mentre in altri materiali il passaggio dalla deformazione elastica a quella plastica è graduale.

Aumentando ulteriormente il carico il materiale arriva alla *rottura*. Il carico specifico a cui avviene la rottura è chiamato carico specifico ultimo o *carico unitario di rottura* σ_u .

Il carico di rottura a trazione, sempre in unità 10^7 N/m^2 , è per l'acciaio compreso tra 50 e 200, a seconda della composizione, mentre scende a 10 per l'alluminio, 3–9 per il vetro e intorno a 1 per il piombo. Il carico di rottura in compressione può differire da quello in trazione: nel vetro esso è pari a 60–120, per il piombo a 5.

Il prodotto tra il carico specifico σ e l'allungamento specifico ε ha le dimensioni di un'energia per unità di volume:

$$\sigma \varepsilon = \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \frac{\text{m}}{\text{m}} = \frac{\text{N m}}{\text{m}^3} = \frac{\text{J}}{\text{m}^3} .$$

In grafici come quelli della figura 7.7 e della figura 7.8 l'area sottesa dalla curva carico–allungamento è data dall'integrale $\int \sigma d\varepsilon$ e ha dunque il significato di una energia assorbita dal materiale per unità di volume. Tale area viene spesso indicata come *modulo di tenacità*. Nella figura 7.8 qualsiasi area sotto il tratto lineare, come quella indicata, vale $\sigma \varepsilon / 2$ e si ritrova il risultato dell'esempio 7.5.

In effetti un materiale ad alta resistenza meccanica, cioè in grado di sopportare elevati carichi specifici, assorbe una considerevole quantità di energia prima di arrivare alla condizione di rottura. Tale *materiale* è chiamato *tenace*. Un materiale, invece, nel quale la rottura ha luogo senza una

Deformazione plastica

Carico specifico di snervamento

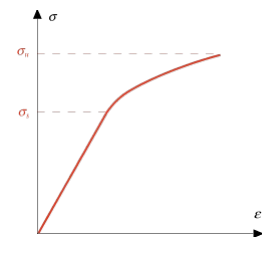


FIGURA 7.7

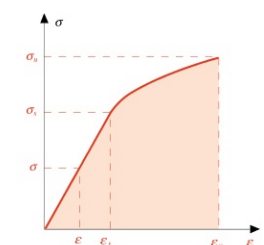


FIGURA 7.8

apprezzabile deformazione plastica, e quindi con un assorbimento minore di energia, è chiamato *fragile*.

La *duttilità di un materiale* è indice della deformazione plastica prima della rottura e può essere espressa dall'allungamento specifico (o riduzione specifica) intervenuto sotto carico. Un *materiale duttile è anche tenace*, in quanto è in grado di deformarsi in modo elevato prima della rottura.

Proprietà caratteristica dei corpi solidi è *l'isteresi elastica*. Consideriamo una sbarra sottoposta a trazione e rappresentiamo in un grafico, simile a quello della figura 7.7, il legame tra σ ed ε . Si inizia dalla situazione a riposo ($\sigma = 0, \varepsilon = 0$), per un materiale che non ha superato il limite di elasticità, cioè non ha mai subito deformazione plastica. Aumentando il carico specifico la deformazione aumenta linearmente fino a $\sigma = \sigma_s$, poi più rapidamente. Quando siamo nel punto *A* riduciamo la forza di trazione: si osserva che non ripercorriamo all'indietro la curva $\sigma(\varepsilon)$ appena trovata, ma che la sbarra resta più deformata: per $\sigma = 0$ si ha $\varepsilon > 0$ (punto *B*). Occorre comprimere la sbarra ($\sigma < 0$) per ritornare a trovare $\varepsilon = 0$ (punto *C*). Continuando a comprimere riduciamo la lunghezza della sbarra ($\varepsilon < 0$), fino ad arrivare nel punto *D*, simmetrico di *A*. Adesso diminuiamo la compressione e torniamo indietro: si trova che il percorso è diverso e che, per $\sigma = 0$, la sbarra è ancora compressa ($\varepsilon < 0$, punto *E*). Applicando una trazione si ritorna in *A*.

Il ciclo descritto *ABCDE* nel piano σ, ε si chiama *ciclo di isteresi*: esso mostra che la relazione tra σ ed ε non è univoca (come nel tratto di comportamento elastico) per un corpo che abbia subito carichi superiori a quello di deformazione plastica, ma dipende da come è stato trattato il corpo. Il fenomeno dell'isteresi non si presenta se il punto *A* si trova nel tratto lineare. Il comportamento mostrato in figura 7.9 giustifica l'uso dei termini, a seconda dei casi, di deformazione reversibile o irreversibile.

L'area del ciclo $\oint \sigma d\varepsilon$ rappresenta l'energia per unità di volume assorbita durante il processo e fornita dal lavoro delle forze di trazione e compressione: poiché il materiale ritorna nello stato di partenza, ma il lavoro speso nel ciclo è positivo, ci rendiamo conto che le forze in gioco non sono conservative. *L'energia meccanica assorbita in un ciclo è completamente dissipata: risulta che viene trasformata in calore.*

È possibile ritornare allo stato iniziale, $\sigma = 0$ ed $\varepsilon = 0$, percorrendo una serie di cicli di area sempre minore, come mostrato in figura 7.10. Se invece si prende come punto di partenza il punto *B* della figura 7.9, si trova che il materiale ha un comportamento elastico fino ad un carico specifico $\sigma' > \sigma_s$. Superando σ' e poi riducendo il carico a zero il nuovo punto di riposo *B'* è a destra di *B*. Iterando il processo si riesce a innalzare considerevolmente il limite di elasticità del materiale: si parla di *processo di incrudimento*. Con un riscaldamento a temperatura elevata per un certo tempo (*ricottura*) si riporta il materiale nelle condizioni primitive.

Duttilità

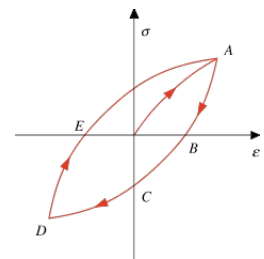


FIGURA 7.9

Ciclo di isteresi

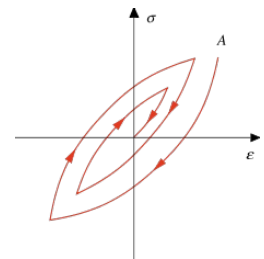


FIGURA 7.10

7.3 Scorrimento

Consideriamo un parallelepipedo solido incollato su due facce opposte a due lastre rigide, una bloccata e una mobile parallelamente all'altra. Applicando una forza F come in figura 7.11, si osserva uno *scorrimento* della faccia superiore rispetto a quella inferiore, che si può misurare tramite l'angolo θ . Si trova che tra il carico specifico $\sigma = F/S$ e l'angolo θ esiste una relazione lineare

$$\sigma = G \theta \quad (7.4)$$

Il parametro G , che caratterizza questo tipo di deformazione, si chiama *modulo di rigidità* o di *taglio* ed è tipico del materiale.

All'applicazione di F il corpo reagisce elasticamente e si ottiene una situazione di equilibrio con $\theta = \sigma / G$. Quando F viene tolta il corpo riassume la configurazione iniziale. Anche per lo scorrimento vale quanto discusso nel paragrafo 7.3 sul limite di elasticità.

In tabella 7.3 riportiamo i valori del modulo di rigidità per alcuni materiali, alla temperatura di 20°C.

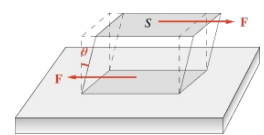


FIGURA 7.11

Tabella 7.3 Modulo di rigidità

Materiale	G
acciaio	$8.5 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2 \cdot \text{rad}$
alluminio	$2.5 \cdot 10^{10}$
ferro	$8.0 \cdot 10^{10}$
ottone	$3.0 \cdot 10^{10}$
piombo	$5.0 \cdot 10^9$
platino	$6.0 \cdot 10^{10}$
rame	$4.0 \cdot 10^{10}$
tungsteno	$1.4 \cdot 10^{11}$
vetro	$2.5\text{-}3.2 \cdot 10^{10}$

Si dimostra che tra le costanti elastiche viste finora esiste la relazione

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (7.5)$$

valida per piccole deformazioni, ovvero per carichi non troppo elevati.

Esempio 7.6

Un cubetto di ferro di 1 cm di lato è soggetto a un processo di scorrimento per effetto di un carico specifico σ , raggiungendo una situazione di equilibrio con $\theta = 10^{-3}$ rad. Determinare il valore della forza di taglio applicata.

Soluzione

Da (7.4) e consultando la tabella 7.3

$$\sigma = G \theta = 8 \cdot 10^{10} \cdot 10^{-3} = 8 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2,$$

$$F = \sigma S = 8 \cdot 10^7 \cdot 10^{-4} = 8 \cdot 10^3 \text{ N}.$$

Visualizza Soluzione

7.4 Torsione. Pendolo e bilancia di torsione

Consideriamo ancora una sbarra cilindrica di raggio r e lunghezza l , bloccata su una base, e applichiamo all'altra base una coppia di forze con momento \mathbf{M} , parallelo all'asse della sbarra, che risulta così sottoposta a *torsione*. Il valore di \mathbf{M} necessario per far ruotare la base inferiore rispetto a quella superiore di un angolo θ si ricava dall'espressione

$$M = \frac{\pi}{2} G \frac{r^4}{l} \theta = k \theta \quad (7.6)$$

L'effetto di torsione dipende fortemente dalle dimensioni trasversali: con una sbarra molto sottile, ad esempio un filo, si ottiene una deviazione misurabile anche con l'applicazione di un momento molto piccolo. La dipendenza da G significa che la torsione ha caratteristiche simili allo scorrimento longitudinale della figura 7.11.

La reazione elastica della sbarra si manifesta con un momento $-\mathbf{M}$, il cui modulo vale quindi $-k\theta$, cioè proporzionale all'angolo di torsione. Su questo fatto si basano sia il *pendolo* che la *bilancia di torsione*.

Per effettuare la torsione il momento esterno compie il lavoro (6.17)

$$W = \int_0^\theta M(\theta) d\theta = k \int_0^\theta \theta d\theta = \frac{1}{2} k \theta^2 \quad (7.7)$$

immagazzinato nel sistema come *energia potenziale elastica*.

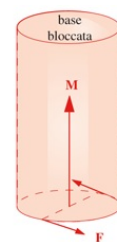


FIGURA 7.12

Esempio 7.7

Determinare il momento necessario per provocare la torsione di $\theta = 1^\circ$ di una sbarra cilindrica di ferro ($G = 8.0 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2 \cdot \text{rad}$) con $r = 1 \text{ cm}$ e $l = 1 \text{ m}$.

Soluzione

Il coefficiente k nella (7.6) vale

$$k = \frac{\pi}{2} 8 \cdot 10^{10} \frac{10^{-8}}{1} = 1.26 \cdot 10^3 \text{ Nm / rad.}$$

Dato che $\theta = 1^\circ$ corrisponde a $1.7 \cdot 10^{-2} \text{ rad}$, $M = 21.4 \text{ Nm}$.

Visualizza Soluzione

Esempio 7.8

Un albero motore lungo $l = 1 \text{ m}$ gira con velocità angolare $\omega = 104.7 \text{ rad/s}$ (10^3 giri/minuto)

fornendo una potenza $P = 10 \text{ kW}$. La torsione dell'albero non deve superare $\theta = 1^\circ = 1.7 \cdot 10^{-2} \text{ rad}$. Calcolare il valore minimo che deve avere il diametro dell'albero, fatto di acciaio con $G = 8.5 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2 \cdot \text{rad}$.

Soluzione

Dal punto di vista dinamico siamo in una situazione di equilibrio in cui il momento motore eguaglia il momento resistente e l'albero gira con velocità angolare costante. La potenza P è eguale a $M\omega$ da cui si ricava $M = 95.5 \text{ Nm}$. L'albero subisce torsione durante il funzionamento e a regime il momento elastico di torsione eguaglia M (un caso analogo si ha quando si applica una forza F ad una molla che a sua volta tira un corpo sottoposto ad attrito: in regime di moto uniforme $F = kx = F_{att}$). Pertanto

$$\frac{\pi}{2} G \frac{r^4}{l} \theta = 95.5 \text{ Nm} \Rightarrow d = 2r = 2.9 \text{ cm} .$$

Visualizza Soluzione

Pendolo di torsione

Un pendolo di torsione si realizza sospendendo un corpo solido a un filo; generalmente il punto di aggancio coincide con il centro di massa. Per esempio, un possibile pendolo di torsione consiste in un disco sospeso al centro (figura 7.13), essendo il filo verticale e il disco in un piano orizzontale. Se ruotiamo il disco di un angolo θ , mantenendolo orizzontale, il filo di sospensione subisce una torsione e sviluppa un momento elastico $-k\theta$, con k dato da (7.6). Se ora lasciamo libero il corpo, esso si mette in rotazione sotto l'azione del momento elastico, secondo l'equazione

$$-k\theta = I \ddot{\theta} = I \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

dove I è il momento d'inerzia del sistema rispetto all'asse di rotazione, coincidente col filo. La soluzione dell'equazione

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{k}{I} \theta = 0$$

è data da $\theta = \theta_0 \sin(\omega t + \phi)$, con $\omega = \sqrt{\frac{k}{I}}$. Il sistema descrive una *oscillazione armonica*.

Si noti che, a differenza del pendolo semplice e del pendolo composto, non

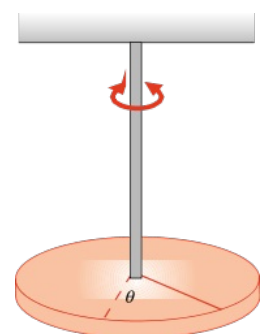


FIGURA 7.13

dobbiamo imporre, per avere un moto armonico, una piccola ampiezza di oscillazione, perché il filo anche con una torsione di parecchi giri sviluppa un momento proporzionale all'angolo. L'unica limitazione è di essere in condizioni di comportamento elastico del filo in torsione.

Durante l'oscillazione del pendolo di torsione si può applicare la legge di conservazione dell'energia meccanica (trascurando l'attrito dell'aria e dissipazioni di energia nel filo). Nella generica posizione individuata dall'angolo θ si utilizza (7.7) e si scrive

$$\frac{1}{2} k\theta^2 + \frac{1}{2} I\Omega^2 = \text{costante} \quad ,$$

dove Ω è la velocità angolare e la costante è eguale, per esempio, alla massima energia potenziale $\frac{1}{2} k\theta_0^2$; dall'eguaglianza si ricava $\Omega(\theta)$.

Citiamo due applicazioni pratiche, basate sulla misura del periodo di oscillazione $T=2\pi/\omega=2\pi \sqrt{I/k}$. Se è noto il momento d'inerzia si ottiene la costante k e quindi il modulo di rigidità del materiale che costituisce il filo. Invece, se è noto k si determina I ; questo metodo è utile nel caso di lastre di forma qualsiasi (la posizione del centro di massa si trova con i metodi del paragrafo 6.15).

Bilancia di torsione. Esperimento di Cavendish

Su un principio analogo si basa la *bilancia di torsione*: si sfrutta il fatto che un filo sviluppa un momento di reazione alla torsione calcolabile dall'angolo di torsione e che in equilibrio il momento elastico è eguale al momento esterno, che ha causato la torsione. Se questo momento è dato dall'applicazione di una coppia di forze di braccio l (l potrebbe essere la lunghezza di un'asta sospesa al centro e che quindi costituisce la bilancia di torsione), deve essere $Fl = k\theta$. Dalla misura dell'angolo di equilibrio θ si può calcolare il valore di F .

La bilancia di torsione risulta uno strumento molto sensibile, in grado cioè di misurare forze molto piccole (fino a 10^{-9} N); storicamente essa è servita a Coulomb (1785) per determinare la forza che si esercita tra cariche elettriche e a Cavendish (1788) per misurare la costante γ nella (5.1).

Nell'*esperimento di Cavendish* due piccole masse sferiche sono fissate agli estremi di un'asticciola, sospesa per il centro ad un filo (questa è la bilancia). Due masse sferiche molto maggiori sono poste vicino alle masse piccole, come in figura 7.15 che è una vista dall'alto, cioè lungo il filo.

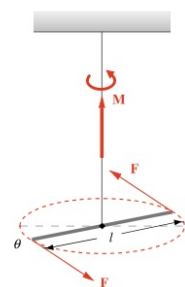


FIGURA 7.14

Le forze di attrazione gravitazionale sulle masse piccole formano una coppia che fa ruotare la bilancia fino al raggiungimento di una posizione di equilibrio, in cui il momento gravitazionale eguaglia il momento di torsione. Successivamente si inverte la posizione delle sfere grandi e in definitiva si misura l'angolo 2θ e si calcola γ . Un esempio numerico, che ci permette di valutare la difficoltà dell'esperimento, è svolto qui di seguito. Ricordiamo che solo dopo la determinazione di γ è stato possibile calcolare la massa della terra.

Esempio 7.9

In un esperimento come quello di Cavendish le sfere piccole hanno massa $m_1 = 0.05 \text{ kg}$, le sfere grandi $m_2 = 500 \text{ kg}$, la lunghezza dell'asta è $d = 80 \text{ cm}$, la distanza tra i centri di una sfera grande e della piccola ad essa vicina è $R = 20 \text{ cm}$. Il filo è di alluminio, lungo $l = 1 \text{ m}$ e di raggio $r = 0.1 \text{ mm}$. Calcolare il periodo della bilancia di torsione e l'angolo di deviazione, utilizzando il valore noto di γ .

Soluzione

La costante elastica del filo è

$$k = \frac{\pi}{2} G \frac{l^4}{l} = 3.93 \cdot 10^{-6} \text{ Nm/rad};$$

il momento d'inerzia della bilancia vale, supponendo le sfere piccole puntiformi,

$$I = 2m \frac{d^2}{4} = 1.6 \cdot 10^{-2} \text{ kg m}^2$$

$$\Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{k}} = 401 \text{ s} .$$

È dunque necessario un tempo dell'ordine di 100 s per raggiungere l'equilibrio. La forza tra una coppia di sfere è

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{R^2} = 4.17 \cdot 10^{-8} \text{ N}$$

e il momento rispetto al centro della bilancia di torsione è

$$M = Fd = 3.34 \cdot 10^{-8} \text{ Nm}$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{M}{k} = 8.5 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \approx 0.5^\circ .$$

A seguito della rotazione le sfere piccole si avvicinano a quelle grandi di $\Delta R = \theta d/2 = 3.4 \text{ mm}$. L'attrazione aumenta leggermente e si ha un'ulteriore piccola deviazione. L'effetto finale è $\sim 8.8 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$.

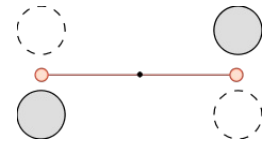


FIGURA 7.15

Visualizza Soluzione

7.5 Pressione. Compressione uniforme

Nei capitoli precedenti abbiamo sempre considerato forze applicate a punti; in questo capitolo, trattando le proprietà elastiche dei solidi, compare il rapporto tra forza agente e superficie su cui è applicata la forza, F/S . Tale rapporto si chiama *pressione* e questa grandezza acquista notevole importanza nello studio dei fluidi, come vedremo nel capitolo 8 a cui rimandiamo per una migliore definizione e per le unità di misura, e in termodinamica.

Per ora ci limitiamo a considerare la pressione nell'ambito di una particolare maniera di deformare un corpo, la cosiddetta compressione uniforme, che consiste nell'applicare alla superficie del corpo una pressione ovunque costante (pressione idrostatica). Ciò si realizza facilmente immergendo il corpo in un fluido mantenuto a sua volta sotto pressione. In figura 7.16 è rappresentato un cubo compresso su ogni faccia da forze perpendicolari alla superficie.

Se V è il volume del corpo in corrispondenza della *pressione esterna* p , ad una variazione Δp corrisponde una *variazione di volume* ΔV data da

$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{1}{\beta} \Delta p \quad (7.8)$$

dove β si chiama *modulo di compressibilità isoterma*; ciò vuol dire che la variazione di volume è misurata in condizioni sperimentali tali che la temperatura del corpo rimanga costante durante la compressione. Le unità di misura di β sono eguali a quelle della pressione. In tabella 7.4 riportiamo alcuni valori di β (in N/m^2), alla temperatura di 20°C .

Tabella 7.4 Modulo di compressibilità isoterma

Materiale	β
acciaio	$1.6 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$
acqua	$2.1 \cdot 10^9$
alluminio	$7.0 \cdot 10^{10}$
ferro	$1.7 \cdot 10^{11}$
mercurio	$2.8 \cdot 10^{10}$
ottone	$6.1 \cdot 10^{10}$
rame	$1.4 \cdot 10^{11}$
tungsteno	$2.0 \cdot 10^{11}$
vetro per finestre	$5.0\text{-}5.5 \cdot 10^{10}$

Tra β e le altre costanti elastiche esiste la relazione

$$\beta = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (7.9)$$

analoga alla (7.5). In pratica si vede che *sono indipendenti due sole costanti elastiche*: per un dato materiale si possono determinare, con esperimenti di

Modulo di compressibilità isoterma

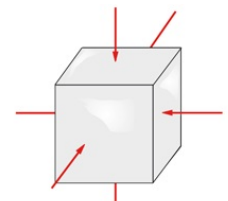


FIGURA 7.16

trazione e di torsione, E e G e poi calcolare ν e β attraverso (7.5) e (7.9).

Esempio 7.10

Determinare la variazione percentuale di volume di una sbarra di ferro sottoposta a una compressione uniforme, a temperatura costante, con una pressione $p_0 = 1.5 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$, noti il modulo di Young e il coefficiente di Poisson.

Soluzione

I valori delle costanti elastiche sono $E = 2.0 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$ (tabella 7.1) e $\nu = 0.30$ (tabella 7.2), per cui da (7.9) si ottiene $\beta = 1.7 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$, in accordo con la tabella 7.4. Pertanto da (7.8) si ha

$$\frac{\Delta V}{V} = - \frac{1.5 \cdot 10^9}{1.7 \cdot 10^{11}} = -0.88 \cdot 10^{-2} = -0.88\%$$

Si osservi che Δp sarebbe eguale a $p_0 - p_a$, dove p_a è la pressione atmosferica, pari a $\sim 10^5 \text{ N/m}^2$: quindi $\Delta p = p_0$. Certamente l'effetto è molto piccolo: meno dell'1% per una variazione di pressione enorme (oltre diecimila volte la pressione atmosferica).

Visualizza Soluzione

Notiamo che in tabella 7.4 sono riportati valori del modulo di compressibilità anche per i liquidi, come l'acqua o il mercurio. Nei liquidi β è più piccolo che nei solidi, ma sempre di valore elevato. In pratica solidi e liquidi sono molto poco compressibili: è appunto questo il significato di un grande valore di β . Per far variare dell'1% un dato volume d'acqua occorre una variazione di pressione di $2.1 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2$, circa 200 volte il valore della pressione atmosferica.

Completamente diverso è il caso dei gas, che studieremo in dettaglio nei capitoli successivi. Vogliamo ora solo ricordare che in condizioni isoterme un gas segue con buona approssimazione la legge di Boyle, $pV = \text{costante}$. Di qui differenziando otteniamo $p dV + V dp = 0$ ovvero

$$\frac{dV}{V} = - \frac{dp}{p} \Rightarrow \beta = p \quad : \quad (7.10)$$

il coefficiente di compressibilità isoterma per un gas è pari alla pressione stessa. I gas sono dunque comprimibili assai facilmente: per esempio, partendo da 1 m^3 di gas alla pressione di 10^5 N/m^2 , il volume si riduce a metà semplicemente raddoppiando la pressione, si riduce a un decimo decuplicando la pressione, ecc.

Queste stesse variazioni di pressione producono in un liquido o in un solido variazioni relative di volume estremamente piccole e trascurabili nella pratica.

Osserviamo che *il modulo di compressibilità è l'unica grandezza caratteristica di una deformazione elastica che possiamo definire per un fluido*. Lo scorrimento, la trazione e la torsione perdono significato in quanto un fluido non sviluppa le corrispondenti reazioni elastiche. Bisogna poi dire che *la compressione di un fluido è un processo sempre reversibile*, cioè il comportamento del fluido è sempre elastico, senza fenomeni simili all'isteresi.

7.6 Durezza

La *durezza* è definita come la resistenza di un corpo alla penetrazione da parte di un altro corpo opportunamente sagomato a forma di sferetta di piccolo raggio o di punta. La durezza di un materiale è un dato importante da un punto di vista tecnico e presenta due aspetti interessanti, la facilità di misura e la possibilità di correlarla alla resistenza meccanica del materiale; resta però un concetto piuttosto empirico, come si capisce dai metodi di misura che adesso descriviamo.

Il *metodo di Brinell* misura la durezza in relazione all'impronta lasciata nel materiale da una sfera di acciaio con diametro di ~1 cm, sottoposta a un carico dell'ordine di 10^4 N, che può essere variato in base alla durezza del materiale. Per un materiale duro l'impronta è piccola, mentre una grande impronta caratterizza un materiale di bassa durezza.

Un secondo *metodo* è quello di *Rockwell* che utilizza un corpo penetrante di piccole dimensioni (*indentatore*) e l'*indice di durezza* è legato alla profondità del solco lasciato.

Infine citiamo il *metodo di Vickers*, che utilizza come indentatore una piramide di diamante a base quadrata, con angolo al vertice ottuso (136°). L'impronta prodotta è di piccole dimensioni e la sua misura si effettua con un microscopio.

Numericamente la durezza è generalmente misurata come rapporto tra la forza premente e l'area dell'impronta permanente lasciata.

Una relazione lineare intercorre tra il carico specifico necessario a produrre la rottura e la durezza Brinell, nel caso di leghe metalliche (figura 7.17).

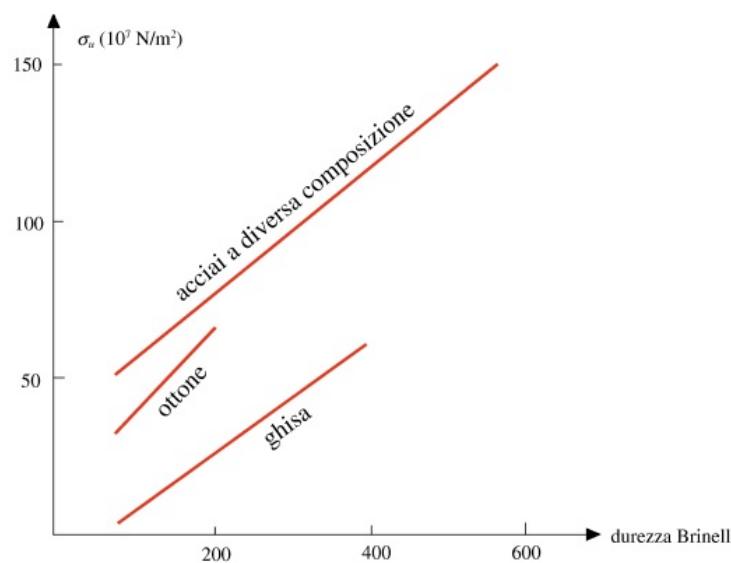


FIGURA 7.17

8.1 Generalità sui fluidi. Pressione

Una delle caratteristiche di un corpo solido è di avere una forma propria; invece una sostanza liquida o gassosa non ha questa proprietà, essa assume la forma del recipiente che la contiene. A una tale sostanza ci si riferisce in generale col nome di *fluido*.

Passiamo in rassegna alcune proprietà dei fluidi, mettendo in evidenza prima le diversità tra liquidi e gas e considerando successivamente gli aspetti comuni.

I liquidi hanno un volume definito e una superficie limite, mentre i gas non presentano un volume proprio, ma tendono ad occupare tutto il volume a disposizione. La densità dei liquidi è molto maggiore di quella dei gas: ad esempio per l'acqua $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$, per un gas come l'aria, a pressione atmosferica e a temperatura ambiente, $\rho = 1.3 \text{ kg/m}^3$. I *liquidi*, per quanto riguarda il comportamento elastico, *sono* praticamente *incompressibili* come i solidi, mentre un *gas* risulta *compressibile* con facilità.

Tali differenze sono dovute alla diversa forza dei legami tra atomi e molecole nella fase liquida o nella fase gassosa. Malgrado ciò, è possibile trattare in modo unificato le proprietà meccaniche di liquidi e gas.

Da un punto di vista macroscopico i fluidi sono sistemi continui, composti cioè da un numero infinito di elementi, ciascuno di massa $dm = \rho dV$ (vedi paragrafo 6.3). Caratteristica principale è la possibilità di scorrimento di una qualsiasi parte di fluido rispetto ad un'altra adiacente o alla parete del contenitore. Allo scorrimento si oppone una forza di attrito interno (paragrafo 8.6). Tuttavia il fluido non può resistere allo scorrimento, cioè non esiste una forza di attrito statico che determini una situazione di equilibrio, come avviene tramite l'attrito radente statico per certi valori della forza applicata nei solidi o nel fenomeno elastico dello scorrimento, sempre nei solidi. Quindi, se un fluido è in quiete, le forze tra gli elementi di fluido devono essere normali alle superficie di separazione, altrimenti i vari elementi inizierebbero a scorrere l'uno rispetto all'altro, abbandonando lo stato di quiete.

Non si può parlare di forza applicata in un punto del fluido: per ciascun elemento dm si considerano forze di volume, proporzionali a dV , come la forza peso $dF = g dm = g \rho dV$, e forze di superficie, proporzionali a dS , $dF = p dS$ dove p è la pressione già introdotta nel paragrafo 7.5.

Dalla definizione di fluido in equilibrio è possibile dedurre che la *pressione in un fluido non ha caratteristiche direzionali*; essa è una funzione scalare del punto che si considera all'interno del fluido e non dipende dall'orientazione

della superficie su cui è misurata. Pertanto, nel seguito del capitolo e quando studieremo le proprietà dei gas da un punto di vista termodinamico, intendiamo come pressione in un punto del fluido il rapporto tra la forza agente su una superficie infinitesima che circonda il punto e l'area della superficie stessa, cioè

$$p = \frac{dF}{dS} \quad , \quad p = \frac{F}{S} \quad , \quad (8.1)$$

dove la seconda espressione vale per una superficie finita se nei punti di questa la pressione è costante.

La non direzionalità della pressione si dimostra ricorrendo ad un metodo che riprenderemo nei paragrafi 8.2 e 8.4, basato sul cosiddetto *principio di solidificazione*. Si immagina un elemento di fluido separato dal resto del fluido da una superficie indeformabile e se ne analizza lo stato meccanico. Nella figura 8.1 l'elemento è un prisma a sezione triangolare, di lati $a = AB$, $b = BC$, $c = CA$; lo spessore normalmente al foglio è h . Il prisma è in quiete sotto l'azione delle forze di pressione indicate, ciascuna ortogonale alla superficie su cui agisce e costante su di essa. L'equilibrio lungo gli assi orizzontale e verticale richiede rispettivamente

$$F_c = p_c ch = F_a \cos\theta = p_a ah \cos\theta \quad ,$$

$$F_b = p_b bh = F_a \sin\theta = p_a ah \sin\theta \quad .$$

Essendo $c = a \cos\theta$ e $b = a \sin\theta$, si vede che $p_a = p_b = p_c$, indipendentemente dal valore delle aree e dell'angolo. Il ragionamento può essere ripetuto per qualsiasi orientazione del prisma e si conclude, passando al limite e riducendo il prisma ad un punto, che *la pressione in un punto di un fluido è una quantità scalare*: il suo valore può dipendere dalla posizione del punto, ma non dipende dalla direzione. Nelle equazioni dell'equilibrio non si è tenuto conto di eventuali forze di volume agenti sul prisma in quanto nel passaggio al limite esse scompaiono (dV è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a dS).

La misura della pressione all'interno di un fluido può essere semplicemente realizzata introducendo una piccola scatola con una parete deformabile, all'interno della quale è stato fatto il vuoto. Dalla deformazione della parete si deduce la forza F dovuta al fluido che agisce sulla superficie S della parete ovvero la pressione. Cambiando l'orientazione della scatola, e quindi della superficie deformabile, si verifica che la pressione in un medesimo punto è sempre la stessa. Questo strumento di misura è chiamato *barometro aneroide*.

Pressione in un fluido

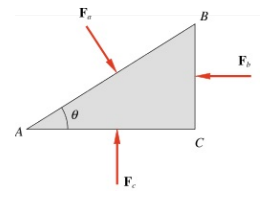


FIGURA 8.1

Unità di misura

L'unità di misura della pressione è il pascal (Pa), pari a 1 N/m^2 . Un multiplo importante è il bar,

Barometro aneroide

$$1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa} \quad ,$$

il cui valore è molto vicino a quello della pressione atmosferica. Infatti il valore standard è

$$p_{\text{atm}} = 1.01325 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 1.01325 \text{ bar} \quad .$$

Altre unità, che sono state abbandonate per legge e quindi non devono essere usate, sono l'atmosfera, che ha il valore appena citato, e il millimetro di mercurio, detto anche torr:

$$1 \text{ mm Hg} = 1 \text{ torr} = \frac{1}{760} \text{ atmosfere} = 133.3 \text{ Pa} \quad .$$

Lavoro delle pressioni

In equilibrio statico non ci sono spostamenti, anche se ci sono forze, e il lavoro è nullo. È però possibile in condizioni diverse che sotto l'azione delle forze di pressione ci sia uno spostamento e quindi un lavoro associato. Vedremo alcuni casi più avanti in questo capitolo e poi nel capitolo 11, quando studieremo le proprietà dei gas in termodinamica. Anticipiamo qui la formula generale che permette di calcolare il lavoro in funzione della pressione.

Consideriamo la situazione più facile: una forza $dF = p dS$ agisce ortogonalmente ad una superficie dS che a seguito di ciò si sposta concordemente alla forza di una quantità dh (figura 8.2). Il lavoro infinitesimo vale

$$dW = dF dh = p dS dh = p dV \quad ,$$

dove dV è il volume infinitesimo coperto dalla superficie dS nello spostamento dh . Integrando sulla variazione complessiva di volume si ottiene

$$W = \int p dV \quad . \quad (8.2)$$

Questa formula è valida in generale per forme qualsiasi: nella figura 8.3 vediamo un corpo che, sottoposto ad una pressione esterna, subisce una variazione di volume. Ciò avviene, per esempio, nella compressione uniforme, trattata nel paragrafo 7.5 e che costituisce l'argomento dell'esempio 8.1. In particolare il corpo può essere un gas contenuto in un cilindro con pistone mobile (in sostanza come nella figura 8.2), caso che tratteremo nel capitolo 11.

Esempio 8.1

Un corpo di volume V è sottoposto ad una compressione uniforme isoterma, con la pressione esterna che passa dal valore p_1 al valore p_2 .

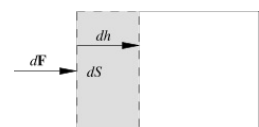


FIGURA 8.2

Calcolare il lavoro delle forze esterne. Applicare il risultato ad una massa d'acqua contenuta in un volume cubico di 1 m^3 , quando la pressione passa dal valore $p_1 = 10^5 \text{ Pa}$ al valore $p_2 = 10^8 \text{ Pa}$. Di quanto si sposta una faccia del cubo?

Soluzione

Ricorriamo a (7.8), tralasciando il segno, e a (8.2):

$$W = \int p dV = \int_{p_1}^{p_2} p \frac{V}{\beta} dp = \frac{V}{2\beta} (p_2^2 - p_1^2) \quad .$$

Nell'operazione di integrazione si è considerato costante il volume, che in realtà cambia, anche se poco (vedi dopo). Discuteremo nei capitoli 10 e 11 la questione del segno del lavoro in questo tipo di processi.

Per la massa d'acqua considerata $V = 1 \text{ m}^3$, $\beta = 2.1 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$, p_1 e p_2 si trascura rispetto a p_2 e si ha

$$W = \frac{V}{2\beta} p_2^2 = 2.4 \cdot 10^6 \text{ J} \quad .$$

La contrazione della massa d'acqua avviene con una variazione di volume che vale in modulo

$$\Delta V = \frac{V}{\beta} (p_2 - p_1) = \frac{V}{\beta} p_2 = 4.8 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3 \quad ,$$

ovvero la diminuzione è del 4.8%. Dato che la variazione è piccola, approssimativamente possiamo dividere ΔV per 6 ottenendo il volume Sx coperto dallo spostamento di una faccia (con $S = 1 \text{ m}^2$) e quindi

$$x = \frac{\Delta V}{6S} = 8 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 8 \text{ mm} \quad .$$

Si noti che, per una data massa, una variazione di volume comporta una variazione di densità; percentualmente le due variazioni sono eguali (e di segno opposto). Pur sotto una pressione così grande, pari a quella che agisce alle massime profondità oceaniche ($\sim 10^4 \text{ m}$), la variazione di densità dell'acqua è estremamente contenuta.

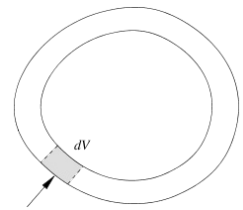


FIGURA 8.3

Visualizza Soluzione

Struttura microscopica dei fluidi

Le proprietà dei corpi solidi ordinari sono dovute alla forza del legame tra i componenti (atomi o molecole): questi stanno in posizioni fisse attorno alle quali possono al massimo oscillare. Da ciò discende la difficoltà che si incontra per modificare le dimensioni o la forma di un corpo solido e che si traduce nei

grandi valori dei vari moduli elastici (di Young, di rigidità, di compressibilità).

Nei liquidi il legame è meno forte e ciò permette ai componenti di muoversi, restando però praticamente a contatto e, nel complesso, legati. Si spiegano così da una parte l'assenza di forma propria e l'impossibilità di resistere ad uno sforzo di taglio, dall'altra l'esistenza di un volume proprio e l'elevato valore del modulo di compressibilità (vedi anche paragrafi 8.15 e 8.16).

Nei gas le molecole sono in continuo movimento, restando mediamente molto lontane tra loro (la distanza intermolecolare media è molto maggiore delle dimensioni molecolari); durante il moto avvengono urti tra le molecole e tra le molecole e le pareti del contenitore. Le forze intermolecolari decrescono molto rapidamente con la distanza e non sono in grado di tenere le molecole legate. Da queste proprietà seguono l'assenza di forma e di volume proprio, la non resistenza ad uno sforzo di taglio nonché la relativa facilità con cui si riesce a ridurre il volume occupato da un gas.

8.2 Equilibrio statico di un fluido

Studiamo adesso come possa variare in funzione della posizione la pressione all'interno di un fluido in quiete. Ripetiamo la definizione di equilibrio statico: *in un fluido in quiete tutti gli elementi hanno accelerazione e velocità nulla, in un sistema di riferimento inerziale*: le forze agenti devono pertanto avere risultante eguale a zero. Siccome sull'elemento dm di fluido agiscono forze di pressione \mathbf{F}_p e forze di volume \mathbf{F}_V , deve essere $\mathbf{F}_p + \mathbf{F}_V = \mathbf{0}$ e ovviamente è nulla la somma delle componenti lungo qualsiasi asse.

Consideriamo un elemento di fluido, per semplicità di forma cubica come mostrato in figura 8.4; le componenti delle forze di pressione lungo l'asse z , in generale variabili con la posizione, sono:

$$\begin{aligned} p(z) dS - p(z + dz) dS &= dS \left\{ p(z) - \left[p(z) + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right] \right\} = \\ &= -\frac{\partial p}{\partial z} dz dS = -\frac{\partial p}{\partial z} dV \quad ; \end{aligned}$$

dz , dS , dV sono rispettivamente altezza, area di una faccia e volume del cubetto. La componente della forza di volume è data da

$$f_z dm = f_z \rho dV$$

con f_z componente lungo l'asse z della forza per unità di massa, cioè dell'accelerazione (non indicata in figura 8.4).

La condizione di equilibrio si scrive

$$-\frac{\partial p}{\partial z} dV + f_z \rho dV = 0 \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial z} = \rho f_z \quad .$$

Relazioni analoghe si ottengono lungo gli assi x e y per cui la condizione di equilibrio statico di un elemento di fluido è dato da

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho f_x \quad , \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \rho f_y \quad , \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \rho f_z \quad ,$$

che si riassumono nell'unica equazione vettoriale

$$\nabla p = \mathbf{grad} p = \rho \mathbf{f} \quad . \quad (8.3)$$

Se in un fluido in quiete agisce una forza di volume la pressione nel fluido non può essere costante: essa deve variare in accordo con (8.3) per consentire l'equilibrio statico. La forza di volume tende a spostare l'elemento di fluido determinando una reazione del fluido che si manifesta con una variazione della pressione: questa aumenta lungo il verso positivo della direzione della forza così che la risultante delle forze di pressione è opposta alla forza di volume (figura

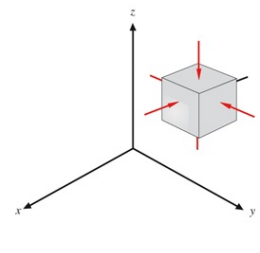


FIGURA 8.4

Equilibrio statico di un fluido

8.5).

La pressione è costante nel fluido solo se $\rho \mathbf{f} = 0$. Ciò si verifica se non agiscono forze di volume oppure quando il valore della densità è così basso da poter considerare trascurabile il prodotto $\rho \mathbf{f}$. Quest'ultimo è il caso che si presenta per i gas, almeno se ci limitiamo a piccoli volumi. In volumi molto grandi invece le variazioni di pressione nel gas, somme di tanti piccoli contributi, possono essere notevoli: si pensi all'atmosfera terrestre.

È interessante confrontare l'esistenza della pressione all'interno di un fluido in quiete con la situazione in un filo teso. In ogni punto del filo teso agisce la tensione T , che può essere evidenziata per esempio tagliando il filo e inserendo una molla che si allunga (paragrafo 2.14). Analogamente, in ogni punto di un fluido agisce la pressione p , misurabile col barometro descritto nel paragrafo 8.1. In entrambi i casi esiste all'interno dei corpi una distribuzione di sforzi interni (tridimensionali nel fluido, unidimensionali nel filo), che rappresenta la reazione del sistema all'applicazione di forze esterne.

Per esempio un liquido contenuto in un recipiente e sottoposto alla forza peso (forza di volume) e alla forza di pressione atmosferica (forza di superficie) viene compresso contro le pareti e la reazione di queste, che è una forza di superficie, si manifesta nel liquido con una ben determinata pressione, variabile all'interno del liquido come calcoleremo nel paragrafo 8.3. Allo stesso modo un gas compresso dentro un cilindro con pistone mobile da forze di superficie sviluppa una reazione alla compressione che è data dalla sua pressione. I due esempi sono mostrati in figura 8.6, in cui sono disegnate le forze applicate al fluido.

Se la forza di volume agente sul fluido è conservativa, da (2.20) ricaviamo, dividendo per la massa,

$$\mathbf{f} = -\nabla E_{p,m}$$

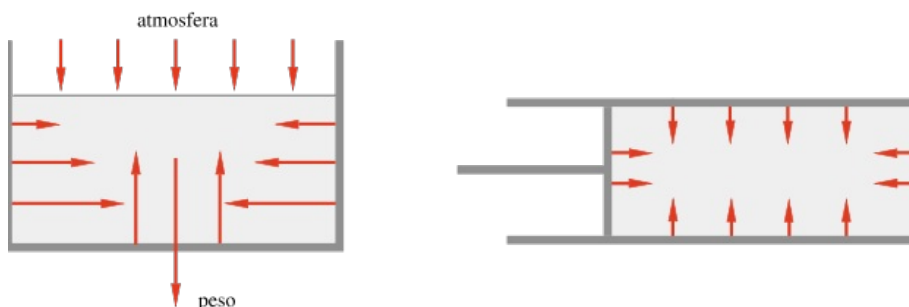


FIGURA 8.6

dove $E_{p,m}$ rappresenta l'energia potenziale per unità di massa. In condizioni di equilibrio statico vale la (8.3) e quindi

$$\nabla p = \rho \mathbf{f} = -\rho \nabla E_{p,m} . \quad (8.4)$$

Il gradiente della pressione ha la stessa direzione e verso opposto del

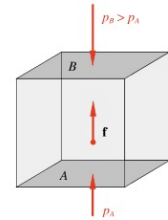


FIGURA 8.5

gradiente dell'energia potenziale (per unità di massa). Le superficie equipotenziali coincidono con le superficie isobariche: in ogni punto di una tale superficie la pressione ha lo stesso valore.

Consideriamo ora due superficie equipotenziali S_1 e S_2 , prossime tra di loro: passando da S_1 a S_2 si hanno le variazioni dp e $dE_{p,m}$ per la pressione e l'energia potenziale, variazioni indipendenti dal punto di partenza su S_1 e di arrivo su S_2 . Tenendo conto della definizione di gradiente (appendice C), si ha

$$|\nabla p| = \left| \frac{dp}{dn} \right| , \quad |\nabla E_{p,m}| = \left| \frac{dE_{p,m}}{dn} \right| ,$$

indicando con dn uno spostamento ortogonale alla superficie. Da (8.4) si ottiene

$$|dp| = \rho |dE_{p,m}| .$$

Poiché le variazioni di pressione e di energia potenziale sono, come detto, le stesse ovunque nel passaggio da S_1 a S_2 , la densità ρ del fluido deve essere costante lungo la superficie S_1 : *una superficie equipotenziale è isobarica e su di essa $\rho = \text{costante}$* . Pertanto in un fluido sottoposto a forze conservative le eventuali variazioni di densità seguono geometricamente quelle di pressione e di energia potenziale.

8.3 Equilibrio in presenza della forza peso

In questo paragrafo applichiamo i risultati generali del paragrafo 8.2 al caso della forza peso, che è una forza di volume conservativa.

Come asse verticale prendiamo l'asse z , orientato verso l'alto; la forza peso è parallela e discorde a questo asse e abbiamo $f_x = f_y = 0, f_z = -g$. Con riferimento a (8.3), la pressione varia solo lungo l'asse z ed è costante in un piano normale all'asse z , che è dunque una superficie isobarica; verifichiamo subito che questa è anche una superficie equipotenziale, in quanto $E_{p,m} = g z$.

Dalla (8.4), essendo

$$(\nabla p)_z = \frac{dp}{dz} \quad \text{e} \quad (\nabla E_{p,m})_z = \frac{dE_{p,m}}{dz} = g \quad ,$$

si ottiene

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \Rightarrow \int_1^2 dp = - \int_{z_1}^{z_2} \rho g dz \quad ;$$

se la densità è costante,

$$p_2 - p_1 = -\rho g (z_2 - z_1) \quad ;$$

questa è la legge con cui varia la pressione in un fluido in equilibrio sotto l'azione della forza di gravità, se appunto $\rho =$ costante in tutto il fluido.

Consideriamo in particolare un liquido in un contenitore (figura 8.7) e sia p_0 la pressione sulla superficie limite del liquido, dove $z_2 = 0$ (e $p_2 = p_0$). Alla profondità $z_1 = -h$ ($h > 0$) in base alla legge di variazione della pressione

$$p_2 - p_1 = p_0 - p(h) = -\rho g (z_2 - z_1) = -\rho g h$$

$$\Rightarrow p(h) = p_0 + \rho g h \quad . \quad (8.5)$$

Questa relazione si chiama *legge di Stevino* e mostra che *in un liquido con $\rho =$ costante la pressione cresce linearmente con la profondità*.

In un bacino d'acqua ($\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$) sottoposto alla pressione atmosferica ($p_0 \cong 1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$) la pressione cresce con la profondità secondo la relazione quantitativa

$$p(h) = (10^5 + 9.8 \cdot 10^3 h) \text{ Pa} \quad ;$$

ogni 10 metri di profondità la pressione aumenta di circa 1 bar.

Sul fondo degli oceani, con $h \cong 10^4 \text{ m}$, si ha una pressione dell'ordine di 10^3 bar. La valutazione non è precisa in quanto si è assunta la densità dell'acqua marina costante con la profondità; tuttavia l'errore che viene commesso è solo di qualche per cento. Il fatto si spiega con l'alto valore del modulo di

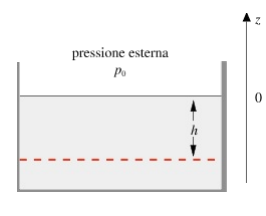


FIGURA 8.7

Legge di Stevino

compressibilità dell'acqua (si veda l'esempio 8.1): anche sotto forti pressioni il volume di una massa d'acqua cambia di molto poco. Questa proprietà è vera in generale per tutti i liquidi e permette di assumere, in prima approssimazione, che la loro densità sia costante.

La legge di Stevino (8.5) può essere ottenuta molto semplicemente calcolando il peso della colonna di liquido alta h :

$$m g = \rho V g = \rho S h g \Rightarrow p = \frac{F}{S} = \rho g h \quad .$$

La pressione alla profondità h è data dalla somma della pressione esercitata dalla colonna di liquido sovrastante e di quella esterna agente sulla superficie libera del liquido. Tuttavia abbiamo preferito ricavare (8.5) a partire da (8.3) e (8.4) per mostrare come la legge di Stevino si inquadri nel contesto più generale dell'equilibrio statico di un fluido.

Abbiamo già rilevato che nel campo della gravità le superficie equipotenziali e quindi isobariche sono piani orizzontali; ricordiamo che lungo di esse la densità deve essere costante. Pertanto *la superficie libera di un liquido in quiete dentro un contenitore è una superficie piana coincidente con una superficie orizzontale*, come disegnato nelle figure 8.6 e 8.7. Possiamo capirlo sia perché nei punti della superficie libera la pressione deve avere ovunque lo stesso valore, pari a quello della pressione esterna, sia pensando al fatto che se una superficie equipotenziale S non fosse parallela alla superficie libera del liquido, lungo S osserveremmo una discontinuità della densità nel passaggio dall'esterno all'interno del liquido. Per la stessa ragione è orizzontale anche la superficie di separazione tra due liquidi non miscibili, come acqua e olio.

La struttura della legge di variazione della pressione nel fluido è $p = p_0 + \Delta p$ con p_0 pressione esterna. Ne segue che ogni cambiamento della pressione esterna dà luogo a un'eguale variazione di p . Questa proprietà è nota come *principio di Pascal*. Se poi, come avviene in un piccolo volume di gas, Δp è molto minore di p_0 , la pressione nel gas è ovunque costante e pari al valore della pressione esterna, di cui segue le eventuali variazioni.

Principio di Pascal

Nel seguito del paragrafo esamineremo alcune interessanti conseguenze delle leggi dell'equilibrio statico in un fluido sottoposto alla forza di gravità.

Vasi comunicanti

Consideriamo un sistema di recipienti in comunicazione tra loro, riempiti dello stesso liquido e aperti nello stesso ambiente. Il liquido nei vari recipienti assume lo stesso livello rispetto al suolo, ovvero le superficie libere appartengono tutte allo stesso piano equipotenziale. Questo risultato esprime *il principio dei vasi comunicanti*. Esso è facilmente ricavabile dalla legge di Stevino, osservando che, in condizioni di quiete, alla stessa profondità le pressioni devono essere identiche. Nella figura 8.8 sono rappresentate in alto la condizione di equilibrio e in basso una situazione di non equilibrio, in cui si

osserva un flusso di liquido fino allo stabilirsi dell'equilibrio.

Paradosso idrostatico

Nella figura 8.9 sono mostrati tre recipienti, aventi la stessa area di base S , ma forme diverse: il primo è un cilindro, il secondo è un tronco di cono con la base superiore di area maggiore di S , il terzo è ancora un tronco di cono, però con la base superiore di area minore di S . Tutti sono riempiti con un liquido di altezza h . Se si misura la forza esercitata sull'area S si trova che essa ha il valore ρghS , eguale nei tre casi, pur essendo evidente che, rispetto al cilindro, nel secondo recipiente c'è una maggiore massa di liquido e nel terzo una minore massa. Il fatto è che le superficie equipotenziali, di equazione $E_{p, m} = gz = \text{costante}$, sono piani orizzontali; su ciascuno di questi piani la pressione è costante, indipendentemente dalla forma del recipiente. In particolare la differenza di pressione tra superficie libera e superficie S è in ogni caso ρgh , qualunque punto di S si consideri; ne segue che la forza è sempre $pS = \rho ghS$. Qualitativamente, nel secondo caso la massa al di fuori della colonna cilindrica preme sulle pareti del cono, non sul fondo, ed è tenuta in equilibrio dalla reazione delle pareti; nel terzo caso le pareti esercitano sulle colonne di liquido di altezza inferiore ad h una pressione che è la reazione alla pressione del liquido. Lasciamo per esercizio la verifica quantitativa.

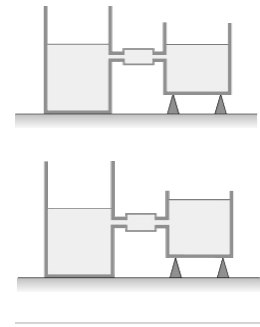


FIGURA 8.8

Manometro ad U

Abbiamo un tubo a forma di U , riempito con un liquido (figura 8.10). Se le pressioni p_1 e p_2 agenti sulle superficie libere sono le stesse, le superficie in base al principio dei vasi comunicanti si trovano allo stesso livello. Se però i due rami comunicano con ambienti a diverse pressioni, con $p_1 > p_2$, si produce un dislivello tra le due superficie libere dato da

$$h = \frac{p_1 - p_2}{\rho g} \quad ,$$

in accordo con la legge di Stevino. Dalla misura di h si ottiene il valore della pressione in un ambiente rispetto, per esempio, a quella atmosferica.

Il tubo ad U costituisce il manometro più semplice. La sensibilità varia in ragione inversa della densità del liquido contenuto nel manometro: minore è la densità del liquido, più piccole sono le differenze di pressione che il manometro è capace di rivelare.

Se il tubo ad U contiene due liquidi diversi non miscibili di densità ρ_1 e ρ_2 e le superficie libere sono a contatto con lo stesso ambiente alla pressione p_0 , esse presentano un dislivello. Indicando con p la pressione alla superficie di separazione tra i due liquidi, si ha in base a (8.5)

$$p = p_0 + \rho_1 g z_1 = p_0 + \rho_2 g z_2$$

(la linea tratteggiata in figura 8.11 è equipotenziale), e quindi

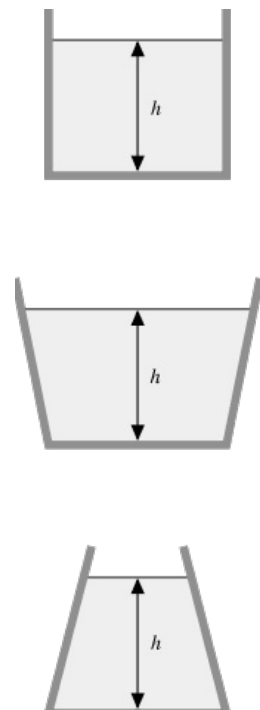


FIGURA 8.9

$$\rho_1 g z_1 = \rho_2 g z_2 \Rightarrow \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{z_2}{z_1} = 1 - \frac{h}{z_1}$$

con $h = z_1 - z_2$ dislivello tra le due superficie libere. Le altezze z_1 e z_2 delle colonne liquide sopra la superficie di separazione sono inversamente proporzionali alle densità.

Su questi risultati è fondato un metodo di misura della densità relativa dei liquidi rispetto a quella di un liquido campione. L'apparato si può facilmente modificare per estendere la misura a liquidi miscibili.

Barometro di Torricelli

Torricelli fu il primo a sostenere che l'atmosfera esercita una pressione e a misurarne il valore con dispositivi simili a quelli della figura 8.12, detti *barometri a mercurio*. Consideriamo prima il manometro ad U con un ramo chiuso e un ramo aperto in un ambiente a pressione atmosferica. Se il riempimento con mercurio è effettuato opportunamente, senza fare entrare aria nella parte chiusa, si osserva che il dislivello h tra le due superficie libere è di circa 76 cm. Poiché nel ramo chiuso agisce solo la pressione dei vapori di mercurio, che è $\sim 10^{-6}$ bar, il dislivello è dovuto solo alla pressione atmosferica che vale dunque $\rho g h$.

Per convenzione il valore di riferimento è quello esercitato da una colonna di mercurio alla temperatura di 0°C , con $h = 0.760 \text{ m}$, $\rho = 13.595 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$, in un luogo dove $g = 9.80665 \text{ m/s}^2$, e risulta

$$P_{\text{atm}} = 1.01325 \cdot 10^5 \text{ Pa} ,$$

valore detto normale.

Se al posto del mercurio utilizzassimo come liquido l'acqua la colonna sarebbe alta 10.33 m ($h' = \rho h / \rho'$, dove i valori con l'apice sono riferiti all'acqua e quelli senza al mercurio).

Pressione atmosferica e sue variazioni

La *pressione atmosferica* è originata dall'attrazione gravitazionale da parte della terra sulla massa di gas che la circonda. Si raggiunge un equilibrio statico che determina una compressione contro la superficie della terra.

La pressione atmosferica diminuisce con l'altezza: basta pensare che è minore il peso della colonna d'aria sovrastante. La decrescita non è lineare con l'altezza poiché la densità dell'aria non è costante. Assumendo l'atmosfera isoterma (il che chiaramente non è), vale la legge di Boyle già citata nel paragrafo 7.5, secondo cui $pV = \text{costante}$ ovvero $p/\rho = \text{costante}$: in queste condizioni la densità è proporzionale alla pressione.

Consideriamo un asse z verticale orientato verso l'alto e con origine al livello del mare, dove densità e pressione valgono ρ_0 e p_0 . Alla quota z , dove la pressione vale p , poniamo $\rho = \rho_0 p / p_0$ in accordo con l'ipotesi fatta e

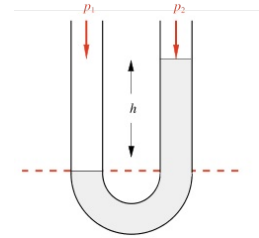


FIGURA 8.10

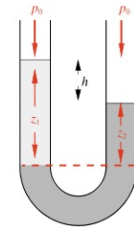


FIGURA 8.11

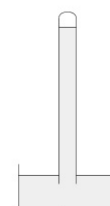
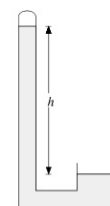


FIGURA 8.12

applichiamo la legge di Stevino a una variazione di quota dz :

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g = -\frac{g \rho_0}{p_0} p \Rightarrow \frac{dp}{p} = -\frac{g \rho_0}{p_0} dz = -\frac{dz}{a}$$

$$\text{con } a = \frac{p_0}{g \rho_0} = \frac{1.013 \cdot 10^5}{9.8 \cdot 1.3} = 7.95 \cdot 10^3 \text{ m} \cong 8 \text{ km. Integrando}$$

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = -\frac{1}{a} \int_0^z dz \Rightarrow \ln \frac{p}{p_0} = -\frac{z}{a} \Rightarrow p = p_0 e^{-z/a} .$$

Nell'atmosfera isoterma la pressione decresce esponenzialmente con l'altezza; il valore della costante a (si noti che anche g è stato assunto costante) è calcolato in corrispondenza a un valore della densità dell'aria a livello del mare alla temperatura di 0°C ; se si usa il valore a 20°C risulta $a \cong 8.6 \text{ km}$. Ad ogni modo la pressione si ridurrebbe a circa $1/3$ del valore di p_0 ad una quota di $8 \div 9 \text{ km}$.

Valori più corretti si hanno da medie fatte su molte misure alle varie quote. Nella figura 8.13 sono rappresentate le variazioni di pressione e temperatura della cosiddetta aria tipo.

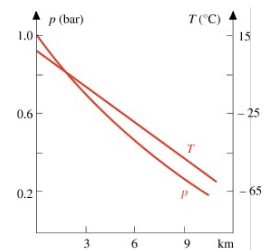


FIGURA 8.13

8.4 Principio di Archimede

In un fluido in equilibrio sotto l'azione della gravità isoliamo idealmente un volume finito di fluido V_0 , di forma qualsiasi. La risultante delle forze di pressione, esercitate dal resto del fluido sulla parte isolata, è eguale ed opposta alla forza peso della stessa. Infatti per la condizione di equilibrio del volume V_0 di fluido

$$\mathbf{F}_p + \mathbf{F}_V = \mathbf{F}_p + m \mathbf{g} = 0 \Rightarrow \mathbf{F}_p = -m \mathbf{g} ,$$

essendo m la massa di fluido contenuta nel volume V_0 , $m = \rho V_0$.

Se ora sostituiamo al volume V_0 di fluido un identico volume di qualsiasi altra sostanza, con massa $m' = \rho' V_0$, la risultante \mathbf{F}_p delle forze di pressione esercitate dal fluido circostante rimane la stessa, mentre varia la forza peso del volume preso in considerazione. Pertanto non sussiste più una condizione di equilibrio e la forza risultante agente su V_0 vale $\mathbf{F}'_V + \mathbf{F}_p$, cioè

$$(m' - m) \mathbf{g} = (\rho' - \rho) V_0 \mathbf{g} .$$

Se $\rho' > \rho$ la forza risultante ha la stessa direzione e verso di \mathbf{g} e quindi il corpo, introdotto al posto del volume V_0 di fluido, scende nel fluido; se invece $\rho' < \rho$ il corpo sale.

In ambedue i casi *il corpo riceve una spinta verso l'alto*, $\mathbf{F}_A = -\rho V_0 \mathbf{g}$, *pari al peso del volume di fluido spostato*. Questo risultato esprime il *principio di Archimede*.

La spinta di Archimede \mathbf{F}_A , in quanto risultante delle forze esterne di pressione applicate a V_0 dal fluido circostante, si deve ritenere applicata nel centro di massa del fluido spostato. Il corpo che occupa il volume V_0 ha, in generale, il centro di massa in una posizione diversa. Si può presentare pertanto, oltre alla spinta, anche un momento risultante.

Lo sviluppo dei concetti esposti è alla base dello studio dell'equilibrio dei corpi sommersi o galleggianti, quali sottomarini, navi, palloni sonda.

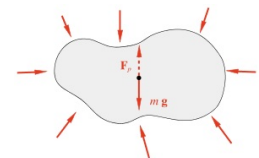


FIGURA 8.14

Esempio 8.2

Un'asta sottile, di lunghezza l , sezione S e densità costante ρ , è incernierata nel suo estremo O alla parete di un recipiente, mentre l'altro estremo è immerso in acqua. L'asta può ruotare liberamente attorno ad un asse orizzontale passante per il punto O , che non è immerso in acqua. Se all'equilibrio la parte di lunghezza d dell'asta è fuori dall'acqua, determinare la densità del materiale di cui è composta l'asta.

Soluzione

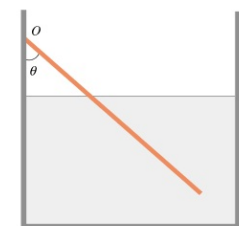


FIGURA 8.15
(Esempio 8.2)

In equilibrio la somma dei momenti agenti sull'asta deve essere nulla. Prendiamo il punto O come polo e indichiamo con θ l'angolo formato dall'asta con la parete.

La forza peso dell'asta, $\rho S l g$, applicata nel centro dell'asta distante $l/2$ da O , ha il momento

$$M = \rho S l g \frac{l}{2} \sin \theta .$$

La spinta di Archimede è pari alla forza peso del liquido spostato, $\rho_0 S (l - d) g$, ed è applicata nel centro della parete sommersa dell'asta, distante $d + \frac{l-d}{2} = \frac{l+d}{2}$

il momento è

$$M_A = \rho_0 S (l - d) g \frac{l + d}{2} \sin \theta .$$

Vettorialmente i due momenti hanno stessa direzione (ortogonale al disegno), verso opposto e modulo eguale. Dall'eguaglianza dei moduli si ricava

$$\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{d^2}{l^2} \right) .$$

Visualizza Soluzione

Esempio 8.3

Un corpo a forma di parallelepipedo, con volume V e densità ρ noti, galleggia su un liquido di densità incognita ρ_l . Quale altra grandezza bisogna misurare per determinare ρ_l ?

Soluzione

La situazione di equilibrio statico è mostrata nella figura 8.16. La forza peso e la spinta di Archimede agenti sul parallelepipedo sono eguali:

$$\rho V g = \rho_l V_s g ;$$

V_s è il volume della parte sommersa, eguale al volume di liquido spostato. Si ricava

$$\rho_t = \rho \frac{V_s}{V} = \rho \frac{h_s}{h}$$

e quindi occorre misurare il valore di V_s o, più facilmente, di h_s , altezza della parte sommersa. Ciò può essere fatto disponendo di un corpo campione su cui è incisa una scala graduata.

Visualizza Soluzione

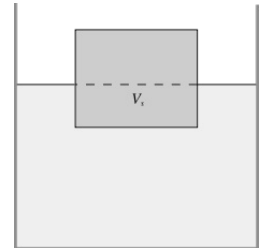


FIGURA 8.16
(Esempio 8.3)

8.5 Liquido in rotazione

Consideriamo un liquido in un recipiente cilindrico posto in rotazione rispetto all'asse verticale z , che coincide con l'asse del cilindro; la velocità angolare ω è costante. Si osserva che dopo un certo tempo tutto il liquido ruota rigidamente insieme al recipiente e che la superficie libera non è più piana, ma concava. Vogliamo determinare la forma della superficie libera.

Ciascun elemento di liquido descrive un'orbita circolare e quindi è sottoposto a una forza radiale, diretta verso l'asse di rotazione, pari a $\rho dV \omega^2 r$, dove r è la distanza dall'asse dell'elemento considerato, di massa $dm = \rho dV$.

Per ricondurci a una situazione di equilibrio statico, che sappiamo trattare, ci poniamo in un sistema di riferimento ruotante con il liquido attorno all'asse z . Tale sistema non è inerziale e dobbiamo quindi considerare anche la forza apparente centrifuga, radiale e diretta verso l'esterno.

In questo sistema un qualsiasi elemento di liquido è in equilibrio statico sotto l'azione delle forze di volume, $dm\mathbf{g}$ e $dm\omega^2 r\mathbf{u}_r$, e delle forze di pressione dovute agli elementi di liquido circostanti; \mathbf{u}_r rappresenta il versore della direzione radiale, orientata verso l'esterno. Osserviamo che

$$dm \omega^2 r \mathbf{u}_r = dm \omega^2 (x \mathbf{u}_x + y \mathbf{u}_y) \quad ,$$

dove x e y sono le coordinate dell'elemento di liquido in un piano ortogonale a z . L'energia potenziale per unità di massa delle forze di volume, entrambe conservative, è data da

$$E_{p,m} = g z - \frac{1}{2} \omega^2 r^2 = g z - \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2) \quad (8.6)$$

e infatti si verifica subito che $-\nabla E_{p,m}$ è la forza per unità di massa agente sull'elemento di liquido, $\mathbf{g} + \omega^2 r \mathbf{u}_r$.

La superficie libera del liquido è una superficie equipotenziale e la sua equazione è quindi determinata dalla condizione

$$g z - \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2) = \text{costante} \quad .$$

Per determinare il valore della costante osserviamo che sull'asse ($r = 0$ ovvero $x = y = 0$) l'altezza del liquido rispetto al fondo del recipiente è $z = h$; la costante vale pertanto $g h = E_{p,m}(0, 0, h)$ e in definitiva

$$z = h + \frac{\omega^2}{2g} r^2 = h + \frac{\omega^2}{2g} (x^2 + y^2) \quad (8.7)$$

è l'equazione della superficie libera, che risulta essere *un paraboloide di rotazione*.

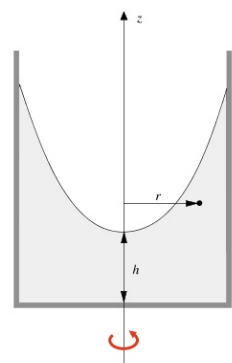


FIGURA 8.17

Il valore di h , altezza del vertice del paraboloido rispetto al fondo, è facilmente calcolabile. Il liquido in quiete ($\omega = 0$) occupa il volume $\pi R^2 d$ con R raggio del cilindro. In rotazione il volume dell'intercapedine cilindrica alta z e compresa tra i raggi r e $r + dr$ è dato da

$$dV = 2\pi r dr z(r) = 2\pi r \left(h + \frac{\omega^2}{2g} r^2 \right) dr$$

e il volume totale sotto il paraboloido è

$$V = \int_0^R 2\pi h r dr + \int_0^R \frac{\pi \omega^2}{g} r^3 dr = \pi R^2 \left(h + \frac{\omega^2 R^2}{4g} \right) .$$

La massa nel processo non cambia; se la densità resta costante, il volume appena calcolato deve essere eguale a $\pi R^2 d$ e si trova

$$h = d - \frac{\omega^2 R^2}{4g} .$$

L'altezza h dipende da ω e la sua misura può essere utilizzata come *un tachimetro per la velocità angolare*. Il massimo valore ω_M misurabile si ha per $h = 0$: $\omega_M = 4gd/R^2$.

Studiamo ora il moto in un sistema di riferimento inerziale; il liquido rispetto a tale sistema non è più in quiete e non possiamo usare (8.4).

La forza agente sull'elemento $dm = \rho dV$ di liquido in rotazione è la risultante della forza peso (forza di volume) e delle forze di superficie e deve essere centripeta, cioè valere $-\rho dV \omega^2 r \mathbf{u}_r$, come abbiamo già rilevato all'inizio del paragrafo. Lungo la direzione verticale le forze agenti sono in equilibrio e quindi

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad , \quad (8.8)$$

come sappiamo da (8.3). La forza radiale, non nulla, è dovuta alle differenze di pressione:

$$\mathbf{F}_r = [p(r) dS - p(r+dr) dS] \mathbf{u}_r = -\frac{\partial p}{\partial r} dr dS \mathbf{u}_r = -\frac{\partial p}{\partial r} dV \mathbf{u}_r ,$$

dove dS rappresenta la superficie dell'elemento, di volume $dV = dr dS$. Ponendo \mathbf{F}_r eguale a $-\rho dV \omega^2 r \mathbf{u}_r$ si ottiene

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho \omega^2 r \quad . \quad (8.9)$$

La pressione dunque cresce radialmente nel liquido in rotazione. La funzione $p(r, z)$, le cui derivate parziali soddisfano (8.8) e (8.9), è

$$p = -\rho g z + \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2 + k \quad ,$$

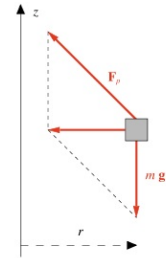


FIGURA 8.18

dove k rappresenta la pressione sul fondo del recipiente e sull'asse di rotazione, cioè per $z = r = 0$. Se p_0 è la pressione esterna agente sulla superficie libera, $k = p(0, 0) = p_0 + \rho g h$. Quindi lungo la superficie libera, che è isobarica alla pressione p_0 , deve essere

$$p_0 = -\rho g z + \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2 + p_0 + \rho g h \Rightarrow z = h + \frac{\omega^2}{2g} r^2$$

che è la (8.7) già ricavata.

L'origine della forza centripeta necessaria alla rotazione del liquido è nella variazione radiale della pressione. Se nel liquido è sospeso un corpuscolo con densità $\rho' \neq \rho$ l'azione della pressione, esercitata dal liquido circostante, è sempre la stessa, però la forza centripeta $\rho V \omega^2 r$ può essere troppo grande o troppo piccola per mantenere il corpuscolo, di massa $\rho' V$, sull'orbita circolare di raggio r . Pertanto il corpuscolo si sposterà verso l'asse di rotazione se $\rho' < \rho$ mentre se ne allontanerà se $\rho' > \rho$.

Su questo risultato, che è un'estensione del principio di Archimede, si basa il *metodo di separazione per centrifugazione di sostanze in sospensione in un liquido*, frequentemente usato in biologia. In appositi dispositivi, detti *ultracentrifughe*, si raggiungono valori di ω dell'ordine di 10^4 rad/s $\cong 10^5$ giri/minuto, riuscendo a separare sostanze con densità poco diversa da quella del liquido (differenze relative dell'ordine di 10^{-2}).

Centrifugazione

8.6 Attrito interno. Viscosità. Fluido ideale

Quando si verifica una condizione di scorrimento relativo tra due elementi di fluido compare lungo l'area di contatto una forza tangenziale di attrito, detta *forza di attrito interno*, con verso sempre contrario a quello della velocità relativa. L'elemento 1 del fluido esercita una forza sull'elemento 2 e viceversa: le due forze sono eguali e contrarie, come mostrato in figura 8.19. Se la velocità v_1 dell'elemento 1 è maggiore di quella v_2 dell'elemento 2, la forza di attrito interno è ritardante per il primo elemento e accelerante per il secondo.

S

Si trova sperimentalmente che il modulo della forza di attrito interno si può esprimere come

$$dF = \eta dS \frac{dv}{dn}, \quad (8.10)$$

dove dS rappresenta l'area di contatto e dv/dn la variazione del modulo della velocità in direzione ortogonale a dS . Il coefficiente η è la *viscosità del fluido* e dipende dal tipo di fluido e dalla temperatura. Nei liquidi η decresce all'aumentare della temperatura, nei gas cresce.

L'unità di misura della viscosità è il kg/ms, però nella pratica si usa l'unità poise (dal nome del fisiologo Poiseuille) e il sottomultiplo centipoise:

$$1 \text{ poise} = 10^{-1} \text{ kg/ms} \quad , \quad 1 \text{ centipoise} = 10^{-2} \text{ poise} = 10^{-3} \text{ kg/ms}.$$

Diamo nella tabella 8.1 alcuni valori della viscosità.

Tabella 8.1 Viscosità		
Fluido	Temperatura (°C)	η (poise)
acqua	0	$1.79 \cdot 10^{-2}$
acqua	20	$1.00 \cdot 10^{-2}$
acqua	100	$0.30 \cdot 10^{-2}$
alcol etilico	20	$1.20 \cdot 10^{-2}$
mercurio	20	$1.55 \cdot 10^{-2}$
sangue	37	0.23
olio per motori	30	2.50
glicerina	20	15.00
vetro	700	$1.00 \cdot 10^{11}$
pece	15	$1.30 \cdot 10^{11}$
aria	20	$1.71 \cdot 10^{-4}$
idrogeno	20	$0.88 \cdot 10^{-4}$

All'attrito interno e a quello tra liquido e pareti del contenitore si riconduce il fenomeno della variazione di forma del liquido in rotazione, discusso nel paragrafo 8.5. All'inizio della rotazione entrano in movimento gli elementi di liquido sul fondo e vicino alle pareti, cioè a contatto con una superficie in moto relativo. In particolare per gli elementi di liquido sul fondo non è inizialmente

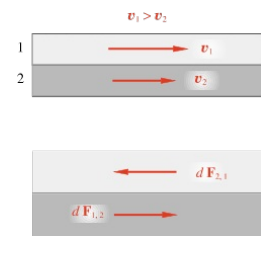


FIGURA 8.19

Forza di attrito interno

Viscosità di un fluido

ancora realizzata la condizione di equilibrio dinamico, ossia non c'è una forza centripeta sufficiente a mantenerli in orbita circolare. Gli elementi si portano verso l'esterno ed il liquido comincia ad accumularsi verso le pareti. Successivamente il moto degli elementi più esterni trascina per attrito interno via via gli elementi più interni, che a loro volta si spostano verso l'esterno. Essendo la velocità angolare costante, alla fine le velocità relative si annullano e si raggiunge l'equilibrio dinamico con la conformazione parabolica vista.

Più precisamente, si trova che tra liquido e pareti non c'è scorrimento. Uno strato molto sottile di liquido, detto *strato limite*, le cui dimensioni sono di pochi diametri molecolari, aderisce alla parete e si muove con questa. Il successivo strato di liquido è trascinato per viscosità e così via. Analogamente, se il liquido si muove rispetto ad una parete ferma, c'è uno strato limite di liquido fermo, rispetto al quale scorre il resto del liquido.

Si chiama *fluido ideale* un fluido in cui $\eta = 0$ e $\rho = \text{costante}$, cioè *un fluido non viscoso e incompressibile*: quest'ultima dizione si riferisce al fatto che se la densità è costante una massa di fluido occupa sempre lo stesso volume, anche se è in movimento. Essendo la viscosità nulla, le forze tra gli elementi fluidi, seppure in moto relativo, sono sempre ortogonali alle superficie di contatto, come avviene in un fluido in quiete.

Fluido ideale

Il fluido ideale è un caso limite, in quanto in un fluido reale è sempre $\eta \neq 0$; si noti che con un fluido ideale non si potrebbe certamente realizzare l'esperienza descritta nel paragrafo 8.5.

Osserviamo infine che in un fluido in equilibrio statico $dv/dn = 0$ e pertanto non ci sono forze tangenziali: le condizioni di equilibrio sono le stesse per un fluido viscoso e uno non viscoso ovvero l'attrito interno non modifica le condizioni di equilibrio statico. È solo in un fluido in movimento che il concetto di viscosità è significativo, come del resto dice la (8.10).

8.7 Moto di un fluido. Regime stazionario. Portata

Consideriamo un fluido in moto, per esempio all'interno di un condotto. Per studiare caratteristiche del moto come la variazione della velocità lungo il condotto e la sua dipendenza dalla pressione, si possono adottare due diverse descrizioni (o visuali). La prima, detta *lagrangiana*, prende in esame un elemento di fluido e ne segue il moto dovuto alle varie forze agenti (di volume e di superficie, inclusa la forza di attrito interno se la viscosità non è trascurabile); si tratta di una descrizione analoga a quella utilizzata per il moto di un punto materiale. L'approccio della seconda descrizione, detta *euleriana*, è diverso: viene fissata l'attenzione su un determinato punto della massa fluida $P(x, y, z)$ e si considera la velocità $\mathbf{v}(x, y, z, t)$ di un elemento fluido che passa nel punto P all'istante t . In generale tale grandezza è variabile nel tempo, cioè i vari elementi che successivamente passano nella posizione considerata P hanno velocità diverse. Se in base alle leggi della meccanica siamo in grado di determinare in tutta la massa del fluido la funzione $\mathbf{v}(x, y, z, t)$ abbiamo una rappresentazione del moto di tutti gli elementi fluidi.

Adottiamo la visuale euleriana e restringiamo il nostro studio al caso in cui la velocità, pur cambiando da punto a punto, sia in ciascun punto indipendente dal tempo, $\mathbf{v}(x, y, z)$. Questa situazione fisica è detta di *regime stazionario*: tutti gli elementi di fluido che passano in istanti diversi in P hanno in quella posizione sempre la stessa velocità. In caso contrario si parla di *regime variabile*. Notiamo che in regime stazionario si vede il vantaggio della visuale euleriana: la mappa delle velocità è immutabile, la variabile tempo è scomparsa. Nella visuale lagrangiana, dovendo seguire il moto del singolo elemento, siamo costretti a conservare la dipendenza esplicita dal tempo.

Tracciamo le linee che in ogni punto hanno direzione e verso della velocità cioè sono tangenti al vettore velocità: tali linee sono dette *linee di corrente*; in regime stazionario esse hanno una configurazione costante nel tempo e coincidono con le traiettorie degli elementi fluidi. Un esempio è mostrato in figura 8.20: se il regime è stazionario il disegno non cambia mai. Le linee di corrente si possono facilmente visualizzare immergendo nel fluido polveri colorate che vengono trasportate dalla corrente. In regime variabile invece le linee di corrente cambiano nel tempo e la traiettoria di un elemento fluido è costituita da una successione di tratti, ciascuno appartenente a una diversa configurazione di linee di corrente.

Tutte le linee di corrente che passano attraverso una generica sezione S individuano un *tubo di flusso*, mostrato in figura 8.21. L'intero condotto, al limite, costituisce un tubo di flusso.

Consideriamo un tubo di flusso di sezione infinitesima dS , ortogonale alle linee di corrente: il prodotto $dq = v dS$, detto *portata del tubo di flusso*, rappresenta tutto il volume di fluido che è passato attraverso dS in un secondo.

Descrizione euleriana

Regime stazionario

Linee di corrente

Tubo di flusso

Tale volume, infatti, ha la base pari a dS e l'altezza v , modulo della velocità, che corrisponde allo spazio percorso da un elemento di fluido in un secondo. Come si desume dalla definizione, la portata si misura in m^3/s .

Il tubo di flusso può cambiare di sezione (figura 8.21), ma se il fluido è incomprimibile, cioè la densità è costante, e si è in condizioni di regime stazionario, cioè la configurazione delle linee di corrente è immutabile, la portata deve essere la stessa attraverso qualsiasi sezione.

Infatti, fissate due qualsiasi sezioni del tubo di flusso e quindi il volume compreso tra queste, la massa ivi contenuta può entrare e uscire solo dalle sezioni, ma non dalle pareti se il regime è stazionario, e non può cambiare se la densità è costante: pertanto la portata attraverso le sezioni è la stessa, il fluido non può localmente né addensarsi né rarefarsi. In conclusione, *in regime stazionario se la densità è costante, è costante la portata di un tubo di flusso infinitesimo: $v dS = \text{costante}$; dove la sezione aumenta la velocità diminuisce, mentre se diminuisce la sezione aumenta la velocità*, come sembra ovvio se bisogna smaltire per unità di tempo un numero costante di metri cubi.

Per un tubo di flusso di sezione finita la portata è data da

$$q = \int_S dq = \int_S v dS = v_m S ,$$

se v_m è la *media delle velocità* nei vari punti della sezione (media spaziale e non temporale). Quindi, per un fluido incomprimibile in regime stazionario

$$v_m S = \text{costante} . \quad (8.11)$$

Questa legge di proporzionalità inversa tra velocità e sezione è stata scoperta da Leonardo, osservando il moto dei liquidi. Essa è facilmente riscontrabile guardando la corrente di un fiume: la corrente appare più veloce dove il fiume si restringe.

Si trova sperimentalmente che la (8.11) è valida anche per i gas: essi sono cioè incomprimibili nel loro moto in un condotto, almeno finché le velocità non sono elevate ($\sim 100 \text{ m/s}$).

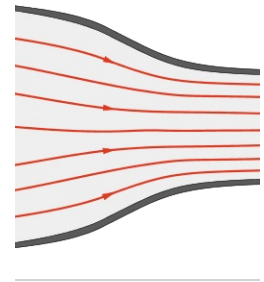


FIGURA 8.20

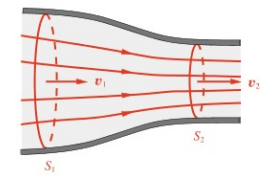


FIGURA 8.21

8.8 Teorema di Bernoulli

Ricaviamo adesso la proprietà fondamentale della dinamica dei fluidi ideali, nota come *teorema di Bernoulli* (1738). Abbiamo un fluido ideale, $\eta = 0$ e

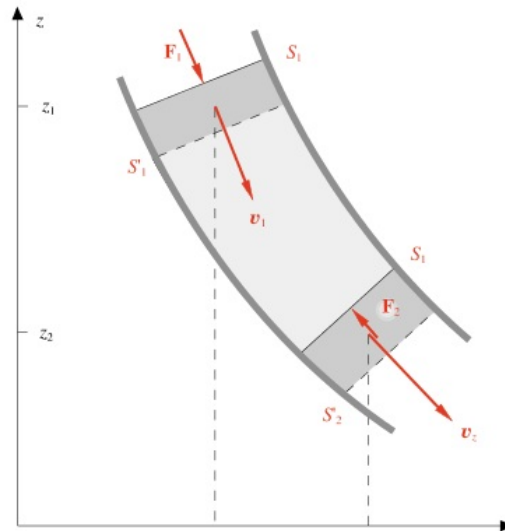


FIGURA 8.22

$\rho = \text{costante}$, che scorre in condizioni di regime stazionario dentro un condotto a sezione variabile. Un volume di fluido, compreso tra le sezioni S_1 e S_2 si sposta tra le sezioni S_1' e S_2' (figura 8.22): sia ds_1 lo spostamento da S_1 a S_1' e ds_2 da S_2 a S_2' . Se il fluido è incomprimibile il volume $dV_1 = S_1 ds_1$ che attraversa la sezione S_1 nel tempo dt è eguale a quello $dV_2 = S_2 ds_2$ che attraversa nello stesso intervallo di tempo la sezione S_2 : $dV_1 = dV_2$.

Vogliamo ricavare la relazione tra velocità e pressione del fluido nelle varie sezioni del condotto. A tal fine utilizziamo il teorema dell'energia (4.18), secondo cui il lavoro delle forze agenti è eguale alla variazione di energia cinetica.

Le forze agenti sul volume di fluido sono la forza peso e le forze di pressione, mentre non ci sono forze di attrito interno dato che $\eta = 0$. Dalla figura 8.22 osserviamo che complessivamente il movimento del volume di fluido equivale a spostare nel volume dV_2 la massa contenuta nel volume dV_1 ; l'energia potenziale del fluido compreso tra S_1' e S_2 rimane invariata, anche se nel tempo gli elementi fluidi che lo compongono sono cambiati. Il lavoro della forza peso è quindi dato da

$$dW = -dE_p = -dm g (z_2 - z_1) = -\rho dV g (z_2 - z_1) ,$$

dove z_1 e z_2 sono le quote dei due volumi eguali dV_1 e dV_2 , di massa dm .

Le forze di pressione dovute alle pareti del condotto danno lavoro nullo in quanto ortogonali allo spostamento ($\eta = 0$), mentre il lavoro di quelle dovute

agli elementi a monte di S_1 e a valle di S_2 è dato da

$$dW_p = \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{s}_1 + \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{s}_2 = p_1 S_1 ds_1 - p_2 S_2 ds_2 = p_1 dV_1 - p_2 dV_2 = (p_1 - p_2) dV \quad .$$

Il calcolo della variazione di energia cinetica, seguendo il ragionamento utilizzato per l'energia potenziale (nel volume compreso tra S'_1 e S_2 non c'è variazione di energia cinetica), fornisce

$$dE_k = \frac{1}{2} dm v_2^2 - \frac{1}{2} dm v_1^2 = \frac{1}{2} \rho dV (v_2^2 - v_1^2) \quad .$$

Pertanto

$$dW + dW_p = -\rho dV g (z_2 - z_1) + (p_1 - p_2) dV = dE_k = \frac{1}{2} \rho dV (v_2^2 - v_1^2)$$

e separando i termini relativi a dV_1 e dV_2

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g z_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g z_2$$

ovvero

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g z = \text{costante} \quad . \quad (8.12)$$

Teorema di Bernoulli

La relazione (8.12), valida per qualsiasi sezione S , esprime il *teorema di Bernoulli*: in un fluido ideale in moto con regime stazionario la somma della pressione, della densità di energia cinetica (energia cinetica per unità di volume) e della densità di energia potenziale (energia potenziale per unità di volume) è costante lungo il condotto, ovvero lungo un qualsiasi tubo di flusso.

Se il condotto è orizzontale $\rho g z$ è costante e quindi la (8.12) si riduce a

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{costante} \quad . \quad (8.13)$$

La pressione e la velocità del fluido cambiano solo se cambia la sezione: dove questa è maggiore la velocità è minore secondo (8.11) e in base a (8.13) maggiore è la pressione; dove la sezione è minore accade il contrario, v aumenta e p diminuisce. Se la sezione è costante, rimangono costanti pressione e velocità: data l'assenza di attrito il moto avviene senza l'azione di una forza, almeno finché il condotto è rettilineo.

Da (8.12) se $v = 0$ si ritrova la legge di Stevino (8.5): $p + \rho g z = \text{costante}$. Il fatto sottolinea che la statica è sempre, come già osservato, un caso particolare della dinamica. Osserviamo inoltre che la pressione misurata in un punto del fluido in quiete è sempre maggiore di quella esistente nel fluido in movimento.

Un'ultima considerazione: nella rappresentazione del moto tramite le linee di corrente, esse risultano più fitte dove la velocità è maggiore, come si vede in

figura 8.20. A tale proprietà qualitativa si può dare un aspetto quantitativo se si assume di misurare la velocità tramite il numero di linee di corrente per unità di sezione. In ogni caso, dall'esame dell'andamento delle linee di corrente si può avere un'idea non solo delle traiettorie, ma anche delle variazioni di velocità e quindi della pressione.

8.9 Applicazioni del teorema di Bernoulli

Le relazioni (8.12) e (8.13) sono state ricavate per il moto in regime stazionario di un fluido ideale. In questo paragrafo vedremo alcune applicazioni, che si riferiscono a situazioni reali: i risultati, calcolati in base al teorema di Bernoulli, sono perciò da considerare casi limite. In un fluido reale occorre spendere lavoro contro gli attriti e quindi, per esempio, a parità di differenza di pressione o di dislivello le variazioni di velocità del fluido sono minori. D'altra parte il teorema di Bernoulli resta pur sempre un utile mezzo di calcolo per fissare i limiti ideali nel comportamento di un fluido in movimento.

Flusso in un tubo a sezione costante

In regime stazionario se la sezione è costante resta costante anche la velocità, in accordo con (8.11). Pertanto il termine che dà la densità di energia cinetica non varia lungo il condotto e la legge (8.12) si scrive, con riferimento a due generiche sezioni S_1 e S_2 ,

$$p_1 + \rho g z_1 = p_2 + \rho g z_2 \quad .$$

In corrispondenza di un dislivello $h = z_2 - z_1$ la variazione di pressione è ρgh , come se il fluido fosse in quiete. Nel condotto della figura 8.23 abbiamo

$$p_1 + \rho g h_1 = p = p_2 + \rho g h_2 \quad ;$$

la pressione è massima nel punto più basso, assunto come riferimento per le quote, e decresce con la quota.

Se vogliamo tramite una pompa far salire un fluido di una quota h con una certa portata $q = Sv$, la pompa deve assicurare la differenza di pressione ρgh , che corrisponde ad una forza ρghS e ad una potenza $\rho ghSv = \rho ghq$. Per far salire l'acqua di 1 m con portata di 1 litro/s la potenza necessaria è

$$P = 10^3 \cdot 9.8 \cdot 1 \cdot 10^{-3} = 9.8 \text{ W} \quad ;$$

per h metri e n litri/s è 9.8 hnW .

Tubo di Venturi

Il *tubo di Venturi* consiste in un condotto orizzontale a sezione variabile e viene utilizzato per misure di velocità e di portata, inserendolo nella conduttura in cui scorre il fluido. Applicando (8.11) e (8.13) si ha

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 \quad , \quad v_1 S_1 = v_2 S_2 \quad ,$$

essendo S_1 e S_2 rispettivamente la sezione della conduttura e della strozzatura. Pertanto

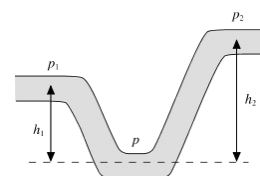


FIGURA 8.23

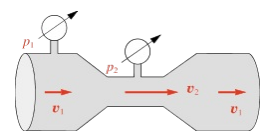


FIGURA 8.24

$$v_2^2 = \frac{2(p_1 - p_2)}{\rho} \frac{S_1^2}{S_1^2 - S_2^2} .$$

Dalla misura della differenza di pressione nelle due sezioni, $\Delta p = p_1 - p_2$, si possono calcolare v_2 e quindi v_1 e risalire al valore della portata.

Bruciatore a gas. Aspiratore a acqua

Nel *bruciatore a gas*, il gas combustibile passa attraverso una strozzatura nel condotto: la velocità aumenta e la pressione diminuisce, portandosi a un valore inferiore a quello della pressione atmosferica; pertanto attraverso l'apertura dall'ambiente esterno fluisce l'aria necessaria per formare la miscela combustibile. La figura 8.25 mostra una sezione del dispositivo. Tramite una regolazione dell'apertura si variano le condizioni di combustione.

Nell'*aspiratore ad acqua*, al posto del gas fluisce l'acqua e l'aria, o altro gas, proviene da un ambiente chiuso in cui si intende ridurre la pressione esistente. La depressione causata dall'aumento di velocità dell'acqua nella strozzatura del condotto aspira l'aria che mescolandosi con l'acqua viene portata via. Alla fine del processo nell'ambiente chiuso c'è una pressione residua pari a quella del vapor d'acqua. Un principio simile è utilizzato negli erogatori di benzina ad arresto automatico. Il liquido che scorre aspira aria; quando il livello nel serbatoio del veicolo tocca la punta dell'erogatore l'aspirazione si blocca e questo fatto provoca lo scatto di una valvola che chiude l'erogatore.

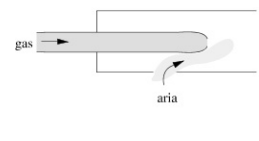


FIGURA 8.25

Paradosso idrodinamico

Consideriamo un condotto in cui fluisce dell'aria; alla fine del condotto viene posto un dischetto. Si osserva che il dischetto è spinto verso il condotto e tende a chiuderlo piuttosto che essere allontanato dal getto fluido, come forse si potrebbe intuitivamente pensare (dovendo il nome di *paradosso*). Il risultato si spiega col teorema di Bernoulli (8.13): se p è la pressione dell'aria che si muove con velocità v e p_{atm} è la pressione esterna dell'aria in quiete, lungo un tubo di flusso che va dall'interno del condotto all'esterno si ha

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 = p_{atm} \Rightarrow p < p_{atm} .$$

Tubo di Pitot

Se un ostacolo viene posto in una corrente fluida le linee di corrente si aprono, ma nel punto di ostacolo (O nella figura 8.27) il fluido è fermo. Nelle sezioni A e B , a sufficiente distanza dall'ostacolo, la pressione e la velocità del fluido sono le stesse, per cui da (8.13) abbiamo

$$p_A + \frac{1}{2} \rho v_A^2 = p_B + \frac{1}{2} \rho v_B^2 = p_O .$$

Pratichiamo due piccoli fori nel tubo di Pitot, in O e in B , per misurare in quelle posizioni le pressioni nel fluido: dalla loro differenza si calcola la velocità

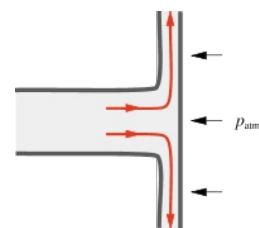


FIGURA 8.26

del fluido relativa al tubo.

Tale sistema viene utilizzato per la *misura della velocità degli aerei*.

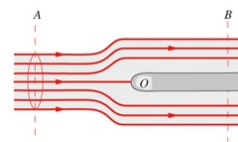


FIGURA 8.27

Teorema di Torricelli

Un recipiente, contenente un liquido di densità ρ , presenta sulla parete un piccolo foro, di sezione trascurabile rispetto alla sezione del recipiente, a distanza h dalla superficie libera (figura 8.28). La pressione nell'ambiente in cui si trova il recipiente è ovunque p_0 . Vogliamo determinare la velocità con cui il liquido esce dal foro (velocità di deflusso).

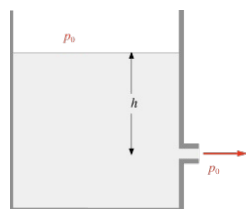


FIGURA 8.28

Dato che il recipiente ha sezione molto grande rispetto al foro il livello scende lentamente e il liquido può essere considerato quasi in quiete sulla superficie libera. Prendiamo un tubo di flusso che parte dalla superficie libera e termina nel foro: lungo di esso, in base al teorema di Bernoulli (8.12), si ha

$$(p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g z)_{\text{sup}} = (p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g z)_{\text{foro}} .$$

Sulla superficie libera $p = p_0$, $v = 0$ e, assumendo il livello del foro come riferimento, $z = h$; all'uscita del foro $p = p_0$ e $z = 0$. Pertanto

$$p_0 + \rho g h = p_0 + \frac{1}{2} \rho v^2 \Rightarrow v = \sqrt{2 g h} .$$

La velocità di efflusso non dipende né da ρ né da p_0 ed è pari a quella che avrebbe il liquido se scendesse in caduta libera da un'altezza h . Tale risultato, valido finché si può trascurare l'attrito interno, venne ricavato da Torricelli molto prima che fosse conosciuto il teorema di Bernoulli.

Esempio 8.4

Un serbatoio è riempito con acqua e olio, che consideriamo liquidi ideali; la densità dell'olio è $\rho_0 = 900 \text{ kg/m}^3$, l'altezza dello strato d'acqua è $h_1 = 1 \text{ m}$, quello dello strato d'olio è $h_2 = 4 \text{ m}$. Determinare la velocità con cui esce inizialmente l'acqua da un piccolo foro sul fondo del serbatoio. La pressione nell'ambiente circostante è ovunque p_0 .

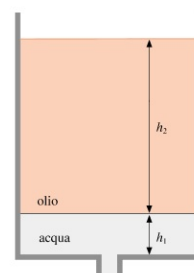


FIGURA 8.29

(Esempio 8.4)

Soluzione

Consideriamo un tubo di flusso nell'acqua, dalla superficie di separazione con l'olio al foro, e applichiamo (8.12) come abbiamo fatto nel teorema di Torricelli. Sulla superficie di separazione $p = p_0 + \rho_0 h_2 g$, $v = 0$, $z = h_1$, al foro $p = p_0$ e $z = 0$, per cui

$$p_0 + (h_1 \rho_a + h_2 \rho_0) g = p_0 + \frac{1}{2} \rho_a v^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2 g}{\rho_a} (h_1 \rho_a + h_2 \rho_0)} = 9.5 \text{ m/s} .$$

Visualizza Soluzione

Nota. Pulsazione vascolare

Come conseguenza di una forma di *arteriosclerosi* sulle pareti delle arterie si vanno accumulando placche, col risultato che la sezione viene ridotta. Per mantenere costante la portata di sangue la velocità di questo deve aumentare (con notevole sforzo per il cuore), ma ciò comporta una diminuzione di pressione nell'arteria, che può essere schiacciata dalla pressione esterna fino a bloccare il flusso sanguigno. Con $v = 0$ la pressione risale e l'arteria si riapre. Si innesca così un processo in cui il flusso nell'arteria varia notevolmente (*pulsazione vascolare*): l'effetto può essere rivelato con uno *stetoscopio*. Nei casi più gravi l'arresto del flusso può provocare forme di *ischemia cerebrale momentanea* (mancanza di flusso sanguigno nel cervello).

8.10 Effetti dinamici. Vortici

Nello studio della meccanica dei fluidi abbiamo ottenuto le proprietà principali applicando le leggi generali della meccanica dei sistemi di punti, sia nel caso di equilibrio statico che di moto.

D'altra parte la natura continua dei fluidi e la loro caratteristica di non avere forma propria hanno indirizzato il nostro studio verso una visione complessiva del moto piuttosto che verso un'analisi del moto di un singolo elemento fluido. Si sono così determinate la pressione e la velocità in funzione della posizione nella massa fluida e si è rappresentato il moto tramite le linee di corrente.

Il quadro generale che segue dalla meccanica dei sistemi di punti rimane però sempre valido e pertanto anche nel moto dei fluidi dobbiamo attenderci gli effetti dinamici usuali. Vediamo alcuni esempi.

a) *Riconsiderazione della legge di Leonardo e del teorema di Bernoulli.*

Nella (8.11) si afferma che la velocità di un elemento di fluido aumenta se la sezione del tubo di flusso diminuisce: ciò vuol dire che l'elemento ha una certa accelerazione e quindi che deve agire una forza; se il condotto è orizzontale questa forza non può essere il peso. Siamo così portati a considerare le forze di pressione, dovute all'interazione con il resto del fluido, come le forze che determinano il moto. Se la sezione è costante e il condotto orizzontale rettilineo, la velocità è costante in modulo, direzione e verso: infatti la pressione è anch'essa costante e non ci sono forze risultanti; è verificato il principio d'inerzia. Invece, nel caso di moto con velocità costante lungo un condotto inclinato, la pressione non può essere costante perché le forze di pressione devono contrastare l'azione della forza peso in modo che la risultante sia nulla e il moto uniforme.

Già con queste semplici considerazioni vediamo, come appena detto, che il modo di ragionare sviluppato per i sistemi discreti di punti continua ad essere valido anche nello studio del moto dei fluidi, tenendo conto delle loro caratteristiche.

b) *Corrente fluida in un condotto curvo.*

Per realizzare il moto curvilineo deve essere applicata al fluido una forza centripeta, esercitata dal condotto, che subisce a sua volta una reazione, come si osserva se il condotto è flessibile o mobile (caso tipico, il mulinello idraulico).

All'interno del fluido l'azione della forza centripeta avviene attraverso una variazione radiale della pressione, che cresce verso l'esterno, cioè verso la parete del condotto più lontana del centro di curvatura.

Un'applicazione notevole di questo tipo di effetti si ha nelle turbine generatrici. Una corrente fluida lambisce le pale della turbina, venendone deviata; per effetto della reazione sulle pale la turbina entra in rotazione. Si ha pertanto un trasferimento di energia dal fluido alla turbina con trasformazione

di lavoro meccanico in energia elettrica.

c) *Conservazione del momento angolare. Vortici.*

Versando un liquido in un recipiente cilindrico con un foro sul fondo si riesce a imprimere alla massa fluida un moto vorticoso, nel senso che le linee di corrente sono spirali che convergono verso l'asse verticale passante per il foro, mentre la superficie libera s'incava ad imbuto verso di questo. Il fenomeno si osserva anche quando viene tolto il tappo dall'orificio di scarico di un qualsiasi recipiente pieno di liquido.

Nell'ipotesi che il liquido sia ideale ($\eta = 0$, $\rho = \text{costante}$) le uniche forze agenti sono le forze di pressione (radiali) e la forza peso (verticale), che hanno momento nullo rispetto all'asse verticale, per cui nel moto di un elemento di liquido si conserva il momento angolare. Se v_{in} è la velocità dell'elemento dm di liquido nell'istante in cui inizia il moto di rotazione, a distanza r_{in} dall'asse, il momento angolare vale $dm v_{in} r_{in}$; quando l'elemento è a distanza r dall'asse deve avere velocità tale che $dm v r = dm v_{in} r_{in}$, per cui

$$v = \frac{v_{in} r_{in}}{r} \Rightarrow \omega = \frac{v}{r} = \frac{\omega_{in} r_{in}^2}{r^2} .$$

La velocità lineare varia in ragione inversa della distanza dall'asse, mentre quella angolare in ragione inversa del quadrato della distanza. Entrambe cioè aumentano man mano che l'elemento di liquido si avvicina all'asse.

Nella massa liquida in rotazione elementi contigui hanno velocità diverse, però se $\eta = 0$ non si originano forze di attrito interno, che determinerebbero una situazione di rotazione rigida, come discusso nel paragrafo 8.5.

Per ricavare la forma della superficie libera utilizziamo il teorema di Bernoulli applicato a un tubo di flusso infinitesimo che sta sulla superficie libera, dove $p = p_{atm} = \text{costante}$: pertanto da (8.12)

$$p_{atm} + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g z = \text{costante} \Rightarrow \frac{v^2}{2g} + z = h ,$$

conglobando nella costante h la pressione p_{atm} e il termine costante ρg . Ne segue

$$z = h - \frac{v^2}{2g} = h - \frac{v_{in}^2 r_{in}^2}{2g} \frac{1}{r^2}$$

come *equazione della superficie libera del vortice* rappresentato in sezione nella figura 8.30.

Quando $r \rightarrow 0$, z tende ad h che rappresenta la quota rispetto al fondo della superficie libera non in rotazione. Per $r \rightarrow \infty$ $z \rightarrow -\infty$, cioè l'elemento non arriva mai sull'asse, dove la sua velocità dovrebbe essere infinita.

La formazione di vortici avviene anche nei liquidi reali, come discuteremo nel paragrafo 8.12, ma il fenomeno è complicato dalla presenza delle forze di

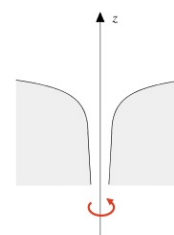


FIGURA 8.30

attrito interno.

8.11 Moto laminare

Trattiamo ora il moto dei *fluidi reali*, iniziando dalla situazione in cui la velocità non è elevata, secondo un criterio che preciseremo nel paragrafo 8.12.

In tali condizioni il *moto* è detto *laminare*: *il regime è stazionario, con le linee di corrente costanti nel tempo* (e che non si intersecano mai).

Il fluido a contatto con le pareti del condotto, che supponiamo cilindrico di raggio R , è fermo. Avvicinandosi all'asse del condotto la velocità aumenta, per cui abbiamo strati cilindrici coassiali di fluido che scorrono l'uno dentro l'altro con velocità diverse (donde il nome di moto laminare). La velocità è massima sull'asse del condotto.

Considerando il condotto orizzontale, lungo l e con una differenza di pressione $p_1 - p_2$ agli estremi, si dimostra: 1) il modulo della velocità varia con il raggio r dello strato cilindrico, ovvero con la distanza dall'asse, secondo la legge

$$v(r) = \frac{p_1 - p_2}{4 \eta l} (R^2 - r^2) \quad ; \quad (8.14)$$

la velocità massima ($r = 0$) vale

$$v_{\max} = (p_1 - p_2) R^2 / 4 \eta l \quad ,$$

mentre per $r = R$, alla parete del condotto, $v = v_{\min} = 0$;

2) la portata del condotto è data dalla *legge di Hagen – Poiseuille*

$$q = \frac{\pi R^4}{8 \eta} \frac{p_1 - p_2}{l} \quad , \quad (8.15)$$

Legge di Hagen-
Poiseuille

che si ottiene integrando (8.14):

$$q = \int_S v(r) dS = \int_0^R v(r) 2 \pi r dr \quad .$$

Posto $q = \pi R^2 v_m$, con v_m velocità media sulla sezione, si ha

$$v_m = \frac{q}{\pi R^2} = \frac{R^2}{8 \eta} \frac{p_1 - p_2}{l} \Rightarrow \frac{p_1 - p_2}{l} = \frac{8 \eta}{R^2} v_m \quad . \quad (8.16)$$

Nel regime laminare la portata, la velocità media e le velocità dei singoli strati cilindrici sono direttamente proporzionali al gradiente di pressione $(p_1 - p_2)/l$. Per mantenere il flusso di fluido nel condotto è necessaria una differenza di pressione ovvero una forza per vincere la resistenza al moto dovuta all'attrito interno: e questo anche se il condotto è orizzontale e a sezione costante. È la stessa situazione incontrata nel moto rettilineo uniforme di un punto materiale

in presenza di attrito radente.

8.12 Moto vorticoso. Numero di Reynolds

La legge di Hagen-Poiseuille è sempre verificata se il raggio del condotto è molto piccolo (*tubi capillari*), mentre per raggi maggiori c'è un valore critico della velocità oltre il quale compaiono vortici nel fluido e si parla di moto turbolento o vorticoso.

I meccanismi che determinano la formazione dei vortici sono legati a notevoli variazioni di velocità ortogonalmente alle linee di corrente e quindi, in un fluido reale, a notevoli forze di attrito interno: ciò si manifesta per correnti fluide che scorrono l'una rispetto all'altra con notevoli differenze di velocità, come mostrato in figura 8.31a. Altre situazioni dovute a presenza di ostacoli o variazioni di forma del condotto sono rappresentate in figura 8.31b e 8.31c.

f

Per un condotto cilindrico Reynolds ha provato sperimentalmente che si ha la *transizione da regime laminare a vorticoso* quando il parametro adimensionale

Numero di Reynolds

$$\mathcal{R} = \frac{\rho v R}{\eta}, \quad (8.17)$$

detto *numero di Reynolds*, ha il valore 1200. La *velocità critica* per la transizione è quindi

$$v_c = 1200 \frac{h}{\rho R}.$$

Per $v < v_c$ vale la (8.15), quando v raggiunge e supera v_c si ha inizialmente una notevole diminuzione della portata, a parità di differenza di pressione ai capi del condotto, e un regime di moto instabile. Aumentando la differenza di pressione si raggiunge di nuovo un flusso stabile in regime vorticoso e si trova che la (8.16) è sostituita dalla

$$\frac{p_1 - p_2}{l} = \frac{k}{R} \frac{\rho v_m^2}{2}, \quad (8.18)$$

dove il coefficiente di proporzionalità k , detto *coefficiente di resistenza*, è costante in un ampio intervallo di \mathcal{R} (da $1.2 \cdot 10^3$ a 10^5), per i normali tubi impiegati nell'uso pratico. *In regime vorticoso il gradiente di pressione necessario per mantenere una certa velocità di efflusso è una funzione quadratica della velocità, invece che lineare come nel regime laminare.*

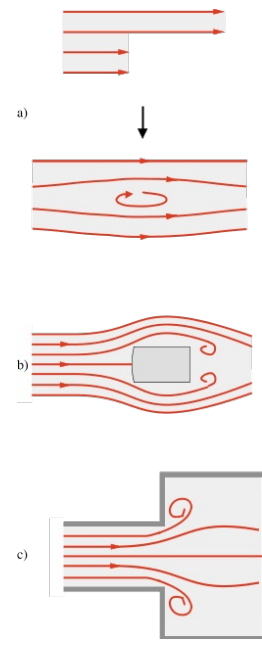


FIGURA 8.31

Nota. Lo sfigmomanometro

Il passaggio da un moto laminare ad uno turbolento per un fluido in moto è alla base del funzionamento dello *sfigmomanometro*, strumento utilizzato per misurare la pressione arteriosa minima e massima.

Un manicotto di gomma viene avvolto attorno ad un braccio del paziente. Immettendo gradualmente aria nel manicotto viene compressa un'arteria radiale. Alla diminuzione della sezione corrisponde un aumento della velocità del sangue fino a che viene raggiunta la velocità critica per la transizione da moto laminare a turbolento. In tali condizioni si rivela, tramite un *fonendoscopio* posto a contatto del braccio, un rumore caratteristico. Aumentando la pressione esterna la circolazione si interrompe e il rumore scompare. Si lascia ora diminuire lentamente la pressione esercitata dal manicotto sfiatando l'aria in esso contenuta. Il valore della pressione, rilevata dalla lettura del manometro collegato, a cui riprende la circolazione e ricompare il rumore dovuto al moto vorticoso, corrisponde alla pressione massima arteriosa, mentre la pressione a cui scompare successivamente il rumore, per il passaggio dal moto vorticoso a quello laminare, si assume come pressione minima arteriosa.

8.13 Moto in un fluido. Resistenza del mezzo

Lo studio del moto di un corpo immerso in un fluido è molto importante per ragioni pratiche. Infatti tutti i moti sulla terra avvengono dentro un fluido, l'aria, o addirittura in presenza di due fluidi, aria e acqua.

L'interazione con il fluido si manifesta attraverso una forza, che si oppone al moto e si chiama *resistenza del mezzo*, il cui effetto dipende dal moto relativo. Si ha lo stesso risultato se il corpo si muove in un fluido in quiete o se il fluido scorre e il corpo è fermo. Quest'ultima situazione è realizzata nelle gallerie a vento in cui si studiano le caratteristiche aereodinamiche dei veicoli.

Consideriamo una sfera immersa in un fluido in moto. Se il fluido è ideale, si ha completa simmetria delle linee di corrente e quindi la stessa pressione a monte e a valle della sfera (figura 8.32a).

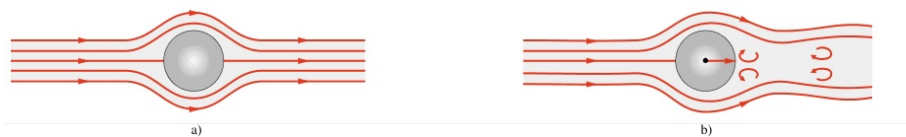


FIGURA 8.32

La sfera pertanto non subisce alcuna spinta e rimane ferma: tale risultato è indicato come *il paradosso di d'Alembert*. Se invece il fluido è reale si forma una scia vorticoso. Come conseguenza la pressione a valle è minore di quella a monte e quindi si manifesta una forza sulla sfera, che viene trascinato dal fluido (figura 8.32b). A velocità relative basse non si formano vortici, però si perde in ogni caso la simmetria delle linee di corrente e compare una spinta sulla sfera.

I parametri che determinano la resistenza del mezzo sono la forma e le dimensioni del corpo in moto nel fluido, in particolare la sezione S , la densità e la viscosità del fluido, la velocità relativa.

L'espressione generale della *resistenza del mezzo* è dato da

$$F_{\text{res}} = \frac{1}{2} c S \rho v^2, \quad (8.19)$$

dove c è un coefficiente adimensionale che dipende dalla forma del corpo, soprattutto dalla forma della parte posteriore più che di quella anteriore. In regime vorticoso c è costante e F_{res} è proporzionale a v^2 , in regime laminare c è funzione dell'inverso della velocità e F_{res} risulta lineare nella velocità: si tratta della forza di attrito viscoso studiata nel paragrafo 2.10.

In particolare per sfere con piccola velocità vale *la legge di Stokes*:

$$F_{\text{res}} = 6 \pi \eta R v. \quad (8.20)$$

Paradosso di d'Alembert

Resistenza del mezzo

Legge di Stokes

Esempio 8.5

Calcolare la velocità limite di una sfera di raggio R e densità ρ che cade in un fluido di viscosità η e densità ρ_0 .

Soluzione

La sfera che si muove nel fluido in regime laminare è sottoposta alla forza peso, alla spinta di Archimede e alla resistenza del mezzo, che hanno le espressioni, proiettate sull'asse z verticale

$$\frac{4}{3} \pi R^3 \rho g \quad , \quad -\frac{4}{3} \pi R^3 \rho_0 g \quad , \quad -6 \pi \eta R v \quad .$$

Quando la sfera raggiunge la velocità limite la risultante delle tre forze è nulla (equilibrio dinamico) per cui si trova.

$$v_{\text{lim}} = \frac{2}{9} R^2 \frac{\rho - \rho_0}{\eta} g \quad .$$

Dalla misura di v_{lim} si può determinare la viscosità del fluido o il raggio della sfera. Il risultato è vero per sfere solide di piccolo diametro ($R \simeq 1 \text{ mm}$) che cadono in un liquido e anche per gocce di liquido in aria se $R \leq 50 \text{ }\mu\text{m}$.

Visualizza Soluzione

8.14 Effetto Magnus. Portanza

Vediamo ora alcuni effetti dinamici trasversali rispetto alla velocità \mathbf{v} di un corpo in moto in un fluido.

Supponiamo che la sfera considerata nel paragrafo 8.13 oltre a muoversi nel fluido reale ruoti su se stessa. Nel moto di rotazione essa trasporta per attrito una parte di fluido e il risultato è una dissimmetria nelle velocità: risulta $v_A > v_B$ e quindi $p_A < p_B$, per cui c'è una spinta sulla sfera da B verso A , come mostrato in figura 8.33 (in A le velocità del fluido e dei punti superficiali della sfera sono concordi, in B discordi).

A questo fenomeno, detto *effetto Magnus*, sono dovuti, per esempio, i vistosi effetti delle palle tagliate a tennis e a calcio (in particolare nei calci d'angolo e di punizione).

Un altro effetto, ben più importante nella pratica, è quello che si manifesta intorno alle ali degli aeroplani. La forma delle ali è scelta in modo tale da causare una dissimmetria nelle linee di corrente. L'aria è più veloce rispetto all'ala nella parte superiore che nella parte inferiore e quindi la pressione è minore sopra rispetto a sotto. Ne risulta una spinta verso l'alto chiamata *portanza*. È interessante notare che il fenomeno avviene anche in un fluido ideale.

Possiamo allora servirci del teorema di Bernoulli per trovare un'espressione della portanza. Siano p e v i valori di pressione e velocità dell'aria a monte dell'ala, p_1 e $v + \Delta v$ sopra l'ala, p_2 e $v - \Delta v$ sotto l'ala. Deve essere

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 = p_1 + \frac{1}{2} \rho (v + \Delta v)^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho (v - \Delta v)^2$$

da cui si ricava

$$p_2 - p_1 = 2 \rho v \Delta v$$

e moltiplicando per la superficie alare A si ha la portanza

$$F = 2 A \rho v \Delta v \quad .$$

Anche con una lastra inclinata investita da una corrente fluida si ha un fenomeno di portanza, dovuto al formarsi di vortici sulla faccia posteriore. Tale effetto si verifica nel moto di un aquilone.

Effetto Magnus

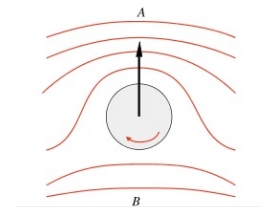


FIGURA 8.33

Portanza di un'ala

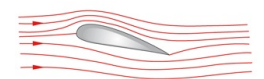


FIGURA 8.34

8.15 Fenomeni di superficie

A livello microscopico i liquidi sono composti di molecole tra cui si esplicano forze, principalmente di origine elettrica, che dipendono fortemente dalla distanza intermolecolare r . Quando r è inferiore a un certo valore r_0 , caratteristico del tipo di molecole, la forza tra due molecole è repulsiva e cresce molto rapidamente al diminuire di r . La distanza r_0 corrisponde praticamente a quella per cui le distribuzioni elettroniche delle molecole iniziano a sovrapporsi e la forza repulsiva sostanzialmente si oppone a questa sovrapposizione; essa è detta a corto raggio, perché si manifesta per piccoli valori di r . Per $r > r_0$ la forza intermolecolare diviene attrattiva e decresce in modulo con la distanza, però con un andamento più lento di quello presentato dalla forza repulsiva.

Una rappresentazione schematica dell'energia potenziale $E_p(r)$ e della forza $F(r)$ dell'interazione intermolecolare è mostrata in figura 8.35; per r_0 si è assunto il valore $3 \cdot 10^{-10}$ m, che è tipico di molecole semplici. In ordinata non sono riportate le diverse unità di misura per $E_p(r)$ e $F(r)$ perché il disegno è solo qualitativo, però l'andamento di $F(r)$ è correttamente quello di $-dE_p/dr$.

Una molecola all'interno del liquido viene attratta da tutte le altre molecole che la circondano, in quanto nella situazione normale è $r > r_0$; si hanno però condizioni di completa simmetria e la forza risultante è in media nulla. Invece, per una molecola prossima alla superficie libera non esiste questa simmetria ed essa risente di una forza diretta verso l'interno del liquido.

Questo risultato indica che l'aumento della superficie libera di un liquido non può avvenire spontaneamente. Per portare una molecola dall'interno del liquido alla superficie bisogna compiere un lavoro contro la forza sopra menzionata ovvero per aumentare di dS la superficie libera del liquido è necessario compiere un lavoro dW e si trova che

$$dW = \tau dS ; \quad (8.21)$$

τ si chiama *tensione superficiale del liquido* e dipende dal tipo di liquido, dal gas che si trova al di sopra della superficie libera, dal solido o liquido con cui il liquido è a contatto e della temperatura; in particolare τ decresce all'aumentare della temperatura.

Se bisogna compiere un lavoro per aumentare la superficie libera, sarà spontaneo il processo opposto; cioè quello legato alla diminuzione della superficie. La superficie libera del liquido tende a contrarsi, assumendo l'estensione minima possibile, compatibilmente con le forze esterne agenti e con le condizioni in cui il liquido stesso si trova.

Questa circostanza è evidenziata sperimentalmente utilizzando delle pellicole liquide che si possono ottenere estraendo da un liquido, per esempio

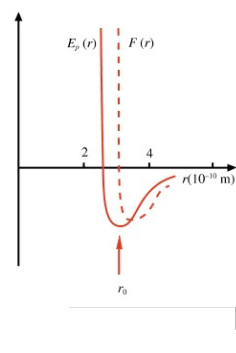
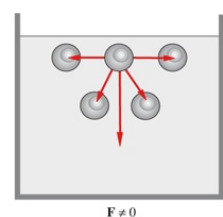
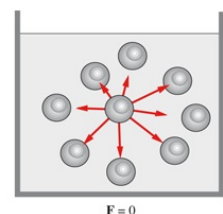


FIGURA 8.35

Tensione superficiale



acqua saponata, un piccolo telaio rettangolare metallico, che fa da supporto alla pellicola. Se il lato AB del telaio è mobile (figura 8.37) si osserva, disponendo il sistema in un piano orizzontale, che il lato AB tende a spostarsi verso il lato opposto CD che è fisso. Ciò indica che lungo il contorno della lamina liquida agiscono delle forze tangenziali ad essa che ne determinano la progressiva contrazione. Lungo i tre lati rigidi del telaio queste forze non sono ovviamente evidenziabili. Un'altra situazione di contrazione è quella di una goccia di liquido che, in assenza di altre forze esterne, tende ad assumere la forma sferica, cioè la forma che a parità di volume ha la minima superficie.

Ritornando al concetto di tensione superficiale ammettiamo, in analogia con la tensione di un filo o la pressione di un fluido, che in ogni punto della superficie di un liquido esista una forza tangenziale di tensione. Se si separa idealmente con un taglio la superficie, lungo il taglio agiscono due forze, dovute agli elementi a destra e a sinistra del taglio; ciascuna è data da

$$dF = \tau ds ; \quad (8.22)$$

se ds è la lunghezza del taglio.

Le due definizioni di tensione superficiale, tramite il lavoro (8.21) per aumentare la superficie libera del liquido o tramite il concetto di forza tangenziale (8.22), sono equivalenti. Infatti se si aumenta la superficie spostando ds della quantità dx (figura 8.38) si compie il lavoro

$$dW = dF dx = \frac{dF}{ds} ds dx = \frac{dF}{ds} dS$$

e quindi, secondo (8.21), $dF/ds = \tau$, che è la (8.22). In conclusione

$$\tau = \frac{dW}{dS} = \frac{dF}{ds} .$$

In tabella 8.2 sono riportati i valori della tensione superficiale per vari liquidi nella situazione in cui al di sopra del liquido vi sia aria o un altro fluido. Sono anche riportati valori di τ a diverse temperature per evidenziare la dipendenza della tensione superficiale dalla temperatura. Si osservi anche come τ diminuisca se come mezzo a contatto si sostituisce all'aria un liquido non miscibile. L'unità di misura della tensione superficiale è il N/m ($= J/m^2$).

Uno strumento usato per la misura di τ è lo *stalagmometro*, che si basa sulla caduta di gocce da un tubicino. La goccia in uscita dal tubicino è trattenuta dalla tensione superficiale agente lungo la linea $l = 2\pi r$, se r è il raggio del tubicino (figura 8.39); ricordando che la tensione superficiale è una forza per unità di lunghezza, la forza totale vale $l\tau = 2\pi r\tau$ ed è verticale. Il distacco della goccia avviene quando essa ha raggiunto una dimensione tale che il suo peso eguagli la forza dovuta alla tensione superficiale, cioè quando $mg = 2\pi r\tau$; questa relazione consente la misura di τ .

FIGURA 8.36

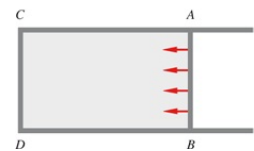


FIGURA 8.37

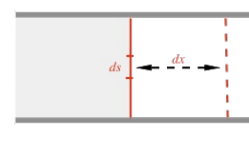


FIGURA 8.38

Tabella 8.2 Tensione superficiale

Liquido	Mezzo a contatto	T (°C)	τ (N/m)
alcool etilico	aria	0	$23.5 \cdot 10^{-3}$
alcool etilico	aria	20	$22.3 \cdot 10^{-3}$
alcool etilico	aria	70	$17.3 \cdot 10^{-3}$
acqua	aria	20	$75.6 \cdot 10^{-3}$
acqua	aria	90	$62.9 \cdot 10^{-3}$
acqua	benzene	20	$35.0 \cdot 10^{-3}$
acqua	etere etilico	20	$20.7 \cdot 10^{-3}$
benzene	aria	20	$28.9 \cdot 10^{-3}$
etere etilico	aria	20	$16.8 \cdot 10^{-3}$
glicerina	aria	20	$65.0 \cdot 10^{-3}$
mercurio	aria	20	$52.0 \cdot 10^{-2}$
mercurio	acqua	20	$37.5 \cdot 10^{-2}$
mercurio	benzene	20	$35.7 \cdot 10^{-2}$
olio d'oliva	aria	20	$34.0 \cdot 10^{-3}$

Stalagmometro

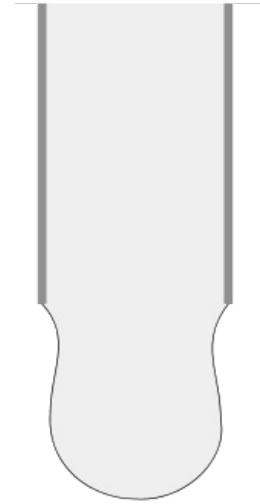


FIGURA 8.39

Studiamo ora il caso di una superficie libera non piana. Le forze molecolari, che danno origine alla tensione superficiale, determinano una forza di pressione sull'elemento dS di superficie, diretta verso il centro di curvatura della superficie stessa.

Consideriamo una lamina liquida sferica di raggio R , per esempio una bolla di sapone. La tensione superficiale agente sulla lamina tende a farla contrarre: per l'equilibrio deve agire all'interno della bolla una pressione p_i del gas contenuto maggiore della pressione esterna p_o . Vogliamo calcolare $p_i - p_o$ in funzione di τ .

Per un aumento dR del raggio R della bolla il lavoro della forza di pressione è

$$dW = (p_i - p_o) S dR = (p_i - p_o) dV = 4 \pi (p_i - p_o) R^2 dR$$

essendo dV la variazione di volume della bolla. A questo aumento si oppone la tensione superficiale, con un lavoro

$$dW_\tau = -2 \tau dS = -2 \tau d(4 \pi R^2) = -16 \pi \tau R dR ,$$

dove il fattore 2 compare perché la bolla ha due facce. La condizione di equilibrio corrisponde a lavoro totale nullo e da $dW + dW_\tau = 0$ si ottiene

$$p_i - p_o = \frac{4 \tau}{R} .$$

L'eccesso di pressione interna rispetto a quella esterna, necessario per mantenere la bolla in equilibrio, è direttamente proporzionale alla tensione superficiale e inversamente al raggio della bolla.

Nel caso di una superficie sferica che delimita una massa liquida (figura 8.40) la pressione dovuta all'azione della tensione superficiale, tenuto conto che c'è una sola superficie invece delle due della bolla, è

$$p_r = \frac{2\tau}{R} .$$

(8.23)

Questo cioè è l'eccesso di pressione che c'è nella parte interna rispetto a quella esterna a causa della curvatura, positivo nel caso *a*, negativo nel caso *b*.

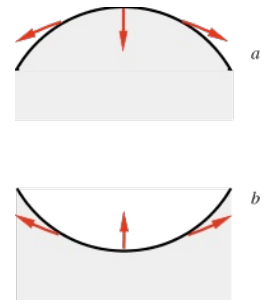


FIGURA 8.40

8.16 Forze di coesione e adesione. Fenomeni di capillarità

Abbiamo visto nel paragrafo 8.15 che tra le molecole di un liquido esiste un'interazione le cui proprietà in funzione della distanza sono rappresentate nella figura 8.34. Nella situazione ordinaria la distanza intermolecolare è tale che le molecole sono praticamente a contatto e quindi si capisce perché i liquidi siano in sostanza incompressibili: se si cerca di fare avvicinare le molecole si sviluppano forze repulsive molto elevate. D'altra parte anche l'allontanamento delle molecole, cioè la separazione di parti di liquido, richiede una forza per vincere l'attrazione molecolare.

Si parla pertanto di *forze di coesione in un liquido*, forze che essendo debolmente attrattive riescono a tenere legate le molecole, ma non riescono a mantenerle in posizione fissa, come avviene invece nei solidi: un liquido perciò ha volume proprio, ma potendo le sue parti scorrere con estrema facilità le une rispetto alle altre non ha forma propria. Sulla superficie libera le forze di coesione danno luogo ai fenomeni di tensione superficiale che, per così dire, tengono il liquido in compressione anche in assenza di forze esterne.

Forze di coesione

La presenza di un mezzo a contatto con la superficie libera modifica, sempre per via di interazioni molecolari, le proprietà di tensione superficiale, poco se si tratta di un gas e in modo notevole se si tratta di un altro liquido non miscibile, come abbiamo notato commentando i dati della tabella 8.2.

Una situazione ancora diversa si ha in presenza di un ulteriore mezzo, che può essere la parete solida del contenitore. La massa di liquido dello strato superficiale in prossimità della parete è soggetta, trascurando la presenza del gas, a due forze: F_{coes} , dovuta alle forze di coesione del liquido, e F_{ades} , dovuta alle *forze di adesione*, cioè alle forze tra le molecole del solido e quelle del liquido. F_{coes} è diretta verso l'interno del liquido, F_{ades} verso l'interno del solido. In condizioni di equilibrio la superficie libera del liquido è ortogonale alla risultante delle forze agenti (se ci fosse una componente tangente non potrebbe esserci equilibrio); si possono allora avere i due casi rappresentati in figura 8.41, che mostra, in sezione, la zona di contatto liquido-solido.

a) *L'adesione predomina sulla coesione, la superficie libera a contatto con la parete è incurvata verso l'alto e si dice che il liquido bagna la parete.*

Forze di adesione

b) *La coesione predomina sull'adesione, la superficie è incurvata verso il basso, il liquido non bagna la parete.*

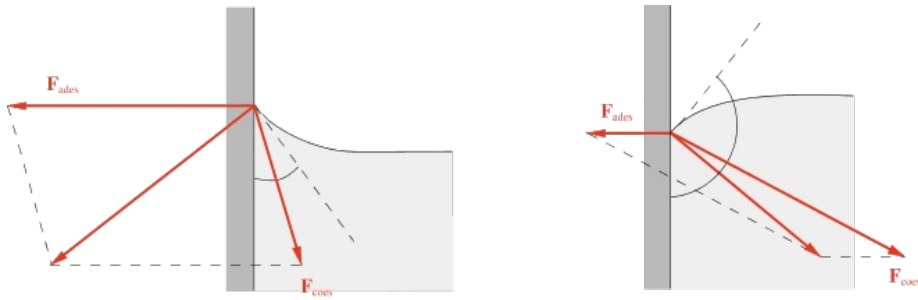


FIGURA 8.41

L'angolo di contatto α , formato dalla parete con la tangente alla superficie libera nel punto di contatto, risulta acuto nel primo caso e ottuso nel secondo.

Ragioni di simmetria geometrica fanno prevedere che \mathbf{F}_{ades} sia sempre ortogonale alla parete e che \mathbf{F}_{coes} sia diretta lungo la bisettrice dell'angolo α ; nel caso limite $\alpha = \pi / 2$ che separa i liquidi che bagnano la parete da quelli che non la bagnano, la risultante è parallela alla parete, \mathbf{F}_{coes} forma un angolo di 45° con la parete e si trova subito che $\mathbf{F}_{coes} = 2 \mathbf{F}_{ades}$. Questa relazione chiarisce che:

- | | | |
|------------|-----------|--|
| il caso a) | si ha per | $\mathbf{F}_{coes} < \sqrt{2} \mathbf{F}_{ades}$, |
| il caso b) | per | $\mathbf{F}_{coes} > \sqrt{2} \mathbf{F}_{ades}$. |

Angolo di contatto

Capillarità

Un'altra classe di fenomeni legati alla tensione superficiale sono i *fenomeni di capillarità*, che si manifestano quando il liquido è in parte limitato da pareti solide molto prossime tra loro, come avviene per un liquido contenuto in un tubicino a sezione interna molto piccola, detto *tubo capillare* (raggio dell'ordine di 0.5 mm).

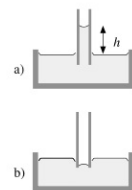


FIGURA 8.42

Immaginiamo per esempio un tubo capillare di vetro in un recipiente pieno di liquido; in contrasto col principio dei vasi comunicanti (paragrafo 8.3) si osserva che il livello della superficie libera del liquido nel capillare è diverso da quello nel resto del recipiente e precisamente è *maggiore se il liquido bagna le pareti* (come fa l'acqua), mentre è *minore se il liquido non bagna le pareti* (come fa il mercurio); la situazione è mostrata in figura 8.42.

Il fenomeno si spiega osservando che la superficie libera nel capillare è approssimativamente sferica, con la concavità verso l'alto per liquidi come l'acqua (menisco concavo, figura 8.42a) e verso il basso per liquidi come il mercurio (menisco convesso, figura 8.42b). Siamo allora nelle condizioni di validità di (8.23), cioè la pressione agente sulla superficie libera nel capillare è la pressione atmosferica p_0 più il contributo $2\tau/R$. Questo termine si somma a p_0 nel caso di *menisco convesso*, che è il caso della figura 8.40a: la pressione effettiva è maggiore nel capillare e il livello è più basso. Invece per il *menisco concavo* il termine dovuto alla tensione superficiale è opposto a p_0 (figura 8.40b), la pressione effettiva è minore, il livello si alza.

Se h è il dislivello dovuto al fenomeno di capillarità, ad essa corrisponde la

pressione ρgh e quindi deve essere

$$\frac{2\tau}{R} = \rho gh .$$

Il raggio di curvatura R del menisco è legato al raggio R' del capillare dalla relazione $R' = R \cos \alpha$ dove α è l'angolo di contatto (in figura 8.43 sono mostrati i due casi possibili). La relazione precedente diventa

$$h = \frac{2\tau \cos \alpha}{\rho g R'} .$$

In particolari condizioni, in cui il liquido bagna completamente il capillare, $\alpha = 0$ e

$$h = \frac{2\tau}{\rho g R'} .$$

Questa relazione è detta *legge di Jurin*; si vede come dalla misura dei dislivelli capillari si possa determinare il valore della tensione superficiale.

Con un capillare di raggio $R' = 0.5 \text{ mm}$ in acqua ($\tau = 75.6 \cdot 10^{-3} \text{ N/m}$) si ha un innalzamento di circa 31 mm. L'effetto è tanto maggiore quanto minore è il raggio.

L'acqua sale per capillarità attraverso corpi porosi, come la terracotta e speciali tipi di carta o la terra non arata, che inaridisce perché una volta in superficie l'acqua evapora. La circolazione della linfa nelle piante è in parte dovuta a fenomeni di capillarità.

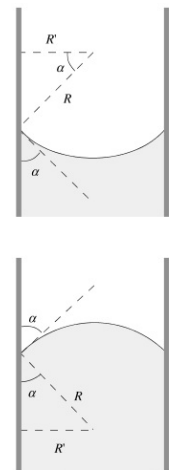


FIGURA 8.43

9.1 Richiamo delle proprietà già viste

La prima parte di questo capitolo è dedicata all'approfondimento delle proprietà di un sistema che obbedisce all'equazione (1.16) e allo studio di alcune situazioni, interessanti nella pratica, che si ottengono modificando la (1.16) per tener conto di forze di attrito e di forze periodiche. Un tale sistema si chiama *oscillatore armonico (semplice)* e il suo stato dinamico è individuato da una coordinata x che varia con legge armonica; gli esempi che abbiamo già esaminato sono: il moto di un punto materiale lungo un segmento sotto l'azione di una forza elastica, il pendolo semplice, in cui la coordinata che soddisfa (1.16) è l'angolo o la posizione lungo un arco di circonferenza, il pendolo composto e il pendolo di torsione.

L'importanza dello studio dell'oscillatore armonico dipende da vari fatti. Innanzitutto fenomeni oscillatori regolati da (1.16) si verificano spesso in Fisica: oltre agli esempi elementari dianzi citati si trovano oscillazioni armoniche nei corpi solidi elastici e nei fluidi, in circuiti elettrici e in vari fenomeni elettromagnetici, nei plasmi (e questi fenomeni oscillatori possono dare origine a propagazione di onde, elastiche o elettromagnetiche). Essendo eguale l'equazione, eguali sono le proprietà generali e pertanto quanto diremo adesso, limitandoci ai casi meccanici finora esaminati, può essere applicato a diverse situazioni di oscillazioni armoniche. In secondo luogo, vedremo che sussiste un notevolissimo teorema, il *teorema di Fourier*: esso mostra come in sostanza l'oscillazione armonica sia il prototipo di qualsiasi fenomeno periodico.

La cinematica dell'oscillatore armonico è data da (1.11), (1.13), (1.14). A , Φ , ω sono parametri indipendenti tra loro: A e Φ sono determinati soltanto dalle condizioni iniziali, cioè da dove parte il punto nell'istante iniziale e con che velocità, ω invece è determinato soltanto dalla dinamica, come diremo subito. Il moto è periodico con periodo $T = 2\pi / \omega$, indipendente dall'ampiezza; la velocità è massima nel centro di oscillazione, dove vale ωA , e nulla negli estremi; l'accelerazione è nulla al centro e massima negli estremi, dove vale $\omega^2 A$.

La forza che dà origine all'oscillazione armonica è di tipo elastico, proporzionale allo spostamento dalla posizione di equilibrio con segno negativo, come visto nel paragrafo 2.10; inserendo $F = -kx$ nella (2.1) si trova (1.16) con

$$\omega^2 = \frac{k}{m} . \quad (9.1)$$

Notiamo così che la pulsazione e quindi il periodo del moto armonico sono determinati dal valore della massa del punto materiale e dalle caratteristiche

della forza elastica, cioè da condizioni dinamiche, dalle quali invece non dipendono l'ampiezza A e la fase iniziale Φ .

Nel caso del punto attaccato a una molla, è questa che sviluppa una forza di richiamo proporzionale allo spostamento dalla posizione di equilibrio; nel caso del pendolo semplice è la componente tangente della forza peso che risulta proporzionale allo spostamento angolare dalla verticale, purché tale spostamento sia piccolo. In realtà anche il comportamento della molla è lineare (forza sviluppata proporzionale alla deformazione) solo se la deformazione non è troppo grande.

Ci rendiamo allora conto di un altro fatto molto importante nella pratica e vero in generale: la soluzione tipo oscillatore armonico si ottiene, per un sistema che può oscillare, entro quei limiti, spesso ristretti, nei quali la forza di richiamo è lineare nello spostamento ovvero quando, in un sviluppo in serie, i termini di ordine superiore al primo sono trascurabili e di conseguenza *il problema è linearizzato*. È quanto avviene per un sistema che si allontani di poco da una posizione di equilibrio stabile.

9.2 Proprietà dell'equazione differenziale dell'oscillatore armonico

L'equazione differenziale dell'oscillatore armonico

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega^2 x(t) = 0 \quad (1.16)$$

Equazione dell'oscillatore armonico

è un'equazione del *secondo ordine* (vi compare la derivata seconda della funzione) *lineare* (la funzione compare ovunque solo alla prima potenza e anche la derivata è alla prima potenza), a *coefficienti costanti* (sono 1 e ω^2), *omogenea*, cioè con termine noto nullo.

Si verifica subito che se $x(t)$ è soluzione dell'equazione, lo è anche $ax(t)$ con a costante; inoltre se $y(t)$ è un'altra soluzione, anche $z(t) = x(t) + y(t)$ è soluzione di (1.16). Infatti

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2} (x+y) = \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 x - \omega^2 y = -\omega^2 (x+y) = -\omega^2 z$$

e si vede che la proprietà è vera solo perché l'equazione è lineare.

Si dimostra che un'equazione come (1.16) ammette due sole soluzioni indipendenti e che qualsiasi altra soluzione si esprime come combinazione lineare di tali due soluzioni che, nel campo reale, sono le funzioni $\sin \omega t$ e $\cos \omega t$. La soluzione più generale è allora

$$x(t) = a \sin \omega t + b \cos \omega t$$

che può essere scritta nei due modi

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi) \quad \text{con} \quad a = A \cos \phi, \quad b = A \sin \phi, \quad (9.2)$$

$$x(t) = B \cos(\omega t + \psi) \quad \text{con} \quad a = -B \sin \psi, \quad b = B \cos \psi,$$

ricorrendo alle formule

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta, \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta. \end{aligned}$$

Da (9.2) si ricava

$$A = \sqrt{a^2 + b^2} = B, \quad \text{tg } \phi = \frac{b}{a}, \quad \text{tg } \psi = -\frac{a}{b}.$$

Si noti che compaiono sempre due costanti di integrazione.

L'equazione non omogenea che corrisponde a (1.16) è

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega^2 x(t) = f(t), \quad (9.3)$$

dove $f(t)$ è una generica funzione del tempo che in particolare può essere costante. Se si trova una qualsiasi soluzione particolare $x_p(t)$ dell'equazione non omogenea, si dimostra che la soluzione più generale di (9.3) è

$$x(t) = a \sin \omega t + b \cos \omega t + x_p(t) . \quad (9.4)$$

Se con una certa $f_1(t)$ si ha la soluzione $x_1(t)$ e con una certa $f_2(t)$ si ha la soluzione $x_2(t)$, allora se il termine noto è $f_1(t) + f_2(t)$ la soluzione è $x_1(t) + x_2(t)$.

Infatti

$$\frac{d^2}{dt^2} (x_1 + x_2) + \omega^2 (x_1 + x_2) = \frac{d^2 x_1}{dt^2} + \omega^2 x_1 + \frac{d^2 x_2}{dt^2} + \omega^2 x_2 = f_1 + f_2 .$$

Questo risultato, che è conseguenza della linearità dell'equazione, si chiama *principio di sovrapposizione*: se in una determinata situazione si ha una certa soluzione e in una diversa situazione si ha un'altra soluzione, al verificarsi contemporaneo delle due soluzioni si ha come soluzione la somma delle soluzioni (purché la contemporaneità non alteri in qualche modo le situazioni preesistenti).

Considerazioni analoghe valgono per l'equazione

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + C \frac{dx(t)}{dt} + \omega^2 x = 0$$

con C costante e per la corrispondente equazione non omogenea, a parte il fatto che le soluzioni non sono del tipo $\sin \omega t$ e $\cos \omega t$.

Esempio 9.1

Un punto materiale di massa m è appeso a una molla di costante elastica k . Detta $x = 0$ la posizione dell'estremo della molla col punto staccato, la posizione di equilibrio statico è

$$x = x_s = \frac{mg}{k} , \quad (9.5)$$

come si ricava dall'eguaglianza tra la forza peso e la forza elastica. Si tira il punto fino alla posizione $x = 2x_s$ e lo si abbandona al tempo $t = 0$ con velocità nulla. Determinare la legge oraria del moto del punto.

Soluzione

La forza agente, in una posizione generica, è $F = mg - kx$ e quindi l'equazione del moto è

$$ma = m \frac{d^2 x}{dt^2} = mg - kx \quad (9.6)$$

ovvero, posto al solito $\omega^2 = k/m$,

Principio di sovrapposizione

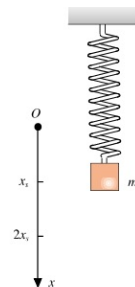


FIGURA 9.1

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = g \quad (9.7)$$

È l'equazione non omogenea tipo (9.3), con il termine noto costante; una soluzione particolare è $x_p = x_s = mg/k$, come si verifica subito inserendola nell'equazione (9.7).

La soluzione generale è allora

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi) + \frac{mg}{k} \quad (9.8)$$

e dalle condizioni iniziali abbiamo

$$x(0) = \frac{2mg}{k} = A \sin \phi + \frac{mg}{k}, \quad v(0) = 0 = \omega A \cos \phi$$

da cui ricaviamo

$$A = \frac{mg}{k}, \quad \phi = \frac{\pi}{2}.$$

Il risultato finale è

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{mg}{k} (1 + \cos \omega t) \Rightarrow x - x_s = x_s \cos \omega t \\ v(t) &= -\frac{m\omega g}{k} \sin \omega t, \\ a(t) &= -g \cos \omega t = -\omega^2 (x - x_s). \end{aligned} \quad (9.9)$$

Il punto descrive attorno alla posizione di equilibrio statico una oscillazione armonica di ampiezza x_s ; al variare delle condizioni iniziali variano A e ϕ , ma non ω .

Visualizza Soluzione

Esempio 9.2

Nell'esempio 1.2 si è considerato un punto materiale sottoposto ad una accelerazione $a(x) = -Ax - B$. Calcolare la posizione e la velocità del punto in funzione del tempo, ricordando che nell'istante $t = 0$ il punto passa nell'origine con velocità v_0 .

Soluzione

L'equazione differenziale del moto è

$$\frac{d^2x}{dt^2} + Ax = -B,$$

analoga a (9.7). Una soluzione particolare è $x = -B/A$ e quindi la soluzione generale risulta

$$x = C \operatorname{sen}(\sqrt{A} t + \phi) - \frac{B}{A} .$$

La velocità del punto è

$$v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{A} C \cos(\sqrt{A} t + \phi) .$$

Per $t = 0$, $x(0) = C \operatorname{sen}\Phi - B/A = 0$, $v(0) = A C \cos\Phi = v_0$ e da queste si ricava

$$C = \frac{1}{A} \sqrt{B^2 + Av_0^2} , \quad \operatorname{tg}\phi = \frac{B}{v_0 \sqrt{A}} .$$

Da questo esempio e da quello precedente, sostanzialmente eguali, vediamo che l'effetto di una forza costante parallela alla forza elastica è soltanto quello di spostare il centro di oscillazione.

Visualizza Soluzione

9.3 Energia dell'oscillatore armonico

Riferiamoci al punto che oscilla sotto l'azione di una forza elastica, che, come abbiamo visto nel paragrafo 2.17, è una forza conservativa; durante il moto l'energia totale deve restare costante ed è facile verificarlo direttamente:

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \phi) \quad , \\ E_p &= \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k A^2 \sin^2(\omega t + \phi) \quad , \end{aligned} \quad (9.10)$$

e inserendo (9.1) nelle (9.10) si trova che in qualsiasi istante

$$E_{\text{mecc}} = E_k + E_p = \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 = \text{costante} \quad . \quad (9.11)$$

Il termine $\frac{1}{2} k A^2$ è il valore massimo dell'energia potenziale, assunto negli estremi dove l'energia cinetica è nulla; invece il termine $\frac{1}{2} m \omega^2 A^2$ è il valore massimo dell'energia cinetica, assunto nel centro di oscillazione dove l'energia potenziale è nulla. Quindi

$$E_{\text{mecc}} = E_{p, \text{max}} = E_{k, \text{max}} \quad .$$

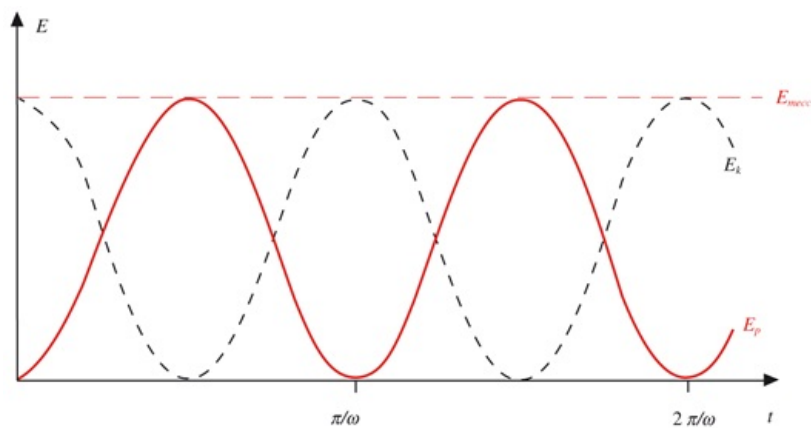


FIGURA 9.2

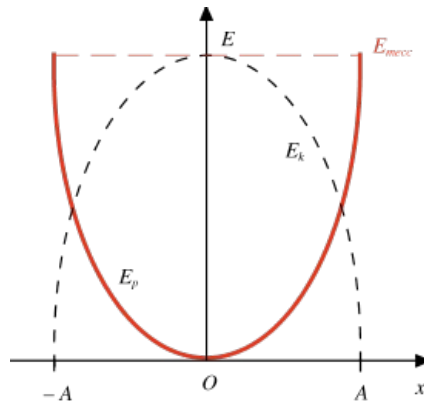


FIGURA 9.3

In una posizione generica

$$E_{mecc} = \frac{1}{2} m v^2(x) + \frac{1}{2} k x^2 \quad .$$

L'andamento dei termini in funzione della posizione è mostrato in figura 9.3; si noti come in sostanza lo stesso risultato fosse visibile in (1.15). Invece nella figura 9.2 è mostrato l'andamento in funzione del tempo; in ogni caso si vede che c'è un continuo scambio tra le due forme di energia, come già messo in evidenza nell'esempio 2.27.

Osserviamo che imponendo la conservazione dell'energia si ottiene l'equazione differenziale del moto. Differenziando $\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2 = \text{costante}$ si ottiene

$$m v dv + k x dx = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dx} = -\frac{k}{m} \frac{x}{v} \quad .$$

Da (1.7) in forma differenziale, $adx = vdv$, si ha

$$\frac{dv}{dx} = \frac{a}{v} \quad .$$

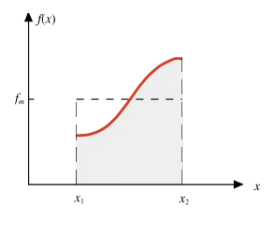
Eguagliando queste due espressioni e tenendo conto di (9.1) si ottiene

$$a = -\frac{k}{m} x = -\omega^2 x \quad .$$

In un moto periodico, in cui le varie grandezze caratteristiche sono funzioni del tempo, può essere interessante calcolare i valori medi in un periodo. Prima di far questo per l'oscillatore armonico, premettiamo alcune nozioni generali.

Nota sui valori medi

Il *valore medio* di una funzione definita nell'intervallo x_1, x_2 è dato da



$$f_m = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx ;$$

l'interpretazione geometrica è immediata: l'integrale rappresenta il valore dell'area sotto la curva e quindi $(x_2 - x_1) f_m = \text{area}$, ovvero il valor medio f_m è l'altezza del rettangolo di base $x_2 - x_1$ che ha area eguale a quella compresa tra la curva e l'asse delle ascisse. Nel caso della funzione seno, la media su un periodo è nulla:

$$(\text{sen}\theta)_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \text{sen } \theta d\theta = \frac{1}{2\pi} [-\cos \theta]_0^{2\pi} = 0.$$

Lo stesso si ottiene per $(\cos \theta)_m$; quindi seno e coseno hanno valore medio nullo in un periodo e del resto si tratta di un risultato evidente se si considerano i grafici delle funzioni: in un semiperiodo l'area sotto la curva è S , nel semiperiodo successivo è $-S$, il totale è zero.

Diversa la situazione per $\text{sen}^2 \theta$ e $\text{cos}^2 \theta$, funzioni periodiche con periodo π , che essendo sempre positive non possono avere valor medio nullo. Osserviamo che

$$\int_0^{\pi} (\text{sen}^2 \theta + \text{cos}^2 \theta) d\theta = \int_0^{\pi} d\theta = \pi$$

e che pertanto

$$\int_0^{\pi} \text{sen}^2 \theta d\theta = \int_0^{\pi} \text{cos}^2 \theta d\theta = \frac{\pi}{2} ,$$

in quanto è sempre la stessa funzione, a parte lo sfasamento. Quindi

$$(\text{sen}^2 \theta)_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \text{sen}^2 \theta d\theta = (\text{cos}^2 \theta)_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \text{cos}^2 \theta d\theta = \frac{1}{2} . \quad (9.12)$$

Ritorniamo all'oscillatore armonico. I valori medi di posizione, velocità, accelerazione in un periodo, dati da formule tipo (1.3), sono tutti nulli: mediamente in un periodo il punto è fermo nell'origine e questo corrisponde al fatto che un moto regolare tra $+A$ e $-A$ può globalmente essere equiparato a uno stato di quiete (ma ciò dice anche quanta poca informazione diano in questo caso i valori medi sui valori istantanei). Invece non è nullo il valor medio delle due forme di energia:

$$\begin{aligned} (E_k)_m &= \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 [\cos^2(\omega t + \phi)]_m = \frac{1}{4} m \omega^2 A^2 = \frac{1}{2} E_{\text{mecc}} , \\ (E_p)_m &= \frac{1}{2} k A^2 [\text{sen}^2(\omega t + \phi)]_m = \frac{1}{4} k A^2 = \frac{1}{2} E_{\text{mecc}} , \end{aligned} \quad (9.13)$$

avendo tenuto conto di (9.12). I valori medi dell'energia cinetica e dell'energia potenziale sono eguali; quindi in media l'energia è per metà cinetica e per metà potenziale.

Esempio 9.3

Con riferimento all'esempio 9.1 calcolare le varie forme di energia e i loro valori medi.

Soluzione

Osserviamo prima che, per come è stato scelto il sistema di riferimento, quando il punto è in $x = 0$ l'energia potenziale elastica è nulla perché la molla non è tesa, l'energia potenziale della forza peso, pari a $-mgx$ vista l'orientazione dell'asse verticale, è nulla e l'energia cinetica è nulla perché l'origine è un estremo dell'oscillazione. Quindi $E_{\text{mecc}} = 0$. I singoli termini e i loro valori medi valgono:

$$E_{p,\text{el}} = \frac{1}{2} k x_s^2 (1 + \cos\omega t)^2 \Rightarrow (E_{p,\text{el}})_m = \frac{3}{4} k x_s^2 = \frac{3}{4} mgx_s \quad ,$$

$$E_{p,\text{peso}} = -mgx_s(1 + \cos\omega t) \Rightarrow (E_{p,\text{peso}})_m = -k x_s^2 = -mgx_s \quad ,$$

$$E_k = \frac{1}{2} m \omega^2 x_s^2 \sin^2\omega t \Rightarrow (E_k)_m = \frac{1}{4} k x_s^2 = \frac{1}{4} mgx_s \quad .$$

Un grafico qualitativo delle tre forme di energia è mostrato in figura 9.5. Si noti la differenza, rispetto alla figura 9.2, di $E_{p,\text{el}}$: in effetti adesso agisce la forza peso che sposta il centro di oscillazione da $x = 0$ a $x = x_s$ e la molla risulta sempre tesa durante il moto. L'energia totale è ancora, in media, per metà cinetica e per metà potenziale (i due termini sono in questo caso di segno opposto, ma eguali in valore assoluto).

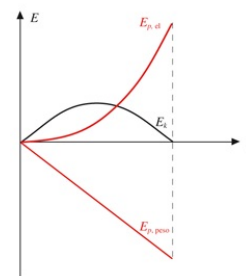


FIGURA 9.5

(Esempio 9.3)

Visualizza Soluzione

Nota sull'equilibrio

Il centro di oscillazione di un punto che, sottoposto ad una forza elastica, si muove di moto armonico è una posizione di equilibrio stabile: per un qualsiasi spostamento rispetto al centro la forza tende a riportare il punto verso il centro. *Nella posizione di equilibrio stabile l'energia potenziale è minima* (figura 9.3, andamento parabolico con concavità verso l'alto).

Una situazione qualitativamente simile si ha quando l'energia potenziale ha una struttura come quella mostrata in figura 8.35, che vale anche per l'interazione tra i due atomi di una molecola biatomica. L'energia potenziale presenta un minimo in corrispondenza della distanza r_0 di equilibrio; per un piccolo spostamento la curva può essere approssimata con una parabola (ovvero la forza attrattiva varia linearmente con la distanza) e il sistema compie oscillazioni armoniche. Se lo spostamento non è piccolo la curva non è più parabolica (non è nemmeno simmetrica) e si può avere

ancora un moto oscillatorio, però non armonico.

L'argomento si estende a tutti i casi in cui l'energia potenziale ha un minimo e si conclude che piccoli spostamenti rispetto ad una posizione di equilibrio stabile danno luogo ad oscillazioni armoniche (come affermato alla fine del paragrafo 9.1). Se la forza fosse kx (cioè opposta alla forza elastica), l'energia potenziale varrebbe $-kx^2/2$, massima nell'origine e parabolica con la concavità verso il basso. L'origine sarebbe una posizione di equilibrio instabile: per qualsiasi spostamento, anche piccolo, la forza tenderebbe ad allontanare il punto indefinitamente.

9.4 Somma di moti armonici sullo stesso asse

Supponiamo di avere due punti, ciascuno sottoposto ad una forza elastica diretta lungo l'asse x , e che quindi si muovono entrambi di moto armonico sull'asse x . Vogliamo determinare ad esempio il moto del punto di mezzo del segmento che congiunge i due punti, di coordinata $(x_1 + x_2)/2$, o del centro di massa dei due punti, oppure ci interessa la posizione relativa del primo punto rispetto al secondo, data da $x_1 - x_2$. In casi di questo tipo ci troviamo di fronte al problema di sommare o sottrarre o più in generale di combinare linearmente due moti armonici.

A. Forze eguali

Per primo consideriamo il caso in cui le costanti elastiche siano eguali così che le leggi orarie si scrivono

$$x_1 = A_1 \sin(\omega t + \phi_1) \quad , \quad x_2 = A_2 \sin(\omega t + \phi_2) \quad .$$

Entrambi i moti obbediscono alla stessa equazione differenziale (1.16): ω è la stessa, solo le condizioni iniziali sono diverse. Sappiamo dal paragrafo 9.2 che $x = x_1 + x_2$ è ancora soluzione: pertanto la somma è un moto armonico con la stessa pulsazione,

$$x = A \sin(\omega t + \psi) \quad ,$$

di cui vogliamo calcolare l'ampiezza A e la fase iniziale ψ .

In ogni istante deve valere l'eguaglianza

$$\begin{aligned} x &= A \sin(\omega t + \psi) = A_1 \sin(\omega t + \phi_1) + A_2 \sin(\omega t + \phi_2) \\ \Rightarrow A \cos \psi \sin \omega t + A \sin \psi \cos \omega t &= \\ &= (A_1 \cos \phi_1 + A_2 \cos \phi_2) \sin \omega t + (A_1 \sin \phi_1 + A_2 \sin \phi_2) \cos \omega t \end{aligned}$$

e pertanto devono essere eguali i coefficienti di $\sin \omega t$ e $\cos \omega t$:

$$A \cos \psi = A_1 \cos \phi_1 + A_2 \cos \phi_2 \quad , \quad A \sin \psi = A_1 \sin \phi_1 + A_2 \sin \phi_2 \quad .$$

Quadrando e sommando:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2 A_1 A_2 \cos(\phi_1 - \phi_2)} \quad . \quad (9.14)$$

Facendo il rapporto:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{A_1 \sin \phi_1 + A_2 \sin \phi_2}{A_1 \cos \phi_1 + A_2 \cos \phi_2} \quad . \quad (9.15)$$

Un secondo metodo per arrivare a questo risultato è fornito dalla cosiddetta *costruzione di Fresnel*, basata sul fatto che la proiezione di un moto circolare su un diametro è un moto armonico.

Somma di moti armonici con la stessa pulsazione

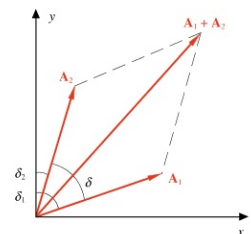


FIGURA 9.6

In figura 9.6 \mathbf{A}_1 è un vettore ruotante nel piano x,y con velocità angolare ω , formante l'angolo $\delta_1 = \omega t + \Phi_1$ con l'asse y e avente proiezione sull'asse x eguale a $A_1 \sin(\omega t + \Phi_1)$. Analogamente \mathbf{A}_2 è un vettore ruotante con velocità angolare ω , formante l'angolo $\delta_2 = \omega t + \Phi_2$ con l'asse y e avente proiezione sull'asse x eguale a $A_2 \sin(\omega t + \Phi_2)$. L'angolo tra i due vettori, ovvero la differenza di fase, è

$$\delta = \delta_1 - \delta_2 = (\omega t + \phi_1) - (\omega t + \phi_2) = \phi_1 - \phi_2$$

ed è costante nel tempo perché i due vettori ruotano con la stessa velocità angolare. Il vettore risultante $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2$ ruota con la stessa ω , forma con l'asse y l'angolo $\omega t + \psi$ e ha modulo, secondo il teorema del coseno (appendice C),

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2 A_1 A_2 \cos(\phi_1 - \phi_2)} \quad .$$

La proiezione di \mathbf{A} sull'asse x è $A \sin(\omega t + \psi)$, eguale alla somma delle proiezioni dei vettori componenti, secondo la nota proprietà. In particolare per $t = 0$

$$A \sin \psi = A_1 \sin \phi_1 + A_2 \sin \phi_2 \quad , \quad A \cos \psi = A_1 \cos \phi_1 + A_2 \cos \phi_2$$

e si riottiene lo stesso risultato del primo metodo anche per la fase ψ . Col metodo di Fresnel la somma dei due moti armonici è ricondotta alla somma di due vettori.

Il risultato più interessante è che *l'ampiezza del moto risultante dipende dalla differenza di fase $\Delta\Phi = \Phi_1 - \Phi_2$* ; essa è

$$\text{massima per } \Delta\phi = 0, 2\pi, 4\pi, \dots \text{ e vale } A_1 + A_2 \quad ,$$

$$\text{minima per } \Delta\phi = \pi, 3\pi, 5\pi, \dots \quad \text{e vale } |A_1 - A_2| \quad .$$

Dati due sinusoidi di eguale periodo, l'ampiezza della somma dipende dalla posizione relativa, ovvero dallo sfasamento, come è mostrato in figura 9.7, nel caso particolare $A_1 = A_2$. Si osservi come in tal caso si ottenga la quiete quando $\Delta\Phi = \pi, 3\pi, \dots$

Quanto descritto trova applicazione anche nello studio della sovrapposizione di onde e precisamente nei *fenomeni di interferenza*.

Costruzione di
Fresnel

Differenza di fase

Interferenza

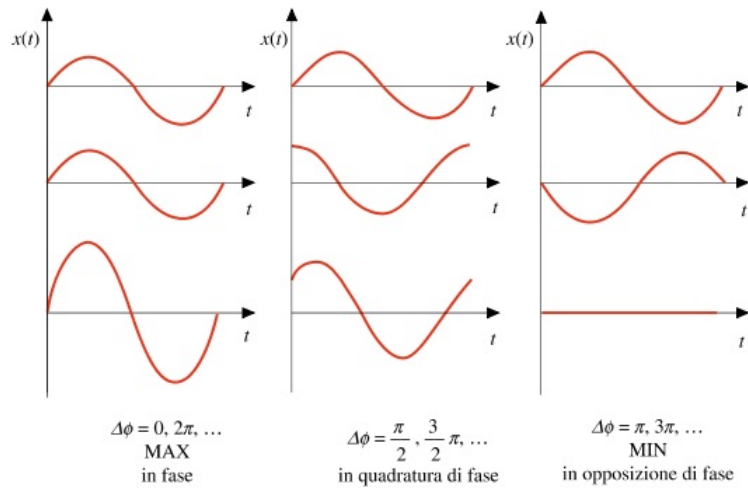


FIGURA 9.7

Se invece della somma $x_1 + x_2$ si vuole la differenza $x_1 - x_2$, nella (9.14) cambia soltanto il segno davanti al terzo termine sotto radice e nella (9.15) cambiano i segni dei secondi termini a numeratore e denominatore. Nella costruzione di Fresnel della figura 9.6 la differenza $\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2$ si ottiene sommando il vettore \mathbf{A}_1 e il vettore $-\mathbf{A}_2$, che coincide col vettore \mathbf{A}_2 ruotato di 180° ; graficamente si tratta dell'altra diagonale nel parallelogramma. Le condizioni di massimo e minimo sono scambiate rispetto al caso della somma.

Anche la combinazione lineare $x = ax_1 + bx_2$ si tratta con i metodi visti, tenendo conto che le ampiezze sono moltiplicate per il dato fattore e che algebricamente si può avere somma o differenza a seconda dei segni di a e b .

B. Forze diverse

Questa volta le pulsazioni dei due moti sono diverse:

$$x_1 = A_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) \quad , \quad x_2 = A_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2) \quad .$$

Le equazioni differenziali sono diverse e $x = x_1 + x_2$ non è soluzione di nessuna delle due. Utilizziamo direttamente la costruzione di Fresnel dove però i due vettori ruotanti hanno velocità angolari diverse per cui l'angolo tra di essi

$$\delta = \delta_1 - \delta_2 = (\omega_1 t + \phi_1) - (\omega_2 t + \phi_2) = (\omega_1 - \omega_2)t + \phi_1 - \phi_2$$

è variabile nel tempo e il vettore risultante ha modulo variabile

$$A(t) = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2 A_1 A_2 \cos [(\omega_1 - \omega_2)t + \phi_1 - \phi_2]} \quad . \quad (9.16)$$

Il moto risultante non è armonico semplice, proprio perché l'ampiezza è funzione del tempo, e si parla di *modulazione di ampiezza*.

Per esempio, se $A_1 = A_2 = A$ e $\phi_1 = \phi_2 = 0$, si ha

$$x = x_1 + x_2 = A \sin \omega_1 t + A \sin \omega_2 t = 2A \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \sin \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t$$

Somma di moti armonici di diversa pulsazione

Modulazione di ampiezza

ovvero

$$x(t) = A(t) \sin \omega t = 2 A \cos \Omega t \sin \omega t ;$$

l'ampiezza $A(t)$ è quella che si ottiene da (9.16) nelle condizioni date. Si tratta di un moto oscillatorio con pulsazione

$$\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$$

e ampiezza modulata con pulsazione

$$\Omega = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} .$$

Il grafico è mostrato in figura 9.8, in cui si vedono le due oscillazioni con pulsazioni ω e $\Omega < \omega$.

Il fenomeno si chiama *battimento* e viene sfruttato ad esempio nelle trasmissioni radiofoniche AM, dove ω è la pulsazione dell'onda elettromagnetica portante ($\sim 10^6$ rad/s) e Ω la pulsazione generata nel microfono dal suono ($\sim 10^3$ rad/s).

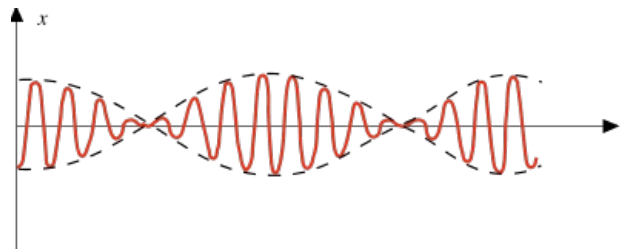


FIGURA 9.8

Battimenti

Esempio 9.4

Un punto materiale di massa $m = 0.1$ kg è sottoposto ad una forza elastica di costante $k = 1.6$ N/m; esso si muove lungo l'asse x e all'istante $t = 0$ si trova nella posizione $x_1(0) = 0.142$ m con velocità $v_1(0) = -0.512$ m/s. Un secondo punto di eguale massa è sottoposto ad una eguale forza elastica e si muove anch'esso lungo l'asse x ; all'istante $t = 0$ si trova nella posizione $x_2(0) = 0.098$ m con velocità $v_2(0) = 0.806$ m/s. Calcolare come varia nel tempo la velocità relativa del secondo punto rispetto al primo (i due punti non si urtano durante il moto, cioè le traiettorie sono parallele e vicinissime, ma non coincidenti).

Soluzione

Le posizioni e le velocità dei due punti si scrivono:

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1 \sin(\omega t + \phi_1) & , & & v_1 &= \omega A_1 \cos(\omega t + \phi_1) & , \\ x_2 &= A_2 \sin(\omega t + \phi_2) & , & & v_2 &= \omega A_2 \cos(\omega t + \phi_2) & , \end{aligned}$$

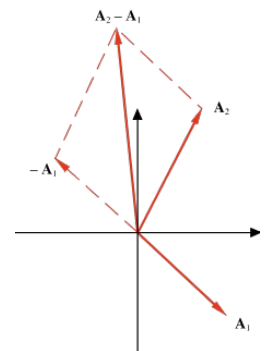


FIGURA 9.9
(Esempio 9.4)

con $\omega = \sqrt{k/m} = 4 \text{ rad/s}$ Le ampiezze sono date da

$$A_1 = \sqrt{x_1^2(0) + \frac{v_1^2(0)}{\omega^2}} = 0.191 \text{ m} ,$$

$$A_2 = \sqrt{x_2^2(0) + \frac{v_2^2(0)}{\omega^2}} = 0.224 \text{ m} ,$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} \cos\phi_1 &= v_1(0)/\omega A_1 = -0.670 , & \phi_1 &= 2.305 \text{ rad} = 132.1^\circ , \\ \cos\phi_2 &= v_2(0)/\omega A_2 = 0.900 , & \phi_2 &= 0.452 \text{ rad} = 25.9^\circ . \end{aligned}$$

Pertanto le posizioni in funzione del tempo sono

$$x_1 = 0.191 \text{ sen}(4t + 2.305) , \quad x_2 = 0.224 \text{ sen}(4t + 0.452) .$$

La differenza $x_2 - x_1$ ha ampiezza e fase date da

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 - 2 A_1 A_2 \cos(\phi_2 - \phi_1)} = 0.332 \text{ m} ,$$

$$\text{tg}\psi = \frac{A_2 \text{ sen}\phi_2 - A_1 \text{ sen}\phi_1}{A_2 \text{ cos}\phi_2 - A_1 \text{ cos}\phi_1} = -0.133 ,$$

$$\Rightarrow \psi = -0.132 \text{ rad} = -7.6^\circ .$$

In conclusione

$$x_2 - x_1 = 0.332 \text{ sen}(4t - 0.132) ,$$

$$v_2 - v_1 = \frac{d}{dt}(x_2 - x_1) = 1.328 \text{ cos}(4t - 0.132) .$$

L'operazione di differenza si poteva eseguire direttamente sulle velocità, ottenute derivando x_1 e x_2 . Nella figura 9.9 è mostrata la costruzione di Fresnel per $x_2 - x_1$.

Visualizza Soluzione

9.5 Somma di moti armonici su assi ortogonali

Passiamo adesso a considerare il caso in cui un punto sia sottoposto a due forze elastiche con direzioni ortogonali, lungo l'asse x e lungo l'asse y . Ci troviamo a trattare la somma di moti armonici rettilinei che danno un moto piano. Facciamo l'ipotesi che le due forze abbiano la stessa costante elastica per cui i due moti hanno la stessa pulsazione:

$$x = A \sin \omega t \quad , \quad y = B \sin (\omega t + \phi) \quad ;$$

Φ è lo sfasamento tra i due moti (per la nomenclatura si veda la figura 9.7).

Se i moti sono in fase, $\Phi = 0$,

$$\frac{x}{y} = \frac{A}{B} \quad .$$

Il punto si muove di moto armonico lungo un segmento di retta tra le posizioni $-A, -B$ e A, B ; tale retta forma con l'asse x l'angolo

$$\theta = \arctg \frac{B}{A} \quad .$$

Se i moti sono in opposizione di fase, $\Phi = \pi$, $x / y = -A/B$ e la situazione è analoga, salvo che θ diventa $-\theta$.

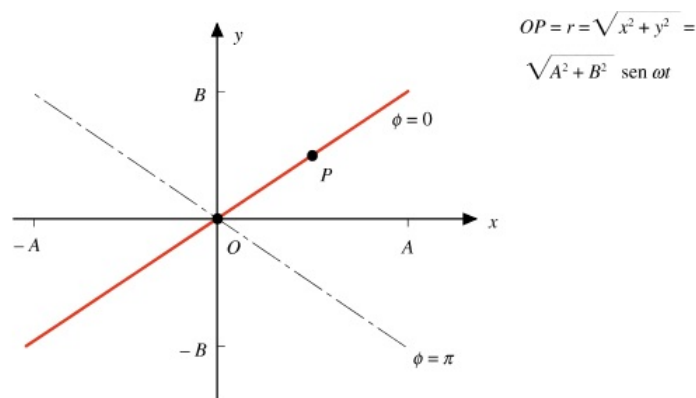


FIGURA 9.10

Quando i moti sono in quadratura di fase, $\phi = \frac{\pi}{2}$,

MathType@MTEF@5@5@+=

feaagKart1ev2aaatCvAUfeBSjuyZL2yd9gzLbvyNv2CaerbuLwBLn
hiov2DGi1BTfMBaeXatLxBI9gBaerbd9wDYLwzYbItLDharqqubsr
4rNCHbGeaGqiVuoJe9sqrpepCoxbbL8F4rqqrFfpeeaOxe9Lq=Jc9
vqaqpepmoxbba9pwe9Q8fso=yqaqpepae9pgoFirpepeKkFroxfr=x
fr=xb9adbaqaeeGaciGaaiaabeqaamaabaabaaGcbaGaeqy1dyMaey
ypaOZaaSaaaeaacqHapaCaeacaaIYaaaiaacYcaaaa@3BFD@

$$x = A \sin \omega t \quad , \quad y = B \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) = B \cos \omega t \quad , \quad \left(\frac{x}{A} \right)^2 + \left(\frac{y}{B} \right)^2 = 1 \quad ,$$

che è l'equazione di una ellisse. Pertanto la traiettoria è un *ellisse*, che risulta percorsa in senso orario. Se $\Phi = 3\pi/2$ si ha lo stesso risultato, solo che il moto è antiorario. In particolare, se $A = B$, la traiettoria è *circolare*.

Infine, se Φ è generico, la traiettoria è sempre un'ellisse, però con gli assi non paralleli agli assi cartesiani (anche se $A = B$).

In conclusione: *la somma di due moti armonici con eguale pulsazione su assi ortogonali dà sempre luogo a un moto piano con traiettoria ellittica; in particolari situazioni l'ellisse degenera in un segmento o in una circonferenza. Questi risultati, applicati opportunamente alle onde elettromagnetiche, vengono utilizzati nello studio dei fenomeni di polarizzazione.*

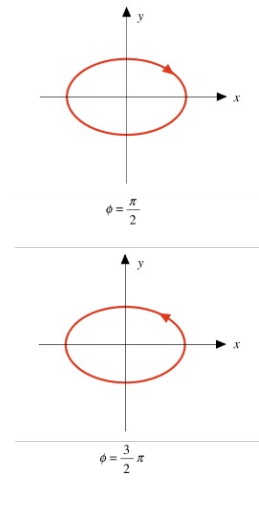


FIGURA 9.11

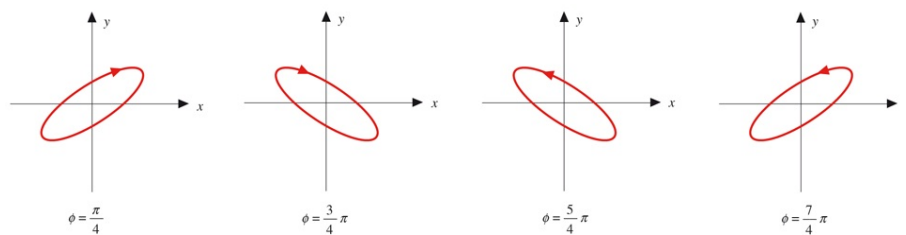


FIGURA 9.12

La forza che dà origine a questo moto ha componenti $F_x = -kx$ e $F_y = -ky$ per cui deve avere l'espressione

$$\mathbf{F} = -kx \mathbf{u}_x - ky \mathbf{u}_y = -k(x \mathbf{u}_x + y \mathbf{u}_y) = -k \mathbf{r} \quad .$$

Si tratta dunque della forza elastica bidimensionale vista nell'esempio 2.32. È una forza centrale e quindi la traiettoria ellittica è percorsa con velocità areale costante, come dimostrato nel paragrafo 2.23. Ne deriva che se in particolare il moto è circolare, esso è anche uniforme.

La forza $\mathbf{F} = -k\mathbf{r}$ è conservativa e la sua energia potenziale è $E_p = 1/2 kr^2$. Calcoliamo il valore dell'energia meccanica E_{mecc} :

$$E_k = \frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2) = \frac{1}{2} m \omega^2 [A^2 \cos^2 \omega t + B^2 \cos^2(\omega t + \phi)] \quad ,$$

$$E_p = \frac{1}{2} kr^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 [A^2 \sin^2 \omega t + B^2 \sin^2(\omega t + \phi)] \quad ,$$

$$E_{\text{mecc}} = E_k + E_p = \frac{1}{2} m \omega^2 (A^2 + B^2) = \frac{1}{2} k (A^2 + B^2) \quad .$$

I termini

$$\frac{1}{2} m \omega^2 A^2 = \frac{1}{2} k A^2 \quad , \quad \frac{1}{2} m \omega^2 B^2 = \frac{1}{2} k B^2$$

sono rispettivamente l'energia meccanica del moto lungo x e del moto lungo y . La loro somma dà E_{mecc} che risulta indipendente dallo sfasamento.

La somma di due moti armonici su assi ortogonali diviene molto più complicata se le pulsazioni dei due moti sono diverse. Diciamo soltanto che il moto risultante è periodico se ω_1/ω_2 è un numero razionale; altrimenti si hanno moti non periodici.

Nota su energia e composizione di moti

Nella composizione di moti ci siamo sempre occupati di posizione, velocità e accelerazione: queste sono grandezze vettoriali e, nella composizione, vale la regola di somma tra vettori. Nel caso dell'energia, che non è un vettore, bisogna fare attenzione, come possiamo vedere per la somma di due moti armonici con eguale pulsazione sullo stesso asse. L'energia totale del moto è $E_{\text{mecc}} = \frac{1}{2} kA^2$ ovvero, secondo (9.14),

$$E_{\text{mecc}} = \frac{1}{2} kA_1^2 + \frac{1}{2} kA_2^2 + k A_1 A_2 \cos(\phi_1 - \phi_2);$$

essa non è eguale alla somma delle energie meccaniche dei due singoli moti componenti. Nel caso particolare (già considerato) che sia $A_1 = A_2$ e $\phi_1 - \phi_2 = \pi$ risulta $E_{\text{mecc}} = 0$ e infatti non si ha moto. Solo se i due moti fossero in quadratura di fase formalmente l'energia meccanica totale sarebbe la somma di quelle dei moti componenti.

Più in generale, se consideriamo l'energia cinetica $E_k = \frac{1}{2} mv^2$ di un punto materiale e pensiamo al moto come somma di due moti lungo assi generici, mentre è sempre $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$, non è detto che sia vera la relazione $v^2 = v_1^2 + v_2^2$:
 feaagKart1ev2aaatCvAUfeBSjuyZL2yd9gzLbvyNv2CaerbuLwBLn
 hiov2DGi1BTfMBaeXatLxBI9gBaerbd9wDYLwzYbItLDharqqtubsr
 4rNCHbGeaGqiVuoJe9sqqrpepCoxbbL8F4rqqrFfpeea0xe9Lq=Jc9
 vqaqpepmoxbba9pwe9Q8fso=yqaqpepae9pg0FirpepeKkFr0xfr=x
 fr=xb9adbaqaeeGaciGaaiaabeqaamaabaabaaGcbaGaamODamaaCa
 aaleqabaGaaGOMaaaakiabg2da9iaadAhadaqhaaWcbaGaaGymaaqa
 aiaaikdaaaGccqGHRaWkcaWG2bWaaobaaSqaiaaikdaaeaaacaaIYa aaaOGaaiOoaaaa@3FDD@
 ciò avviene per esempio se gli assi sono ortogonali tra loro. La procedura più sicura è pertanto quella di considerare il moto effettivo del punto e applicare a questo le formule note per le varie forme di energia.

9.6 Oscillatore armonico smorzato da una forza di attrito costante

Trasformiamo il caso ideale in una situazione più realistica introducendo una forza di attrito costante, come mostrato in figura 9.13 in cui oltre alla forza elastica agisce durante il moto la forza $-\mu mg \mathbf{u}_v$ (μ è il coefficiente di attrito dinamico definito nel paragrafo 2.8). Questa forza, sempre opposta al moto, compie lavoro negativo per cui l'energia dell'oscillatore diminuisce fino a che il punto si ferma.

Supponiamo che per $t = 0$ il punto si trovi nella posizione $x = x_0$, con velocità nulla, essendo $x = 0$ la coordinata della posizione in cui la forza elastica è nulla. Ragioniamo prima in termini di energia e lavoro.

Il punto parte da $x = x_0$, passa per l'origine e si arresta nel punto $x = -x'$. Appliciamo (2.18) tra x_0 e $-x'$, dove $E_k = 0$:

$$W_{el} + W_{att} = 0 \Rightarrow W_{att} = -W_{el} = \Delta E_{p,el} \quad .$$

Quindi

$$\frac{1}{2} k x'^2 - \frac{1}{2} k x_0^2 = \mu mg \mathbf{u}_x \cdot (-x' - x_0) \mathbf{u}_x = -\mu mg(x' + x_0) \quad ,$$

$$x' = x_0 - 2 \frac{\mu mg}{k} = x_0 - 2x_A \quad \text{posto } x_A = \frac{\mu mg}{k} \quad .$$

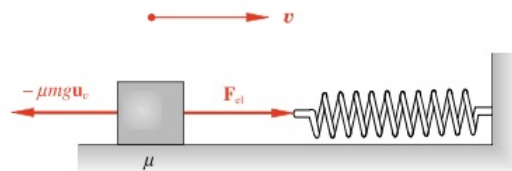


FIGURA9.13

Il punto non si arresta in $x = -x_0$, ma più vicino all'origine di $2x_A$.

Dopo la prima mezza oscillazione il punto riparte da $x = -x'$, ripassa per l'origine e si arresta in $x = x_1$. Riapplicando (2.18) tra $-x'$ e x_1 si ha:

$$\frac{1}{2} k x_1^2 - \frac{1}{2} k x'^2 = -\mu mg \mathbf{u}_x \cdot (x_1 + x') \mathbf{u}_x = -\mu mg(x_1 + x')$$

$$x_1 = x_0 - 4x_A \quad .$$

In definitiva ad ogni oscillazione il punto di arresto si sposta di $4x_A$ verso l'origine: dopo due oscillazioni $x_2 = x_0 - 8x_A$, dopo n oscillazioni $x_n = x_0 - 4n x_A$.

Agli stessi risultati si arriva tramite l'equazione del moto: da $x = x_0$ a $x = -x'$

$$-kx \mathbf{u}_x + \mu mg \mathbf{u}_x = m \mathbf{a} = m \frac{d^2 x}{dt^2} \mathbf{u}_x \Rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = \mu g \quad ,$$

che è la stessa equazione non omogenea (9.7) dell'esempio 9.1. Una soluzione particolare è

$$x = \frac{\mu mg}{k} = x_A$$

e la soluzione generale è

$$x(t) = x_A + a \sin(\omega t + \phi) \quad \text{con} \quad \omega^2 = \frac{k}{m} .$$

Le condizioni iniziali sono $x_0 = x_A + a \sin\Phi$, $0 = \omega a \cos\Phi$ da cui si ricava

$$x(t) = x_A + (x_0 - x_A) \cos \omega t \quad , \quad v(t) = -\omega (x_0 - x_A) \sin \omega t .$$

Il punto si ferma quando $v = 0$, cioè $\omega t = \pi$, e allora x vale $-(x_0 - 2x_A) = -x'$. Da $-x'$ a x_1 l'equazione differenziale è analoga, con il termine noto di segno opposto e le nuove condizioni iniziali, e così via.

Adesso però abbiamo in più l'informazione temporale. Si vede che la velocità si annulla $T \pi$ ad intervalli regolari, pari a $T = \frac{2\pi}{\omega}$,

MathType@MTEF@5@5@+=
 feaagKart1ev2aaatCvAUfeBSjuyZL2yd9gzLbvyNv2CaerbuLwBLn
 hiov2DGi1BTfMBaeXatLxBI9gBaerbd9wDYLwzYbItLDharqqtubsr
 4rNCHbGeaGqiVuoJe9sqqrpepCoxbbL8F4rqqrFfpeea0xe9Lq=Jc9
 vqaqpepmoxbba9pwe9Q8fso=yqaqpepae9pg0FirpepeKkFroxfr=x
 fr=xb9adbaqaeeGaciGaaiaabeqaamaabaabaaGcbaWaaSaaaeaaca
 WGubaabaGaaGOMaaacqGH9aqpdaWcaaqaaiabec8aWbqaaiabeM8a
 3baacaGGSaaaaa@3CEB@ cioè il moto si inverte ad intervalli regolari; quindi ogni 2ω oscillazione (smorzata) del punto si compie nello stesso intervallo di tempo, anche se non con la stessa ampiezza.

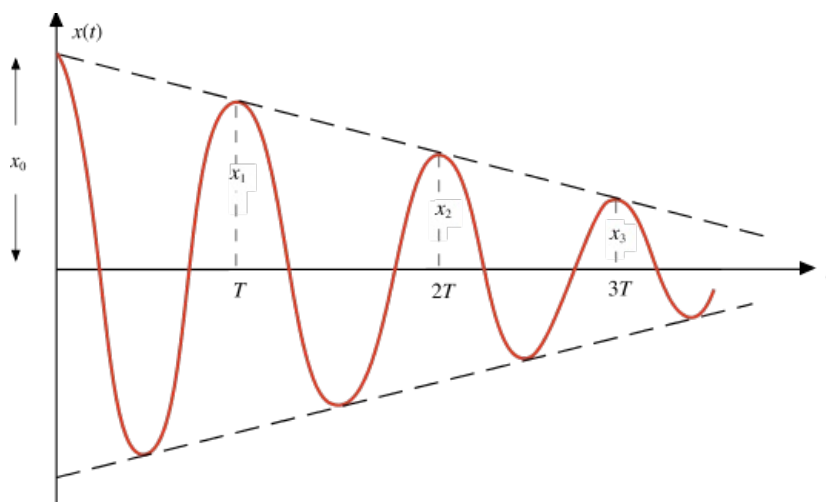


FIGURA 9.14

Il moto non è strettamente periodico: l'intervallo di tempo

Pseudoperiodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

si chiama ora *pseudoperiodo*; esso non dipende da μ .

L'andamento della posizione è mostrato in figura 9.14; la curva è formata da archi di senoide di ampiezza decrescente linearmente: in uno pseudoperiodo l'ampiezza diminuisce di $4 \times 4 = 4 \mu\text{mg} / k$.

Calcoliamo dove si ferma definitivamente il punto. In ogni estremo esso riparte solo se, in modulo, la forza elastica è maggiore della forza di attrito statico:

$$kx_n > \mu_s mg \Rightarrow x_n > \frac{\mu_s mg}{k} = x'_A .$$

Se la condizione è soddisfatta da x_n , ma non da x_{n+1} , vuol dire che la $(n+1)$ -esima oscillazione non viene completata e che il punto si ferma definitivamente. In tale posizione di arresto

$$kx < \mu_s mg \Rightarrow x < x'_A$$

e quindi il punto si ferma in un intervallo centrato sull'origine di ampiezza $\pm x'_A$, tanto maggiore quanto più grande è l'attrito, a parità di altre condizioni. Il numero di oscillazioni complete si ricava da $x_n = x_0 - 4n x'_A > x'_A$ ed è il numero n intero minore di $b = (x_0 - x'_A) / 4x'_A$ e tale che $n + 1 > b$.

9.7 Oscillatore armonico smorzato da una forza viscosa

Supponiamo adesso che l'oscillatore armonico venga frenato da una forza di tipo viscoso, cioè proporzionale e opposta alla velocità, $-\lambda v$, e che non agiscano forze di attrito costanti. La legge del moto si scrive

$$ma = -kx - \lambda v \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\lambda}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0 \quad .$$

Chiamiamo *coefficiente di smorzamento* e *pulsazione propria* rispettivamente

$$\gamma = \frac{\lambda}{2m} \quad , \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (9.17)$$

e riscriviamo così l'equazione del moto:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \quad . \quad (9.18)$$

Equazione dell'oscillatore armonico smorzato

La (9.18) si chiama *equazione differenziale dell'oscillatore armonico smorzato*; essa è l'esempio più completo di equazione differenziale lineare del secondo ordine, a coefficienti costanti, omogenea.

Abbiamo già visto che l'attrito viscoso porta a uno smorzamento esponenziale (nei paragrafi 1.7 e 2.11), per cui cerchiamo se esiste per (9.18) una soluzione $x(t)$ proporzionale a $e^{\alpha t}$. Deve essere:

$$\frac{d^2}{dt^2}(e^{\alpha t}) + 2\gamma \frac{d}{dt}(e^{\alpha t}) + \omega_0^2 e^{\alpha t} = 0 \quad ,$$

$$\alpha^2 e^{\alpha t} + 2\gamma \alpha e^{\alpha t} + \omega_0^2 e^{\alpha t} = e^{\alpha t}(\alpha^2 + 2\gamma \alpha + \omega_0^2) = 0 \quad .$$

Si deduce che $e^{\alpha t}$ è soluzione di (9.18) solo se α soddisfa l'*equazione caratteristica* di secondo grado

Equazione caratteristica

$$\alpha^2 + 2\gamma \alpha + \omega_0^2 = 0 \quad (9.19)$$

ovvero se

$$\alpha = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \quad . \quad (9.20)$$

Vediamo che ci sono tre casi possibili:

$$\gamma^2 > \omega_0^2 \quad , \quad \gamma^2 = \omega_0^2 \quad , \quad \gamma^2 < \omega_0^2 \quad .$$

Il tipo di soluzione dipende dalla relazione tra i parametri fisici dell'oscillatore.

Primo caso: smorzamento forte

$$\gamma^2 > \omega_0^2 \quad \text{ovvero in base a (9.17)} \quad \lambda^2 > 4m k$$

α assume i due valori distinti

$$\alpha_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \quad , \quad \alpha_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \quad ,$$

entrambi negativi, e la soluzione più generale è

$$x(t) = A e^{\alpha_1 t} + B e^{\alpha_2 t} = e^{-\gamma t} \left(A e^{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t} + B e^{-\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t} \right)$$

esponenziale decrescente; A e B dipendono dalle condizioni iniziali.

Secondo caso: smorzamento critico

$$\gamma^2 = \omega_0^2 \quad \text{ovvero} \quad \lambda^2 = 4m k$$

Le due soluzioni di (9.19) sono coincidenti: $\alpha_1 = \alpha_2 = -\gamma$. Si dimostra che in tal caso la soluzione più generale di (9.18) è

$$x(t) = e^{-\gamma t} (A t + B) \quad ,$$

ancora esponenziale decrescente.

Nella figura 9.15 sono mostrati vari casi possibili; in ascissa il tempo è misurato in unità $T_0 = 2\pi / \omega_0$, periodo dell'oscillatore non smorzato. Passando dalla curva 1 alla curva 3 diminuisce il rapporto γ / ω_0 , cioè diminuisce lo smorzamento, fino a che $\gamma = \omega_0$ per la curva 4, corrispondente allo *smorzamento critico*. Questo è il caso in cui il punto tende più rapidamente alla posizione di equilibrio $x = 0$. Nelle condizioni di smorzamento forte o critico non c'è mai oscillazione.

Smorzamento critico

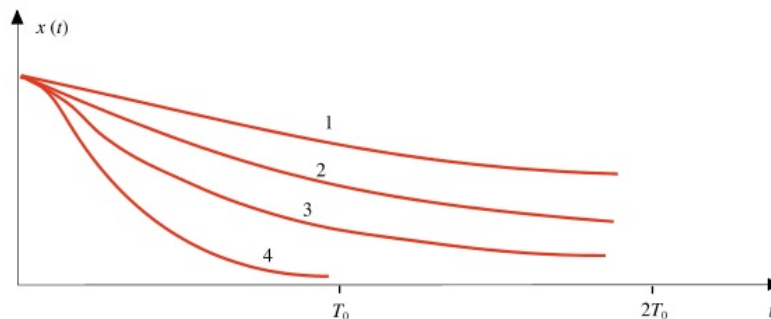


FIGURA 9.15

Terzo caso: smorzamento debole

$$\gamma^2 < \omega_0^2 \quad \text{ovvero} \quad \lambda^2 < 4m k$$

Le soluzioni (9.20) dell'equazione caratteristica (9.19) sono complesse coniugate

$$\alpha_1 = -\gamma + i \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = -\gamma + i\omega \quad , \quad \alpha_2 = -\gamma - i \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = -\gamma - i\omega$$

e la soluzione più generale è

$$x(t) = A e^{\alpha_1 t} + B e^{\alpha_2 t} = e^{-\gamma t} (A e^{i\omega t} + B e^{-i\omega t}) \quad .$$

Utilizzando la *formula di Eulero*

$$e^{\pm i\omega t} = \cos\omega t \pm i \sin\omega t$$

si ottiene

$$x(t) = e^{-\gamma t} [(A + B) \cos\omega t + (A - B) i \sin\omega t] .$$

Il risultato deve essere reale e inoltre A e B devono essere diverse; ciò comporta che anche A e B siano complessi coniugati:

$$A = a + ib \quad , \quad B = a - ib \Rightarrow A + B = 2a \quad , \quad A - B = 2ib \quad ;$$

effettuando queste sostituzioni l'espressione di $x(t)$ diviene

$$x(t) = e^{-\gamma t} (2a \cos\omega t - 2b \sin\omega t)$$

che può sempre essere scritta

$$x(t) = A_0 e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \phi) \quad , \quad (9.21)$$

con A_0 e ϕ determinate in base alle condizioni iniziali. Il punto, in condizioni di smorzamento debole, compie oscillazioni di pulsazione

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} < \omega_0$$

e pseudoperiodo $T = 2\pi/\omega$. L'ampiezza è smorzata esponenzialmente. Il moto si inverte a intervalli regolari, pari a $T/2$, ma non è periodico perché il punto non ripassa nelle stesse posizioni. Si ha che $x(t + T) / x(t) = e^{-\gamma T}$, cioè in uno pseudoperiodo l'ampiezza si riduce di un fattore $e^{-\gamma T}$. Il punto si ferma in $x = 0$.

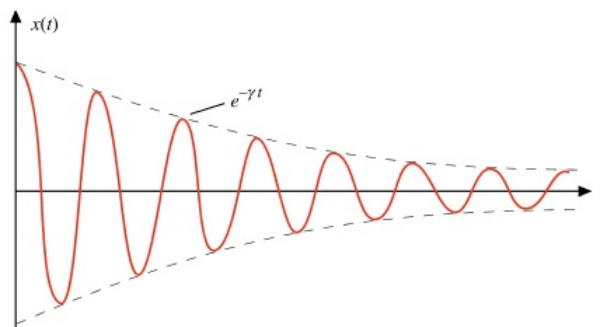


FIGURA 9.16

Esempio 9.5

Dimostrare che la variazione nel tempo dell'energia meccanica dell'oscillatore smorzato è eguale alla potenza assorbita dalla forza di attrito viscoso.

Soluzione

L'energia meccanica è $E_m = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2$

$$\frac{dE_m}{dt} = mv \frac{dv}{dt} + kx \frac{dx}{dt} = v (ma + kx) .$$

Dall'equazione del moto $ma = -kx - \lambda v$ si ha $ma + kx = -\lambda v$ e quindi

$$\frac{dE_m}{dt} = -\lambda v^2 = (-\lambda v) v = Fv = P .$$

Visualizza Soluzione

Esempio 9.6

Un tubo di vetro a sezione costante ($S = 1 \text{ cm}^2$) è piegato a U; esso è disposto verticalmente e contiene una massa m d'acqua, che occupa la lunghezza $l = 1 \text{ m}$. In uno dei due rami il livello dell'acqua viene abbassato di $h = 10 \text{ cm}$ al di sotto della posizione di equilibrio con una opportuna pressione che all'istante $t = 0$ viene annullata. Calcolare l'equazione del moto della massa d'acqua. Supponiamo poi che la massa d'acqua nel suo moto incontri una forza di attrito proporzionale alla velocità con coefficiente $\lambda = 0.6 \text{ kg/s}$. Verificare che in queste condizioni il moto è debolmente smorzato e calcolare la nuova equazione del moto.

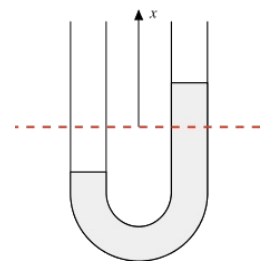


FIGURA 9.17
(Esempio 9.6)

Soluzione

Ad un abbassamento x in un ramo del tubo corrisponde un innalzamento x nell'altro ramo e quindi la massa d'acqua è sottoposta alla forza di pressione $2x\rho gS$, che è di tipo elastico con

$$k = 2\rho gS = 1.96 \text{ N/m} .$$

La massa è $m = \rho lS = 0.1 \text{ kg}$ e descrive un moto armonico con pulsazione e

periodo dati da

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2g}{l}} = 4.43 \text{ rad/s} \quad ,$$
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{2g}} = 1.42 \text{ s} \quad ,$$

eguali a quelli di un pendolo semplice lungo $l/2$. Dalle condizioni iniziali $x(0) = h = 0.1 \text{ m} = A \sin \Phi$ e $v(0) = 0 = \omega_0 A \cos \Phi$ si ricava $A = 0.1 \text{ m}$, $\Phi = \pi/2$ e pertanto

$$x = 0.1 \cos 4.43 t \quad .$$

In presenza di attrito viscoso si verifica subito che λ^2 è minore di $4mk$ e si ha

$$\gamma = \frac{\lambda}{2m} = 3 \text{ s}^{-1} \quad , \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = 3.26 \text{ rad/s} \quad .$$

La posizione (9.21) e la velocità sono:

$$x = A_0 e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \phi)$$
$$v = \frac{dx}{dt} = A_0 e^{-\gamma t} [-\gamma \sin(\omega t + \phi) + \omega \cos(\omega t + \phi)] \quad .$$

Con le date condizioni iniziali si ricava $A = 0.136 \text{ m}$ e $\Phi = 0.827 \text{ rad}$ e in definitiva

$$x = 0.136 e^{-3t} \sin(3.26 t + 0.827) \quad .$$

La costante di tempo dell'esponenziale, $\tau = 1/\gamma = 0.33 \text{ s}$, è molto più piccola dello pseudoperiodo $T = 2\pi/\omega = 1.93 \text{ s}$ per cui già dopo la prima oscillazione ($\sim 6\tau$) il moto è praticamente terminato.

Visualizza Soluzione

Nota. Applicazione agli strumenti di misura

Consideriamo quegli strumenti di misura in cui la grandezza G da misurare produce una deviazione dalla posizione di equilibrio di un certo sistema, richiamato verso l'equilibrio da una forza di tipo elastico, per cui il sistema assume la nuova posizione di equilibrio x_G . Se non ci fosse attrito, l'applicazione di G avrebbe come conseguenza oscillazioni indefinite attorno alla posizione x_G e ciò non va bene, se si vuole leggere il valore di x_G per esempio con un indice mobile. Si introduce allora un fattore di attrito viscoso regolabile in modo da ottenere la condizione di smorzamento critico: il sistema raggiunge x_G , dove si ferma, nel minor tempo possibile. Sono invece da ridurre al minimo gli attriti costanti che falsano la posizione di arresto.

Quanto detto trova applicazione per esempio nelle bilance e negli strumenti elettrici a bobina

mobile, in cui si usano rispettivamente smorzatori ad aria o ad altro fluido e smorzatori elettromagnetici.

9.8 Oscillatore armonico forzato

Riassumiamo i fenomeni di oscillazione visti finora. Quando si sposta il punto dalla posizione di equilibrio esso tende a ritornarci sotto l'azione della forza elastica. Se non c'è attrito si ha un'oscillazione indefinita; se c'è attrito, costante o viscoso, si ha un'oscillazione smorzata che si esaurisce in un certo tempo (fenomeno transitorio). Siccome c'è sempre attrito, l'oscillazione libera è sempre smorzata.

Vogliamo ora studiare come si può rendere l'oscillazione *persistente*, cioè come si può realizzare un sistema fisico reale che oscilli con frequenza definita e ampiezza costante, anche in presenza di attrito viscoso. Applichiamo all'oscillatore una forza sinusoidale $F = F_0 \text{sen} \omega t$ così che l'equazione del moto sia

$$ma = -kx - \lambda v + F_0 \text{sen} \omega t$$

ovvero

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \text{sen} \omega t, \quad (9.22)$$

Oscillazione forzata

in cui abbiamo adottato gli stessi simboli di (9.18); l'equazione però non è più omogenea. Si osservi anche che la forza impressa ha una pulsazione ω che è in generale diversa da quella propria ω_0 dell'oscillatore. Vogliamo verificare se (9.22) ammette una soluzione particolare oscillatoria non smorzata del tipo $x = A \text{sen}(\omega t + \Phi)$, cioè con la stessa pulsazione della forza impressa. Se la risposta fosse positiva, la soluzione più generale sarebbe in base a (9.4)

$$x(t) = A \text{sen}(\omega t + \phi) + a e^{\alpha_1 t} + b e^{\alpha_2 t}$$

e, smorzatosi il fenomeno transitorio in un tempo che è caratterizzato dal coefficiente di smorzamento γ , resterebbe l'oscillazione permanente $x = A \text{sen}(\omega t + \Phi)$ dovuta alla forza impressa.

Inseriamo pertanto $x = A \text{sen}(\omega t + \Phi)$ nella (9.22) ottenendo:

$$-\omega^2 A \text{sen}(\omega t + \phi) + 2\gamma \omega A \cos(\omega t + \phi) + \omega_0^2 A \text{sen}(\omega t + \phi) = \frac{F_0}{m} \text{sen} \omega t.$$

Di qui, sviluppando $\text{sen}(\omega t + \Phi)$ e $\cos(\omega t + \Phi)$, abbiamo:

$$[(\omega_0^2 - \omega^2) A \cos \phi - 2\gamma \omega A \text{sen} \phi] \text{sen} \omega t + [(\omega_0^2 - \omega^2) A \text{sen} \phi + 2\gamma \omega A \cos \phi] \cos \omega t = \frac{F_0}{m} \text{sen} \omega t.$$

L'eguaglianza deve valere per qualunque valore di t e così deve essere:

$$(\omega_0^2 - \omega^2) A \cos \phi - 2\gamma\omega A \sin \phi = \frac{F_0}{m} ,$$

$$(\omega_0^2 - \omega^2) A \sin \phi + 2\gamma\omega A \cos \phi = 0 ,$$

da cui finalmente si ricava

$$A = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} , \quad \text{tg} \phi = -\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} . \quad (9.23)$$

Riassumiamo le nostre conclusioni, contenute nelle (9.23):

- a) a una sollecitazione sinusoidale l'oscillatore armonico risponde con uno spostamento sinusoidale: la pulsazione non è quella propria ω_0 , bensì è eguale a quella voluta ω , impressa dall'esterno;
- b) lo spostamento è sfasato rispetto alla forza;
- c) la risposta dell'oscillatore non è la stessa qualunque sia ω : ampiezza e fase dipendono dal valore di ω ;
- d) A e ϕ non dipendono dalle condizioni iniziali, da cui dipendono solo le costanti a e b della parte transitoria.

Studio della risposta in funzione di ω

$$1) \quad \omega \ll \omega_0 \quad A \approx \frac{F_0}{k} \quad \phi \approx 0$$

$$x \approx \frac{F_0}{k} \sin \omega t \quad \text{in fase con la forza,}$$

il parametro dominante è k , costante elastica dell'oscillatore;

$$2) \quad \omega \gg \omega_0 \quad A \approx \frac{F_0}{m\omega^2} \quad \phi \approx \pi$$

$$x \approx \frac{F_0}{m\omega^2} \sin \omega t \quad \text{in opposizione di fase con la forza,}$$

il parametro dominante è m , massa dell'oscillatore;

$$3) \quad \omega = \omega_0 \quad A = \frac{F_0}{2m\gamma\omega_0} \quad \phi = \frac{\pi}{2}$$

$$x = \frac{F_0}{2m\gamma\omega_0} \cos \omega t \quad \text{in quadratura di fase con la forza,}$$

il parametro dominante è γ , coefficiente di smorzamento. Si parla in questo caso di *risonanza*.

La funzione $A(\omega)$ è massima per

$$\omega = \omega_M = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} < \omega_0 .$$

Risonanza

Il massimo però esiste solo se $\omega_0^2 > 2\gamma^2$, cioè per smorzamenti deboli, altrimenti $A(\omega)$ ha un andamento monotono decrescente (prime due curve in basso nella figura 9.18). Il valore di A nel massimo è

$$A_M = A(\omega_M) = \frac{F_0}{2m\gamma \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}} > A(\omega_0)$$

Se γ tende a zero ω_M tende a ω_0 e A_M tende all'infinito: con smorzamento molto piccolo il massimo dell'ampiezza si ha sostanzialmente in *condizioni di risonanza* (prime tre curve in alto della figura 9.18). Nella pratica si parla di risonanza soltanto quando il sistema è in queste condizioni.

Potenza media fornita dalla forza

La forza $F = F_0 \sin \omega t$ che fa muovere l'oscillatore armonico con la velocità

$$v = \frac{dx}{dt} = \omega A \cos(\omega t + \phi)$$

fornisce al sistema la potenza istantanea

$$\begin{aligned} P(t) &= Fv = \omega A F_0 \sin \omega t (\cos \omega t \cos \phi - \sin \omega t \sin \phi) \\ &= \omega A F_0 \cos \phi \sin \omega t \cos \omega t - \omega A F_0 \sin \phi \sin^2 \omega t \\ &= \frac{1}{2} \omega A F_0 \cos \phi \sin 2\omega t - \omega A F_0 \sin \phi \sin^2 \omega t. \end{aligned}$$

Mediando su un periodo, il primo termine contenente $\sin 2\omega t$ dà zero, mentre il secondo dà, ricordando che il valor medio di $\sin^2 \omega t$ è $1/2$ e che

$$\begin{aligned} \sin \phi &= \frac{\sqrt{\operatorname{tg} \phi}}{1 + \operatorname{tg}^2 \phi} = - \frac{\sqrt{2\gamma\omega}}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}, \\ P_m &= \frac{F_0^2 \omega^2 \gamma}{m} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2} = \gamma m \omega^2 A^2. \end{aligned}$$

Vediamo che anche la potenza media è funzione di ω e si dimostra facilmente, annullando $dP_m/d\omega$, che il valore massimo è raggiunto per $\omega = \omega_0$, dove vale

$$P_{\text{ris},m} = \frac{F_0^2}{4m\gamma} = \gamma m \omega_0^2 A_{\text{ris}}^2. \quad (9.24)$$

Quindi in risonanza si ha il massimo trasferimento di potenza; in generale, per qualsiasi ω , P_m è proporzionale al quadrato della pulsazione e al quadrato dell'ampiezza ovvero al quadrato della velocità massima e quindi all'energia cinetica massima.

Per valutare la larghezza della curva di risonanza, quando esiste, cerchiamo i valori delle pulsazioni $\omega_1 < \omega_0 < \omega_2$ tali che

$$P_m(\omega_1) = P_m(\omega_2) = \frac{1}{2} P_{\text{ris},m}.$$

Si trova

$$\omega_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 + \omega_0^2}, \quad \omega_2 = \gamma + \sqrt{\gamma^2 + \omega_0^2}$$

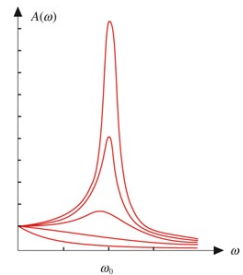


FIGURA 9.18

e si definisce come *larghezza della risonanza* la quantità

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = 2\gamma \quad .$$

Più piccolo è lo smorzamento, più marcato è il fenomeno, come già rilevato.

Infine si definisce *fattore di merito* della risonanza il rapporto

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{\omega_0}{2\gamma} = \sqrt{\frac{k}{4m\gamma^2}} \quad , \quad (9.25)$$

che è tanto maggiore quanto più stretta è la risonanza.

Larghezza della risonanza

Fattore di merito

Esempio 9.7

Una massa $m = 0.5 \text{ kg}$ è attaccata ad una molla di costante elastica $k = 72 \text{ N/m}$ (l'altro estremo della molla è fisso); il sistema sta su un piano orizzontale privo di attrito. Alla massa viene applicata la forza $F = 55 \text{ sen}5t$. Determinare il moto della massa e calcolare i valori massimi dell'energia cinetica e dell'energia potenziale elastica. Successivamente il sistema viene smorzato con coefficiente $\gamma = 6 \text{ s}^{-1}$; trovare la nuova equazione del moto. Calcolare infine i parametri della curva di risonanza e disegnarla, per l'ampiezza e la potenza.

Soluzione

La pulsazione propria dell'oscillatore è $\omega_0 = \sqrt{k/m} = 12 \text{ rad/s}$,

mentre la pulsazione impressa è $\omega = 5 \text{ rad/s}$. Inizialmente non c'è coefficiente di smorzamento, per cui da (9.23) lo sfasamento è nullo e l'ampiezza vale $A = F_0/m = 110 \text{ m}$ (9.23)

mentre la pulsazione impressa è $\omega = 5 \text{ rad/s}$. Inizialmente non c'è coefficiente di smorzamento, per cui da (9.23) lo sfasamento è nullo e l'ampiezza vale $A = F_0/m = 110 \text{ m}$ (9.23)

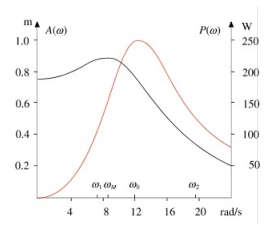


FIGURA 9.19 (Esempio 9.7)

moto della massa è

$$x = 0.92 \sin 5t \quad .$$

L'energia potenziale massima è $\frac{1}{2} kA^2 = 30.7 \text{ J}$, l'energia cinetica massima è $\frac{1}{2} m\omega^2 A^2 = 5.3 \text{ J}$; i valori non sono eguali perché l'oscillatore non è libero (oltre alla forza elastica c'è la forza esterna che compie lavoro).

Con $\gamma = 6 \text{ s}^{-1}$ l'ampiezza e la fase del moto della massa sono, sempre applicando (9.23), $A = 0.83 \text{ m}$ e $\Phi = -0.47 \text{ rad}$; ne risulta

$$x = 0.83 \sin(5t - 0.47) \quad .$$

Il sistema può risuonare essendo $\omega > 2\gamma$. Abbiamo:

pulsazione di risonanza	$\omega_0 = 12 \text{ rad/s}$
ampiezza in risonanza	$A_0 = 0.76 \text{ m}$
pulsazione del massimo	$\omega_M = 8.5 \text{ rad/s}$
ampiezza massima	$A_M = 0.88 \text{ m}$
$\omega_1 = 7.4 \text{ rad/s}$, $\omega_2 = 19.4 \text{ rad/s}$	
larghezza della risonanza	$\Delta\omega = 12 \text{ rad/s}$
fattore di qualità	$Q = 1$
potenza media in risonanza	$P_{\text{ris},m} = 250 \text{ W}$.

Nella curva dell'ampiezza il fenomeno non è molto pronunciato. Si noti che entrambe le curve non sono simmetriche.

Visualizza

Alcune considerazioni sul fenomeno della risonanza

Ripetiamo che quando si parla di risonanza si intende una situazione in cui l'ampiezza $A(\omega)$ presenta un picco molto pronunciato per $\omega = \omega_0$. Nel caso visto i parametri dell'oscillatore devono soddisfare alla condizione $\omega > 2\gamma$.
 $\omega_1 = 7.4 \text{ rad/s}$, $\omega_2 = 19.4 \text{ rad/s}$
 larghezza della risonanza $\Delta\omega = 12 \text{ rad/s}$
 fattore di qualità $Q = 1$
 potenza media in risonanza $P_{\text{ris},m} = 250 \text{ W}$.
 $\omega > 2\gamma$ cioè $\lambda^2 < 2mk$: lo smorzamento deve essere debole.

Oltre che di sistemi elastici (corpi solidi, fluidi, corde tese, ecc.), il fenomeno

è caratteristico di vari altri sistemi, come per esempio circuiti elettrici con induttanze e capacità e cavità contenenti campi elettromagnetici rapidamente variabili.

Il fenomeno della risonanza è utile per mettere in evidenza segnali deboli e a questo scopo è utilizzato nei sintonizzatori di onde elettromagnetiche. Inoltre molti strumenti musicali come pianoforte, violino, organo, funzionano in condizioni di risonanza.

Ci sono naturalmente situazioni opposte in cui si vuole evitare la risonanza, per esempio quando la risposta del sistema deve essere fedele: lo smorzamento non deve essere troppo debole, così $A(\omega)$ non varia molto con ω ed è sostanzialmente proporzionale a F_0 . Non si vuole risonanza anche quando le ampie oscillazioni che essa comporta possono provocare rotture nel sistema: creano potenziali situazioni di pericolo per esempio l'azione del vento o di onde sismiche su edifici, il passaggio di veicoli su ponti, l'azione delle onde su una nave; si cerca in tali casi di fare in modo che le pulsazioni di risonanza siano molto diverse dalle possibili pulsazioni che l'ambiente circostante può imprimere al sistema.

9.9 Analisi di Fourier

L'oscillatore armonico può apparire come un sistema molto particolare che descrive un moto periodico e in effetti ci sono altri sistemi che oscillano con leggi diverse. Si dedica però tanta attenzione all'oscillatore armonico perché sussiste il seguente *teorema di Fourier*.

Consideriamo una qualsiasi funzione periodica $f(t)$, con periodo T , la quale deve soddisfare all'unica condizione che l'intervallo T sia divisibile in un numero finito di tratti in cui $f(t)$ sia continua e monotona. Tale $f(t)$ è sempre esprimibile come somma di una serie di termini sinusoidali:

Teorema di Fourier

$$f(t) = a_0 + \sum_1^{\infty} (a_m \sin m\omega t + b_m \cos m\omega t) = a_0 + \sum_1^{\infty} c_m \sin (m\omega t + \phi_m) \quad ; \quad (9.26)$$

i coefficienti di questo *sviluppo in serie di Fourier* si calcolano a partire dalla $f(t)$ stessa:

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin m\omega t \, dt \quad , \quad b_m = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos m\omega t \, dt \\ c_m &= \sqrt{a_m^2 + b_m^2} \quad , \quad \text{tg } \phi_m = \frac{b_m}{a_m} \quad . \end{aligned} \quad (9.27)$$

Come detto, T è il periodo di $f(t)$ e $\omega = 2\pi / T$; a_0 è il valor medio di $f(t)$,

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \, dt \quad .$$

Il termine con $m = 1$ si chiama termine fondamentale o *primo armonico* e ha pulsazione ω ; i termini con $m > 1$ si chiamano *armonici superiori* e hanno pulsazioni $2\omega, 3\omega, \dots$

In sostanza lo sviluppo in serie di Fourier di $f(t)$ dice che questa si può sempre pensare come somma di sinusoidi con pulsazioni multiple di $\omega = 2\pi / T$ e ampiezze e sfasamenti calcolabili a partire da $f(t)$. Quando, data $f(t)$, si eseguono i calcoli (9.27) determinando quindi a_m e b_m , ovvero i pesi dei vari termini che compongono $f(t)$, si dice che si è eseguita l'*analisi di Fourier* o l'*analisi armonica* della funzione.

Vediamo subito l'importanza pratica del risultato: se $f(t)$ è applicata per esempio all'oscillatore armonico, per determinare come risponde il sistema prima eseguiamo lo sviluppo in serie di Fourier di $f(t)$, poi calcoliamo la risposta per ciascun termine e infine abbiamo la risposta totale come somma delle singole risposte, in base al principio di sovrapposizione. Si capisce perché nel paragrafo 9.8 abbiamo studiato proprio e soltanto una forza sinusoidale.

Il formalismo di Fourier si può estendere anche a funzioni non periodiche; invece di uno *spettro discreto* ($\omega, 2\omega, 3\omega, \dots$) si ha uno *spettro continuo* di

pulsazioni da zero all'infinito (ω diventa una variabile continua, non più legata al periodo che in questo caso non esiste):

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \int_0^{\infty} [a(\omega) \sin \omega t + b(\omega) \cos \omega t] d\omega, \\
 a(\omega) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \omega t dt, \\
 b(\omega) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega t dt.
 \end{aligned}
 \tag{9.28}$$

I coefficienti della serie sono sostituiti dalle due funzioni $a(\omega)$ e $b(\omega)$. Perché sia valida questa estensione occorre che sia finito l'integrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt$.

MathType@MTEF@5@5@+=

feaagKart1ev2aaatCvAUfeBSjuyZL2yd9gzLbvyNv2CaerbuLwBLn
 hiov2DGi1BTfMBaeXatLxBI9gBaerbd9wDYLwzYbItLDharqqtubsr
 4rNCHbGeaGqiVuoJe9sqqrpepCoxbbL8F4rqqrFfpeea0xe9Lq=Jc9
 vqaqpepmoxbba9pwe9Q8fso=yqaqpepae9pg0FirpepeKkFroxfr=x
 fr=xb9adbaqaeeGaciGaaiaabeqaamaabaabaaGcbaWaa8qmaeada
 abdaqaaiaadAgacaGGOaGaaiaDaiaacMcaiaaawEa7caGLiWoaSqa
 aiabgkHiTiabg6HiLcqaaiaabgUcaRiabg6HiLcqdcqGHRiI8aOGaam
 izaiaadshacaGGUaaaaa@45CC@

Restando nell'ambito dell'esempio appena discusso, la risposta dell'oscillatore armonico a una generica $f(t)$, come potrebbe essere un impulso che dura da t_1 a t_2 ed è nullo prima e dopo, si può calcolare proprio con l'integrale di Fourier che riconduce $f(t)$ a funzioni dal comportamento noto.

9.10 Introduzione ai fenomeni ondulatori

Le realizzazioni meccaniche di un oscillatore armonico alle quali abbiamo fatto riferimento sono il punto materiale attaccato ad una molla, in cui l'oscillazione è dovuta alla forza elastica della molla, il pendolo di torsione, dove agisce il momento elastico di torsione del filo, e i pendoli che oscillano a causa della forza peso; a questi possiamo assimilare la massa d'acqua oscillante dell'esempio 9.6. In qualche caso l'oscillazione è armonica anche se ampia, in altri l'ampiezza deve essere limitata, altrimenti il moto è oscillatorio, ma non armonico. Bisogna poi nella pratica forzare l'oscillazione che viene smorzata dai vari effetti dissipativi sempre presenti.

Caratteristica comune dei suddetti dispositivi è il fatto che l'oscillazione sia, per così dire, macroscopica. Tutto il sistema nel suo insieme oscilla e nel fenomeno non entrano in modo determinante proprietà legate alla struttura microscopica.

Gli esempi citati, e i molti altri di natura simile, non esauriscono le possibilità di produzione di moti oscillatori, in particolare armonici. Oscillazioni locali, sia armoniche che qualsiasi, possono essere provocate in una zona specifica di un corpo continuo elastico, solido o fluido (che viene chiamato *mezzo*). Facciamo tre esempi:

- in un punto della superficie di una massa d'acqua in quiete viene fatto oscillare verticalmente un piccolo corpo;
- ad una estremità di un tubo pieno d'aria viene fatta vibrare una membrana (come quella di un altoparlante);
- la base di una sbarra metallica viene colpita da una piccola punta.

Nel primo esempio, che è quello visivamente più immediato, si osserva che l'oscillazione del corpo provoca un'oscillazione dell'acqua (innalzamento e abbassamento locale della superficie) che non resta localizzata, ma si allontana con simmetria circolare dal centro. Nel secondo, se si mette all'altro estremo del tubo un opportuno rivelatore di vibrazioni (come un microfono) si trova che esso entra in vibrazione con un certo ritardo rispetto all'istante in cui ha iniziato a vibrare la membrana. Analogamente nel terzo esempio una puntina appoggiata all'altra estremità della sbarra si mette a vibrare. Come nel primo caso, ciò che avviene nel gas e nel metallo è che il movimento della membrana o della punta causa il movimento degli elementi contigui del mezzo elastico e che questi a loro volta interagiscono con altri elementi a loro contigui mettendoli in movimento e così via.

Questa volta non abbiamo un movimento macroscopico di materia, il mezzo nel suo complesso resta fermo. Invece l'oscillazione, indotta localmente dall'esterno, si propaga nel mezzo: i vari elementi del mezzo oscillano attorno alla loro posizione di equilibrio, con un certo ritardo rispetto alla *sorgente* che dipende dalla distanza dalla sorgente e dalla velocità di propagazione. Un

fenomeno di questo tipo viene chiamato *ondulatorio* e l'oscillazione che si propaga nel mezzo con una ben definita velocità costituisce un'onda.

Nel seguito descriviamo alcune caratteristiche distintive, sia fisiche che matematiche, dei fenomeni ondulatori. L'argomento, che è di fondamentale importanza in tutti i campi della Fisica, verrà ripreso e trattato a fondo nel secondo volume.

Premettiamo che limiteremo le nostre considerazioni al caso unidimensionale, in cui la propagazione avviene lungo una determinata direzione, ad esempio l'asse x (quindi non ci occuperemo più di situazioni come quella del primo esempio). L'oscillazione, che chiamiamo perturbazione (del mezzo), può essere una qualsiasi funzione $f(x,t)$ della posizione e del tempo. In particolare $f(0,t)$, cioè la funzione nell'origine che supponiamo coincidente con la sorgente, dà l'oscillazione iniziale, che dipende dalla sollecitazione esterna; si può trattare di una funzione impulsiva, con una forma come quella della figura 9.20, oppure periodica, per esempio sinusoidale: $f(0,t) = A \sin(\omega t + \Phi)$.

Riprendiamo il terzo esempio e la funzione f sia lo spostamento ξ dalla posizione di equilibrio degli elementi della base della sbarra metallica colpita impulsivamente da una punta; $f(0,t) = \xi(0,t)$ rappresenta ciò che vede al passare del tempo un osservatore nell'origine: la base si sposta di una certa quantità, normalmente molto piccola, e poi torna nella configurazione iniziale (tutto ciò senza che la sbarra nel suo insieme si muova). Analogamente $f(x_1,t)$ rappresenta l'andamento temporale della perturbazione in una diversa posizione x_1 ; se assumiamo che la perturbazione si propaghi senza subire deformazioni, la forma in funzione del tempo deve essere la stessa. La figura 9.20 è quindi la stessa in qualsiasi posizione dell'asse x , con questa avvertenza: un osservatore in x_1 vede la perturbazione con un ritardo rispetto all'osservatore nell'origine dato dal tempo x_1/v , essendo v la velocità di propagazione dell'onda.

Diverso è il significato di $f(x,t_1)$: ora si tratta dei valori che la perturbazione assume nei vari punti dell'asse x ad un certo istante (è la fotografia istantanea di f). Nella parte alta della figura 9.21 è mostrata $f(x,t_1)$: in quell'istante c'è una posizione x particolare in cui la perturbazione è massima, mentre subito prima e dopo si ha un andamento decrescente e nel resto dell'asse non si ha nessuna perturbazione. Nella parte bassa della figura si vede la perturbazione in un istante successivo t_2 : essa interessa con le stesse modalità un'altra zona dell'asse x , mentre la zona precedente è ora imperturbata; la distanza tra i due massimi è $v(t_2 - t_1)$.

Come vedremo nei paragrafi successivi in cui trattiamo casi specifici, ogni qual volta si verificano le condizioni per la propagazione si trova che la perturbazione soddisfa all'equazione differenziale, detta *equazione delle onde*,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \quad (9.29)$$

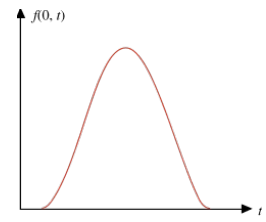


FIGURA 9.20

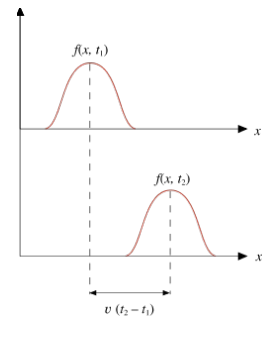


FIGURA 9.21

Equazione delle onde
piane

Questo vuol dire che la funzione f , per rappresentare un fenomeno ondulatorio, deve avere una proprietà precisa: la derivata seconda rispetto allo spazio deve essere proporzionale alla derivata seconda rispetto al tempo (il coefficiente deve avere le dimensioni dell'inverso di una velocità al quadrato e per questo viene scritto $1/v^2$).

Si dimostra che una funzione f con tale proprietà, e quindi soluzione di (9.29), ha una particolare dipendenza dallo spazio e dal tempo: precisamente l'argomento di f deve avere la struttura $x - vt$ o $x + vt$. La funzione f cioè non può dipendere dal prodotto xt o dal rapporto x/t , tanto per fare due esempi, ma deve dipendere dalla combinazione lineare delle due variabili. Pertanto

$$\text{sen } k(x - vt) \quad , \quad e^{-k(x+vt)} \quad , \quad 1/(x - vt)^2$$

sono possibili soluzioni della (9.29), mentre non lo sono

$$(x^2 + v^2 t^2) \quad , \quad xvt \quad , \quad x^3/v^2 t^2 \quad .$$

Possiamo dire che (9.29) non è una condizione sulla forma della funzione (come abbiamo trovato nelle altre equazioni differenziali finora incontrate), bensì *una condizione sull'argomento della funzione*, la quale può invece avere qualsiasi forma.

È semplice verificare che la funzione $f(x - vt)$ è soluzione di (9.29). Infatti, posto $z = x - vt$, per cui $\partial z/\partial x = 1$ e $\partial z/\partial t = -v$, si ha:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(z) = \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z} \quad , \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(z) = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad ,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} f(z) = \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} = -v \frac{\partial f}{\partial z} \quad , \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} f(z) = -v \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \frac{\partial z}{\partial t} = v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad ,$$

e quindi $\partial^2 \partial x^2 f(z) = 1/v^2 \partial^2 \partial t^2 f(z)$ MathType@MTEF@5@5@+= feaagKart1ev2aaatCvAUfeBSjuyZL2yd9gzLbvyNv2CaerbuLwBLn hiov2DGi1BTfMBaeXatLxBI9gBaerbd9wDYLwzYbItLDharqqtubsr 4rNCHbGeaGqiVu0Je9sqqrpepCoxbbL8F4rqqrFfpeea0xe9Lq=Jc9 vqaqpepm0xbba9pwe9Q8fso=yqaqpepa9pg0FirpepeKkFroxfr=x fr=xb9adbaqaeeGaciGaaiaabeqaamaabaabaaGcbaWaaSaaaeaacq GHciITdaahaaWcbeqaiaaikdaaaaaakeaacqGHciITcaWG4bWaaWba aSqabeaacaaiYaaaaaakiaadAgacaGGOaGaaIOEaiaacMcacaGGLb WaaSaaaeaacaaIXaaabaGaamODamaaCaaaleqabaGaaGOMaaaaaGc daWcaaqaaiabgkGi2oaaCaaaleqabaGaaGOMaaaaaOqaaiabgkGi2k aadshadaahaaWcbeqaiaaikdaaaaaaOGaamOzaiaacIcacaGG6bGa aiykaaaa@4B96@ sono eguali. Nello stesso modo si prova che $\partial x v \partial t g(x + vt)$ è soluzione. Dalla dimostrazione si ha la conferma che la forma effettiva di f non ha influenza sul risultato.

È invece argomento dei casi di Analisi Matematica la prova che solo le funzioni $f(x - vt)$ e $g(x + vt)$ sono soluzioni, cioè che non esistono altre soluzioni diverse. Si dimostra anche che la soluzione più generale di (9.29) è data dalla

somma

$$G(x, t) = f(x - vt) + g(x + vt) \quad .$$

Discutiamo ora il significato fisico della funzione $f(x - vt)$, soluzione di (9.29). Consideriamo un valore costante dell'argomento, supponiamo cioè che sia $x - vt = k$, e chiamiamo F il valore della funzione: $F = f(k)$. È chiaro che la funzione f assume il valore F in tutti i punti dell'asse x che soddisfano alla condizione

$$x = k + vt \quad ,$$

equazione di un moto uniforme lungo il verso positivo dell'asse x . Quindi al tempo $t = 0$ f vale F nel punto $x = k$, al tempo t_1 f vale F nel punto $x_1 = k + vt_1$ e così via. Concludiamo che *una funzione $f(x - vt)$ rappresenta un fenomeno che si propaga lungo il verso positivo dell'asse x con velocità v , senza subire deformazioni*; possiamo paragonare questo moto ad una traslazione rigida, per citare una situazione che conosciamo. Analogamente $g(x + vt)$ rappresenta una propagazione lungo il verso negativo dell'asse x . Si capisce così perché (9.29) sia chiamata equazione delle onde e si chiarisce anche il significato della costante v che compare nella (9.29): è la velocità di propagazione della perturbazione.

Più esattamente l'equazione differenziale (9.29) è detta *equazione delle onde piane*, per il fatto che la funzione f , dipendendo solo da x , ha lo stesso valore nei punti di un piano ortogonale all'asse x (piano y, z).

Nei paragrafi che seguono trattiamo tre casi classici di onde elastiche: le onde che si propagano lungo una sbarra solida, lungo un filo teso e lungo una colonna di gas. Alla fine discuteremo alcune ulteriori proprietà dei fenomeni ondulatori.

9.11 Onde elastiche in una sbarra solida

Supponiamo di deformare il tratto iniziale di una sbarra solida applicando una forza impulsiva; tale tratto iniziale, compresso dalla forza, successivamente si dilata comprimendo l'elemento contiguo e questo fenomeno, dovuto alle proprietà elastiche del mezzo, interessa via via tutta la sbarra fino a raggiungere l'altro estremo. Vogliamo dare una veste matematica a questa propagazione di una perturbazione elastica e calcolarne la velocità.

Consideriamo un elemento di sbarra a distanza x dall'estremo colpito e lungo dx ; nella figura 9.22 esso è rappresentato come un cilindretto di base S , sezione della sbarra, e altezza dx . Sulle due basi di questo cilindretto agiscono le forze $F(x)$ e $F(x + dx)$ esercitate rispettivamente dagli elementi di sbarra che stanno a sinistra e a destra del cilindretto. Nel processo di propagazione la forza F non è costante lungo la sbarra, ma varia sia lungo l'asse x che nel tempo.

Sotto l'azione di queste forze ogni sezione cambia, seppur di poco, posizione; indichiamo con $\xi(x, t)$ la funzione che descrive lo spostamento dalla posizione iniziale, all'ascissa x e al tempo t , e con $\xi(x + dx, t)$ lo spostamento nello stesso istante all'ascissa $x + dx$. Le configurazioni del cilindretto sono mostrate in figura 9.23, la lunghezza, che era dx , diventa

$$x + dx + \xi(x + dx, t) - x - \xi(x, t) = dx + d\xi$$

in quanto $\xi(x + dx, t) = \xi(x, t) + d\xi$. L'allungamento relativo del cilindretto è $d\xi / dx$ o, meglio, $\partial \xi / \partial x$: il simbolo di derivata parziale evidenzia che stiamo considerando una variazione solo rispetto a x e non rispetto al tempo. Dalla (7.2) abbiamo quindi:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{E} \frac{F}{S} \Rightarrow F(x) = ES \frac{\partial \xi}{\partial x} .$$

Utilizzando questa relazione possiamo scrivere la risultante delle forze che agiscono sul cilindretto come

$$F(x + dx) - F(x) = \frac{\partial F}{\partial x} dx = ES \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx .$$

D'altra parte il moto del cilindretto, di massa $dm = \rho S dx$, avviene con accelerazione $a = \partial^2 \xi / \partial t^2$ e, per la legge di Newton,

$$ES \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx = \rho S \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} dx .$$

In definitiva si ottiene l'equazione

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} , \quad (9.30)$$

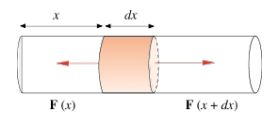


FIGURA 9.22

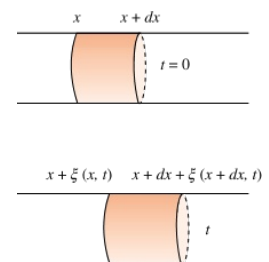


FIGURA 9.23

avendo indicato con

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (9.31)$$

Velocità di propagazione

una grandezza che ha necessariamente le dimensioni di una velocità.

Abbiamo così trovato che lo spostamento ξ dalla posizione di equilibrio dei punti di una sezione della sbarra sollecitata ad una estremità obbedisce all'equazione delle onde (9.29): lungo la sbarra si ha un'onda di spostamento, con velocità di propagazione (9.31) che dipende dalle proprietà elastiche (E) e di inerzia (ρ) della sbarra.

Esempio 9.8

Le densità di alluminio, ferro, piombo, rame, sono, rispettivamente, $2.7 \cdot 10^3$, $7.9 \cdot 10^3$, $11.4 \cdot 10^3$, $9.0 \cdot 10^3$ kg/m³. Calcolare le velocità di propagazione di un'onda elastica in una sbarra costituita da tali metalli.

Soluzione

Nella tabella 7.1 si trovano i valori del modulo di Young, che riportiamo nell'ordine: $0.7 \cdot 10^{11}$, $2.0 \cdot 10^{11}$, $0.14 \cdot 10^{11}$, $1.1 \cdot 10^{11}$ N/m². Da (9.31) abbiamo : $v_{Al} = 5090$, $v_{Fe} = 5030$, $v_{Pb} = 1110$, $v_{Cu} = 3500$ m/s .

Visualizza Soluzione

Insieme allo spostamento ξ dalla posizione di equilibrio si propaga lungo la sbarra anche la forza F . Infatti dalla relazione $F=ES \frac{\partial \xi}{\partial x}$

MathType@MTEF@5@5@+=
 feaagKart1ev2aaatCvAUfeBSjuyZL2yd9gzLbvyNv2CaerbuLwBLn
 hiov2DGi1BTfMBaeXatLxBI9gBaerbd9wDYLwzYbItLDharqqtubsr
 4rNCHbGeaGqiVuoJe9sqqrpepCoxbbL8F4rqqrFfpeeaOxe9Lq=Jc9
 vqaqpepmoxbba9pwe9Q8fso=yqaqpepae9pgoFirpepeKkFroxfr=x
 fr=xb9adbaqaeeGaciGaaiaabeqaamaabaabaaGcbaGaamOraiabg2
 da9iaadweacaWGtbWaaSaaaeaacqGHciITcqaH+oaEaeaacqGHciIT
 caWG4bWaaWbaaSqabeaacaIYaaaaaaaaa@3FEE@ e da (9.30) si ricava:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = ES \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} = ES \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = ESv^2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} ,$$

dove il secondo passaggio è reso possibile dal noto teorema di analisi secondo cui una derivata mista non dipende dall'ordine con cui si eseguono le derivate. Inoltre

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = ES \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} = ES \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

e si conclude che

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} .$$

Lungo la sbarra abbiamo anche un'onda di forza o, meglio, di pressione se ricordiamo che nei processi di compressione è significativo il rapporto F/S .

Sia lo spostamento $\xi(x \mp v t)$ che la forza $F(x \mp v t)$, che descrivono le onde che si propagano lungo l'asse x , sono paralleli a questo asse. Onde che hanno una tale proprietà si dicono *longitudinali*.

Onda longitudinale

9.12 Onde in una corda tesa

Quando si sposta rapidamente l'estremità di una corda tesa, che abbia ad esempio l'altra estremità fissa, come in figura 9.24, si ha una perturbazione che si propaga lungo la corda, visualizzata da una *gobba* che si sposta progressivamente da un'estremità all'altra. Anche in questo caso lo spostamento dalla posizione di equilibrio si manifesta dapprima nell'estremo in cui si esercita la perturbazione esterna e successivamente e progressivamente negli altri punti della corda.

Supponiamo di spostare di poco la corda dalla sua posizione di equilibrio, coincidente con l'asse x , e di chiamare $\xi(x, t)$ la funzione che descrive lo spostamento dall'equilibrio. Consideriamo un piccolo tratto di corda dl sottoposto ad una tensione T che agisce ad entrambi gli estremi e siano α e α' gli angoli formati con l'asse x dalla tangente all'elemento dl negli estremi, ovvero dalla tensione T . La risultante delle forze di tensione agenti su dl ha una componente parallela all'asse x e una all'asse y :

$$F_x = T(\cos\alpha' - \cos\alpha) \quad ,$$

$$F_y = T(\sin\alpha' - \sin\alpha) \quad .$$

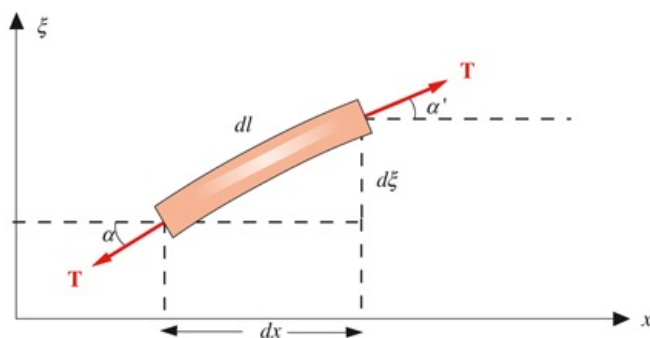


FIGURA 9.25

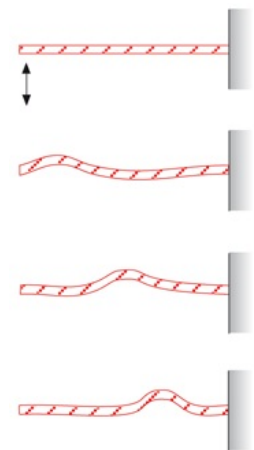


FIGURA 9.24

Se gli spostamenti della corda sono piccoli, come abbiamo ipotizzato, anche la curvatura della corda è piccola: allora nello sviluppo in serie delle funzioni

$$\sin\alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \dots \quad , \quad \cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \dots \quad ,$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \alpha + \frac{\alpha^3}{3!} + \dots \quad ,$$

si possono trascurare tutti i termini di ordine superiore al primo. Di conseguenza

$$\sin\alpha = \operatorname{tg}\alpha = \alpha \quad , \quad \sin\alpha' = \operatorname{tg}\alpha' = \alpha' \quad ,$$

$$\cos\alpha = 1 \quad , \quad \cos\alpha' = 1$$

e per le componenti della forza agente sull'elemento dl si ottiene

$$F_x = 0 \quad , \quad F_y = T(\operatorname{tg}\alpha' - \operatorname{tg}\alpha) = T \frac{\partial}{\partial x} (\operatorname{tg}\alpha) dx \quad ,$$

ammettendo che, a causa della piccolezza di dx , α e α' siano poco diversi così che

$$\operatorname{tg}\alpha' = \operatorname{tg}\alpha + \frac{\partial}{\partial x} (\operatorname{tg}\alpha) dx \quad .$$

Il risultato $F_x = 0$ dice che non c'è spostamento lungo la direzione della corda ovvero che il moto di ogni elemento di corda avviene in direzione perpendicolare all'asse x sotto l'azione della forza F_y . Poiché, come si vede in figura 9.25 e come discende dalla definizione di derivata, $\operatorname{tg}\alpha = \partial\xi / \partial x$, abbiamo

$$F_y = T \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx \quad .$$

La massa dell'elemento di corda dl è

$$dm = \rho S dl = \rho S \frac{dx}{\cos\alpha} = \rho_l dx \quad ,$$

indicando con $\rho_l = dm/dx = \rho S$ la *densità lineare di massa* (paragrafo 6.3), costante se la corda è omogenea ($\rho = \text{costante}$) e calibra ($S = \text{costante}$, sezione della corda). L'accelerazione dello stesso elemento è $a = \partial^2 \xi / \partial t^2$ e, per la legge di Newton,

$$T \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx = \rho_l dx \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho_l} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad ,$$

che è ancora la (9.29); la velocità di propagazione risulta data da

$$v = \sqrt{\frac{T}{\rho_l}} \quad . \quad (9.32)$$

Velocità di propagazione

Lo spostamento trasversale, provocato in un estremo della corda, si propaga lungo la corda con una velocità v , che dipende dalla tensione della corda e dalla massa per unità di lunghezza.

In un filo di acciaio di raggio 1 mm e $\rho_l = 0.025 \text{ kg / m}$, se $T = 10 \text{ N}$, risulta $v \cong 20 \text{ m/s}$.

Osserviamo che le approssimazioni fatte per $\operatorname{sen}\alpha$, $\operatorname{cos}\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ non sono particolarmente stringenti: fino a 15° $\operatorname{sen}\alpha$ differisce da $\operatorname{tg}\alpha$ al più del 3.5%, come del resto della stessa percentuale $\operatorname{cos}\alpha$ differisce da 1.

Onda trasversale

L'onda di spostamento lungo la corda si dice *trasversale* poiché la grandezza che si propaga giace in un piano perpendicolare alla direzione di propagazione.

9.13 Proprietà elastiche dei gas. Onde nei gas

Abbiamo descritto nel paragrafo 7.5 le proprietà elastiche di un fluido e introdotto con la (7.8) il modulo di compressibilità β , considerando anche esplicitamente un gas che segua la legge isoterma di Boyle.

Riprendiamo la definizione di modulo di compressibilità:

$$\frac{dV}{V} = -\frac{1}{\beta} dp \Rightarrow \beta = -V \frac{dp}{dV} .$$

A una variazione di volume si accompagna una variazione di densità e poiché $V\rho = m = \text{costante}$ abbiamo

$$\rho dV + V d\rho = 0 \Rightarrow \frac{dV}{V} = -\frac{d\rho}{\rho} .$$

Segue che il *modulo di compressibilità* si può scrivere

$$\beta = \rho \frac{dp}{d\rho} \quad (9.33)$$

e questa è la definizione termodinamica di modulo di compressibilità. Il valore di β dipende da come la pressione varia con la densità, cioè dalla forma della funzione $p(\rho)$.

In un gas ideale, se il processo di compressione è isoterma abbiamo già ricavato nel paragrafo 7.5 la (7.10), che riscriviamo:

$$\beta_T = p ,$$

dove con la lettera T vogliamo ricordare che la relazione è vera solo se la temperatura rimane costante.

Vedremo nel capitolo 11 che per mantenere un gas a temperatura costante sono necessari scambi di calore tra il gas e l'ambiente esterno. Un processo di compressione o di espansione può però essere molto rapido, così da non consentire scambi di calore; si parla in questo caso di condizioni adiabatiche e la (7.10) non è più valida. Anticipando un risultato del paragrafo 11.6, diciamo che in un processo adiabatico di un gas ideale vale la legge di Poisson $pV^\gamma = \text{costante}$, invece della legge isoterma di Boyle. La grandezza γ è una costante caratteristica del tipo di gas. Procedendo come nel paragrafo 7.5 abbiamo:

$$pV^\gamma = \text{costante} \Rightarrow p/\rho^\gamma = \text{costante} \Rightarrow p = C\rho^\gamma$$

$$\frac{dp}{d\rho} = \gamma C\rho^{\gamma-1} = \frac{\gamma C\rho^\gamma}{\rho} = \frac{\gamma p}{\rho} ,$$

$$\beta_s = \gamma p . \quad (9.34)$$

Modulo di
compressibilità
adiabatica

Viene così definito il *modulo di compressibilità adiabatica*, sempre

maggiore del modulo di compressibilità isoterma β_T essendo γ sempre maggiore di uno.

Alla pressione atmosferica $p = 1.013 \cdot 10^5$ Pa e alla temperatura $T = 273.15$ K e considerando l'aria come un gas ideale biatomico ($\gamma = 1.4$, vedi paragrafo 11.5) abbiamo

$$\beta_S = 1.418 \cdot 10^5 \text{ Pa} \quad , \quad \beta_T = 1.013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

(il valore citato della temperatura, espresso in kelvin, corrisponde a 0°C ; parleremo della temperatura e delle sue unità di misura nel capitolo 10).

Propagazione di onde in un gas

Abbiamo constatato che un gas è un sistema con notevoli proprietà elastiche. È quindi naturale che come una perturbazione elastica si propaga in una sbarra solida (paragrafo 9.11), così si debba propagare in un gas. La velocità di propagazione nella sbarra è data da (9.11),

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad ,$$

che, come già rilevato, evidenzia la dipendenza del fenomeno dalla proprietà elastica del materiale, descritta dal modulo di Young E , e dalla densità, cioè dalla massa per unità di volume, come è prevedibile trattandosi pur sempre del moto di particelle con una certa massa a cui è stata applicata la legge di Newton. Per un gas ci attendiamo

$$v = \sqrt{\frac{\beta}{\rho}}$$

essendo β il modulo di compressibilità (adiabatico o isoterma).

Per verificare che anche in un gas si ha un fenomeno di propagazione regolato da un'equazione tipo (9.29), consideriamo una massa di gas contenuta in un lungo tubo a pareti rigide, disposto lungo l'asse x , e indichiamo con ρ_0 e p_0 i valori di equilibrio della densità e della pressione. Con il rapido spostamento di un pistone o di una membrana elastica si comprime il volumetto di gas immediatamente adiacente alla sorgente della perturbazione, producendo una variazione locale $d\rho$ della densità e dp della pressione; la variazione di pressione determina un movimento del gas che comporta la compressione dell'elemento di gas contiguo. In tal modo le perturbazioni $d\rho$ e dp vengono trasmesse da un elemento al successivo; la descrizione matematica di questo meccanismo ci porterà all'equazione tipica della propagazione.

Supponiamo che le variazioni di densità e pressione siano piccole: i rispettivi valori modificati si scrivono allora

$$\rho = \rho_0 + d\rho \quad , \quad p = p_0 + dp \quad ;$$

inoltre siano piccoli gli spostamenti dalla posizione di equilibrio, indicati dalla funzione $s(x, t)$, così come la derivata di questa funzione rispetto a x , $\partial s / \partial x$.

Consideriamo una massa di gas contenuta tra due piani perpendicolari all'asse x , intersecanti l'asse nei punti di coordinate x e $x + dx$: assumendo unitaria la sezione del cilindro la massa di gas è $dm = \rho_0 dx$. A seguito della perturbazione dm subisce uno spostamento e la troviamo, in un istante t immediatamente successivo, tra

$$x + s(x, t) \quad \text{e} \quad x + dx + s(x + dx, t) \quad ,$$

così che la dimensione lineare di dm passa da dx a

$$dx + s(x + dx, t) - s(x, t) = dx + \frac{\partial s}{\partial x} dx \quad .$$

La situazione geometrica è quella descritta nella figura 9.23.

La stessa massa occupa pertanto un volume diverso e la sua densità è cambiata da ρ_0 a $\rho_0 + d\rho$. Quindi

$$dm = (\rho_0 + d\rho) \left(dx + \frac{\partial s}{\partial x} dx \right) = \left(\rho_0 + \rho_0 \frac{\partial s}{\partial x} + d\rho + d\rho \frac{\partial s}{\partial x} \right) dx \quad .$$

Trascuriamo nel terzo membro il quarto termine rispetto ai primi tre in quanto infinitesimo di ordine superiore ed eguagliamo a $dm = \rho_0 dx$; otteniamo

$$d\rho = \rho - \rho_0 = -\rho_0 \frac{\partial s}{\partial x} \quad (9.35)$$

che rappresenta il collegamento tra moto del gas e variazione di densità. Il segno meno indica correttamente che se il volumetto è compresso ($\partial s / \partial x < 0$) la densità aumenta ($d\rho > 0$), mentre se il gas si espande la densità diminuisce.

A una variazione di densità corrisponde una variazione di pressione data da (9.33) che riscriviamo:

$$dp = p - p_0 = \frac{\beta}{\rho_0} d\rho$$

e utilizzando (9.35)

$$p = p_0 - \beta \frac{\partial s}{\partial x} \quad . \quad (9.36)$$

La variazione di pressione causa un movimento del gas: la forza risultante che agisce su dm (ricordiamo che la sezione è unitaria) vale

$$p(x, t) - p(x + dx, t) = -\frac{\partial p}{\partial x} dx = \beta \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} dx$$

avendo introdotto (9.36); questa forza provoca l'accelerazione $\partial^2 s / \partial t^2$

secondo la legge del moto

$$\beta \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} dx = dm \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \rho_0 dx \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$$

e in conclusione

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \frac{\beta}{\rho_0} \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} \quad (9.37)$$

Lo spostamento $s(x, t)$ dalla posizione di equilibrio soddisfa l'equazione (9.29) delle onde piane: lungo la colonna di gas si propaga un'onda di spostamento con velocità data da

$$v = \sqrt{\frac{\beta}{\rho_0}} \quad (9.38)$$

come avevamo anticipato. Dalla (9.36) derivando rispetto a x e rispetto al tempo si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} &= -\beta \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = -\rho_0 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} \quad , \\ \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} &= -\beta \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial s}{\partial x} = -\beta \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} \quad , \\ \Rightarrow \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} &= \frac{\beta}{\rho_0} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \quad . \end{aligned}$$

In modo analogo, derivando la densità ρ data dalla (9.35), si ottiene

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \frac{\beta}{\rho_0} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \quad .$$

Lungo la colonna di gas si propagano anche un'onda di pressione e una perturbazione della densità del gas, tutte con la stessa velocità data da (9.38).

La rapidità con cui avviene il fenomeno induce a ritenere adiabatici i processi di compressione e di espansione del gas, per cui il modulo di compressibilità è quello adiabatico (9.34) e la velocità (9.38) ha l'espressione

$$v = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}} \quad (9.39)$$

Velocità di
propagazione

Nelle cosiddette condizioni standard ($T = 273.15$ K, $p = 1.01325 \cdot 10^5$ Pa) la densità dell'aria vale $\rho = 1.29$ Kg/m³ ; con $\gamma = 1.4$ $v = 331.61$ m/s; il valore misurato in queste condizioni è 331.45 m/s. L'ottimo accordo giustifica le ipotesi fatte di perturbazioni di piccolo valore e con un'alta velocità di propagazione, sostanzialmente adiabatiche.

In un gas ideale la pressione e la densità sono legate alla temperatura dall'equazione $p/\rho = RT/A$ dove R è la costante dei gas e A la massa molecolare (vedi paragrafo 11.1). Introducendo questa espressione nella (9.39) si ottiene infine

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{A}} = \alpha \sqrt{T} \quad , \quad (9.40)$$

che dà la dipendenza della velocità di propagazione in un gas ideale dalla temperatura.

I valori della velocità di propagazione di un'onda elastica in alcuni gas (ideali) alla temperatura $T = 300$ K sono riportati nella tabella 9.1. L'unità di misura della costante α è $\text{ms}^{-1} \text{K}^{-1/2}$.

Tabella 9.1 Velocità di propagazione di un'onda elastica nei gas a 300 K

gas	α	v (m/s)
idrogeno	76.288	1321
elio	58.857	1019
azoto	20.389	353
ossigeno	19.072	330

È attraverso il meccanismo ora descritto che avviene la propagazione del suono nei gas, in particolare nell'aria, anche se il fenomeno va trattato tridimensionalmente. Dai dati precedenti si ricava nell'aria $\alpha = 20.055 \text{ ms}^{-1} \text{K}^{-1/2}$ e quindi la velocità del suono nell'aria a 20°C è ~ 343 m/s.

Nel caso della voce, la perturbazione che genera il suono è prodotta da vibrazione rapide della laringe, che agisce come una lamina vibrante. La sensazione sonora ha origine sul timpano, che è anch'esso una membrana elastica e segue i processi rapidi di vibrazione dell'aria. Ci rendiamo conto che nell'onda sonora, come in qualsiasi onda elastica, c'è trasporto di energia e quantità di moto, visto che essa è capace di fare entrare in vibrazione un corpo materiale come il timpano. Il valore minimo dell'ampiezza delle oscillazioni delle molecole del gas che l'orecchio è capace di percepire è dell'ordine di 10^{-10} m, cioè delle dimensioni atomiche, a cui corrisponde una variazione di pressione di 10^{-4} Pa rispetto alla pressione atmosferica, cioè $\Delta p / p = 10^{-9}$.

9.14 Ulteriori considerazioni sulle onde

Riprendiamo, dopo gli esempi, il discorso sulle proprietà generali dei fenomeni ondulatori. Intanto ripetiamo che si ha una propagazione ondosa ogni qual volta l'evoluzione spaziale e temporale di una grandezza fisica obbedisce a un'equazione del tipo (9.29): la funzione soluzione si propaga lungo l'asse x conservando la stessa forma (figura 9.21) e con una velocità che non dipende dalla perturbazione, ma solo dalle caratteristiche del mezzo.

È interessante osservare come si è arrivati alla (9.29) nei casi considerati. Nella propagazione in una sbarra il risultato si ottiene unendo l'equazione caratteristica del fenomeno elastico considerato (compressione) alla legge del moto di Newton; lo stesso avviene in altri fenomeni elastici, come per esempio nelle onde di pressione in un gas. Invece in una corda (o in una membrana) tesa basta la sola equazione del moto per dimostrare la propagazione.

Questi risultati fanno vedere che, mentre normalmente la soluzione dell'equazione del moto $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ descrive il moto di un corpo dotato di massa e quindi un *movimento di materia*, in alcuni casi porta a predire nuovi fenomeni in cui *la materia*, pur muovendosi, *rimane mediamente ferma* e invece si ha la propagazione di una *perturbazione locale*, che si trasmette cioè progressivamente da un elemento al successivo.

Esemplifichiamo di nuovo questo fatto, approfittando dell'esempio per introdurre al posto di una perturbazione impulsiva una perturbazione armonica. All'estremo libero della corda della figura 9.24 applichiamo la perturbazione

$$\xi(x_0, t) = \xi_0 \operatorname{sen}k(x_0 - vt) \quad ,$$

con k costante opportuna e ξ_0 sufficientemente piccola da poter ritenere validi i risultati del paragrafo 9.12. La perturbazione si propaga lungo la corda con legge

$$\xi(x, t) = \xi_0 \operatorname{sen}k(x - vt) \quad ,$$

che chiaramente è soluzione di (9.29). In un punto P_1 di coordinata x_1

$$\xi(x, t) = \xi_0 \operatorname{sen}k(x_1 - vt) \quad ;$$

il punto P_1 compie oscillazioni armoniche di ampiezza ξ_0 intorno alla posizione di equilibrio. Si tratta delle stesse oscillazioni dell'estremo con $x = x_0$, solo che avvengono con un certo ritardo, dovuto al tempo di propagazione: la differenza di fase tra le due oscillazioni è $k(x_1 - x_0)$.

Se eseguiamo una fotografia del sistema all'istante t_0 (figura 9.26 in alto), la posizione di tutti i punti della corda è data da

$$\xi(x, t_0) = \xi_0 \operatorname{sen}k(x - vt_0) \quad ;$$

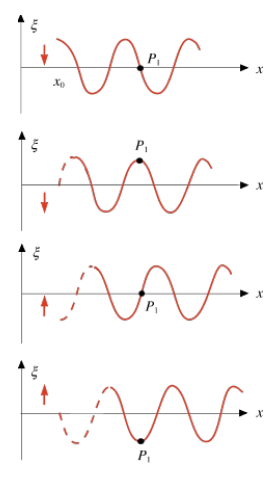


FIGURA 9.26

la corda pertanto assume la forma di una senoide di ampiezza ξ_0 . In istanti successivi t la forma è la stessa, però è spostata verso destra di $v(t - t_0)$. La corda nel suo complesso in media rimane ferma: nessun punto si muove verso un estremo o l'altro, *non si ha spostamento netto di materia*.

Le variazioni della grandezza che si propaga possono avvenire in direzione parallela alla direzione di propagazione (onde in un gas e in una sbarra) oppure in direzione ortogonale (onde in una corda e sulla superficie di un liquido). Si parla rispettivamente, come già detto, di *onde longitudinali* e *onde trasversali*.

Questa caratteristica dipende dalle proprietà elastiche e quindi in definitiva da proprietà microscopiche del mezzo. In un fluido indefinito non c'è resistenza ad un sforzo di taglio e l'unica proprietà elastica è la compressione: un tale mezzo può essere sede soltanto di onde longitudinali. In una sbarra solida invece possono esserci sia onde longitudinali, generate col già visto meccanismo della compressione e che si propagano con velocità E/ρ

che onde trasversali: queste si provocano sollecitando un estremo della sbarra ortogonalmente all'asse e si propagano con un meccanismo di scorrimento, come è evidenziato dall'espressione G/ρ

della velocità di propagazione, dove G è il modulo di rigidità. La sbarra, bloccata ad una estremità e sollecitata all'altra con un momento di torsione variabile, trasmette anche onde torsionali, la cui velocità di propagazione è di nuovo G/ρ

.

Alla fine del paragrafo 9.13 abbiamo osservato che un'onda elastica deve trasportare energia e quantità di moto in quanto è capace di fare entrare in movimento corpi materiali investiti dall'onda. La trasmissione di energia e quantità di moto avviene inizialmente dalla sorgente di vibrazione agli elementi contigui del mezzo e poi da un elemento al successivo; il fatto stesso che un

elemento precedentemente indisturbato entri in oscillazione dimostra il trasporto di energia e quantità di moto da parte dell'onda. Altra prova ne è la registrazione dell'arrivo dell'onda fatta con un rivelatore esterno che ha una parte sensibile alle vibrazioni del mezzo, capace di tradurle normalmente in un segnale elettrico. Se la sollecitazione dovuta alla sorgente è impulsiva, le oscillazioni locali dovute al passaggio dell'onda possono essere considerate come un fenomeno transitorio; se invece la sollecitazione è periodica, abbiamo un fenomeno tipo oscillazione forzata. Le espressioni esplicite dell'energia e della quantità di moto trasportate da un'onda elastica saranno determinate nel secondo volume.

10.1 Sistemi e stati termodinamici

Nella prima parte del corso di Fisica, dedicata alla meccanica, abbiamo posto l'attenzione sul moto dei punti o delle parti che costituiscono un determinato sistema. Tra le varie proprietà abbiamo visto che il lavoro compiuto dalle forze agenti è eguale alla variazione dell'energia cinetica delle parti componenti il sistema (paragrafo 4.8). In presenza di forze conservative si è visto inoltre che il lavoro si può esprimere come variazione dell'energia potenziale e che l'energia meccanica del sistema, somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale, resta costante durante il moto ovvero si conserva, risultato noto come *principio di conservazione dell'energia meccanica*. Se agiscono anche forze dissipative, come le forze di attrito, l'energia meccanica non si conserva, ma diminuisce; nel nostro studio della meccanica non è stato necessario approfondire le ragioni e le conseguenze della non conservazione dell'energia del sistema. D'altra parte, nei fenomeni meccanici macroscopici, la situazione di non conservazione dell'energia meccanica è praticamente sempre verificata.

Uno degli argomenti principali della *termodinamica* è proprio l'esame del bilancio energetico complessivo di un processo fisico, estendendo l'indagine a scambi di energia che non sono meccanici nel senso macroscopico finora discusso. Prima di arrivare alla formulazione di una legge di conservazione più generale è però necessario premettere un'esposizione sui sistemi e sui fenomeni di cui si occupa la termodinamica e introdurre le grandezze *temperatura* e *calore*.

Un sistema termodinamico è spesso assimilabile, da un punto di vista meccanico, ad un sistema continuo, considerato che microscopicamente è costituito da un numero di elementi dell'ordine del *numero di Avogadro*, $N_A = 6.022 \cdot 10^{23}$. Però non è lo studio del moto che ci interessa, né quello globale né quello dei singoli punti, che del resto sarebbe impossibile, dato il numero elevato sia di punti che di interazioni. In effetti i sistemi termodinamici che studieremo saranno tutti praticamente in quiete. Cercheremo invece di descrivere le *trasformazioni* che il sistema può subire e gli scambi energetici che ne risultano con l'ambiente circostante, individuando le grandezze più appropriate a tale descrizione. Storicamente l'origine della termodinamica classica è appunto legata al problema della produzione di lavoro con mezzi termici.

Chiamiamo *sistema termodinamico una porzione del mondo che può essere costituita da una o più parti*, per esempio un volume di gas, un liquido in equilibrio con il suo vapore, un insieme di blocchi di solidi diversi; tale sistema è oggetto delle nostre osservazioni per quanto riguarda le proprietà fisiche

Sistema
termodinamico

macroscopiche che lo caratterizzano e le loro eventuali variazioni.

Per ambiente circostante, o semplicemente *ambiente*, intendiamo quell'insieme che può essere costituito da una sola parte (per esempio l'aria o un altro fluido in cui è immerso il sistema) o da più parti (per esempio diversi corpi solidi a contatto con il sistema), con cui il sistema può interagire: l'ambiente pertanto contribuisce in generale a determinare le caratteristiche fisiche macroscopiche del sistema e la loro evoluzione.

L'insieme sistema più ambiente si chiama *universo termodinamico*, in senso locale.

Ambiente

Universo

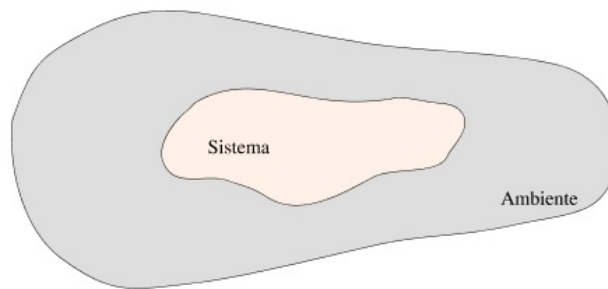


FIGURA 10.1

Se tra il sistema e l'ambiente avvengono scambi di energia e di materia, il sistema è detto *aperto*. Ad esempio, se il sistema è costituito da un liquido in ebollizione e l'ambiente dal recipiente che contiene il liquido, dall'atmosfera esterna compreso il vapore e dalla sorgente di calore, nel processo di ebollizione si ha trasformazione di liquido in vapore e quindi passaggio di materia dal sistema all'ambiente; inoltre vi è certamente passaggio di energia dall'ambiente al sistema tramite la sorgente di calore.

Sistema aperto

Il sistema si dice *chiuso* se sono esclusi scambi di materia, ma si hanno solamente scambi di energia. Ritornando all'esempio precedente, il liquido è contenuto in un recipiente chiuso, a contatto con la sorgente di calore; il vapore prodotto rimane all'interno del sistema.

Sistema chiuso

Infine il sistema è detto *isolato* se non avvengono scambi di energia e di materia con un altro sistema esterno, cioè con l'ambiente. L'universo termodinamico formato da un sistema e dal suo ambiente è da considerarsi come un sistema isolato.

Sistema isolato

Nella nostra trattazione ci occuperemo esclusivamente di sistemi chiusi, che possono scambiare solo energia.

Un sistema termodinamico viene descritto tramite un numero ridotto di grandezze fisiche direttamente misurabili, dette *coordinate* o *variabili termodinamiche*, come *volume*, *pressione*, *temperatura* (che definiremo tra breve), *massa*, *concentrazione*, *densità*, ecc.

Variabili termodinamiche

Alcune variabili termodinamiche esprimono una proprietà globale del sistema, che dipende in particolare dalle dimensioni o dall'estensione del

sistema; tali variabili vengono chiamate estensive e sono additive. Altre variabili esprimono invece una proprietà locale, che può variare da punto a punto del sistema; queste sono chiamate intensive e non sono additive. Massa e volume sono variabili estensive, pressione, temperatura, densità sono variabili intensive.

Il numero minimo di coordinate termodinamiche necessario per descrivere completamente un sistema termodinamico non è fissato a priori, ma dipende dalle caratteristiche chimico-fisiche dei vari sistemi che vengono studiati. Lo stato di un gas ideale, ad esempio, è descrivibile tramite tre grandezze, pressione, volume e temperatura, legate tra loro dall'*equazione di stato*, per cui due sole sono variabili indipendenti mentre la terza è determinata dal valore che assumono le prime due. Le proprietà di un sistema vengono sempre espresse in funzione dei valori delle sue coordinate termodinamiche.

Osserviamo che la definizione di *stato termodinamico* è concettualmente diversa da quella di stato meccanico, per il quale in linea di principio si presuppone la conoscenza di posizione e velocità di ciascuno degli n punti che costituiscono il sistema. In questi termini un sistema termodinamico non è definibile, visto il grande valore di n . In effetti, se è noto lo stato termodinamico, non è noto in generale quello meccanico, anzi a un dato stato termodinamico possono corrispondere moltissimi stati meccanici diversi.

Consideriamo ad esempio un blocco costituito da un solido cristallino in quiete ad una certa temperatura: gli ioni che lo costituiscono sono distribuiti ordinatamente nello spazio, ai vertici di un reticolo, e oscillano intorno alle posizioni di equilibrio. Istante per istante la configurazione microscopica è diversa e lo stato meccanico dei componenti è in continua evoluzione. Il sistema però è in quiete, $\mathbf{v}_{CM} = 0$, la temperatura è costante, lo stato termodinamico non cambia. Non possiamo dunque determinare lo stato dinamico dei singoli elementi, ma siamo in grado di caratterizzare lo stato termodinamico del sistema complessivo.

La descrizione termodinamica di un sistema e dei suoi scambi energetici, tramite le grandezze che ne danno il comportamento in relazione ai problemi che vogliamo studiare, porta a conclusioni di grande generalità, applicabili a sistemi molto diversi tra loro. Tale descrizione però non può fornire informazioni sulle caratteristiche microscopiche del sistema, che vanno studiate in modo concettualmente diverso.

10.2 Equilibrio termodinamico. Principio dell'equilibrio termico

Lo *stato termodinamico* di un sistema è detto *di equilibrio* quando le variabili termodinamiche che lo descrivono sono costanti nel tempo. In un sistema termodinamico all'equilibrio le variabili termodinamiche sono dette *variabili di stato*.

L'equilibrio termodinamico è il risultato di tre diversi tipi di equilibrio, che devono essere realizzati contemporaneamente:

- a) *equilibrio meccanico*: inteso come equilibrio di forze e momenti, secondo quanto studiato in meccanica;
- b) *equilibrio chimico*: non avvengono reazioni chimiche o trasferimenti di un componente del sistema entro il sistema stesso;
- c) *equilibrio termico*: la temperatura è la stessa ovunque.

Nella trattazione successiva considereremo il sistema sempre in equilibrio chimico.

Se uno stato è di equilibrio, le condizioni di equilibrio devono essere soddisfatte all'interno del sistema o di ciascuna delle sue parti, nell'interazione tra le parti del sistema e in quella tra sistema e ambiente. Quando c'è equilibrio con l'ambiente, vuol dire che esiste equilibrio tra le forze macroscopiche, qualunque sia la loro natura, agenti dall'esterno sul sistema e quelle sviluppate dal sistema; inoltre la temperatura del sistema, se questo non è isolato termicamente, è eguale alla temperatura dell'ambiente.

Ad esempio, per una massa d'acqua dentro un recipiente aperto l'equilibrio termodinamico interno e con l'ambiente significa che la temperatura deve essere eguale in ogni punto della massa d'acqua ed eguale a quella dell'aria esterna e che la pressione nella massa d'acqua è quella prevista dalle leggi dell'equilibrio idrostatico, data una certa pressione esterna. Per una massa di gas chiusa dentro un recipiente si ha equilibrio termodinamico con l'ambiente esterno quando temperatura e pressione esterne sono eguali alla temperatura e alla pressione del gas (che è la stessa ovunque nel gas, vista la piccola densità che permette di trascurare gli effetti della forza di gravità se i volumi non sono troppo grandi, come detto nel paragrafo 8.2).

In uno *stato di equilibrio* esiste, in generale, una precisa relazione tra le coordinate termodinamiche che si esprime sotto forma di *equazione di stato*. Se, per esempio, le coordinate termodinamiche sono pressione p , volume V e temperatura T , come avviene per una quantità di sostanza omogenea e pura, l'equazione di stato si scrive, in forma implicita, $f(p, V, T) = 0$ o in una qualsiasi delle tre forme esplicite $p = p(V, T)$, $V = V(p, T)$, $T = T(p, V)$.

Equazione di stato

Dati due diversi stati di equilibrio termodinamico di un certo sistema, l'eventuale evoluzione del sistema dal primo al secondo stato, spontanea o per effetto dell'interazione con l'ambiente, si chiama *trasformazione termodinamica del sistema*. Considereremo sempre come stati iniziali e finali di una certa trasformazione stati di equilibrio. Invece gli stati intermedi attraverso

cui passa il sistema durante l'evoluzione possono essere di equilibrio o di non equilibrio; in questo secondo caso non è detto che si possano determinare tutte le coordinate termodinamiche del sistema. Ai fini del calcolo si considerano anche *trasformazioni infinitesime*, tra stati molto prossimi, le cui coordinate differiscono di quantità infinitesime, per esempio dp , dV o dT .

Riprenderemo lo studio delle trasformazioni termodinamiche nel paragrafo 10.6, ma sottolineiamo fin d'ora che la considerazione delle trasformazioni è fondamentale: infatti è proprio durante una trasformazione che il sistema scambia energia con l'ambiente, nelle forme che studieremo, meccanica e termica.

Un'ultima osservazione: le variabili indipendenti che cambiano durante una trasformazione sono le coordinate termodinamiche, in funzione delle quali si esprimono tutte le proprietà del sistema; il tempo non compare esplicitamente, a differenza di quanto avviene in meccanica.

Vediamo ora di precisare il concetto di equilibrio termico. Si considerino due sistemi A e B , ciascuno in equilibrio termodinamico, con il sistema A alla temperatura T_A e quello B alla temperatura T_B . I sistemi si dicono in *equilibrio termico* tra loro quando hanno la stessa temperatura, $T_A = T_B$: la *temperatura* è pertanto *l'indice dell'equilibrio termico tra due sistemi*.

È verificato sperimentalmente il seguente *principio dell'equilibrio termico*: due sistemi che siano ciascuno in equilibrio termico con un terzo sistema sono in equilibrio termico tra loro. Se il sistema A è in equilibrio termico con il sistema C ($T_A = T_C$) e se anche il sistema B è in equilibrio termico con C ($T_B = T_C$), allora A è in equilibrio termico con B ($T_A = T_B$).

Un metodo possibile per portare due sistemi all'equilibrio termico è quello di tenerli a contatto, tramite una parete. Se viene raggiunto l'equilibrio termico si parla di *parete diatermica*, mentre se non si raggiunge mai l'equilibrio termico, e pertanto le due temperature sono indipendenti, la *parete* è detta *adiabatica*. Nella realtà la situazione adiabatica è un caso limite, che può essere realizzato per tempi brevi, ma non in assoluto.

Due sistemi separati da una parete diatermica si dicono anche in *contatto termico* tra loro e inevitabilmente raggiungono l'equilibrio termico. Il contatto termico si può realizzare anche direttamente, senza alcuna parete, come avviene per due corpi solidi a contatto, per un corpo solido immerso in un fluido o per due liquidi non miscibili a contatto; la parete diatermica si rende necessaria quando bisogna contenere il sistema, come avviene nel caso di un gas.

Un sistema è detto adiabatico se è circondato da pareti adiabatiche e quindi non può essere messo in contatto termico con un altro sistema o con l'ambiente. Una parete è sempre necessaria per impedire o ritardare l'equilibrio termico.

Notiamo infine che l'esistenza di equilibrio termico tra due sistemi non presuppone affatto che essi siano anche in equilibrio meccanico, così come l'equilibrio meccanico non comporta anche quello termico: i due tipi di

Trasformazione
termodinamica

Equilibrio termico

Contatto termico

Sistema adiabatico

equilibrio sono indipendenti tra loro.

10.3 Definizione di temperatura. Termometri

Vediamo ora come si può procedere a una *definizione operativa di temperatura*. Per poterla effettuare devono essere realizzate due condizioni.

Innanzitutto deve esistere una grandezza X che caratterizza un fenomeno fisico e che varia con la temperatura. X si chiama *caratteristica termometrica* e la temperatura è una funzione di X , $\theta(X)$, detta *funzione termometrica*. Il dispositivo in cui avviene il fenomeno e che fornisce il valore della caratteristica termometrica è indicato come *termometro*.

Nella tabella 10.1 sono riportati alcuni tipi di termometro.

Termometro	Fenomeno	Caratteristica termometrica
a liquido	dilatazione termica di un liquido	lunghezza della colonna di liquido
a resistenza	variazione della resistenza elettrica di un conduttore metallico o di un semiconduttore con la temperatura	resistenza elettrica
a gas a volume costante	variazione della pressione con la temperatura	pressione
a termocoppia	forza elettromotrice che compare in un circuito formato da due fili diversi, con una giunzione a una temperatura di riferimento e l'altra a diversa temperatura	forza elettromotrice

In secondo luogo deve esistere un sistema, in uno stato di equilibrio, definibile con precisione e riproducibile con facilità, cui viene attribuito un valore arbitrario di temperatura, detto *punto fisso*.

Punto triplo dell'acqua

Il punto fisso campione, come deciso nel 1954 dalla Conferenza dei Pesi e Misure, è il *punto triplo dell'acqua*, ovvero quel particolare stato in cui ghiaccio, acqua e vapor d'acqua saturo sono in equilibrio. Al punto triplo dell'acqua è stata assegnata arbitrariamente la temperatura di 273.16 K, dove il simbolo K indica l'unità di misura prescelta, il kelvin.

Per arrivare a esprimere numericamente la temperatura stabiliamo in via preliminare che la forma della funzione $\theta(X)$ sia $\theta(X) = aX$, con a costante. È la scelta più semplice, giustificata però dal fatto che è valida per il termometro assoluto (paragrafo 12.4). Il sistema, di cui vogliamo misurare la temperatura, viene messo a contatto termico con un termometro che, all'equilibrio termico, fornisce il valore X . Tale termometro al punto triplo dell'acqua dà il valore X_{pt} e per definizione abbiamo

$$\theta(X_{pt}) = aX_{pt} = 273.16$$

da cui $a = 273.16/X_{pt}$, valore valido per quel termometro. Ne segue che la temperatura T del sistema, espressa dal valore della funzione $\theta(X) = aX$, si scrive

$$T = 273.16 \frac{X}{X_{pt}} \text{ K} \quad . \quad (10.1)$$

La (10.1) è la formula fondamentale per ogni termometro e fornisce la temperatura empirica di quel termometro.

Rivediamo in breve la procedura seguita: si tara il termometro mettendolo in contatto termico con una cella al punto triplo dell'acqua; per misurare una qualsiasi temperatura diversa da 273.16 K si mette il termometro in contatto termico con il sistema a quella temperatura, si determina X e si calcola T dalla (10.1). Nella pratica il risultato della misura viene fornito direttamente in kelvin.

Si usa il termine *temperatura empirica* in quanto, sperimentalmente, si constata che termometri di tipo diverso, o anche due diversi termometri dello stesso tipo, danno sempre letture diverse quando sono in equilibrio termico con lo stesso stato di un certo sistema, pur dando per costruzione tutti la stessa temperatura al punto triplo dell'acqua. Vedremo nel capitolo 12 come si supera questo problema con l'introduzione della *temperatura termodinamica assoluta*.

In tabella 10.2 sono riportate le temperature, misurate con un termometro a idrogeno a volume costante e uno a resistenza di platino, di diversi sistemi in equilibrio. In tabella 10.3 sono elencati alcuni punti fissi di riferimento, la cui temperatura è stata misurata con un termometro a gas a volume costante (paragrafo 11.2).

Tabella 10.2 Temperature misurate con due termometri diversi

	temperatura di ebollizione			temperatura di fusione	temperatura di sublimazione	punto triplo
	N ₂	O ₂	H ₂ O	Sn	CO ₂	H ₂ O
termometro a idrogeno a volume costante	73	86	374	510	193	273 K
termometro a resistenza di platino	55	70	380	516	185	273 K

Tabella 10.3 Alcuni punti fissi

punto di ebollizione dell'idrogeno	20.28 K	-252.87 °C
punto di ebollizione dell'ossigeno	90.19	-182.96
punto triplo dell'acqua	273.16	0.01
punto di ebollizione dell'acqua	373.15	100.00
punto di fusione dello zinco	692.73	419.58
punto di fusione dell'oro	1337.58	1064.43

si intende che l'ebollizione e la fusione avvengono a pressione atmosferica

Scale termometriche

La *scala* che viene più comunemente usata nelle normali misure di temperatura è quella *Celsius*, in cui la temperatura del punto triplo dell'acqua vale 0.01 gradi Celsius (simbolo °C). Pertanto lo zero della scala Celsius è a 273.15 K e corrisponde alla temperatura di fusione del ghiaccio a pressione atmosferica. Il valore di una differenza di temperatura è assunto lo stesso in gradi Celsius o in kelvin e pertanto la formula di conversione dal valore in kelvin T (K) al valore in gradi Celsius t (°C) è semplicemente

$$t(^{\circ}\text{C}) = T(\text{K}) - 273.15$$

Nei paesi anglosassoni vengono utilizzate altre due scale di temperatura, la *scala Rankine* t ($^{\circ}\text{R}$) e la *scala Fahrenheit* t ($^{\circ}\text{F}$), che sono così definite rispetto alla temperatura espressa in kelvin:

$$t(^{\circ}\text{R}) = \frac{9}{5} T(\text{K}) ,$$

Scala Rankine

$$t(^{\circ}\text{F}) = \frac{9}{5} T(\text{K}) - 459.67 .$$

Il legame tra scala Fahrenheit e scala Celsius è pertanto:

Scala Fahrenheit

$$t(^{\circ}\text{F}) = \frac{9}{5} t(^{\circ}\text{C}) + 32 , \quad t(^{\circ}\text{C}) = \frac{5}{9} [t(^{\circ}\text{F}) - 32] .$$

Nella scala Fahrenheit il punto di fusione del ghiaccio (0°C) corrisponde a 32°F e il punto di ebollizione dell'acqua (100°C) a 212°F ; la temperatura ambiente di 20°C vale 68°F .

10.4 Sistemi adiabatici. Esperimenti di Joule.

Calore

Verso la metà del 1800 Joule condusse una serie di esperimenti fondamentali sugli effetti termici del lavoro meccanico.

Schematicamente, le varie esperienze eseguite da Joule su un sistema termodinamico costituito da una certa quantità d'acqua avevano lo scopo di realizzare un aumento della temperatura del sistema con procedimenti diversi.

- a) Viene messo in rotazione un mulinello nell'acqua spendendo il lavoro W_1 , fornito dalla variazione di energia potenziale di due masse che scendono sotto l'azione della forza di gravità. Con varie palette fisse immerse nell'acqua si impedisce che essa entri in rotazione. L'acqua, agitata dal mulinello, viene riscaldata per effetto dell'attrito.
- b) Viene immerso nell'acqua un conduttore di resistenza R , percorso da corrente. W_2 è il lavoro speso per fare circolare la corrente.
- c) Viene compressa una certa quantità di gas, contenuta in un recipiente con pareti diatermiche, immerso nell'acqua. Il processo di compressione del gas richiede un lavoro W_3 .
- d) Vengono strofinati tra loro due blocchi di metallo immersi nell'acqua. Il lavoro speso contro le forze di attrito è W_4 .

Nelle varie esperienze l'insieme costituito dall'acqua e dal dispositivo meccanico o elettrico è racchiuso entro pareti adiabatiche.

Il risultato fondamentale osservato da Joule è che il lavoro speso, a parità di massa d'acqua, W_1 o W_2 o W_3 o W_4 , è sempre proporzionale alla variazione di temperatura dell'acqua con la stessa costante di proporzionalità. Il sistema termodinamico massa d'acqua passa da uno stato iniziale di equilibrio, caratterizzato dal valore T_{in} della temperatura, ad uno stato finale di equilibrio con temperatura T_{fin} tramite quattro diversi processi, ma il lavoro meccanico è sempre lo stesso.

Questo risultato, l'indipendenza del lavoro dal tipo di trasformazione che congiunge due stati termodinamici, purché il sistema sia adiabatico, è confermato da altri esperimenti e può essere assunto come legge generale.

Sulla base delle considerazioni fatte per l'energia potenziale nel caso delle forze conservative (indipendenza del lavoro dal percorso che collega due posizioni) scriviamo la seguente relazione:

$$W_{ad} = -\Delta U = U_{in} - U_{fin}, \quad (10.2)$$

dove U è una funzione che dipende solo dallo stato del sistema, cioè dalle sue coordinate termodinamiche.

Se il sistema fornisce lavoro all'esterno, W è assunto positivo e pertanto

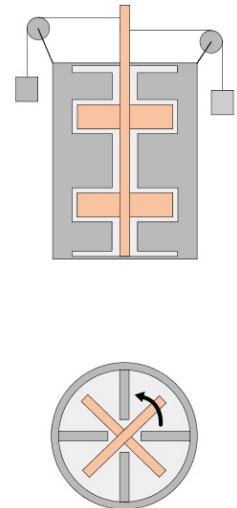


FIGURA 10.2

l'energia U diminuisce; se invece si compie lavoro dall'esterno sul sistema W è assunto negativo e l'energia U aumenta. Riprenderemo nel prossimo paragrafo la convenzione sui segni degli scambi di energia.

La relazione (10.2) fornisce una definizione operativa dell'energia U . Dato un valore arbitrario U_A all'energia dello stato A , preso come riferimento, il valore U_B nello stato B è determinato dal lavoro adiabatico scambiato, secondo la (10.2). L'energia U pertanto è definita a meno di una costante additiva, come nel caso dell'energia potenziale; però la presenza di questa costante è irrilevante, in quanto dal punto di vista fisico è importante solo la variazione dell'energia U .

L'aumento di temperatura di una massa d'acqua si può d'altra parte ottenere facilmente, come è esperienza comune, avvicinando l'acqua ad un corpo più caldo, cioè a temperatura superiore. Immaginiamo questa volta di avere il corpo caldo e l'acqua dentro un contenitore adiabatico: si realizza uno scambio di calore tra il corpo e l'acqua, senza nessuna azione meccanica macroscopica (masse che scendono, corpi strofinati, ecc.).

Se possiamo ottenere lo stesso cambiamento di stato termodinamico dell'acqua, segnalato dalla stessa variazione di temperatura, tramite scambio di calore o di lavoro meccanico, possiamo postulare l'equivalenza degli effetti delle due procedure e scrivere, anche nel caso di scambio di calore con lavoro nullo, una relazione analoga a (10.2):

$$Q = \Delta U \quad , \quad (10.3)$$

assumendo positivo il calore ceduto al sistema dall'esterno. Pertanto

$$Q = -W \quad , \quad (10.4)$$

dove, per chiarezza, ripetiamo che Q rappresenta il calore scambiato, senza lavoro esterno, per far variare di ΔT la temperatura della massa d'acqua e W il lavoro che deve essere speso, in condizioni adiabatiche, per ottenere la stessa variazione di temperatura. Il segno negativo dipende dalla convenzione adottata per i segni degli scambi di energia.

La (10.4) si chiama *equivalenza tra calore e lavoro*; essa indica anche come si possa eseguire una misura del calore scambiato. Il calore viene in questo modo espresso in joule. L'equivalenza calore-lavoro venne formulata per la prima volta nel 1842 da Mayer.

In conclusione possiamo affermare che esiste un meccanismo di scambio di energia che non comporta movimenti macroscopici, al quale diamo il nome di *scambio di calore*.

Equivalenza tra calore e lavoro

10.5 Primo principio della termodinamica. Energia interna

Nel paragrafo precedente abbiamo trattato il caso di un processo con scambio di lavoro in condizioni adiabatiche. Ora consideriamo una situazione più generale: si abbia un sistema che oltre allo scambio di lavoro meccanico con l'ambiente possa avere anche scambio di calore, cioè trasmissione di energia non accompagnata da fenomeni meccanici macroscopici. Sperimentalmente si trova sempre verificato questo risultato: *se il sistema compie una trasformazione dallo stato A allo stato B, scambiando calore e lavoro con l'ambiente, Q e W dipendono dalla trasformazione che congiunge i due stati termodinamici, mentre la differenza Q - W risulta indipendente dalla trasformazione.*

Si può pertanto scrivere, posto $\Delta U = U_B - U_A$,

$$Q - W = \Delta U, \quad Q = \Delta U + W. \quad (10.5)$$

La (10.5) esprime il *primo principio della termodinamica*, che viene assunto come postulato basato sull'esperienza; vediamo che essa contiene come casi particolari le situazioni che ci avevano portato a scrivere (10.2). Discutiamo il significato della (10.5), che può essere articolato in vari punti.

- 1) Esiste una funzione delle coordinate termodinamiche del sistema o, come si dice, *una funzione di stato*, chiamata *energia interna*, le cui variazioni danno gli scambi energetici del sistema con l'ambiente che lo circonda durante una trasformazione. Dati due stati A e B è fissata ΔU : in una particolare trasformazione dallo stato A a quello B può essere preponderante lo scambio di calore, mentre in un'altra trasformazione, sempre tra tali stati, quello di lavoro, però in ambedue le diverse trasformazioni lo scambio totale $Q - W$ è lo stesso. Si noti che se gli stati A e B sono scelti a caso, non esiste in generale una trasformazione AB in cui sia $Q = 0$ o un'altra in cui sia $W = 0$. Inoltre, se U resta costante durante una trasformazione, e quindi $\Delta U = 0$, può essere che sia verificata la situazione $Q = 0$ e $W = 0$ oppure $Q \neq 0$ e $W \neq 0$, ma ad ogni modo si ha $Q - W = 0$, ossia $Q = W$.
- 2) Quando, durante una trasformazione, si fornisce energia a un sistema, sia tramite un lavoro meccanico che con uno scambio di calore, questa resta immagazzinata sotto forma di energia interna e può essere successivamente riutilizzata. Secondo il primo principio non ci sono limiti concettuali per questi processi, purché sia rispettata la (10.5). Vedremo però che esiste un limite per la riutilizzazione dell'energia termica quando studieremo *il secondo principio della termodinamica*.

Possiamo dire che la (10.5) costituisce l'espressione del bilancio energetico di una trasformazione termodinamica; si tratta di un bilancio più completo di quello che è possibile fare in meccanica, in quanto si tiene conto anche degli scambi di calore.

- 3) Il termine *energia interna* indica che non si tratta dell'energia cinetica del sistema nel suo complesso, $\frac{1}{2}mv^2_{CM}$, o dell'energia potenziale, per esempio mgz_{CM} , bensì di energia *legata a proprietà interne del sistema*, come moto molecolare o forze intermolecolari, che non dipendono dallo stato complessivo di moto, ma

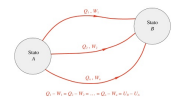


FIGURA 10.3

Primo principio della termodinamica

piuttosto dalla temperatura del sistema, dalla pressione a cui è sottoposto o dal volume che occupa. È importante osservare che l'espressione esplicita dell'energia interna in funzione delle coordinate termodinamiche che individuano lo stato di un sistema dipende dal sistema stesso.

4) Il primo principio mette in evidenza l'esistenza di un meccanismo di scambio di energia, che non è esprimibile come lavoro meccanico macroscopico: a questo diamo il nome di *calore* e, come vedremo, esso è ancora riconducibile a fenomeni meccanici, ma a livello microscopico. *La (10.5) fornisce la definizione più generale di calore, sia concettualmente che dal punto di vista del calcolo.* Discuteremo in seguito le varie modalità macroscopiche che danno luogo a scambi di calore. Per ora anticipiamo che il fenomeno avviene tra due sistemi solo se sono in contatto termico ed esiste tra di essi una differenza di temperatura (finita o infinitesima).

A proposito di calore e lavoro è necessario prestare attenzione alla terminologia, per evitare espressioni concettualmente errate: il calore e il lavoro sono forme di *scambio di energia* e quindi si deve sempre parlare di calore o lavoro scambiati tra sistemi e mai di calore o lavoro posseduti da un sistema. Ciò che un sistema possiede è una certa quantità di energia che può variare in una trasformazione, appunto a seguito di scambi di calore e lavoro. Anche espressioni come sviluppo di calore in un corpo, ad esempio a seguito del passaggio di una corrente elettrica in un conduttore o di una compressione rapida in un gas, sono errate.

5) Se un sistema termodinamico esegue una qualsiasi trasformazione che lo riporti allo stato iniziale, ovvero una *trasformazione ciclica* o chiusa, si ha per definizione

Trasformazione ciclica

$$\Delta U = 0 \Rightarrow Q = W ; \quad (10.6)$$

il calore scambiato è eguale al lavoro scambiato. Se nella trasformazione ciclica il sistema complessivamente assorbe calore, $Q > 0$, esso fornisce lavoro, $W > 0$, e costituisce una *macchina termica*. Se invece il sistema cede calore, $Q < 0$, esso deve assorbire lavoro, $W < 0$. Si noti che Q e W rappresentano la somma algebrica dei calori e dei lavori scambiati nelle singole trasformazioni che, considerate in successione, formano la trasformazione ciclica completa.

6) Per eseguire calcoli specifici è assai utile considerare trasformazioni termodinamiche nelle quali le variabili di stato cambiano di quantità infinitesime. In una tale trasformazione infinitesima il primo principio ha la forma:

$$dQ = dU + dW . \quad (10.7)$$

Integrando per una trasformazione finita si ha

$$\Delta U = \int_A^B dU = U_B - U_A ,$$

indipendente dalla trasformazione. Il calore e il lavoro scambiati nella trasformazione finita si ottengono sommando sulle quantità infinitesime, cioè di

nuovo integrando:

$$Q_{AB} = \int_A^B dQ \quad , \quad W_{AB} = \int_A^B dW \quad ;$$

però, come sappiamo, Q e W dipendono da come si è svolta effettivamente la trasformazione e ciascuno di essi non può essere espresso come differenza dei valori di una funzione di stato, $f(B) - f(A)$. Questi fatti si esprimono dicendo che, nella (10.7), *la variazione infinitesima di energia interna è un differenziale esatto*, mentre dQ e dW , cioè *le quantità infinitesime di calore e lavoro scambiati, non sono differenziali esatti*. Anche se usiamo lo stesso simbolo questa sostanziale differenza va sempre ricordata.

7) L'unità di misura di energia interna, calore e lavoro è ovviamente la stessa ed è il joule.

Convenzione sui segni di calore e lavoro

Riportiamo qui sotto la convenzione sui segni di Q e W , adottata sulla base della principale applicazione che storicamente è stata fatta dei fenomeni termici, cioè la trasformazione di calore in lavoro nelle macchine termiche. Con tale convenzione i flussi di calore e di lavoro hanno segno opposto e il primo principio viene scritto nella forma (10.5). Assumiamo dunque:

calore che entra in un sistema dall'esterno	segno positivo
lavoro che è compiuto da un sistema sull'esterno	segno positivo
calore che esce da un sistema verso l'esterno	segno negativo
lavoro che è compiuto dall'esterno sul sistema	segno negativo

Se invece i segni dei flussi di calore e di lavoro fossero scelti eguali, il primo principio si dovrebbe scrivere nella forma $Q + W = \Delta U$.

Naturalmente quello che importa in una trasformazione è capire qual è il flusso energetico, cioè se il calore è assorbito o ceduto dal sistema, se il lavoro è prodotto o subito, in modo da poter correttamente pervenire al bilancio energetico. I segni sono solo convenzionali, però scelta una certa convenzione questa va mantenuta in tutti i ragionamenti.

Si faccia attenzione al fatto che noi stiamo considerando i *flussi di energia dal sistema*. Se il sistema assorbe calore, e diciamo che Q è positivo, questo calore è ceduto al sistema dall'ambiente e pertanto per l'ambiente è negativo e come tale dobbiamo trattarlo se ragioniamo sull'ambiente: se Q è il calore scambiato dal sistema, $-Q$ è quello scambiato dall'ambiente. Un discorso analogo va fatto per il lavoro.

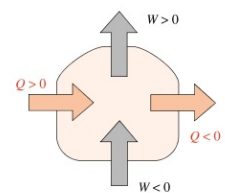


FIGURA 10.4

10.6 Trasformazioni termodinamiche. Lavoro e calore

Nel paragrafo 10.2 abbiamo definito una trasformazione come un passaggio del sistema attraverso diversi stati, ovvero come un processo in cui cambiano le coordinate termodinamiche, qualcuna o tutte, del sistema.

La (10.5) fissa il bilancio energetico di tale processo e infatti, oltre a definire una trasformazione, siamo interessati a calcolare quanto valgono ΔU , Q e W .

La quantità ΔU può essere calcolata direttamente se è nota l'espressione esplicita di U , altrimenti l'unico modo possibile è servirsi di (10.5), $\Delta U = Q - W$, conoscendo quindi il calore e il lavoro scambiati. Si osservi però che ΔU non deve necessariamente essere calcolata lungo la data trasformazione, bensì lungo una qualsiasi altra che abbia gli stessi stati iniziale e finale e per la quale risulti più facile determinare Q e W : infatti l'energia interna è funzione di stato e quindi ΔU non dipende dalla trasformazione.

Anche Q e W possono essere calcolati direttamente solo in casi specifici in cui si abbiano le loro espressioni analitiche, utilizzando la data trasformazione e non una qualsiasi altra con gli stessi estremi, poiché in generale i valori del calore e del lavoro scambiati cambiano con la trasformazione. Se non conosciamo le espressioni analitiche dobbiamo ricorrere al primo principio:

$$Q = \Delta U + W \quad , \quad W = Q - \Delta U \quad .$$

L'espressione del primo principio viene dunque usata in definitiva come equazione ad una incognita e deve essere collegata a relazioni che permettono il calcolo delle altre due quantità.

Se conosciamo le espressioni di ΔU , Q e W in funzione delle coordinate termodinamiche, (10.5) diventa un'equazione che lega le coordinate termodinamiche durante la trasformazione, ovvero diventa l'equazione della trasformazione.

Trasformazioni adiabatiche

Si chiama *trasformazione adiabatica* una qualsiasi trasformazione in cui $Q = 0$, in cui cioè il sistema non scambia calore con l'esterno, ossia è isolato termicamente dall'esterno. Sistema adiabatico è un sistema che compie solo trasformazioni adiabatiche e per il quale quindi il primo principio si scrive $W = -\Delta U$, come abbiamo già visto. Gli scambi energetici con l'ambiente possono avvenire solo sotto forma di lavoro meccanico.

Sperimentalmente questa situazione si realizza chiudendo il sistema in un contenitore con pareti adiabatiche. Poiché, come discusso precedentemente, due sistemi separati da una parete adiabatica non raggiungono l'equilibrio termico, che invece viene realizzato se la parete è diatermica, concludiamo:

a) una trasformazione che porta all'equilibrio termico avviene con scambio di calore;

- b) una parete diatermica permette il passaggio di calore da un sistema all'altro, è quindi una parete conduttrice di calore;
- c) una parete adiabatica non permette il passaggio di calore, è quindi isolante rispetto allo scambio di calore.

Queste precisazioni completano l'esame del ruolo della pareti tra due sistemi dal punto di vista degli scambi di calore.

Nella pratica l'adiabaticità perfetta non esiste; tutte le sostanze con cui si realizzano pareti adiabatiche permettono un certo scambio di calore.

Si ammette che possa essere adiabatica una trasformazione che avviene rapidamente, così che non ci sia tempo per scambi di calore apprezzabili.

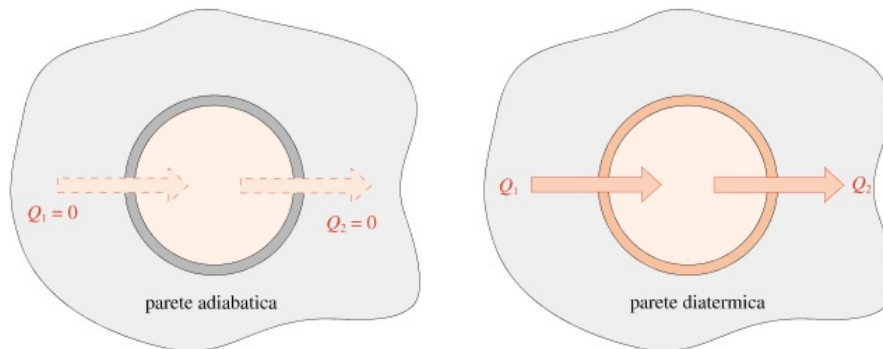


FIGURA 10.5

Trasformazioni reversibili e irreversibili

Tornando a considerare una trasformazione qualsiasi, gli *stati intermedi* attraverso cui passa il sistema *possono essere di equilibrio e di non equilibrio*.

Chiariamo tali situazioni con alcuni esempi.

- 1) Due corpi solidi a temperature diverse, T_1 e T_2 , sono contenuti in un unico contenitore adiabatico. I due corpi vengono posti in contatto termico; tra di essi c'è uno scambio di calore e alla fine essi raggiungono uno stato di equilibrio termico ad una temperatura intermedia tra T_1 e T_2 . Durante il processo c'è sempre una *differenza di temperatura finita* tra i due corpi e quindi, durante la trasformazione, non c'è mai equilibrio termico: gli stati intermedi sono di non equilibrio, anche se vi è sempre equilibrio meccanico e chimico.
- 2) Un contenitore adiabatico è diviso in due parti: in una c'è un gas a bassa pressione mentre nell'altra siamo in condizioni di vuoto. Viene aperto un forellino nella parete divisoria e il gas si espande fino a riempire completamente tutto il contenitore. Sperimentalmente si osserva che in questo processo c'è sempre equilibrio termico, però non c'è equilibrio meccanico: in ogni istante c'è una *differenza finita di pressione* tra le due parti e solo alla fine del processo la pressione è la stessa ovunque. Gli stati intermedi sono di non equilibrio.
- 3) Un corpo con velocità iniziale v viene frenato dall'attrito con il piano su cui si muove fino a fermarsi. L'energia cinetica diminuisce e contemporaneamente si osserva un aumento di temperatura delle superfici a contatto, del corpo e del piano. Assumiamo che questo processo duri un tempo breve, così da essere sostanzialmente adiabatico. Successivamente i corpi riscaldatisi cedono calore all'ambiente e alla fine tutto è ritornato alla temperatura ambiente. Nella prima fase del processo non c'è equilibrio meccanico; $W = -\Delta U$ e poiché $W = \Delta E_k$ è negativo, U cresce. Nella seconda fase non c'è equilibrio termico; $\Delta U = Q$, Q è ceduto all'ambiente, U decresce. Tutti gli stati intermedi sono di non equilibrio. Complessivamente sparisce l'energia

cinetica, ma viene ceduto calore all'ambiente in quantità eguale. Vediamo così come viene realizzato il bilancio energetico nei processi meccanici dissipativi.

4) Un gas è contenuto in un recipiente, immerso a sua volta in una vasca d'acqua a temperatura costante T . Le pareti del recipiente sono diatermiche per cui il gas è in equilibrio termico alla temperatura T . Muovendo una parete del contenitore si lascia espandere il gas lentamente, così che ci sia sempre in pratica l'equilibrio termico con l'acqua. L'espansione viene effettuata applicando alla parete mobile una forza che in ogni istante è appena inferiore a quella di pressione esercitata dal gas, in modo che sia realizzato anche l'equilibrio meccanico. Tale situazione può essere sperimentalmente ottenuta se la parete mobile è orizzontale e su di essa sono posati N piccoli pesetti di massa m , tali che il loro peso Nmg controbilanci la forza di pressione del gas; togliendo lentamente e successivamente i pesetti si compie il processo descritto. Ci si approssima sempre meglio alla condizione di equilibrio meccanico quanto più piccoli e numerosi sono i pesetti. Oppure si può equilibrare la pressione del gas con la pressione (regolabile) di un altro gas che agisce sulla parte esterna della parete mobile.

A differenza dei casi 1), 2), 3) tutti gli stati intermedi si possono considerare di equilibrio: la pressione e la temperatura del gas sono in ogni istante conosciute e sono eguali ai valori caratteristici dell'ambiente esterno. Se invece l'espansione del gas fosse rapida, non sarebbe possibile realizzare le condizioni di equilibrio in ogni istante.

Dagli esempi discussi e da molti altri simili possiamo trarre alcune conclusioni: per effettuare una trasformazione che passi attraverso stati di equilibrio bisogna procedere con variazioni molto piccole delle coordinate termodinamiche, in modo che queste siano in pratica definite in ogni istante. Ciò si può realizzare discostandosi molto poco da uno stato di equilibrio, per permettere che la trasformazione avvenga, e attendendo il ristabilirsi dell'equilibrio nelle nuove condizioni prima di procedere a un'ulteriore variazione infinitesima di stato. Quando si opera così, si parla di *trasformazione quasi-statica*, caratterizzata, in conseguenza di quanto detto, da uno svolgimento lento.

Osserviamo però che la lentezza della trasformazione, se è in pratica una condizione necessaria, non è certamente sufficiente affinché gli stati intermedi siano di equilibrio. Nei casi 1), 2), 3) visti precedentemente, per quanto lento sia il processo gli stati intermedi sono sempre di non equilibrio.

Oltre all'esame delle condizioni di equilibrio o non equilibrio si deve verificare durante la trasformazione l'eventuale presenza di *forze dissipative*, come attriti che si oppongono allo spostamento di parti meccaniche durante lo scambio di lavoro, attriti viscosi, ecc.

In definitiva, possiamo classificare le trasformazioni secondo il seguente schema:

a) *una trasformazione è detta reversibile se essa avviene attraverso stati di equilibrio e in assenza di qualsiasi forza dissipativa;*

b) *una trasformazione è detta irreversibile qualora non si svolga secondo le modalità precedenti, ossia passi attraverso stati di non equilibrio o avvenga in presenza di forze dissipative oppure si verifichino, durante il suo svolgimento, entrambe queste situazioni.*

Le trasformazioni reversibili sono casi limite, utilissime concettualmente per

Trasformazione
reversibile

Trasformazione

i calcoli, ma difficilmente realizzabili.

Una trasformazione reversibile può essere arrestata in qualunque stato intermedio e, variando di poco le condizioni esterne, si può invertire il verso della trasformazione, ripercorrendo gli stessi stati già attraversati. In tal caso cambia il segno degli scambi di energia e della variazione di energia interna.

Infatti, consideriamo la trasformazione reversibile AB , cioè dallo stato iniziale A a quello finale B , durante la quale l'energia interna varia della quantità $\Delta U = U(B) - U(A)$ e vengono scambiate le quantità di lavoro e calore W e Q . Percorrendo la trasformazione in senso inverso la variazione di energia interna è $-\Delta U = U(A) - U(B)$, come è ovvio trattandosi di una funzione di stato. Poiché la trasformazione è reversibile le coordinate termodinamiche sono note durante il processo e in ogni stato sono legate da una precisa relazione matematica, l'equazione di stato; da ciò deriva, come vedremo in esempi successivi, che il lavoro si può esprimere con un integrale che contiene le coordinate e le loro variazioni; se si cambia il segno delle variazioni cambia il segno dell'integrale e W diventa $-W$, cioè $W_{A \rightarrow B} = -W_{B \rightarrow A}$. Allora, dall'espressione (10.5) del primo principio si ricava che nella trasformazione reversibile percorsa in senso inverso cambia anche il segno del calore, Q diventa $-Q$, cioè $Q_{A \rightarrow B} = -Q_{B \rightarrow A}$.

Quando avremo discusso il secondo principio della termodinamica saremo in grado di comprendere meglio, dal punto di vista concettuale, il significato di reversibilità e irreversibilità.

10.7 Calorimetria

Il primo principio della termodinamica introduce e definisce la grandezza fisica calore, mettendo in evidenza che, in generale, lo scambio di calore comporta per un sistema una variazione di energia interna e uno scambio di lavoro secondo (10.5); questa relazione offre anche un possibile modo per calcolare esplicitamente il calore in una generica trasformazione, come discusso nel paragrafo 10.6.

Esistono però processi particolari, e molto comuni, in cui è possibile ricavare un'espressione analitica del calore scambiato direttamente in funzione della variazione delle coordinate termodinamiche nella trasformazione.

Consideriamo l'esempio 1) del paragrafo 10.6 in cui due corpi a diversa temperatura venivano messi in contatto termico all'interno di un contenitore adiabatico. Se T_e è il valore della temperatura di equilibrio raggiunta da entrambi i corpi, il corpo più caldo passa dalla temperatura T_1 a T_e con $T_e < T_1$, mentre quello più freddo passa da T_2 a T_e , con $T_e > T_2$. Nel processo non viene scambiato lavoro né con l'ambiente né tra i due corpi, se ammettiamo che le variazioni di volume dei due corpi siano trascurabili; inoltre i due corpi non scambiano calore con l'ambiente. Pertanto Q e W sono nulli e l'energia interna totale del sistema, costituito dai due corpi, resta costante.

Tuttavia lo stato termodinamico del primo corpo cambia e di conseguenza cambia la sua energia interna della quantità ΔU_1 ; analogamente l'energia interna del secondo corpo cambia di ΔU_2 . Dovendo essere $\Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2 = 0$, abbiamo $\Delta U_1 = -\Delta U_2$, le variazioni di energia interna dei due corpi sono eguali in modulo ed opposte. Inoltre, l'applicazione di (10.5) a ciascun corpo separatamente dà $\Delta U_1 = Q_1$ e $\Delta U_2 = Q_2$: il calore scambiato dal primo corpo è eguale ed opposto a quello scambiato dal secondo, $Q_1 = -Q_2$. D'altra parte gli esperimenti di Joule fanno ritenere che l'energia interna cresca con la temperatura, per cui $\Delta U_1 < 0$ e $\Delta U_2 > 0$: in conclusione possiamo affermare che il calore ceduto dal primo corpo, il corpo più caldo, è eguale in modulo a quello assorbito dal secondo corpo, più freddo.

In linea di principio, il calore scambiato in queste condizioni può essere misurato secondo la seguente metodologia:

- si cede Q_1 ad una massa d'acqua, ponendo il corpo a contatto termico con l'acqua per il tempo necessario alla variazione $T_e - T_1$ di temperatura del corpo; in corrispondenza anche l'acqua subisce una variazione di temperatura ΔT , con ΔT non necessariamente eguale a $T_e - T_1$ (in modulo);
- si misura, per esempio con uno dei dispositivi di Joule, il lavoro W_2 necessario per produrre la stessa variazione ΔT nella stessa massa d'acqua;
- si pone $|Q_1| = W_2$.

Nel realizzare queste misure si trova che esiste proporzionalità tra il calore Q

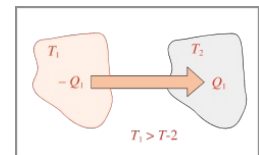


FIGURA 10.6

scambiato da un corpo, la massa del corpo stesso e la variazione della sua temperatura:

$$Q = m c (T_{\text{fin}} - T_{\text{in}}) , \quad (10.8)$$

dove c è una grandezza caratteristica della sostanza di cui è costituito il corpo, in generale funzione a sua volta della temperatura, chiamata *calore specifico*. Osserviamo che il calore è una grandezza estensiva, mentre il calore specifico è una grandezza intensiva.

Calore specifico

Da (10.8) si deduce che *il calore specifico rappresenta il calore che occorre scambiare con l'unità di massa di una data sostanza, alla temperatura T , per farne variare la temperatura di 1 K (ovvero di 1°C).*

Capacità termica

Il prodotto $C = mc$, detto *capacità termica* del corpo, *rappresenta a sua volta il calore necessario per far variare di 1 K la temperatura del corpo.*

La relazione (10.8) può essere scritta in termini infinitesimi:

$$dQ = m c dT , \quad (10.9)$$

essendo dQ il calore infinitesimo scambiato dalla massa m alla temperatura T e dT la corrispondente variazione infinitesima di temperatura. Da (10.9) segue per il calore specifico

$$c = \frac{1}{m} \frac{dQ}{dT} . \quad (10.10)$$

Ritornando ai due corpi in contatto termico, l'eguaglianza $Q_1 = - Q_2$ diviene in base a (10.8)

$$m_1 c_1 (T_e - T_1) = - m_2 c_2 (T_e - T_2)$$

da cui, noti i calori specifici e misurate le masse e le temperature iniziali, si può calcolare la temperatura finale di equilibrio T_e .

Il risultato trovato si può generalizzare: quando un corpo solido o liquido presenta una variazione di temperatura da T_1 a T_2 a seguito del contatto termico con un altro corpo, ammettiamo che abbia scambiato il calore

$$Q = m c (T_2 - T_1) , \quad (10.11)$$

essendo m la sua massa e c il suo calore specifico. Il calore risulta assorbito se $T_2 > T_1$, ceduto se $T_2 < T_1$. Qualora nell'intervallo di temperatura da T_1 a T_2 non si possa assumere che il calore specifico sia praticamente costante bisogna invece scrivere

$$Q = \int dQ = m \int_{T_1}^{T_2} c(T) dT . \quad (10.12)$$

Risultati analoghi possono essere stabiliti per i gas, nei quali però la situazione è più complessa. Come vedremo nel capitolo 11, si hanno due diversi calori specifici a seconda che lo scambio di calore avvenga a volume o a pressione costante. A rigore la stessa distinzione andrebbe fatta per i solidi e i liquidi, però le variazioni di volume che si verificano a seguito di una variazione di temperatura sono così piccole da permettere di trascurare, in prima approssimazione, le differenze tra processi a pressione costante e a volume costante.

Ritornando alla definizione (10.10) di calore specifico, in molte situazioni si preferisce fare riferimento al calore scambiato da un certo numero di moli di una sostanza e pertanto si definisce anche il *calore specifico molare*

$$c = \frac{1}{n} \frac{dQ}{dT} . \quad (10.13)$$

Calore specifico
molare

dove n è il numero di moli. In tal caso (10.9), (10.11) e (10.12) diventano rispettivamente

$$dQ = n c dT \quad (10.14)$$

$$Q = n c (T_2 - T_1) \quad (10.15)$$

$$Q = n \int_{T_1}^{T_2} c(T) dT . \quad (10.16)$$

Ricordiamo (si veda l'appendice B) che una *mole* di sostanza è la quantità di materia di quella data sostanza che contiene $N_A = 6.022 \cdot 10^{23}$ entità elementari (atomi o molecole), essendo N_A il numero di Avogadro. Una mole non corrisponde quindi sempre alla stessa massa, bensì a un numero di grammi eguale alla massa molecolare della sostanza stessa (si veda il paragrafo 11.1).

Unità di misura

calore specifico	J/kg K
calore specifico molare	J/mol K
capacità termica	J/K

In particolare per fare aumentare di 1 K un chilogrammo d'acqua da 287.66 a 288.66 K, cioè da 14.5 a 15.5 °C, si trova che occorre cedere 4186.6 J e questo appunto è il valore del calore specifico dell'acqua a quella temperatura, espresso in J/kg K.

È infine necessaria una precisazione riguardo alle definizioni (10.10), o

(10.13), di calore specifico. Quando la trasformazione avviene in assenza di lavoro scambiato con l'ambiente $dW = 0$ e $dQ = dU$, per cui si può scrivere

$$c = \frac{1}{m} \frac{dU}{dT} \quad , \quad c = \frac{1}{n} \frac{dU}{dT} \quad . \quad (10.17)$$

Gli scambi di calore che abbiamo descritto in questo paragrafo avvenivano in tali condizioni e il riferimento alla variazione di energia interna rende la definizione precisa. Se però è compiuto lavoro esterno il calore scambiato dipende dalla trasformazione e quindi sono possibili casi in cui per una stessa sostanza si possano definire diversi calori specifici (abbiamo citato l'esempio dei gas) e anche può avvenire che la definizione stessa di calore specifico perda significato. A parte il caso di una trasformazione adiabatica, in cui non c'è calore scambiato, in una trasformazione in cui c'è scambio di calore anche se la temperatura è costante (paragrafo 10.8) la nostra definizione darebbe un calore specifico infinito o indefinito. Come vedremo meglio in seguito, una definizione del tipo (10.10) conserva significato solo quando il calore scambiato può essere espresso come variazione di una funzione di stato.

Misura dei calori specifici

Un metodo particolare per misurare il calore specifico di una sostanza solida si realizza con lo strumento chiamato *calorimetro di Regnault* (figura 10.7). Consideriamo un recipiente pieno di liquido, con immerso un termometro e un agitatore: il tutto è chiuso dentro un contenitore a pareti adiabatiche. Sia $C_1 = mc$ la capacità termica del liquido, C_2 quella del restante materiale (termometro, agitatore, recipiente) nel contenitore adiabatico e T_2 la temperatura iniziale.

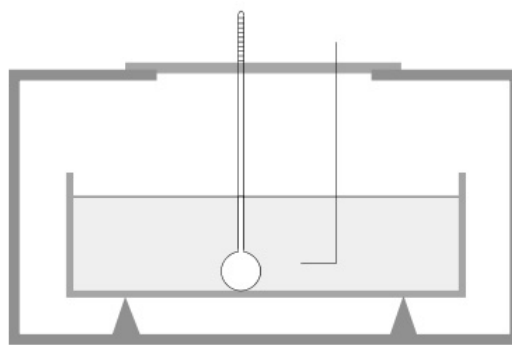


FIGURA 10.7

Si prende un corpo di massa m , calore specifico incognito c_x , alla temperatura $T_1 > T_2$ e lo si immerge nel liquido. In breve tempo si raggiunge l'equilibrio termico alla temperatura T_e . Durante il processo si deve avere l'accortezza di agitare il liquido per rendere uniforme la temperatura più rapidamente.

Il bilancio dei calori scambiati, presi in modulo, è dato da

$$m c_x (T_1 - T_e) = (C_1 + C_2) (T_e - T_2) .$$

Il primo termine rappresenta il calore ceduto dal corpo mentre quello al secondo membro il calore assorbito dal calorimetro. Nota m e tarato il calorimetro (determinazione di C_1 e C_2), dalla misura delle temperature iniziale e finale si risale a c_x .

La principale difficoltà della misura sta nell'imperfetto isolamento termico, per cui si nota che la temperatura finale T_e non resta costante, ma diminuisce lentamente. Ciò indica che il sistema cede calore all'esterno. Il calorimetro di Regnault fornisce la misura dei calori specifici con una precisione non superiore all'1%.

Un'osservazione importante: nella misura della temperatura del liquido, come di qualsiasi altra sostanza, la capacità termica del termometro deve essere sufficientemente piccola di modo che durante il contatto termico, necessario per la misura, lo scambio di calore tra corpo e termometro sia piccolo e non venga perciò alterata troppo la temperatura da misurare.

I valori dei calori specifici di alcune sostanze solide e liquide sono elencati nella tabella 10.4.

Tabella 10.4 Calori specifici			
Sostanza	Temperatura		Calore specifico
acqua	288 K	15°C	4186.8 J/kg K
alcol etilico	293	20	2240.0
alluminio	293	20	896.0
argento	298	25	234.0
ferro	293	20	448.0
ghiaccio	273	0	2051.5
mattoncino	293	20	837.0
oro	298	25	129.0
piombo	14	-259	29.3
piombo	173	-100	117.2
piombo	293	20	129.8
rame	298	25	387.0
silicio	298	25	703.0
vetro per finestre	293	20	628.0

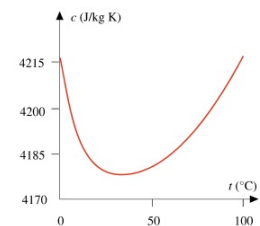


FIGURA 10.8

In tabella abbiamo riportato il calore specifico del piombo in un ampio intervallo di temperature, per farne notare la grande variazione (argomento che verrà ripreso tra breve). D'altra parte in intervalli di temperatura non troppo grandi e a temperature non troppo basse le variazioni sono piccole. Nella figura 10.8 è mostrato il calore specifico dell'acqua tra 0° e 100°C: si vede che la differenza percentuale tra valore massimo e valore minimo è inferiore all'1%. Ad ogni modo bisogna dire che, vista la dipendenza del calore specifico dalla temperatura, il valore che si ricava con la misura calorimetrica è quello medio relativo all'intervallo di temperatura coperto dall'esperimento.

Esempio 10.1

Un pezzo di materiale solido di massa $m_s = 0.378$ kg viene riscaldato a 95°C e poi immerso in un contenitore, a pareti adiabatiche, contenente 2 litri d'acqua inizialmente a 20°C . Se la temperatura finale del sistema è di 21.3°C , si determini il calore specifico del solido, assumendo i calori specifici indipendenti dalla temperatura.

Soluzione

Utilizziamo l'eguaglianza tra i moduli dei calori scambiati:

$$m_a c_a (21.3 - 20) = m_s c_x (95 - 21.3) \quad ,$$

con $m_a = 2$ kg , $c_a = 4186.8$ J/kg K , $m_s = 0.378$ kg ; risulta

$$c_x = 390.7 \text{ J/kg K} \quad ,$$

per cui il solido è presumibilmente rame. Il calore ceduto dal solido all'acqua è dato da

$$Q = m_s c_x (95 - 21.3) = 10885 \text{ J} \quad .$$

Visualizza Soluzione

Esempio 10.2

Due corpi solidi, fatti della stessa sostanza, di masse $m_1 = 0.3$ kg e $m_2 = 0.8$ kg, vengono messi in contatto termico in un ambiente adiabatico. Le temperature iniziali dei due corpi sono $T_1 = 800$ K e $T_2 = 200$ K. Si determini la temperatura di equilibrio.

Soluzione

Essendo i corpi della stessa sostanza non è necessario conoscere il calore specifico. Pertanto

$$m_1 (T_1 - T_e) = m_2 (T_e - T_2) \Rightarrow T_e = \frac{m_1 T_1 + m_2 T_2}{m_1 + m_2} = 363.6 \text{ K}.$$

Visualizza Soluzione

Calori specifici dei solidi

Nella figura 10.9 è riportato l'andamento tipico del calore specifico molare delle sostanze solide in funzione della temperatura, misurata in unità di T_D , la *temperatura di Debye*. La temperatura di Debye è un parametro caratteristico del tipo di solido e il suo valore dà un'indicazione della *coesione del materiale*. Si noti che per $T / T_D > 1$ il calore specifico molare tende a un valore costante, eguale per tutte le sostanze solide, pari a circa 25 J/mol K (legge di Dulong-Petit).

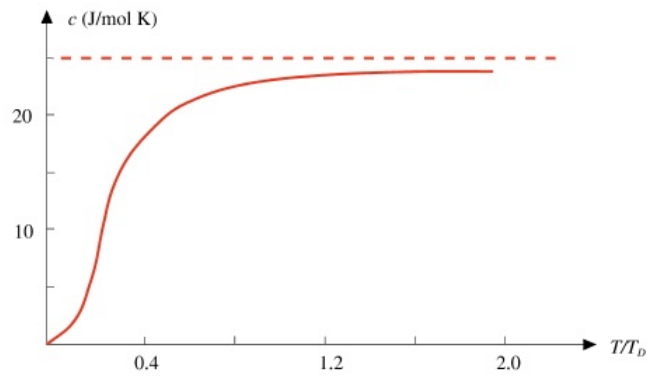


FIGURA 10.9

In tabella 10.5 sono riportati i valori della temperatura di Debye per alcuni solidi. Per valori bassi di T_D il calore specifico può essere assunto costante anche alla temperatura ambiente.

Tabella 10.5 Temperatura di Debye

Sostanza	T_D (K)
alluminio	398
argento	215
diamante	1860
ferro	420
nickel	370
rame	315
piombo	80
sale NaCl	280
zinc	250

10.8 Processi isotermi. Cambiamenti di fase

Durante la trasformazione descritta nell'esempio 4) del paragrafo 10.6 il gas resta sempre in equilibrio termico con l'acqua, la cui temperatura si mantiene costante. Vedremo nel capitolo 11 che l'energia interna di un gas ideale è funzione solo della temperatura e quindi, nella situazione in esame, $\Delta U = 0$ e, secondo (10.5), $Q = W$. Si è realizzato così un flusso di calore dall'acqua al gas in condizioni isoterme e il calore assorbito non comporta un aumento di temperatura del gas, bensì la produzione di lavoro, compiuto dal gas che si espande. È questo un caso in cui non si può applicare (10.8) e il calore scambiato si calcola tramite (10.5).

Una classe importante di processi isotermi è costituita dai *cambiamenti di fase*, ovvero dai passaggi di una sostanza da una fase all'altra, per esempio dalla fase solida alla fase liquida o dalla fase liquida a quella di vapore. La terminologia dei vari cambiamenti di fase è riassunta nella tabella 10.6.

Cambiamenti di fase

Tabella 10.6 Cambiamenti di fase

Cambiamento di fase	Terminologia
solido \Rightarrow liquido	fusione
liquido \Rightarrow solido	solidificazione
liquido \Rightarrow vapore	evaporazione
vapore \Rightarrow liquido	condensazione
solido \Rightarrow vapore	sublimazione
vapore \Rightarrow solido	sublimazione

Alcuni cambiamenti di fase, come fusione e solidificazione, che avvengono a una determinata temperatura, costante durante il processo, costituiscono un punto di riferimento (punto fisso) per le scale termometriche, purché siano ben precisate le condizioni esterne, soprattutto la pressione. L'evaporazione di un liquido ha luogo invece a qualsiasi temperatura; essa assume un carattere particolare solo quando la pressione massima del vapore eguaglia la pressione esterna: si ha in tal caso l'*ebollizione* che avviene a una ben determinata temperatura, dipendente dalla pressione esterna.

Nella definizione della scala Celsius si era utilizzato il punto fisso fornito dal ghiaccio fondente a pressione atmosferica, posto eguale a 0°C , e quello corrispondente all'ebollizione dell'acqua a pressione atmosferica, posto eguale a 100°C .

Calore latente

I cambiamenti di fase sono accompagnati da scambi di calore e si osserva che, per unità di massa, si tratta di quantità ben definite, dette *calori latenti* λ . Pertanto il calore richiesto per il cambiamento di fase della massa m di una sostanza pura è dato da

$$Q = m \lambda \quad (10.18)$$

Il calore Q deve essere ceduto alla sostanza per fare avvenire, ad esempio, la fusione o sottratto alla sostanza per produrre la solidificazione.

In tabella 10.7 riportiamo i valori dei calori latenti di alcune sostanze per diversi tipi di cambiamento di fase a pressione atmosferica. L'unità di misura è J/Kg.

Tabella 10.7 Calori latenti			
Sostanza	Cambiamento di fase	Temperatura (K)	Calore latente (J/kg)
acqua	fusione	273	$3.3 \cdot 10^5$
acqua	ebollizione	373	$22.6 \cdot 10^5$
alcool etilico	fusione	159	$10.4 \cdot 10^4$
alcool etilico	ebollizione	351	$85.4 \cdot 10^4$
alluminio	fusione	933	$9.0 \cdot 10^4$
alluminio	ebollizione	2723	$11.4 \cdot 10^6$
anidride carbonica	sublimazione	213	$3.7 \cdot 10^5$
azoto	fusione	63.3	$25.5 \cdot 10^3$
elio	fusione	3.5	$5.2 \cdot 10^3$
elio	ebollizione	4.2	$20.9 \cdot 10^3$
ferro	fusione	1803	$2.1 \cdot 10^5$
oro	fusione	1336	$64.5 \cdot 10^3$
ossigeno	fusione	54.4	$13.8 \cdot 10^3$
piombo	fusione	600	$24.5 \cdot 10^3$
piombo	ebollizione	2023	$87.1 \cdot 10^4$
platino	fusione	2046	$1.1 \cdot 10^5$
rame	fusione	1356	$13.4 \cdot 10^4$
rame	ebollizione	1460	$506.5 \cdot 10^4$
stagno	fusione	505	$6.0 \cdot 10^4$
zolfo	fusione	392	$38.1 \cdot 10^3$

Nel caso dell'evaporazione il calore latente non ha un valore fisso, ma è una funzione decrescente della temperatura e si annulla alla temperatura critica (paragrafo 11.9).

Una caratteristica molto importante dei cambiamenti di fase è di essere, in opportune condizioni, trasformazioni praticamente reversibili.

Esempio 10.3

Un pezzetto di ghiaccio, di massa $m_1 = 30$ g e alla temperatura $T_1 = 258$ K (-15°C), viene immerso in $m_2 = 50$ g d'acqua alla temperatura $T_2 = 333$ K (60°C). Se il sistema è contenuto in un recipiente a pareti adiabatiche si determini la temperatura di equilibrio T_e .

Soluzione

Per portare il ghiaccio dalla temperatura T_1 al punto di fusione, $T_0 = 273$ K (0°C), l'acqua deve cedere il calore $Q_1 = mc_g (T_0 - T_1)$, dove c_g è il calore specifico del ghiaccio; per fondere il ghiaccio occorre il calore $Q_2 = m_1\lambda$, essendo λ il calore latente di fusione. L'acqua può cedere al massimo, portandosi da T_2 a T_0 , il calore $Q_3 = m_2c (T_2 - T_0)$. Considerando, come abbiamo fatto, i valori assoluti, se $Q_3 > Q_1 + Q_2$ tutto il ghiaccio fonde e la temperatura di equilibrio T_e è maggiore di T_0 ;

altrimenti il sistema raggiunge l'equilibrio a T_0 , con solo una parte del ghiaccio fusa, e potrebbe anche verificarsi il caso che l'acqua solidifichi tutta o in parte. Calcoliamo i calori utilizzando i dati delle tabelle 10.4 e 10.7:

$$Q_1 = 0.03 \cdot 2051.5 \cdot 15 = 923 \text{ J} \quad ,$$

$$Q_2 = 0.03 \cdot 3.3 \cdot 10^5 = 9900 \text{ J} \quad ,$$

$$Q_3 = 0.05 \cdot 4186.8 \cdot 60 = 12560 \text{ J} \quad .$$

Si verifica pertanto che Q_3 è maggiore di $Q_1 + Q_2$. La temperatura di equilibrio T_e si ottiene dalla relazione

$$m_1 c_g (T_0 - T_1) + m_1 \lambda + m_1 c (T_e - T_0) = -m_2 c (T_e - T_2)$$

e risulta $T_e = 279.8 \text{ K} = 6.6^\circ\text{C}$.

Visualizza Soluzione

Sorgenti di calore

Abbiamo visto in qualche esempio come lo scambio di calore avvenga talvolta con sistemi a temperatura costante. Nello studio delle macchine termiche troveremo che esse scambiano calore con un certo numero di corpi a temperatura costante.

Definiamo come *sorgente di calore* o *serbatoio*, un corpo con capacità termica praticamente infinita e quindi con la proprietà di poter scambiare calore restando a temperatura costante.

Una grande massa d'acqua o d'aria può essere considerata una sorgente di calore. Invece un corpo con massa non elevata può essere considerato una sorgente solo per un tempo limitato ed è necessario fornire o sottrarre energia per mantenerlo a temperatura costante. Esempi pratici sono i forni o gli ambienti frigoriferi. La simbologia usata per le sorgenti di calore è mostrata in figura 10.10.

Nel caso a) il calore scambiato è positivo per il sistema e negativo per la sorgente a temperatura T ; nel caso b) Q è negativo per il sistema e positivo per la sorgente.

Quando un sistema è a contatto con una sorgente, se la differenza di temperatura tra sistema e sorgente è infinitesima c'è l'equilibrio termico durante lo scambio. Se invece la differenza di temperatura è finita non può esserci equilibrio termico: questo può essere raggiunto solo se si mantiene il contatto termico abbastanza a lungo, fino a che il sistema raggiunge la temperatura T della sorgente. Nel primo caso lo scambio di calore avviene in modo reversibile, nel secondo il processo è irreversibile.

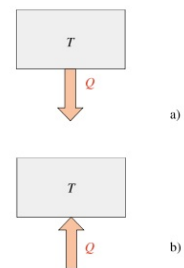


FIGURA 10.10

10.9 Trasmissione del calore

Il primo principio della termodinamica riguarda gli scambi energetici che avvengono durante una trasformazione termodinamica.

Lo scambio di lavoro concerne il lavoro meccanico macroscopico legato allo spostamento di qualche oggetto, ad esempio la parete mobile di un recipiente pieno di gas.

Lo scambio di calore presuppone invece un meccanismo microscopico, cui accenneremo in seguito, e avviene quando due corpi sono a contatto, direttamente o attraverso altri corpi.

Lo scambio e anche il trasporto di calore entro un sistema possono avvenire tramite tre meccanismi distinti, che nel loro complesso sono indicati come *trasmissione del calore: conduzione, convezione e irraggiamento termici*. I tre meccanismi operano sempre in presenza di una differenza di temperatura tra sistema e ambiente o all'interno dello stesso sistema.

Conduzione di calore

Consideriamo un corpo esteso in cui la temperatura non sia uniforme e tracciamo le superficie isoterme, cioè il luogo dei punti in cui la funzione $T(x, y, z)$ assume un valore costante, per esempio T_1 sulla superficie isoterma S_1 , T_2 su S_2 , ecc.

La legge fenomenologica che regola la conduzione del calore è la *legge di Fourier*, formulata nel 1815. Se dS è un elemento di una superficie isoterma, dT/dn il modulo del gradiente di temperatura, ortogonale a dS e diretto nel verso delle temperature crescenti, il calore che passa attraverso dS nel tempo dt è dato da

$$dQ = -k \frac{dT}{dn} dS dt ; \quad (10.19)$$

Legge di Fourier

la grandezza k , detta *conducibilità* o *conduttività termica*, è tipica del materiale ed è in generale funzione della temperatura (le unità di misura sono J/m s K).

Conducibilità termica

Il segno negativo in (10.19) indica che il flusso di calore avviene nel senso in cui la temperatura diminuisce, cioè nel verso opposto al gradiente di temperatura, dalla regione a temperatura maggiore a quella a temperatura minore.

L'esistenza di un gradiente di temperatura in un corpo, ovvero la mancanza di equilibrio termico, indica che c'è una trasmissione di calore attraverso il corpo, regolata dalla legge di Fourier.

La conducibilità termica varia da sostanza a sostanza anche di diversi ordini di grandezza, come appare nella tabella 10.8 dove sono riportate anche le

temperature a cui si riferisce il valore di k .

Tabella 10.8 Conducibilità termica

	T (K)	k (J/m s K)		T (K)	k (J/m s K)
Metalli			Liquidi		
alluminio	273	201.0	acqua	300	0.59
argento	273	418.7	alcool etilico	300	0.18
ferro	273	50.2	glicerina	290	2.7
oro	300	310.0	mercurio	300	7.9
piombo	300	35.0	Dielettrici		
rame	273	387.4	amianto	293	$8.0 \cdot 10^{-2}$
stagno	300	61.0	cemento	293	$8.0 \cdot 10^{-1}$
Gas			diamante puro	300	$2.0 \cdot 10^3$
anidride carbonica	273	0.13	ghiaccio	273	2.1
aria	293	0.023	gomma	293	$2.0 \cdot 10^{-1}$
azoto	293	0.023	lana di roccia	300	$4.2 \cdot 10^{-2}$
elio	293	0.14	legno di larice	293	$3.7 \cdot 10^{-1}$
idrogeno	293	0.17	mattone	293	$6.3 \cdot 10^{-1}$
ossigeno	293	0.024	polistirolo espanso	300	$4.0 \cdot 10^{-2}$
			sughero	300	$4.0 \cdot 10^{-2}$
			vetro	293	$8.4 \cdot 10^{-1}$

I metalli sono buoni conduttori termici, i gas e i dielettrici, eccetto il diamante, sono invece cattivi conduttori termici; i liquidi sono in una situazione intermedia.

La conducibilità termica ha una diversa dipendenza dalla temperatura per le varie sostanze. Nei gas semplici k cresce debolmente con la temperatura, in proporzione alla radice quadrata della stessa. Anche nei liquidi e nei dielettrici non vi è una notevole variazione con la temperatura. Nei metalli puri la conducibilità presenta sempre un massimo a bassa temperatura, che è due o tre ordini di grandezza maggiore del valore a temperatura ambiente. Il rame, per esempio, ha un massimo nella conducibilità termica a circa 20 K, con un valore di $2 \cdot 10^4$ J/m s K da confrontare con $3.9 \cdot 10^2$ J/m s K a temperatura ambiente; a 2 K il valore è di $4 \cdot 10^3$ J/m s K.

Come vedremo nel secondo volume, esiste un legame tra *conduttività termica* e *conduttività elettrica*.

Per illustrare l'uso di (10.19) consideriamo un problema particolare, quello della parete piana indefinita, posta tra due ambienti alle temperature costanti T_1 e T_2 , con $T_1 > T_2$. Lo spessore della parete è s (vedi figura 10.11), k la conduttività termica, assunta costante. L'elemento di parete indicato in figura ha superficie dS (ortogonale all'asse x), spessore dx , volume $dS dx$ e contiene la massa $dm = \rho dV = \rho dS dx$; ρ è la densità costante del materiale.

Attraverso l'elemento di superficie dS (con coordinata x) viene ceduto a dm il calore dQ_1 , mentre dm cede dQ_2 attraverso un elemento di superficie dS (con coordinata $x + dx$):

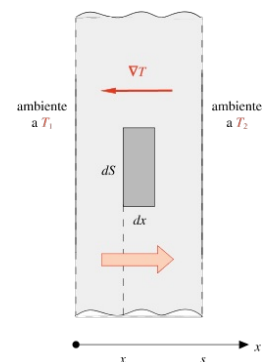


FIGURA 10.11

$$dQ_1 = -k \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_x dS dt ,$$

$$dQ_2 = -k \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x+dx} dS dt = -k \left[\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_x + \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)_x dx \right] dS dt ;$$

nel passaggio dal primo al secondo membro di dQ_2 abbiamo utilizzato lo sviluppo

in serie di Taylor di $\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x+dx}$ MathType@MTEF@5@5@+= feaagKart1ev2aaatCvAUfeBSjuyZL2yd9gzLbvyNv2CaerbuLwBLn hiov2DGi1BTfMBaeXatLxBI9gBaerbd9wDYLwzYbItLDharqqtubsr 4rNCHbGeaGqiVuoJe9sqqrpepCoxbbL8F4rqrFfpeeaOxe9Lq=Jc9 vqaqpepmoxbba9pwe9Q8fso=yqaqpepae9pgoFirpepeKkFroxfr=x fr=xb9adbaqaeeGaciGaaiaabeqaamaabaabaaGcbaWaaeWaaeaada WcaaqaaiabgkGi2kaadsfaaeaacqGHciITcaWG4baaaaGaayjkaiaa wMcaamaaBaaaleaacaWG4bGaey4kaSIaamizaiaadIhaaeqaaaaa@4022@ arrendoci al primo termine.

Complessivamente l'elemento di massa dm riceve da sinistra il calore dQ_1 e cede a destra il calore dQ_2 , per cui assorbe

$$dQ_1 - dQ_2 = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dS dx dt$$

e si ha in corrispondenza un aumento di temperatura, secondo (10.9):

$$k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dS dx dt = dm c dT = \rho dS dx c dT ,$$

essendo c il calore specifico del materiale. Pertanto

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \rho \frac{c}{k} \frac{\partial T}{\partial t} . \quad (10.20)$$

L'equazione (10.20) regola la variazione di temperatura in funzione del tempo e della posizione all'interno della parete, con le condizioni al contorno $T = T_1$ per $x = 0$ e $T = T_2$ per $x = s$ in qualsiasi istante.

A regime, quando la temperatura in ciascun punto ha raggiunto un valore stazionario, costante nel tempo, si ha

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 .$$

Di conseguenza in *regime stazionario* la soluzione di (10.20) deve avere la forma $T = a x + b$, cioè la temperatura deve essere una funzione lineare di x . Imponendo per $x = 0$ $T_1 = b$ e per $x = s$ $T_2 = a s + b$ si ottiene

$$T(x) = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{s} x \Rightarrow |\nabla T| = |dT/dx| = \frac{T_1 - T_2}{s} .$$

La temperatura decresce nella parete dal valore T_1 al valore T_2 , con gradiente costante ovvero linearmente.

Attraverso una superficie finita S nel tempo t passa dall'ambiente posto a sinistra della parete a quello a destra il calore

$$Q = k \frac{T_1 - T_2}{s} S t .$$

Ad esempio attraverso 1 m^2 di una parete di mattoni, spessa 10 cm e sottoposta a una differenza di temperatura $\Delta T = 20^\circ\text{C}$, passa in un'ora il calore $Q = 4.2 \cdot 10^6 \text{ J}$.

Assumendo T_2 come temperatura dell'ambiente esterno e T_1 come temperatura di una stanza si può avere, in base al calcolo precedente, un'idea del calore che deve essere fornito da un impianto di riscaldamento per mantenere una data temperatura interna. Un calcolo realistico dovrà tener conto anche della diversa conducibilità termica e delle diverse caratteristiche delle varie aperture nella stanza, tipo porte e finestre.

Notiamo come in regime stazionario il calore che entra nella parete dal lato ad alta temperatura sia eguale al calore che esce dal lato a bassa temperatura: c'è solo flusso di energia, ma non cessione di calore alla parete. Notiamo inoltre che, per unità di tempo e per unità di superficie, passa tanto più calore quanto più grandi sono il gradiente di temperatura e la conducibilità termica. Viceversa arriviamo a capire, almeno qualitativamente, da quali parametri dipende il tempo necessario per raggiungere l'equilibrio termico quando due corpi sono posti a contatto termico tramite una parete.

Convezione del calore

La conduzione termica è importante nei solidi metallici; essa avviene anche nei fluidi, però le conducibilità termiche sono piuttosto piccole, come è evidente dai dati in tabella 10.8. Inoltre la conduzione nei fluidi è difficile da osservare perché in essi si manifesta un altro fenomeno di trasmissione del calore, la *convezione*, che descriviamo qualitativamente.

Se si riscalda una massa fluida, quella parte più vicina alla sorgente di calore assume una temperatura maggiore e diminuisce di densità, dilatandosi. Viene alterato l'equilibrio statico nel fluido, poiché gli elementi di fluido più caldi risentono, dalle parti di fluido circostante più fredde, di una spinta di Archimede maggiore del loro peso. Si originano correnti ascensionali (dette di convezione), che permettono ad elementi con temperatura minore di avvicinarsi a loro volta alla sorgente di calore. La trasmissione di calore avviene con spostamenti di materia, tramite correnti convettive.

La *convezione* è responsabile del movimento delle masse d'aria nell'atmosfera o delle correnti marine, con effetti sulle condizioni climatiche e meteorologiche.

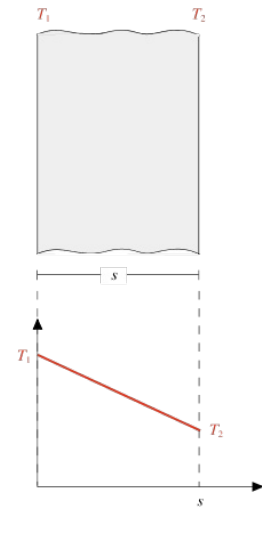


FIGURA 10.12

Irraggiamento

Un corpo a temperatura T emette energia sotto forma di onde elettromagnetiche, che si propagano nello spazio circostante, anche se vuoto. Il *potere emissivo del corpo* ϵ , che ha il significato di energia emessa per unità di tempo e per unità di superficie, è dato dalla legge di Stefan-Boltzmann:

$$\epsilon = \sigma e T^4, \quad (10.21)$$

dove σ è una costante universale, pari a $5.67 \cdot 10^{-8} \text{ J/m}^2 \text{ s K}^4$, ed e una grandezza, detta *emissività*, che può variare tra 0 e 1, dipendendo dalle proprietà della superficie. Se $e = 1$ la superficie è detta *superficie nera* e presenta, a parità di temperatura, il massimo potere emissivo.

Contemporaneamente il corpo assorbe una parte dell'energia elettromagnetica emessa da altri corpi e che lo colpisce; in particolare una superficie nera assorbe tutta l'energia che incide su di essa.

Tramite questi fenomeni la temperatura di un corpo aumenta o diminuisce a seconda del bilancio tra energia irradiata ed assorbita; se il bilancio è in parità la temperatura resta costante, il corpo è in equilibrio con l'ambiente circostante. Naturalmente l'equilibrio può essere mantenuto anche fornendo o sottraendo energia con altri mezzi, per compensare l'irraggiamento.

È attraverso il meccanismo dell'irraggiamento che il sole trasmette energia alla superficie terrestre, nella misura di $1.53 \cdot 10^3 \text{ J/m}^2 \text{ s}$.

Malgrado gli effetti termici descritti siano equivalenti a quelli dovuti a scambi di calore, in realtà è improprio parlare di trasmissione del calore per irraggiamento, se per calore intendiamo un particolare modo di trasmissione di energia legato a fenomeni meccanici microscopici, ma non all'emissione e all'assorbimento di onde elettromagnetiche.

Parete adiabatica. Vaso Dewar

Vediamo in base ai vari effetti studiati come è possibile realizzare una parete adiabatica. Se lo scopo è quello di limitare lo scambio di calore in presenza di piccole differenze di temperatura è sufficiente una opportuna combinazione di materiali isolanti, cioè materiali a bassa conducibilità termica; questa tecnica è usata, per esempio, nelle pareti dei comuni frigoriferi.

Se invece si vuole ridurre al massimo lo scambio di calore, come è necessario per conservare a lungo in un contenitore un liquido criogenico (ad esempio azoto a 70K o idrogeno a 20K) oppure per studiare i fenomeni chimico-fisici che avvengono a bassissime temperature, bisogna innanzitutto impedire conduzione e convezione. Si utilizza allo scopo un contenitore detto *vaso Dewar* dal nome del suo inventore, costituito da due pareti isolanti, per esempio di vetro, internamente argentate, tra le quali è fatto il vuoto: in questo modo si minimizza la trasmissione di calore per conduzione e convezione nell'intercapedine. Resta la possibilità di trasmissione di energia per irraggiamento, anche se piccola a

Legge di Stefan-Boltzmann

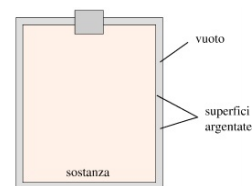


FIGURA 10.13

basse temperature, secondo (10.21): per questa ragione l'interno dell'intercapedine è argentato, per ridurre il potere emissivo (che è nullo per un parete perfettamente riflettente).

Passaggio di calore da un solido a un fluido

La trasmissione di calore da un solido ad un fluido è molto comune nella pratica; avviene per esempio nel riscaldamento di un locale tramite i termosifoni.

Consideriamo un solido alla temperatura T , con una superficie pari a S , mentre il fluido si trova, nei punti non prossimi al solido, alla temperatura $T_0 < T$. Il fenomeno è complesso perché avvengono sia convezione che conduzione e irraggiamento. Tuttavia, in prima approssimazione, se $\Delta T = T - T_0$ non è molto grande, il fenomeno può essere descritto con una legge molto semplice, scoperta da Newton: il modulo del calore scambiato nel tempo t , ceduto dal solido e assorbito dal fluido, è dato da

$$Q = h(T - T_0) S t .$$

(10.22)

Legge di Newton

La costante h è detta conducibilità termica esterna; per un filo caldo (perché percorso da corrente elettrica) immerso in aria $h = 10 \text{ J/m}^2 \text{ s K}$.

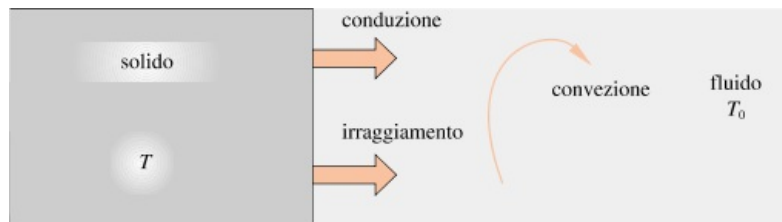


FIGURA 10.14

10.10 Dilatazione termica di solidi e liquidi

Il volume di un corpo, a pressione costante, aumenta al crescere della temperatura. Il fenomeno prende il nome di *dilatazione termica*.

Tale effetto riveste particolare importanza nella pratica: di esso bisogna tener conto nella costruzione di binari ferroviari, di ponti e di edifici, per evitare che la dilatazione, se non compensata, porti a deformazioni o a rotture. Molti termometri pratici funzionano basandosi sulla dilatazione termica di una colonna di liquido e numerosi servomeccanismi di controllo della temperatura sfruttano le variazioni di dimensioni di opportuni sensori.

Per variazioni ΔT abbastanza piccole di temperatura la variazione Δl della lunghezza l di una delle dimensioni del corpo risulta proporzionale a ΔT , se la pressione è costante:

$$\Delta l = \lambda l \Delta T \quad \text{ovvero} \quad l + \Delta l = l(1 + \lambda \Delta T) ;$$

λ , *coefficiente di dilatazione lineare*, è caratteristico del materiale di cui è composto il corpo ed è in generale funzione della temperatura. Dalla relazione precedente abbiamo

$$\lambda = \frac{1}{l} \frac{\Delta l}{\Delta T} \quad (10.23)$$

e si vede che λ esprime la variazione relativa di lunghezza per variazione unitaria di temperatura; l'unità di misura è K^{-1} . A rigore (10.23) dà il coefficiente di dilatazione medio nell'intervallo ΔT .

Nella determinazione della variazione del volume di un corpo al variare della temperatura dobbiamo distinguere tra *corpi isotropi* per i quali λ assume lo stesso valore in tutte le direzioni, e pertanto non viene modificata la forma nella dilatazione, e *corpi anisotropi*, come i solidi cristallini, per i quali λ varia al variare della direzione.

Consideriamo un corpo isotropo a forma di parallelepipedo, di dimensioni l_1 , l_2 , l_3 e quindi volume $V = l_1 l_2 l_3$, alla temperatura T . Il volume alla temperatura $T + \Delta T$ è dato da

$$V + \Delta V = l_1 (1 + \lambda \Delta T) l_2 (1 + \lambda \Delta T) l_3 (1 + \lambda \Delta T) = V (1 + \lambda \Delta T)^3 \approx V (1 + 3\lambda \Delta T) .$$

L'ultimo passaggio è giustificato dal fatto che i termini contenenti λ^2 e λ^3 si possono trascurare rispetto al termine lineare perché i valori tipici di λ sono sempre inferiori a $10^{-3} K^{-1}$. Ne segue

$$\Delta V = V 3 \lambda \Delta T = V \alpha \Delta T ,$$

introducendo il *coefficiente di dilatazione cubica*

Coefficiente di dilatazione lineare

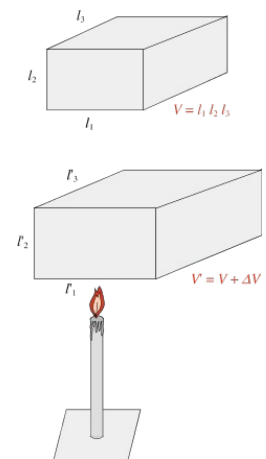


FIGURA 10.15

$$\alpha = \frac{1}{V} \frac{\Delta V}{\Delta T} \quad (10.24)$$

che, pertanto, nei corpi isotropi, vale 3λ ; il risultato è indipendente dalla forma del corpo. La relazione di linearità tra variazione relativa di volume e variazione di temperatura vale anche per i liquidi, sempre in intervalli limitati di temperatura.

In modo analogo si trova che il *coefficiente di dilatazione superficiale* di una lastra piana isotropa è 2λ .

Nella tabella 10.9 riportiamo i coefficienti di dilatazione lineare per alcuni solidi isotropi e di dilatazione cubica per alcuni liquidi, alla temperatura ambiente di 20°C .

All'aumentare del volume la densità del corpo che si dilata diminuisce. A questo comportamento generale fa eccezione l'acqua che, nell'intervallo di temperatura da 0°C a 4°C ha un coefficiente di dilatazione cubica negativo: pertanto all'aumentare della temperatura il volume diminuisce e la densità aumenta, raggiungendo il valore massimo a 4°C ; per temperature superiori il comportamento è normale, con $\alpha > 0$. L'andamento del coefficiente di dilatazione cubica dell'acqua tra 0°C e 20°C è rappresentato in figura 10.16.

Quando la temperatura di una grande massa d'acqua, come per esempio in un lago, diminuisce a causa del raffreddarsi dell'aria, l'acqua dello strato superficiale freddo, che ha densità maggiore rispetto all'acqua più profonda essendo a temperatura minore, scende verso il fondo spingendo in superficie l'acqua sottostante, che a sua volta si raffredda. Queste correnti convettive cessano a 4°C perché la densità

Tabella 10.9 Coefficienti di dilatazione

Dilatazione lineare	
materiale	λ (K^{-1})
acciaio	$1.1 \cdot 10^{-5}$
alluminio	$2.4 \cdot 10^{-5}$
cemento	$1.2 \cdot 10^{-5}$
ferro	$9.1 \cdot 10^{-6}$
invar (lega Fe-Ni)	$7.0 \cdot 10^{-7}$
ottone	$1.9 \cdot 10^{-5}$
piombo	$2.9 \cdot 10^{-5}$
rame	$1.7 \cdot 10^{-5}$
vetro per finestre	$9.0 \cdot 10^{-6}$
vetro pyrex	$3.2 \cdot 10^{-6}$
Dilatazione cubica	
materiale	α (K^{-1})
acqua	$1.8 \cdot 10^{-4}$
alcol etilico	$10.4 \cdot 10^{-4}$
benzina	$9.6 \cdot 10^{-4}$
cloroformio	$14.0 \cdot 10^{-4}$
glicerina	$5.3 \cdot 10^{-4}$
mercurio	$1.8 \cdot 10^{-4}$

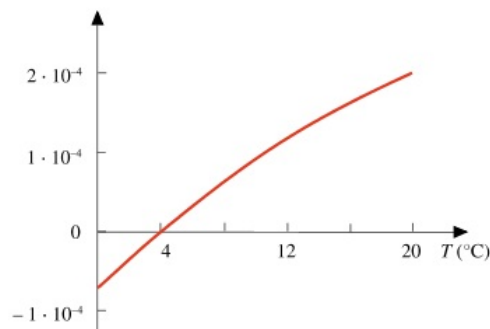


FIGURA 10.16

dell'acqua ora diminuisce al diminuire della temperatura: l'acqua più fredda resta in superficie e inizia a solidificare quando viene raggiunta la temperatura di 0°C . Il ghiaccio che si forma resta anch'esso in superficie perché la sua densità è minore di quella dell'acqua, mentre in profondità la temperatura dell'acqua si mantiene intorno a 4°C , permettendo ai pesci e alle altre forme di vita subacquee di sopravvivere.

Esempio 10.4

Una massa di 3 kg di ferro passa da 18°C a 20°C, alla pressione atmosferica. Calcolare la variazione di energia interna.

Soluzione

Il calore specifico del ferro è $c = 448 \text{ J/kg K}$ e quindi

$$Q = mc \Delta T = 2688 \text{ J} \quad .$$

Nel riscaldamento il volume varia di

$$\Delta V = V \beta \Delta T = \frac{m}{\rho} \beta \Delta T = 2.1 \cdot 10^{-8} \text{ m}^3$$

($\beta = 9.1 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$, $\rho = 7.8 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$). Il lavoro corrispondente è

$$W = p \Delta V = 2.1 \cdot 10^{-3} \text{ J} \quad ,$$

trascurabile rispetto al calore. Pertanto $\Delta U = Q$.

Visualizza Soluzione

10.11 Conclusioni riassuntive

Rivediamo le principali nozioni introdotte in questo capitolo.

a) *Primo principio della termodinamica*: è l'equazione fondamentale del bilancio energetico, cui bisogna fare riferimento in ogni problema termodinamico.

b) *Calore*: rappresenta un meccanismo di scambio energetico, che si può spiegare solo su base microscopica.

a) *Temperatura*: è l'indice dell'equilibrio termico tra sistemi. Se due sistemi non sono in equilibrio termico e vengono posti a contatto termico, vi è uno scambio di calore tra di essi, fino a che si raggiunge l'equilibrio termico. La temperatura, come vedremo, è legata all'energia cinetica del moto molecolare.

Nel capitolo 11 studieremo in particolare l'applicazione del primo principio alle trasformazioni di un sistema gassoso e calcoleremo gli scambi energetici in diversi casi, considerando l'applicazione pratica dei risultati ottenuti, cioè la trasformazione di calore in lavoro, come si realizza nelle macchine termiche.

Note sulle unità di misura

Finora abbiamo usato per il calore e il lavoro la stessa unità di misura, il joule. Storicamente, per il calore era stata introdotta un'altra unità di misura, la *caloria*, pari alla *quantità di calore che bisogna cedere a un chilogrammo d'acqua per far passare la sua temperatura da 14.5 a 15.5°C*. Con questa definizione si assume eguale a 1 il calore specifico dell'acqua a 15°C.

In termini della caloria le unità di misura per le varie grandezze sono:

calore	Cal	,	calore specifico	Cal/kg K	,
capacità termica	Cal/kg	,	conducibilità termica	Cal/m s K	.

La caloria è un'unità maggiore del joule e il rapporto vale 4186.8:

$$1 \text{ caloria} = 4186.8 \text{ joule} .$$

Tale valore è quello moderno, cioè più preciso, del rapporto costante trovato da Joule tra il calore e il lavoro che producevano lo stesso aumento di temperatura in una data massa d'acqua.

Noi continueremo ad usare, di norma, la stessa unità (joule) per lavoro e calore, però sottolineiamo che nella termotecnica la caloria è l'unità di uso più comune.

Ricordiamo inoltre che la caloria sopra definita veniva indicata anche con il termine grande caloria o *chilocaloria* (kcal), mentre per caloria o *piccola caloria* si intendeva la quantità di calore che bisogna cedere ad un grammo d'acqua per far passare la sua temperatura da 14.5 a 15.5°C, pari a 4.1868 J.

11.1 Leggi dei gas. Equazione di stato dei gas ideali

Ricordiamo quanto abbiamo visto nei capitoli 7 e 8; un gas è un fluido con le seguenti caratteristiche:

- a) non ha forma né volume proprio, occupa pertanto tutto il volume a disposizione, per esempio quello del recipiente che lo contiene;
- b) è comprimibile facilmente, con conseguenti variazioni notevoli di volume, densità e pressione.

Considerata una certa quantità di gas, le *variabili termodinamiche* più appropriate per descrivere lo stato termodinamico del gas e le eventuali trasformazioni sono la *pressione* p , il *volume* V e la *temperatura* T .

Nel capitolo 8, studiando le proprietà statiche e dinamiche dei fluidi, abbiamo discusso il comportamento del fluido ideale, incompressibile e privo di viscosità, e sottolineato che, nel moto in un condotto, un gas si avvicina molto alla condizione di moto di un fluido ideale. In questo capitolo invece non ci occupiamo della dinamica di un gas: consideriamo il gas racchiuso dentro un contenitore di volume V , con un valore della pressione eguale in tutti i punti, se V non è molto grande.

Quando il volume del contenitore cambia, come può avvenire se una parte dello stesso è mobile, si realizza uno scambio di lavoro con l'ambiente esterno; inoltre, a seconda del tipo di pareti del contenitore, diatermiche o adiabatiche, è possibile o viene impedito lo scambio di calore con l'ambiente. Il gas può dunque compiere trasformazioni in cui scambia soltanto lavoro o calore con l'ambiente, oppure entrambi; in ogni caso il bilancio energetico è regolato dal primo principio della termodinamica.

Ci occuperemo più avanti degli aspetti energetici delle trasformazioni di un sistema gassoso; adesso stabiliamo alcune semplici relazioni tra le coordinate termodinamiche di un gas, che sono tanto meglio verificate quanto più un gas si avvicina a condizioni di pressione sufficientemente bassa e di temperatura alta rispetto a quella per cui si avrebbe condensazione (alla data pressione). Si parla in tal caso di *comportamento ideale*, con un significato diverso del termine ideale, già usato nel moto di un fluido. Vedremo più chiaramente nel paragrafo 11.10 le condizioni fisiche che individuano un gas ideale.

Legge isoterma di Boyle

Si abbia un gas in equilibrio termodinamico ad una certa pressione entro un dato volume e a temperatura T : se si fanno variare i valori della pressione e del volume, mantenendo costante la temperatura, si trova che in tutti i possibili stati

di equilibrio isoterma il prodotto della pressione per il volume ha sempre lo stesso valore. Vale cioè la legge di Boyle

$$pV = \text{costante} ;$$

$$(11.1)$$

Legge di Boyle

a temperatura costante la pressione è inversamente proporzionale al volume.

Una *trasformazione isoterma* tra due stati di equilibrio di un gas si può realizzare, ad esempio, se il contenitore, a pareti diatermiche, è mantenuto in contatto termico con una sorgente di calore alla temperatura T e la parete mobile si muove a seguito di una differenza infinitesima di pressione tra gas e ambiente esterno. Si hanno condizioni di equilibrio meccanico e termico e possiamo assumere che durante la trasformazione la temperatura sia costante e la pressione del gas sempre eguale a quella esterna.

Comunque il gas passi da uno stato di equilibrio a pressione p_1 e volume V_1 ad un altro con pressione p_2 e volume V_2 , ma con la stessa temperatura, sia cioè compiendo la trasformazione sopra descritta che una qualsiasi altra in cui la temperatura vari (crescendo e diminuendo o viceversa), la *legge di Boyle* (11.1) stabilisce che si ha sempre

$$p_1 V_1 = p_2 V_2 .$$

In un sistema di coordinate cartesiane ortogonali nel piano, con il volume sull'asse delle ascisse e la pressione sull'asse delle ordinate, il luogo dei punti che rappresentano gli stati di equilibrio di un gas a una data temperatura è costituito da un ramo di iperbole: infatti la (11.1) è l'equazione di una iperbole equilatera nelle coordinate p, V . Per ogni temperatura si ha una diversa iperbole e le curve così ottenute si chiamano le *isoterme del gas ideale*. Nella figura 11.1 sono mostrate alcune isoterme; poiché la costante di (11.1) è proporzionale alla temperatura, come vedremo tra breve, si ha $T_3 > T_2 > T_1$.

Isoterme del gas ideale

Il piano (p, V) utilizzato per la rappresentazione degli stati di equilibrio del gas viene detto *piano di Clapeyron*.

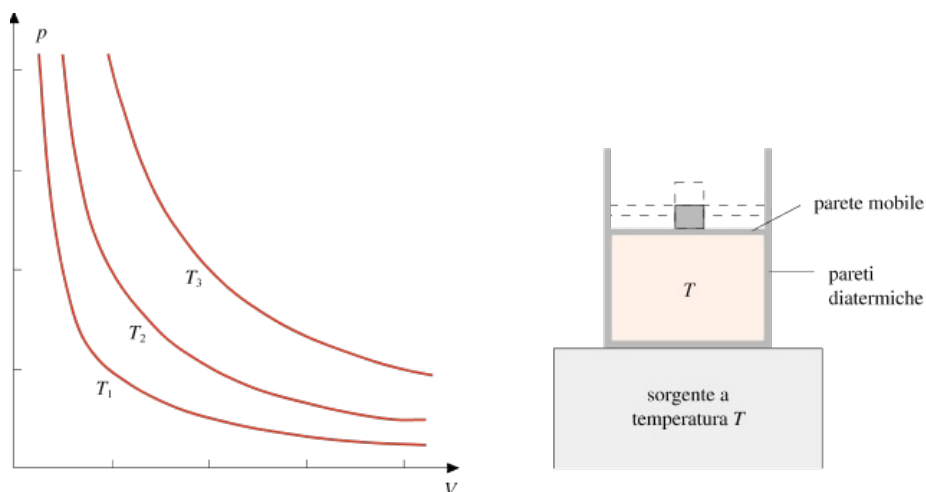


FIGURA 11.1

Legge isobara di Volta-Gay Lussac

Se la pressione di un gas durante una trasformazione resta costante, si parla di *trasformazione isobara*; si verifica che in condizioni isobare il volume varia linearmente con la temperatura:

$$V = V_0 (1 + \alpha t) . \quad (11.2)$$

Nella (11.2) la temperatura è espressa in gradi Celsius, V_0 è il volume occupato dal gas per $t = 0$ e α è una costante che varia poco al variare del tipo di gas, detta *coefficiente di dilatazione termica*; in effetti da (11.2) si può ricavare una relazione analoga a (10.24).

Per provare la validità della *legge isobara di Volta-Gay Lussac* (11.2) si può mettere il gas in equilibrio termico con diverse sorgenti di calore, mantenendo sempre l'equilibrio meccanico con l'ambiente (pressione interna eguale alla pressione esterna costante) e ogni volta misurare il volume del contenitore, che ha una parete mobile come nel caso precedente.

La trasformazione isobara, nel piano (p, V) già considerato, è rappresentata da un segmento di retta parallelo all'asse dei volumi (figura 11.2).

Legge isocora di Volta-Gay Lussac

Se invece si mantiene costante il volume di un gas la pressione risulta funzione lineare della temperatura:

$$p = p_0 (1 + \beta t) . \quad (11.3)$$

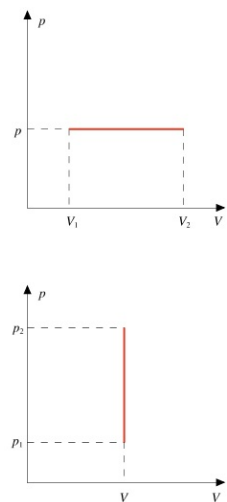
Anche ora la temperatura è espressa in gradi Celsius; p_0 è la pressione del gas per $t = 0$ e β una costante, praticamente indipendente dal tipo di gas.

Una trasformazione a volume costante si dice *isocora*; nel piano (p, V) essa è rappresentata da un segmento di retta parallelo all'asse delle pressioni (figura 11.2).

La verifica della *legge isocora di Volta-Gay Lussac* (11.3) si può eseguire utilizzando il solito contenitore, mantenendo bloccata la parete mobile e misurando la pressione in diversi stati di equilibrio, con il gas in contatto termico con diverse sorgenti di calore.

Ricordiamo quanto detto all'inizio e cioè che il comportamento dei diversi gas è in accordo con le leggi (11.1), (11.2), (11.3) quanto più ci si avvicina alle condizioni di gas ideale (bassa pressione e alta temperatura). Così facendo si osserva anche che le costanti α e β assumono lo stesso valore per tutti i gas:

$$\alpha = \beta = \frac{1}{273.15} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1} .$$

**FIGURA 11.2**

Le due leggi (11.2) e (11.3) si possono pertanto scrivere

$$V = V_0 \alpha \left(\frac{1}{\alpha} + t \right) = V_0 \alpha T, \quad (11.4)$$

$$p = p_0 \alpha \left(\frac{1}{\alpha} + t \right) = p_0 \alpha T, \quad (11.5)$$

dove con $T = \frac{1}{\alpha} + t = 273.15 + t$ è indicata la temperatura misurata in kelvin (vedi α paragrafo 10.3). Abbiamo così ritrovato la relazione tra i valori della temperatura espressi in gradi Celsius e in kelvin, dandone una giustificazione.

Legge di Avogadro

La quarta legge dei gas è la *legge di Avogadro*, di carattere completamente diverso dalle precedenti leggi elementari, in quanto direttamente collegata alla struttura microscopica di un gas. Essa stabilisce che *volumi eguali di gas diversi, alla stessa temperatura e pressione, contengono lo stesso numero di molecole*.

Avogadro dedusse la legge che porta il suo nome osservando che quando due gas, alla stessa temperatura e pressione, si combinano in una reazione chimica dando luogo a un composto ($2\text{H}_2 + \text{O}_2 \rightarrow 2\text{H}_2\text{O}$, $\text{H}_2 + \text{Cl}_2 \rightarrow 2\text{HCl}$, $\text{S}_2 + 2\text{O}_2 \rightarrow 2\text{SO}_2$), i valori dei volumi delle quantità di gas che partecipano alla reazione stanno in rapporti semplici tra loro (2:1, 1:1, 1:2 negli esempi visti) e questi rapporti sono immutabili.

Notiamo che anche la legge di Avogadro si riferisce a gas che abbiano un comportamento ideale e quindi obbediscano alle leggi precedentemente enunciate. Per esempio due volumi di gas, eguali a una data temperatura e pressione, restano eguali ad un'altra temperatura se i due gas si comportano esattamente alla stessa maniera al variare della temperatura; ovvero eguali numeri di molecole di due gas diversi occupano sempre lo stesso volume, nelle stesse condizioni di pressione e temperatura, solo se i gas sono ideali.

Detta M la massa totale del gas e m la massa di ciascuna delle molecole che lo compongono, il numero di molecole è $N = M / m$. La massa m è il prodotto della massa molecolare A per l'unità di massa atomica m_u , cioè

$$m = A m_u = A \cdot 1.6604 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \Rightarrow N = 6.0221 \cdot 10^{26} \frac{M}{A} .$$

Chilomole

Considerando una massa M numericamente eguale ad A , ovvero A chilogrammi di gas, quantità che si chiama *chilomole* (kmol), risulta

$$N = N_A = \frac{1}{m_u} = 6.0221 \cdot 10^{26} \text{ molecole/kmol} ,$$

Numero di Avogadro

numero detto di *Avogadro*. Se invece si considera una massa M eguale ad A grammi di gas, quantità che si chiama *mole* (mol), il numero di Avogadro vale

Mole

$$N_A = 6.0221 \cdot 10^{23} \text{ molecole/mol} .$$

Dalla legge di Avogadro discende la definizione della *settima unità fondamentale*, quella della *quantità di materia* (vedi appendice B). Si chiama *mole una quantità di materia che contiene tante entità elementari quanti sono gli atomi contenuti in 0.012 kg dell'isotopo ^{12}C del carbonio*, ovvero $N_A = 6.0221 \cdot 10^{23}$ entità elementari. Una chilomole corrisponde a 10^3 moli e contiene $6.0221 \cdot 10^{26}$ entità elementari.

Numero di Avogadro

È importante sottolineare che con la mole non viene introdotta una diversa unità di massa. Infatti una mole di idrogeno gassoso ($A = 2$) corrisponde ad una massa di $2 \cdot 10^{-3}$ kg, una di ossigeno gassoso ($A = 32$) a $32 \cdot 10^{-3}$ kg, una di acqua ($A = 18$) a $18 \cdot 10^{-3}$ kg; quindi ad una quantità di materia data da un certo numero di moli corrispondono masse diverse a seconda della sostanza considerata, però queste masse contengono tutte lo stesso numero di molecole.

Come conseguenza della legge di Avogadro *una mole di qualsiasi gas, a una data temperatura e pressione, occupa sempre lo stesso volume*. Si trova che se la pressione è quella atmosferica ($p_0 = 101325 \text{ Pa}$) e la temperatura è $T_0 = 273.15 \text{ K} = 0 \text{ }^\circ\text{C}$, tale volume vale

$$V_m = 0.022414 \text{ m}^3 = 22.414 \text{ litri} .$$

V_m viene indicato col nome di *volume molare*. Pertanto n moli occupano un volume pari a nV_m e in particolare una chilomole occupa 22.414 m^3 , nelle dette condizioni di pressione e temperatura.

Volume molare

Equazione di stato del gas ideale

Se consideriamo n moli di un gas alla pressione atmosferica p_0 e alla temperatura $T_0 = 273.15 \text{ K}$, esse occupano, come abbiamo appena detto, il volume $V_0 = nV_m$. Mantenendo costante il volume e portando la temperatura al valore T , la pressione in base alla (11.5) assume il valore

$$p_T = p_0 \alpha T .$$

Moltiplicando per V_0 si ha

$$p_T V_0 = p_0 V_0 \alpha T = p_0 V_T ,$$

dove la seconda eguaglianza è in accordo con (11.4). V_0 e p_T sono le coordinate termodinamiche in un particolare stato di equilibrio alla temperatura T , come lo sono p_0 e V_T per un altro stato, sempre alla temperatura T . In base alla (11.1)

$$p_T V_0 = p_0 V_T = p V ,$$

essendo p e V le coordinate in un generico stato di equilibrio, purché a temperatura T . Otteniamo dunque

$$pV = p_0 V_0 \alpha T = n p_0 V_m \alpha T .$$

Il prodotto $p_0 V_m \alpha$ è una costante universale, che ha lo stesso valore per tutti i gas, e quindi

$$pV = n R T \quad (11.6)$$

con

$$\begin{aligned} R = p_0 V_m \alpha &= 1.01325 \cdot 10^5 \cdot 0.022414 \cdot \frac{1}{273.15} \\ &= 8.314 \text{ J/mol K} = 8314 \text{ J/kmol K} . \end{aligned}$$

Equazione di stato del gas ideale

Costante del gas ideale

Definiamo, sulla base delle tre leggi elementari e della legge di Avogadro, come *gas ideale un sistema le cui coordinate termodinamiche in uno stato di equilibrio obbediscono alla (11.6)*, detta *equazione di stato di un gas ideale*. Pertanto in un gas ideale il prodotto della pressione per il volume è proporzionale al numero di moli e alla temperatura attraverso la costante universale R , detta *costante dei gas ideali*. Osserviamo che nella relazione tra p , V e T espressa da (11.6) la quantità significativa è il numero di moli, cioè il numero di molecole del gas, e non la sua massa.

Gas ideale

La (11.6) mostra che *in un gas ideale in equilibrio sono indipendenti solo due variabili*, in quanto la terza si ricava appunto tramite l'equazione di stato. Vediamo allora che, per un dato numero di moli, un punto nel piano (p,V) rappresenta completamente uno stato di equilibrio del gas, potendosi ricavare subito la temperatura da (11.6).

L'equazione di stato contiene (11.1), (11.4), (11.5): infatti basta mantenere costante T , p o V in (11.6) e si ottengono le tre leggi isoterma, isobara o isocora. Anche la legge di Avogadro è contenuta in (11.6), se R è una costante universale.

È possibile scrivere l'equazione di stato in forme diverse da (11.6). Ricordando che $n = N / N_A$, con N numero di molecole del gas, abbiamo

$$pV = \frac{N}{N_A} RT = N k_B T ; \quad (11.7)$$

la costante universale

$$k_B = \frac{R}{N_A} = \frac{8.314}{6.0221 \cdot 10^{23}} = 1.3807 \cdot 10^{-23} \text{ J/K} \quad (11.8)$$

Costante di
Boltzmann

è detta *costante di Boltzmann*.

Se al posto del volume si utilizza la densità $\rho = M / V$ e al posto della massa M del gas si mette An , con A massa molecolare, la (11.6) diventa

$$\frac{p}{\rho} = \frac{RT}{A} . \quad (11.9)$$

Ricordiamo ancora una volta che l'equazione di stato dei gas ideali esprime un comportamento limite, al quale si avvicinano i gas reali quanto più lontana è la loro temperatura da $T = 0$ e quanto più bassa è la loro pressione ovvero la loro densità, cioè quanto più sono caldi e rarefatti. In queste condizioni le differenze di comportamento dei diversi gas praticamente scompaiono e tutti seguono approssimativamente (11.6).

Esempio 11.1

Un gas ideale è contenuto in un volume $V = 10^{-3} \text{ m}^3$ alla pressione $p = 10^5 \text{ Pa}$ e alla temperatura $T = 300 \text{ K}$. Calcolare il numero di molecole contenute nel volume. Se la pressione scende a $p' = 10^{-9} \text{ Pa}$, di quanto varia la risposta?

Soluzione

Dall'equazione di stato $n = pV/RT = 4 \cdot 10^{-2}$ moli; il numero di molecole nel volume V , che è pari ad un litro, è

$$N = n N_A = 2.41 \cdot 10^{22} .$$

Se la pressione scende a 10^{-9} Pa (alto vuoto), cioè diminuisce di un fattore 10^{14} , di altrettanto diminuisce N , a parità degli altri fattori, e risulta

$$N' = 2.41 \cdot 10^8 ;$$

sono rimasti 241 milioni di molecole nel volume V .

[Visualizza Soluzione](#)

Esempio 11.2

Una massa $m = 5 \cdot 10^{-3}$ kg di idrogeno è contenuta in un volume $V = 100$ litri alla temperatura $T = 20^\circ\text{C}$. Calcolare quanto vale la pressione. Quale massa di ossigeno produce lo stesso risultato?

Soluzione

Una mole di idrogeno ha una massa pari a $2 \cdot 10^{-3}$ kg e quindi nel volume V ci sono 2.5 moli. La pressione è

$$p = \frac{nRT}{V} = \frac{2.5 \cdot 8.314 \cdot 293}{10^{-1}} = 6.09 \cdot 10^4 \text{ Pa} \quad .$$

Se il gas è ossigeno, 2.5 moli equivalgono ad una massa $m = 2.5 \cdot 32 \cdot 10^{-3} = 80 \cdot 10^{-3}$ kg (16 volte maggiore della massa di idrogeno, nel rapporto cioè delle masse molecolari).

Visualizza Soluzione

11.2 Termometro a gas ideale a volume costante

La variabilità della pressione di un gas con la temperatura, a volume costante, viene sfruttata per costruire un termometro, in cui la pressione è la caratteristica termometrica. La struttura concettuale del termometro a gas è mostrata in figura 11.3.

Il gas è contenuto in un bulbo metallico che può essere messo in contatto termico con una cella al punto triplo dell'acqua e col sistema di cui si vuole misurare la temperatura. Il volume del gas è delimitato dalla superficie libera del mercurio che riempie il manometro (paragrafo 8.3) e il serbatoio. In ciascuna misura si mantiene costante il volume del gas facendo in modo che il mercurio sia sempre al livello indicato dall'indice A ; ciò si ottiene alzando o abbassando il serbatoio mobile S .

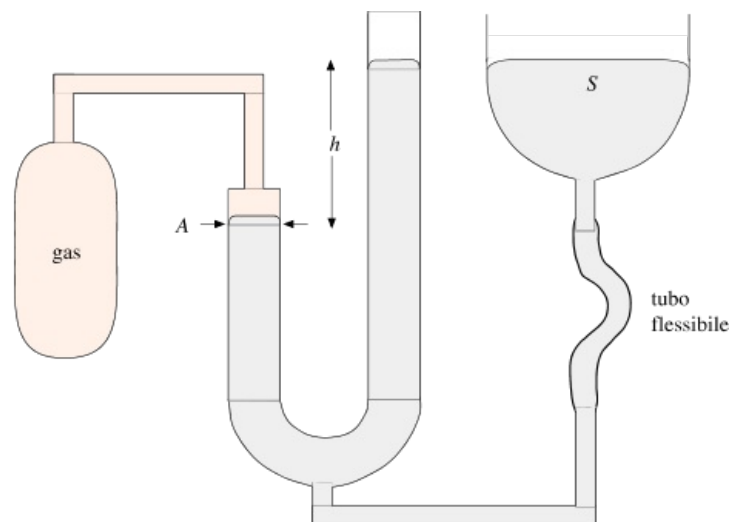


FIGURA 11.3

La pressione del gas è misurata dal dislivello h tra le superficie libere del mercurio ed è quindi riferita alla pressione esterna (cioè $p = p_{\text{ext}} + \rho gh$). Se il ramo più lungo del manometro fosse chiuso, come avviene nei termometri più utilizzati, la pressione esterna sarebbe quella dei vapori di mercurio, praticamente nulla. La temperatura T si ricava utilizzando la relazione (10.1):

$$T = 273.16 \frac{p}{p_{\text{pt}}}, \quad (11.10)$$

in cui p e p_{pt} rappresentano le pressioni (assolute) del gas alla temperatura T e alla temperatura del punto triplo.

Il procedimento di misura è in realtà più complesso:

1) posta nel bulbo una quantità di gas pari a n_1 moli, si determinano i valori p e p_{pt} e si calcola tramite (11.10) la temperatura, che indichiamo con T_1 ;

2) si riduce a $n_2 < n_1$ il numero di moli del gas, si determinano p e p_{pt} che hanno valori minori dei precedenti poiché, a V costante e ad una data temperatura, la pressione diminuisce se il numero di moli decresce, si ricalcola la temperatura ottenendo il valore T_2 ;

3) si ripete il procedimento, diminuendo ancora il numero di moli del gas e quindi ottenendo valori minori per le pressioni.

Nella figura 11.4 sono riportati i valori della temperatura, calcolata tramite (11.10), in funzione della pressione del gas: si osserva che il valore della temperatura varia linearmente con la pressione, e in modo diverso a seconda del gas utilizzato, però il limite per $p \rightarrow 0$ è lo stesso per tutti i gas.

La temperatura fornita dal termometro a gas è data pertanto da

$$T = \lim_{p \rightarrow 0} 273.16 \frac{p}{p_{pt}} .$$

Il passaggio al limite equivale a tendere alla condizione di gas ideale (gas rarefatto) e quindi il risultato deve essere indipendente dal particolare gas usato, come si trova sperimentalmente. Si viene così a superare una delle difficoltà nella misura della temperatura, evidenziate nel paragrafo 10.3.

La misura della temperatura con un termometro a gas presenta, come si comprende dal procedimento descritto, notevoli difficoltà. Viene seguita questa metodologia solo per determinare alcuni punti fissi, da utilizzarsi come riferimento per calibrare termometri di uso più semplice.

Osserviamo inoltre che con questo tipo di termometro non si può scendere a temperature inferiori a qualche kelvin, poiché qualsiasi gas a quelle temperature passa alla fase liquida o solida.

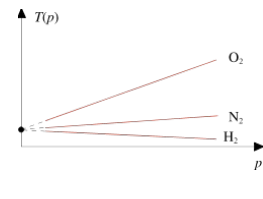


FIGURA 11.4

Esempio 11.3

Il gas di un termometro a gas a volume costante ha la pressione $p = 2049$ Pa in corrispondenza alla temperatura di ebollizione dell'acqua. Calcolare quanto vale la pressione alla temperatura del punto triplo dell'acqua. Se il volume del gas è $3 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$, quante moli di gas ci sono nel termometro?

Soluzione

Da $373.15 = 273.16 p/p_{pt}$ si ricava $p_{pt} = 1500$ Pa. Applicando l'equazione di stato nello stato con $T = 273.16$ K si trova $n = 2 \cdot 10^{-4}$ moli.

Visualizza Soluzione

11.3 Trasformazioni di un gas. Lavoro

Consideriamo due stati di equilibrio A e B di un sistema formato da n moli di gas ideale. Noti i valori della pressione e del volume, dall'equazione di stato (11.6) si ricavano i valori della temperatura:

$$T_A = \frac{p_A V_A}{n R} \quad , \quad T_B = \frac{p_B V_B}{n R} \quad .$$

Una trasformazione che porti il gas dallo stato A allo stato B può svolgersi attraverso stati di equilibrio termodinamico ed è rappresentabile nel piano (p, V) di Clapeyron da una curva continua (figura 11.5a). Se invece la trasformazione ha luogo attraverso stati di non equilibrio si usa una rappresentazione simbolica a tratto per indicare che si ignorano i valori delle coordinate durante il processo (figura 11.5b).

La trasformazione attraverso stati di non equilibrio può realizzarsi in conseguenza di un processo di espansione o compressione rapida, per cui non sussiste né equilibrio meccanico né termico, o per effetto di una espansione o compressione lenta con una differenza di pressione finita così che, pur potendoci essere equilibrio termico, non c'è equilibrio meccanico, oppure a seguito di contatto termico con differenza finita di temperatura (possibile equilibrio meccanico, ma non equilibrio termico).

Quando un gas si espande o viene compresso avviene uno scambio di lavoro che in termini infinitesimi si può scrivere in generale $dW = p dV$, come si è visto nel paragrafo 8.1 per un fluido sottoposto a forze di pressione. In una trasformazione finita dallo stato A allo stato B si avrebbe

$$W = \int_A^B p(V) dV \quad , \quad (11.11)$$

però bisogna fare attenzione perché questa espressione esplicita del lavoro è utile soltanto quando si conosce la funzione $p(V)$, circostanza verificata sostanzialmente in due sole situazioni:

- a) *la trasformazione è reversibile* e pertanto si può calcolare l'integrale, dato che la pressione è determinata in ogni stato intermedio, $p = p_{\text{gas}} = p_{\text{amb}}$;
- b) *è nota la pressione esterna* che, per esempio, è costante, caso tipico di quando il processo avviene sotto la pressione atmosferica; allora, anche se la trasformazione non è reversibile, il lavoro è calcolabile ed è dato da

$$W = p_{\text{amb}} (V_B - V_A) \quad .$$

In tutti gli altri casi in cui la pressione non è nota non si può applicare la (11.11).

Ad ogni modo, *se la trasformazione è isocora* ($V = \text{costante}$, $\Delta V = 0$), il

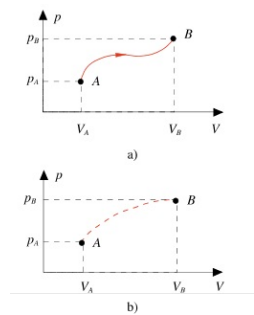


FIGURA 11.5

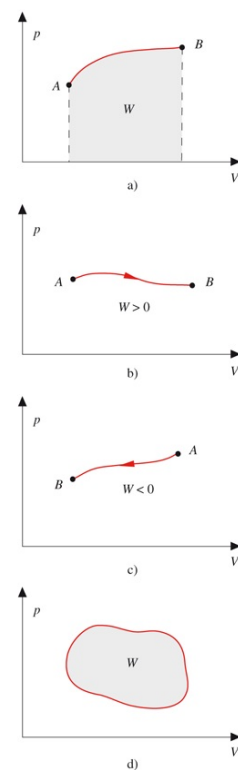


FIGURA 11.6

lavoro è sempre nullo; se il gas si espande il volume finale V_B è maggiore del volume iniziale V_A e il gas compie un lavoro sull'ambiente che secondo la convenzione adottata è positivo; se il gas viene compresso, $V_B < V_A$ e il gas subisce un lavoro (negativo), compiuto dall'ambiente.

Il lavoro, se si può utilizzare (11.11), ha un semplice significato geometrico nel piano di Clapeyron. Nel caso di una trasformazione che passa attraverso stati di equilibrio ed è quindi rappresentabile con una curva continua, la curva $p = p(V)$ nel piano (p,V) , il lavoro, in accordo con il significato geometrico dell'operazione di integrazione, è pari all'area compresa tra la curva e l'asse dei volumi (figura 11.6a). Nelle figure 11.6b e 11.6c sono mostrati i casi dell'espansione ($W > 0$) e della compressione ($W < 0$), entrambe reversibili. Infine nella figura 11.6d è rappresentata una trasformazione ciclica reversibile e il lavoro è dato dall'area racchiusa dal ciclo: esso è positivo se il ciclo è percorso in senso orario, negativo in caso contrario.

Dalle considerazioni appena esposte si comprende l'importanza della rappresentazione di una trasformazione nel piano (p,V) rispetto alle possibili alternative (p,T) e (V,T) , almeno per quel che riguarda il lavoro. Ad esempio, dall'osservazione delle trasformazioni reversibili disegnate in figura 11.7, si verifica che, a parità di stato iniziale e finale, il lavoro dipende dalla trasformazione, $W_1 \neq W_2 \neq W_3$. Si noti però che tale conclusione è valida anche per le trasformazioni non reversibili, che non possono essere rappresentate nel piano (p,V) .

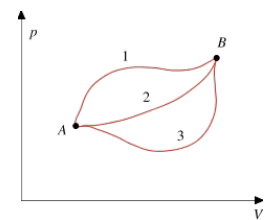


FIGURA 11.7

Esempio 11.4

Si calcoli il lavoro per le varie trasformazioni reversibili rappresentate in figura 11.8, che collegano gli stati di equilibrio termodinamico $A (p_A, V_A)$ e $B (p_B, V_B)$.

Soluzione

Lungo la prima trasformazione $AA'B$

$$W_1 = W_{AA'} + W_{A'B} = W_{AB} = p_B (V_B - V_A) \quad .$$

Nella trasformazione 2, lungo il segmento congiungente A con B ,

$$W_2 = W_{AB} = \frac{1}{2} (p_A + p_B) (V_B - V_A)$$

in quanto l'area sotto la curva è un trapezio. Infine lungo $AB'B$

$$W_3 = W_{AB'} + W_{B'B} = W_{AB'} = p_A (V_B - V_A) \quad .$$

Risulta pertanto $W_1 > W_2 > W_3$.

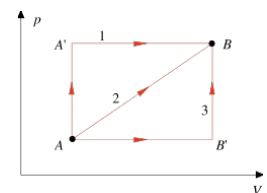


FIGURA 11.8

(Esempio 11.4)

Visualizza Soluzione

Esempio 11.5

Si determini il lavoro per le varie trasformazioni cicliche reversibili rappresentate in figura 11.9.

Soluzione

Il lavoro nel ciclo a) è dato da

$$W_a = \frac{1}{2} (p_B - p_A) [(V_D - V_A) + (V_C - V_B)] \quad .$$

Nel secondo caso il lavoro, calcolato sempre dall'area racchiusa dal ciclo, è

$$W_b = - \frac{1}{2} (V_B - V_A) (p_C - p_A) \quad .$$

Il segno negativo è dovuto al fatto che il ciclo viene percorso in senso antiorario. Fisicamente, in questo ciclo il gas subisce un lavoro. Per il ciclo c) il lavoro è dato da

$$W_c = (V_C - V_A) (p_C - p_A) \quad .$$

Infine nel ciclo d), percorso in senso antiorario, il gas subisce complessivamente il lavoro

$$W_d = - \frac{\pi}{4} (p_B - p_A) (V_D - V_C).$$

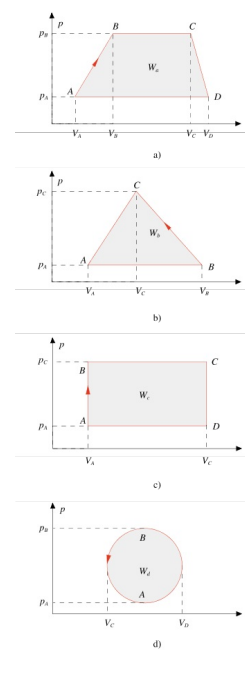


FIGURA 11.9
(Esempio 11.5)

Visualizza Soluzione

Concludiamo l'argomento lavoro riprendendo l'osservazione fatta alla fine del paragrafo 10.6 e verificandola nel caso di un sistema gassoso. Se un gas compie una trasformazione reversibile dallo stato A allo stato B , quando questa viene percorsa in senso opposto, da B ad A , il lavoro cambia soltanto di segno, come è evidente da (11.11): $W_{BA} = - W_{AB}$. Per definizione la proprietà è valida in ogni caso per la variazione di energia interna e dal primo principio segue che $Q_{BA} = - Q_{AB}$. Niente di simile si può invece affermare se la trasformazione è irreversibile.

11.4 Calore. Calori specifici

In una trasformazione generica un gas scambia anche calore con l'ambiente e per il calcolo bisogna ricorrere al primo principio. Però è possibile nelle trasformazioni non isoterme (e ovviamente non adiabatiche) arrivare a un'espressione come (10.15), con l'avvertenza che bisogna specificare il tipo di processo.

Precisamente, per una trasformazione infinitesima isocora si ha $dQ = n c_V dT$, mentre per una isobara $dQ = n c_p dT$; le quantità

$$c_V = \frac{1}{n} \left(\frac{dQ}{dT} \right)_V, \quad c_p = \frac{1}{n} \left(\frac{dQ}{dT} \right)_p \quad (11.12)$$

Calori specifici molari

si chiamano, rispettivamente, *calore specifico molare a volume costante* e *a pressione costante* e si misurano in J/mol K.

Se c_V e c_p possono essere ritenuti costanti, il calore scambiato per una variazione ΔT di temperatura ($\Delta T = T_B - T_A$) si scrive nei due casi

$$Q_V = n c_V \Delta T, \quad Q_p = n c_p \Delta T. \quad (11.13)$$

Altrimenti

$$Q_V = n \int_{T_A}^{T_B} c_V dT, \quad Q_p = n \int_{T_A}^{T_B} c_p dT. \quad (11.14)$$

Una caratteristica di queste formule è che il calore scambiato dipende soltanto dalla variazione di temperatura, come nel caso di solidi e liquidi (si faccia però attenzione a non estendere il risultato a trasformazioni che non siano isocore o isobare). Una verifica sperimentale può essere fatta con un esperimento calorimetrico, attraverso lo scambio di calore con un solido.

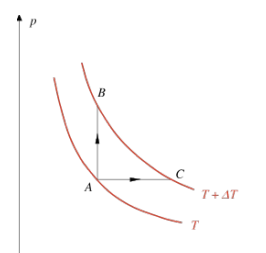
Nel prossimo paragrafo vedremo che l'energia interna di un gas ideale è funzione solo della temperatura e cresce con la stessa. Sfruttando tale risultato dimostriamo che in un gas ideale deve essere $c_p > c_V$.

Consideriamo infatti due trasformazioni, una isocora e una isobara, durante le quali si abbia la stessa variazione positiva di temperatura ΔT . Dal primo principio $Q = \Delta U + W$ applicato alla trasformazione isocora AB della figura 11.10 risulta

$$Q_V = n c_V \Delta T = \Delta U$$

in quanto $W = 0$. Nella trasformazione isobara AC $W = p \Delta V$, positivo perché il volume cresce con la temperatura, e quindi

$$Q_p = n c_p \Delta T = \Delta U + p \Delta V.$$



Dato che la variazione di temperatura è la stessa nelle due trasformazioni e che l'energia interna è funzione solo della temperatura, la variazione ΔU è la stessa nei due casi e quindi $Q_p > Q_V$ da cui segue $c_p > c_V$: *il calore che bisogna cedere a una mole di gas ideale per fare aumentare la sua temperatura di 1K è maggiore a pressione costante che a volume costante, perché a pressione costante il gas compie anche del lavoro.*

Tale risultato resta vero anche se c_p e c_V sono funzioni della temperatura, come si può dimostrare utilizzando le relazioni valide per le trasformazioni infinitesime:

$$dQ = dU + dW \quad , \quad dQ_V = n c_V dT = dU \quad , \quad dQ_p = n c_p dT = dU + p dV > dQ_V \quad .$$

11.5 Energia interna del gas ideale

La dipendenza dell'energia interna di un gas ideale dalle coordinate termodinamiche è stata ricavata analizzando il risultato dell'esperienza *sull'espansione libera, eseguita da Joule*.

Una possibile realizzazione dell'esperienza è quella indicata nel secondo esempio sulle trasformazioni del paragrafo 10.6, un'altra è la seguente.

In un contenitore con pareti rigide e diatermiche, diviso in due parti eguali separate da un rubinetto, si trova un gas nella parte sinistra, mentre nella parte destra è stata realizzata una condizione di vuoto. Il contenitore è immerso in un calorimetro e la temperatura di equilibrio è T . Si apre il rubinetto e si lascia espandere il gas in tutto il volume a disposizione. L'espansione è chiamata libera perché non ci sono forze esterne che agiscono sul gas. Sperimentalmente si osserva che, comunque si operi, aprendo lentamente o rapidamente il rubinetto, con gas inizialmente ad alta o bassa pressione, la temperatura del liquido calorimetrico alla fine del processo è sempre pari a T , temperatura iniziale di equilibrio.

Il gas quindi non scambia calore con il calorimetro, $Q = 0$. Esso inoltre non scambia lavoro con l'esterno (le pareti del contenitore sono rigide) e pertanto $W = 0$. Dal primo principio segue $\Delta U = Q - W = 0$: *nell'espansione libera l'energia interna di un gas ideale non varia*. Possiamo allora giungere alla seguente conclusione: poiché nel processo la temperatura del gas non cambia, mentre variano pressione e volume (in accordo con (11.1) perché la trasformazione è isoterma, cioè $p_{\text{in}} V_{\text{in}} = p_{\text{fin}} V_{\text{fin}}$), l'energia interna deve essere funzione soltanto della temperatura.

Il risultato viene assunto vero rigorosamente solo per un gas ideale. Si veda in proposito il paragrafo 11.8.

Per determinare l'espressione esplicita della funzione $U(T)$ consideriamo due generici stati di equilibrio A e B : $\Delta U = U_B - U_A$ deve essere la stessa qualsiasi trasformazione si scelga, essendo U una funzione di stato. Se scegliamo in particolare una trasformazione AC isocora e una CB isoterma (figura 11.12), si ha

$$\Delta U = U_B - U_A = U_B - U_C + U_C - U_A = U_C - U_A$$

in quanto $U_B = U_C$ essendo gli stati B e C alla stessa temperatura ed U funzione solo della temperatura. Applichiamo ora il primo principio alla trasformazione isocora: dato che $W = 0$, $\Delta U = Q$, dove Q è il calore scambiato in condizioni isocore, dato da (11.13) o (11.14). Pertanto

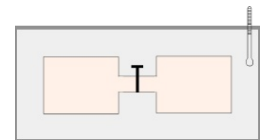


FIGURA 11.11

$$\Delta U = U_B - U_A = n c_V (T_B - T_A) = n c_V \Delta T , \quad (11.15)$$

$$\Delta U = U_B - U_A = n \int_{T_A}^{T_B} c_V dT ,$$

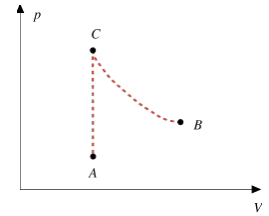


FIGURA 11.12

a seconda che il calore specifico a volume costante sia indipendente dalla temperatura oppure no. Per trasformazioni infinitesime

$$dU = n c_V dT \quad (11.16)$$

da cui si ricava

$$c_V = \frac{1}{n} \frac{dU}{dT} . \quad (11.17)$$

Poiché l'energia interna è funzione soltanto della temperatura, anche il calore specifico a volume costante di un gas ideale dipende solo dalla temperatura, potendo essere, in particolare, costante.

Possiamo adesso scrivere in maniera esplicita il primo principio (10.5) per quel che riguarda le trasformazioni di gas ideali:

$$dQ = n c_V dT + dW \Rightarrow Q = n \int_{T_A}^{T_B} c_V dT + W , \quad (11.18)$$

$$Q = n c_V \Delta T + W \text{ se } c_V = \text{costante} .$$

Se la trasformazione è reversibile le (11.18) diventano

$$dQ = n c_V dT + p dV \Rightarrow Q = n \int_{T_A}^{T_B} c_V dT + \int_{V_A}^{V_B} p dV , \quad (11.19)$$

$$Q = n c_V \Delta T + \int_{V_A}^{V_B} p dV \text{ se } c_V = \text{costante} .$$

Relazione di Mayer

Alla fine del paragrafo 11.4 abbiamo dimostrato che in un gas ideale il calore specifico a pressione costante è maggiore di quello a volume costante; adesso possiamo rendere quantitativa l'affermazione. In una trasformazione isobara infinitesima $dQ = n c_p dT$ e $dW = p dV$ per cui, da (11.18),

$$n c_p dT = n c_V dT + p dV .$$

Differenziando l'equazione di stato dei gas ideali $pV = nRT$ si ha

$$p dV + V dp = n R dT ;$$

in una trasformazione isobara $dp = 0$ e quindi $p dV = n R dT$. Pertanto

$$n c_p dT = n c_v dT + n R dT$$

e in conclusione si ottiene la *relazione di Mayer*

$$c_p - c_v = R \quad (11.20)$$

Relazione di Mayer

Di conseguenza in un gas ideale anche c_p è funzione soltanto della temperatura potendo in particolare essere costante.

Da (11.20) si ricava un significato energetico per la costante dei gas ideali R : essa rappresenta il lavoro che a pressione costante compie una mole (o una chilo-mole) di gas ideale in corrispondenza ad un aumento di temperatura di 1 K.

Il rapporto tra i calori specifici

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v}$$

Rapporto γ

risulta in un gas ideale sempre maggiore di 1 ed è funzione soltanto della temperatura o, in particolare, costante.

Sperimentalmente si trovano per i calori specifici dei gas ideali questi risultati:

a) i gas ideali *monoatomici* (gas rari come elio, neon, argon, vapori metallici di sodio, mercurio) hanno c_v costante e pari a $3R/2$:

$$c_v = \frac{3}{2} R = 12.47 \text{ J/mol K} \Rightarrow c_p = \frac{5}{2} R = 20.79 \text{ J/mol K} , \gamma = \frac{5}{3} = 1.667 ;$$

la costanza di tali valori è verificata in un ampio intervallo di temperature;

b) alcuni gas ideali *biatomici* (idrogeno, azoto, monossido di azoto NO e monossido di carbonio CO) hanno c_v costante e pari a $5R/2$:

$$c_v = \frac{5}{2} R = 20.79 \text{ J/mol K} \Rightarrow c_p = \frac{7}{2} R = 29.10 \text{ J/mol K} , \gamma = \frac{7}{5} = 1.4 ;$$

ciò è vero a temperatura ordinaria, mentre a temperature superiori c_v e c_p crescono lentamente;

c) altri gas ideali *biatomici* (ossigeno, fluoro, cloro, bromo) e i gas ideali *poliatomici* (anidride carbonica CO_2 , ammoniaca NH_3 , metano CH_4) hanno i calori specifici variabili con la temperatura secondo leggi che dipendono dal particolare gas considerato.

I valori di c_p/R possono essere riprodotti in un intervallo di temperature abbastanza vasto (300 K - 1500 K) dall'equazione empirica

$$c_p/R = a + bT + cT^2$$

con a , b , c costanti che variano da gas a gas; dalla relazione di Mayer si calcola poi c_V e quindi γ . Allo scopo di dare un'idea delle variazioni in gioco elenchiamo i valori delle costanti per alcuni dei gas menzionati.

	a	$b(\text{K}^{-1})$	$c(\text{K}^{-2})$
idrogeno	3.496	$-1.01 \cdot 10^{-4}$	$2.4 \cdot 10^{-7}$
azoto	3.283	$6.29 \cdot 10^{-4}$	$-1.0 \cdot 10^{-9}$
CO	3.231	$8.38 \cdot 10^{-4}$	$-9.9 \cdot 10^{-8}$
ossigeno	3.094	$1.56 \cdot 10^{-3}$	$-4.6 \cdot 10^{-7}$
cloro	3.813	$1.22 \cdot 10^{-3}$	$-4.8 \cdot 10^{-7}$
CO ₂	3.127	$5.23 \cdot 10^{-3}$	$-1.8 \cdot 10^{-6}$
NH ₃	3.063	$4.43 \cdot 10^{-3}$	$-7.6 \cdot 10^{-7}$
CH ₄	1.702	$9.08 \cdot 10^{-3}$	$-1.3 \cdot 10^{-5}$

I casi a) e b) suddetti sono quelli a cui ci limiteremo nel seguito della trattazione, salvo situazioni specificamente indicate (nel paragrafo 11.10 giustificheremo le espressioni trovate per c_V). Pertanto utilizzeremo le relazioni

$$\Delta U = n c_V \Delta T \text{ per qualsiasi trasformazione} \quad (11.15)$$

$$Q = n c_V \Delta T \text{ se } V = \text{costante} \quad Q = n c_p \Delta T \text{ se } p = \text{costante} \quad . \quad (11.13)$$

Ricordiamo che accanto a queste valgono sempre per un gas ideale le seguenti proprietà:

$$\text{equazione di stato} \quad pV = nRT \text{ in uno stato di equilibrio} \quad (11.6)$$

$$\text{relazione di Mayer} \quad c_p - c_V = R \quad . \quad (11.20)$$

Nota sulle unità di misura

Riprendiamo l'argomento già esposto alla fine del capitolo 10. Noi utilizziamo l'unità joule per lavoro, calore ed energia interna. Pertanto

$$R = 8.314 \text{ J/mol K} = 8314 \text{ J/kmol K} \quad .$$

Se però viene utilizzata la caloria, di cui ricordiamo il rapporto con il joule,

$$1 \text{ Cal} = 4186.8 \text{ J} \quad ,$$

allora il valore di R da usare è

$$R = 1.986 \cdot 10^{-3} \text{ Cal/mol K} = 1.986 \text{ Cal/kmol K} \quad .$$

In tal caso

$$\frac{3}{2} R = 2.979 \cdot 10^{-3} \quad , \quad \frac{5}{2} R = 4.965 \cdot 10^{-3} \quad , \quad \frac{7}{2} R = 6.951 \cdot 10^{-3} \text{ Cal / mol K} \quad .$$

Si trova talvolta utilizzata anche l'unità litri · atmosfere, che è un'unità di lavoro:

$$1 \text{ l} \cdot \text{atm} = 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot 1.01325 \cdot 10^5 \text{ Pa} \cong 101.3 \text{ J} \cong 24.2 \cdot 10^{-3} \text{ Cal} \quad .$$

In queste unità

$$R = 0.0821 \cdot \text{atm/mol K} \quad .$$

L'unità $\text{l} \cdot \text{atm}$, seguendo la sorte dell'atmosfera, è ufficialmente abbandonata.

11.6 Studio di alcune trasformazioni

Studiamo ora alcune trasformazioni termodinamiche molto comuni, eseguite da gas ideali; l'idealità del gas sarà sottintesa, ma risulterà evidente dalle relazioni che verranno usate. Particolare attenzione verrà prestata al fatto che le trasformazioni siano reversibili o irreversibili.

Trasformazioni adiabatiche

Il gas è racchiuso in un contenitore con pareti adiabatiche e quindi può scambiare solo lavoro, per esempio in conseguenza del fatto che una parete è mobile. Dal primo principio (11.18) si ha

$$W_{AB} = -\Delta U = -n c_V (T_B - T_A) = \frac{1}{\gamma - 1} (p_A V_A - p_B V_B) \quad (11.21)$$

se la trasformazione avviene tra i due stati di equilibrio A iniziale e B finale; nell'ultimo passaggio le temperature sono state espresse per mezzo dell'equazione di stato e si è utilizzata la relazione di Mayer.

Se si ha un'espansione adiabatica il lavoro W_{AB} è positivo e quindi ΔU è negativa e T_B è minore di T_A : il gas si raffredda; se invece si ha una compressione adiabatica, $W_{AB} < 0$, $\Delta U > 0$, $T_B > T_A$, il gas si riscalda. Queste variazioni di temperatura sono comunemente sperimentate nelle variazioni rapide di volume di un gas.

Non è possibile ricavare altre relazioni tra le coordinate termodinamiche di due stati collegati da una trasformazione adiabatica generica salvo alcune limitazioni, derivanti dal secondo principio della termodinamica, che vedremo nel capitolo 12.

Se invece la trasformazione è *adiabatica reversibile*, l'espressione infinitesima del primo principio diviene

$$dU + dW = n c_V dT + p dV = 0$$

in quanto possiamo esprimere il lavoro in funzione delle coordinate termodinamiche, appunto perché la trasformazione è reversibile. Per questa stessa ragione si può utilizzare l'equazione di stato in qualsiasi stato intermedio per esprimere la pressione come $p = n R T / V$ e si ottiene

$$n c_V dT + \frac{n R T}{V} dV = 0 \quad .$$

Separiamo le variabili (appendice A) e utilizziamo la relazione di Mayer (11.20):

$$\frac{c_p - c_V}{c_V} \frac{dV}{V} = -\frac{dT}{T} \Rightarrow (\gamma - 1) \frac{dV}{V} = -\frac{dT}{T} \quad .$$

Questa equazione differenziale rappresenta la condizione a cui obbediscono le coordinate degli stati di un gas ideale collegati da una trasformazione adiabatica reversibile. Integrando dallo stato A allo stato B e supponendo γ costante,

$$(\gamma - 1) \ln \frac{V_B}{V_A} = \ln \frac{T_A}{T_B} \Rightarrow \ln \left(\frac{V_B}{V_A} \right)^{\gamma-1} = \ln \frac{T_A}{T_B} .$$

L'eguaglianza tra i logaritmi comporta l'eguaglianza tra gli argomenti, per cui

$$T_A V_A^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1} ,$$

espressione che dà la relazione tra le coordinate termodinamiche del gas durante una trasformazione adiabatica reversibile.

Tramite l'equazione di stato si può trasformare la relazione tra T e V in una tra p e V o tra p e T e in conclusione si hanno tre espressioni equivalenti:

$$T V^{\gamma-1} = \text{costante} , \quad p V^\gamma = \text{costante} , \quad T p^{(1-\gamma)/\gamma} = \text{costante} . \quad (11.22)$$

Il procedimento che ha portato dal primo principio alle (11.22) è un esempio del fatto citato nel paragrafo 10.6, e cioè che quando si possono esprimere i termini di (10.5) in funzione delle coordinate termodinamiche si ottiene una relazione tra queste che rappresenta l'equazione della trasformazione; le (11.22) si chiamano infatti le *equazioni di una trasformazione adiabatica reversibile di un gas ideale*.

In particolare utilizziamo l'equazione $p V^\gamma = \text{costante}$ per rappresentare la trasformazione nel piano di Clapeyron. Rispetto alla curva isoterma $pV = \text{costante}$ (vedi figura 11.1) passante per esempio per il punto rappresentativo dello stato A , la curva adiabatica ha un andamento simile però con pendenza maggiore perché γ è sempre maggiore di 1: si conferma che $T_B < T_A$.

Una trasformazione adiabatica reversibile costituisce un caso limite, in quanto per essere reversibile dovrebbe svolgersi molto lentamente, ma ciò introduce difficoltà per mantenere l'adiabaticità. Le trasformazioni reali sono irreversibili, in particolare possiamo considerare adiabatica irreversibile una trasformazione che comporta una variazione rapida di volume, così che non ci sia tempo per scambi di calore. L'espansione libera di Joule è un altro caso di trasformazione adiabatica irreversibile.

Un esempio di trasformazione adiabatica si ha nell'atmosfera, quando una massa d'aria calda si sposta rapidamente dal suolo verso l'alto (corrente convettiva ascensionale). Diminuendo la pressione con l'altezza, il volume della massa d'aria aumenta: il processo è approssimabile a una trasformazione adiabatica e ne segue un abbassamento della temperatura della massa d'aria. Se questa contiene vapor d'acqua, si ha condensazione a seguito del raffreddamento e formazione di nuvole, come si osserva in giornate serene, ma

Equazione di una trasformazione adiabatica reversibile del gas ideale

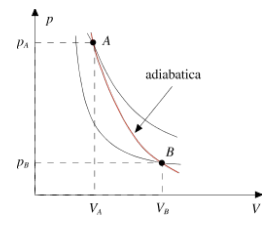


FIGURA 11.13

umide.

Esempio 11.6 Misura del rapporto γ con l'esperienza di Rückhardt

In un recipiente a forma di bottiglia con il collo stretto, mostrato in sezione nella figura 11.14, è contenuto un gas che trattiamo come ideale. Sia S la sezione del collo della bottiglia e V il volume del gas. La bottiglia è tappata da una sfera di acciaio di massa m , in equilibrio sul gas in quanto la forza dovuta alla pressione atmosferica p_0 e il peso della sfera sono bilanciate dalla forza esercitata dalla pressione p del gas: in modulo

$$p S = p_0 S + m g \quad ,$$

relazione che è possibile soddisfare scegliendo opportunamente i parametri in gioco. Se la sfera viene abbassata rapidamente di una quantità z il gas è compresso adiabaticamente e la sua pressione aumenta, le forze non sono più equilibrate e la risultante tende a portare la sfera verso l'alto; se la sfera viene sollevata rapidamente, il gas si espande, la sua pressione diminuisce e la risultante delle forze riporta la sfera verso il basso. Per calcolare la variazione di pressione del gas, differenziamo la $pV^\gamma = \text{costante}$:

$$dp V^\gamma + p \gamma V^{\gamma-1} dV = 0 \quad \Rightarrow \quad dp = -\gamma p \frac{dV}{V} \quad .$$

La variazione di volume è $\Delta V = z S$ e quindi

$$\Delta p = -\frac{\gamma p S}{V} z \quad .$$

A questa variazione di pressione del gas corrisponde la forza non equilibrata

$$F = S \Delta p = -\frac{\gamma p S^2}{V} z = -k z \quad ,$$

positiva se z è negativo e viceversa, come detto sopra. Si tratta di una forza di tipo elastico, assumendo $\Delta V \ll V$, e pertanto il moto della sfera è armonico con periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{m V}{\gamma p S^2}} \quad .$$

Dalla misura del periodo si calcola γ e l'errore è di qualche percento. Poiché la tenuta della sfera non è perfetta, si provvede con un piccolo flusso di gas a mantenere costante la quantità di gas nella bottiglia.

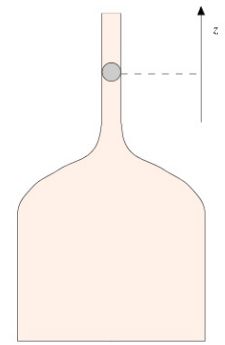


FIGURA 11.14
(Esempio 11.6)

Esempio 11.7 Atmosfera adiabatica

Nel paragrafo 8.3 è stato calcolato l'andamento della pressione atmosferica con l'altezza nell'ipotesi che la temperatura sia costante. In realtà la temperatura decresce con l'altezza e il fenomeno può essere ricondotto all'espansione adiabatica dell'aria calda che sale. La diminuzione di pressione con l'altezza è

$$dp = -\rho g dh = -\frac{A g}{R T} p dh \Rightarrow \frac{dp}{p} = -\frac{A g}{R T} dh \quad ,$$

avendo trattato l'aria come gas ideale che obbedisce all'equazione di stato nella forma (11.9). Un'altra relazione tra p e T è data dalla terza delle (11.21), da cui ricaviamo

$$\frac{dp}{p} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{dT}{T} \quad .$$

Eguagliando le due espressioni trovate si ottiene

$$\frac{dT}{dh} = -\frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{A g}{R} \cong -9.7 \text{ K/km} \quad ,$$

avendo utilizzato per γ il valore 1.4 tipico dell'azoto e dell'ossigeno ideali e per A il valore della massa molecolare dell'aria (28.88). La diminuzione trovata è leggermente superiore a quella osservata, d'altra parte l'aria non è un gas ideale e la trasformazione non è reversibile.

Visualizza

Esempio 11.8

Due moli di gas ideale monoatomico si espandono in modo adiabatico reversibile fino ad occupare un volume triplo di quello iniziale. Se la temperatura iniziale è $T_A = 400$ K, determinare il lavoro compiuto dal gas durante l'espansione.

Soluzione

Calcoliamo innanzitutto la temperatura finale T_B con la prima delle (11.22):

$$T_A V_A^{\gamma-1} = T_B (3 V_A)^{\gamma-1} \Rightarrow T_B = T_A \left(\frac{1}{3}\right)^{2/3}$$

essendo $\gamma = 5/3$. Risulta $T_B = 192.3$ K e quindi

$$W = n c_V (T_A - T_B) = n \frac{3}{2} R (T_A - T_B) = 5180 \text{ J} \quad .$$

Visualizza Soluzione

Esempio 11.9

Una mole di gas ideale biatomico viene compressa in modo adiabatico non reversibile e le temperature iniziale e finale sono $T_A = 200$ K, $T_B = 500$ K. Si determini il lavoro eseguito sul gas.

Soluzione

Possiamo sempre utilizzare per il lavoro l'espressione

$$W_{AB} = -\Delta U = n c_v (T_A - T_B)$$

che nel caso proposto, essendo $c_v = \frac{5}{2} R$,
 feaagKart1ev2aaatCvAUfeBSjuyZL2yd9gzLbvyNv2CaerbuLwBLn
 hiov2DGi1BTfMBaeXatLxBI9gBaerbd9wDYLwzYbItLDharqqtubsr
 4rNCHbGeaGqiVuoJe9sqrpepCoxbbL8F4rqqrFfpeea0xe9Lq=Jc9
 vqaqpepmoxbba9pwe9Q8fso=yqaqpepae9pg0FirpepeKkFr0xfr=x
 fr=xb9adbeqaaeGaciGaaiaabeqamaabaabaaGcbaGaam4yamaaBa
 aaleaacaWG2baabeaakiaaykW7cqGH9aqpcaaMc8+aaSaaeaacaI
 1aaabaGaaGOMaaaacaaMc8UaamOuaiaaykW7caGGSaGaaGPaVdaa@43DF@ dà - 6236 J. Però non
 possiamo utilizzare le (11.22) perché la trasformazione non è reversibile: anche se conoscessimo il
 volume o la pressione iniziali, non potremmo determinare i corrispondenti valori finali.

Visualizza Soluzione

Esempio 11.10

Un recipiente, con le pareti ricoperte da uno strato di materiale termicamente isolante, ha un volume $V = 10^{-3}$ m³ ed è inizialmente vuoto. Attraverso un piccolo foro l'aria esterna, che si trova alla pressione $p_0 = 10^5$ Pa e alla temperatura $T_0 = 300$ K, riempie velocemente il recipiente; quando la pressione dell'aria all'interno è eguale alla pressione esterna p_0 il foro viene chiuso. Determinare per l'aria all'interno la temperatura dopo la chiusura del foro, il numero di moli, la variazione di energia interna e il lavoro subito. Successivamente si toglie lo strato di materiale isolante e l'aria all'interno si porta alla temperatura T_0 . Calcolare il calore scambiato dall'aria interna con l'ambiente esterno. Si assuma che l'aria si comporti come un gas ideale biatomico.

Soluzione

Il processo di riempimento si può schematizzare pensando che le n moli d'aria, inizialmente occupanti all'esterno del recipiente un volume V_0 a pressione p_0 e temperatura T_0 , quando passano all'interno del recipiente occupano all'esterno un volume nullo; esse sono state dunque sottoposte dall'atmosfera esterna al lavoro

$$W = p_0 \int_{V_0}^0 dV = -p_0 V_0 = -n R T_0 \quad .$$

Questo processo irreversibile, che avviene a pressione costante, si svolge in condizioni ben diverse dall'espansione libera, in cui il gas è sempre meccanicamente isolato dall'ambiente. Il processo è anche adiabatico e pertanto

$$\Delta U = n c_V (T - T_0) = -W = n R T_0 \Rightarrow T = \frac{R + c_V}{c_V} T_0 = \gamma T_0 = 420 \text{ K} ,$$

$$n = \frac{p_0 V}{RT} = 2.86 \cdot 10^{-2} , \quad \Delta U = 71.3 \text{ J} , \quad W = -71.3 \text{ J} .$$

Il calore scambiato nella seconda trasformazione, che è isocora, vale

$$Q = n c_V (T_0 - T) = -\Delta U = -71.3 \text{ J}$$

e l'ambiente riceve sotto forma di calore il lavoro speso. La variazione complessiva di energia interna è nulla, in quanto la temperatura finale è eguale a quella iniziale; non è rilevante il cambiamento di volume da V_0 a V e di pressione da p_0 a p , se il gas è ideale.

Visualizza Soluzione

Trasformazioni isoterme

Nel caso di una trasformazione isoterma si considera il gas racchiuso in un recipiente che è in contatto termico con una sorgente di calore alla temperatura T . Durante la trasformazione la temperatura del gas resta costante al valore T e abbiamo

$$\Delta U = 0 , \quad Q = W , \quad p_A V_A = p_B V_B .$$

Se la trasformazione è una espansione isoterma $W_{AB} > 0$ e quindi $Q_{AB} > 0$: il gas compie lavoro e assorbe calore. Se invece la trasformazione è una compressione isoterma $W_{AB} < 0$ e $Q_{AB} < 0$: il gas subisce lavoro e cede calore.

Qualora la trasformazione sia isoterma reversibile, da (11.11) e (11.6) si ha

$$W_{AB} = \int_A^B p dV = \int_A^B \frac{nRT}{V} dV = nRT \int_A^B \frac{dV}{V} = nRT \ln \frac{V_B}{V_A} \quad (11.23)$$

e questa è anche l'espressione esplicita del calore scambiato.

Si noti che è sempre $Q \neq 0$: *una trasformazione isoterma reversibile comporta sempre uno scambio di calore*, a meno che non sia $T = 0$, condizione che, come vedremo, non è mai raggiungibile.

Una particolare trasformazione isoterma irreversibile è l'espansione libera di Joule. Tale trasformazione è insieme adiabatica e isoterma: ciò è possibile solo perché la trasformazione è irreversibile, per una reversibile i due fatti sono ben distinti ed è impossibile che una trasformazione isoterma sia anche adiabatica.

Esempio 11.11

Un contenitore a pareti metalliche contiene 5 moli di gas ideale alla pressione $p_A = 2 \cdot 10^6$ Pa e alla temperatura dell'ambiente $T = 300$ K. Al contenitore è collegato un capillare attraverso cui il gas può fluire lentamente in un secondo contenitore con pistone mobile privo di attrito, sul quale agisce la

pressione esterna $p_0 = 10^5$ Pa. Determinare il lavoro fatto dal gas nella trasformazione che porta il gas alla pressione p_0 .

Soluzione

La trasformazione è isoterma, in quanto il gas fluisce lentamente mantenendosi in equilibrio termico con l'ambiente, ma irreversibile dato che il gas non si trova in equilibrio meccanico a causa della differenza finita di pressione $p_A - p_0$. Nel passare dallo stato iniziale allo stato finale il gas esegue contro la pressione esterna il lavoro

$$W = p_0 (V_{\text{fin}} - V_{\text{in}}) = p_0 \left(\frac{nRT}{p_0} - \frac{nRT}{p_A} \right) = nRT \left(1 - \frac{p_0}{p_A} \right) = 1.18 \cdot 10^4 \text{ J} \quad .$$

Se si fosse erroneamente utilizzata nel calcolo del lavoro la (11.23), valida solo per trasformazioni reversibili, si sarebbe ottenuto

$$W = nRT \ln \frac{V_{\text{fin}}}{V_{\text{in}}} = nRT \ln \frac{p_A}{p_0} = 3.74 \cdot 10^4 \text{ J} \quad .$$

La lentezza della trasformazione non comporta necessariamente che la stessa sia reversibile. Nel paragrafo 13.1 vedremo che il lavoro in una espressione isoterma irreversibile di un gas ideale è sempre inferiore al lavoro di una espansione isoterma reversibile avente gli stessi stati iniziale e finale.

Visualizza Soluzione

Trasformazioni isocore

Il gas è contenuto in un recipiente diatermico di volume fisso: $V = \text{costante}$ e $W = 0$; il gas può scambiare solo calore e questo è eguale, per il primo principio, alla variazione di energia interna:

$$Q = \Delta U = n c_V (T_B - T_A) \quad \text{se } c_V = \text{costante} \quad .$$

Essendo il volume costante, dall'equazione di stato (11.6) o da (11.5) si ha

$$\frac{p_A}{T_A} = \frac{p_B}{T_B} \Rightarrow \frac{p_A}{p_B} = \frac{T_A}{T_B} \quad .$$

Se si cede calore al gas, la sua pressione e la sua temperatura aumentano, mentre se si assorbe calore dal gas pressione e temperatura diminuiscono. Nella pratica ciò viene effettuato mettendo il gas, a temperatura T_A , in contatto termico con una sorgente di calore a temperatura T_B : la trasformazione è irreversibile in quanto non c'è equilibrio termico tra sistema e ambiente, alla fine il gas assume la temperatura T_B .

Una trasformazione *isocora reversibile* si realizza invece mettendo il gas, a temperatura T_A , in contatto termico con una sorgente di calore a temperatura $T_1 = T_A + dT$, poi con una sorgente a temperatura $T_2 = T_1 + dT$, e così via,

utilizzando in teoria una serie infinita di sorgenti.

Trasformazioni isobare. Entalpia

Il gas è contenuto ora in un recipiente diatermico con una parete mobile su cui agisce una pressione esterna costante p . Dall'equazione di stato o da (11.4) abbiamo che in una trasformazione isobara

$$\frac{V_A}{T_A} = \frac{V_B}{T_B} \Rightarrow \frac{V_A}{V_B} = \frac{T_A}{T_B} .$$

Il gas può scambiare sia calore che lavoro, dati da

$$Q = n c_p (T_B - T_A) \quad , \quad W = p (V_B - V_A) = p \left(\frac{nRT_B}{p} - \frac{nRT_A}{p} \right) = nR (T_B - T_A) \quad ,$$

e deve essere sempre $Q - W = \Delta U = n c_V (T_B - T_A)$.

Se si cede calore al gas, il suo volume e la sua temperatura aumentano e il gas compie lavoro; se si assorbe calore dal gas, volume e temperatura diminuiscono, il gas subisce lavoro.

Una trasformazione isobara si compie mettendo il gas, a temperatura T_A , in contatto termico con una sorgente di calore a temperatura T_B ; non essendoci equilibrio termico la trasformazione è irreversibile. Invece, per avere una trasformazione reversibile bisogna disporre di una serie infinita di sorgenti, come descritto per le trasformazioni isocore.

Osserviamo esplicitamente che se un gas ad alta pressione si porta a bassa pressione espandendosi e compiendo lavoro contro la pressione atmosferica, la trasformazione (irreversibile) non è isobara; il lavoro è $W = p_{\text{atm}} (V_2 - V_1)$, però non vale la relazione $T_2 / T_1 = V_2 / V_1$. Perché la trasformazione sia isobara occorre cioè che sia costante la pressione del gas.

Si definisce *entalpia* la funzione

$$H = U + pV \quad , \quad (11.24)$$

che risulta una *funzione di stato* in quanto sia U che pV sono funzioni soltanto delle coordinate .

In un gas ideale U è funzione solo della temperatura e ciò è vero anche per il prodotto pV , in base all'equazione di stato: si conclude che l'*entalpia del gas ideale è funzione solo della temperatura*, $H = H(T)$.

Per una qualsiasi trasformazione infinitesima

$$dH = dU + d(pV) = n c_V dT + n R dT = n c_p dT \quad ,$$

avendo utilizzato (11.20). Per una trasformazione finita

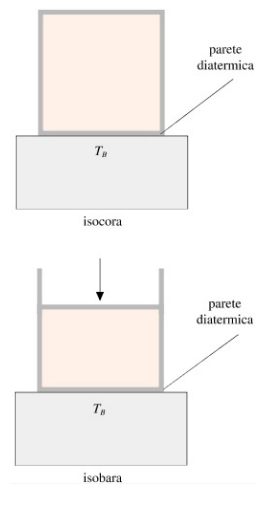


FIGURA 11.15

Entalpia

$$\Delta H = n \int_{T_A}^{T_B} c_p dT$$

$$\Delta H = n c_p (T_B - T_A) \text{ se } c_p = \text{costante}$$
(11.25)

e in particolare per una trasformazione isobara risulta $Q = \Delta H$.

Vediamo dunque che per una generica trasformazione di un gas ideale le due funzioni di stato energia interna ed entalpia dipendono solo dalla variazione di temperatura tra stato finale e stato iniziale, essendo in particolare proporzionali a ΔT se i calori specifici sono costanti; il calore scambiato dipende invece dalla trasformazione. Però,

se la trasformazione è isocora $Q = \Delta U$,

se la trasformazione è isobara $Q = \Delta H$.

In entrambi i casi il calore è eguale alla variazione di una funzione di stato e questo fatto ci fornisce una formula per il calcolo di Q senza dover ricorrere al primo principio, giustificando così le (11.13) e (11.14). Le (11.12) si possono scrivere

$$c_v = \frac{1}{n} \frac{dU}{dT}, \quad c_p = \frac{1}{n} \frac{dH}{dT},$$

estendendo così al calore specifico a pressione costante l'argomento che ci ha portato alla (11.17).

Riassumiamo graficamente nella figura 11.16 gli scambi energetici nelle trasformazioni adiabatiche, isoterme, isocore e isobare; A indica lo stato iniziale, B quello finale.

Si noti che i versi degli scambi energetici (dall'ambiente al sistema e dal sistema all'ambiente) sono univoci, cioè non dipendono ovviamente dalla convenzione adottata per i relativi segni: da questa dipende solo il fatto di chiamare positivo o negativo il calore assorbito dal sistema, ecc.

Trasformazioni generiche

Per una trasformazione diversa da quelle che abbiamo discusso, certamente possiamo utilizzare il primo principio nella forma

$$dQ = dU + dW = n c_v dT + dW.$$

È necessario poi esaminare attentamente le condizioni termodinamiche che regolano la trasformazione, per stabilire se essa sia reversibile o irreversibile.

Se è reversibile possiamo utilizzare l'equazione di stato $pV = nRT$ e per il lavoro l'espressione $dW = p dV$. Si tenga presente che per il lavoro conviene verificare se può essere calcolato direttamente per via geometrica, cioè tramite l'area sotto la curva che rappresenta la trasformazione nel piano (p,V) , come visto negli esempi 11.4 e 11.5.

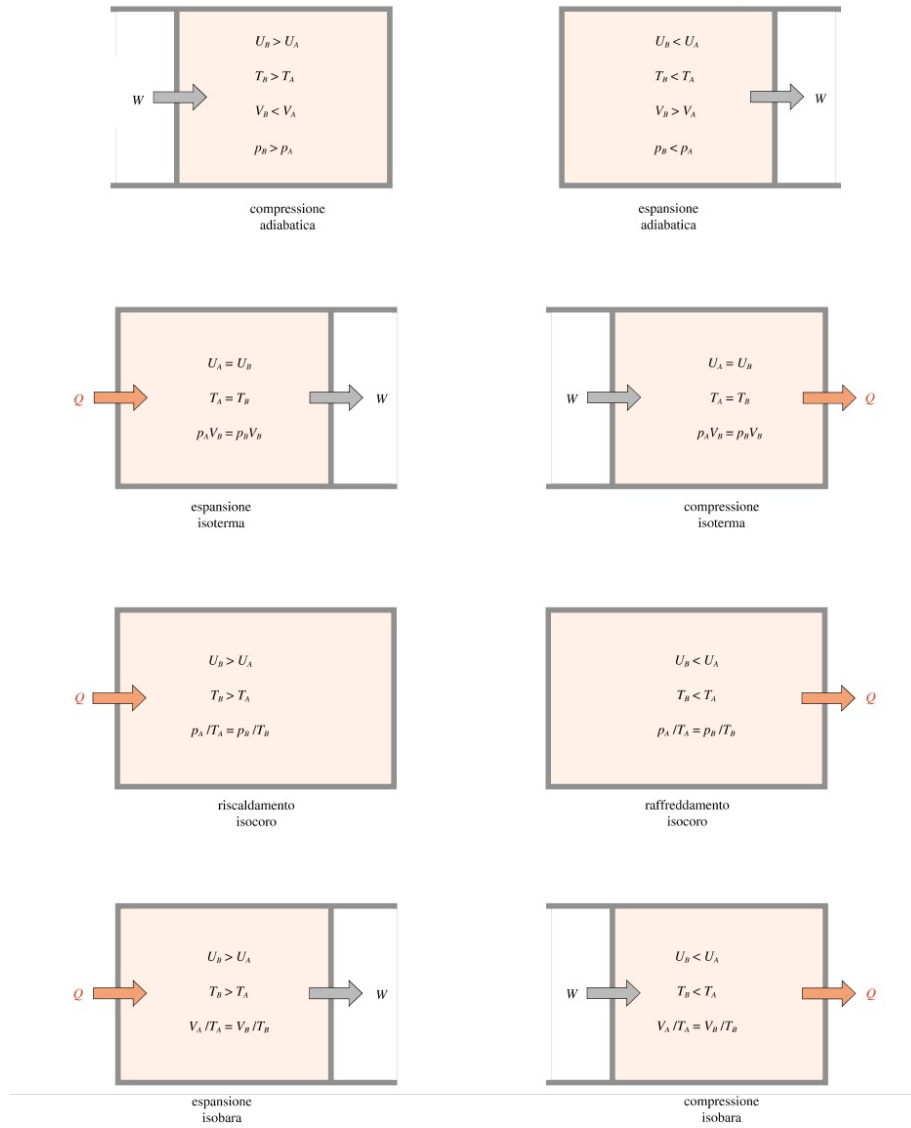


FIGURA 11.16

11.7 Trasformazioni cicliche

Abbiamo definito nel paragrafo 10.5 trasformazione ciclica o ciclo una trasformazione in cui lo stato finale coincide con lo stato iniziale. Il primo principio assume la forma (10.6), il calore scambiato è eguale al lavoro scambiato.

Se durante il ciclo viene *prodotto lavoro* ($W > 0$), *assorbendo calore* da un opportuno numero di sorgenti, tale *ciclo* è detto *termico*. Il dispositivo che opera è indicato come *macchina termica*. Se invece il ciclo è tale che venga *richiesto un lavoro esterno* ($W < 0$), *estraendo calore* da una o più sorgenti fredde per cederlo a sorgenti calde si parla di *ciclo frigorifero*. Il dispositivo corrispondente è detto *macchina frigorifera*.

Macchina termica

Se consideriamo le varie trasformazioni che compongono il ciclo e il calore e il lavoro complessivamente scambiati, possiamo scrivere

Macchina frigorifera

$$Q = Q_A + Q_C ,$$

dove $Q_A > 0$ rappresenta la somma dei calori assorbiti e $Q_C < 0$ la somma dei calori ceduti,

$$W = W_F + W_S ,$$

in cui $W_F > 0$ è la somma dei lavori compiuti e $W_S < 0$ è la somma dei lavori subiti. I calori e i lavori sono visti dal sistema che compie il ciclo e a cui sono riferiti gli aggettivi assorbito, ceduto, compiuto e subito. Per l'ambiente è esattamente il contrario.

Per un ciclo termico si definisce *rendimento* la quantità adimensionale

$$\eta = \frac{W}{Q_A} = \frac{Q_A + Q_C}{Q_A} = 1 + \frac{Q_C}{Q_A} = 1 - \frac{|Q_C|}{Q_A} . \quad (11.26)$$

Rendimento di un ciclo termico

Il rendimento è quindi *la percentuale di calore assorbito che viene trasformata in lavoro*; si noti che nell'ultimo passaggio di (11.26) si è utilizzato il fatto che Q_C è una quantità negativa.

Sperimentalmente si osserva sempre

$$0 \leq \eta < 1 ,$$

ovvero, da (11.26),

$$W < Q_A , |Q_C| < Q_A , Q_C \neq 0 :$$

in un ciclo termico solo una frazione minore di 1 del calore assorbito viene trasformata in lavoro, il resto viene sempre ceduto.

Riprenderemo questo argomento nel capitolo 12, dove vedremo che ha carattere generale; vedremo anche che il calore Q_C non può essere ceduto alla

stessa sorgente da cui è stato assorbito Q_A e che quindi *un sistema che compie un ciclo deve scambiare calore con almeno due sorgenti*.

Studiamo ora alcuni cicli descritti da gas ideali.

Ciclo di Carnot

Il *ciclo di Carnot* è costituito da quattro trasformazioni reversibili, rappresentate in figura 11.17, dove sono indicati anche i versi degli scambi di calore:

- 1) trasformazione AB , *espansione isoterma reversibile*,
- 2) trasformazione BC , *espansione adiabatica reversibile*,
- 3) trasformazione CD , *compressione isoterma reversibile*,
- 4) trasformazione DA , *compressione adiabatica reversibile*.

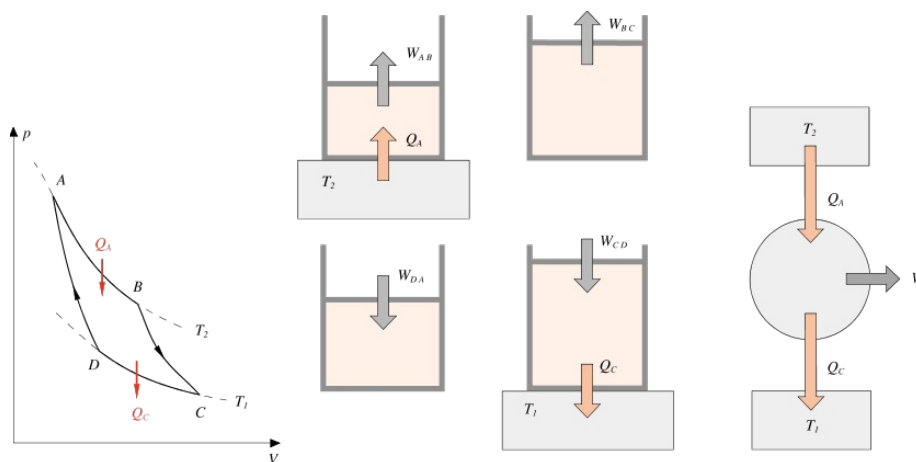


FIGURA 11.17

Nello stato A il gas è in equilibrio a contatto termico con una sorgente di calore a temperatura T_2 . L'espansione isoterma reversibile AB può essere considerata come una successione di trasformazioni infinitesime: in ciascuna a seguito di una diminuzione dp della pressione esterna (equilibrio meccanico) il gas si espande di una quantità dV raffreddandosi di dT ; si ha quindi cessione di calore dQ dalla sorgente a temperatura T_2 (equilibrio termico) al gas che ritorna alla temperatura T_2 . Come risultato, il gas passa reversibilmente dallo stato A , di coordinate termodinamiche p_A, V_A, T_2 , allo stato B di coordinate p_B, V_B, T_2 , assorbendo il calore (11.23)

$$Q_A = nRT_2 \ln \frac{V_B}{V_A} = W_{AB} ;$$

W_{AB} è il lavoro fatto dal gas nell'espansione isoterma.

Nella trasformazione BC il gas è isolato da qualsiasi sorgente di calore. Seguendo lo schema adottato per la trasformazione AB , durante ciascuna trasformazione infinitesima si ha una diminuzione dp della pressione esterna,

un'espansione dV e un raffreddamento dT . Il gas passa quindi dallo stato B (p_B , V_B , T_2) allo stato C (p_C , V_C , T_1), con T_1 minore di T_2 e, secondo la prima delle (11.22),

$$T_2 V_B^{\gamma-1} = T_1 V_C^{\gamma-1} .$$

Il lavoro fatto dal gas è $W_{BC} = -\Delta U_{BC} = n c_V (T_2 - T_1)$.

Nella trasformazione CD il gas è a contatto termico con una sorgente di calore a temperatura T_1 . Il processo è analogo ad AB , però ora si aumenta la pressione esterna di dp , il gas si comprime di una quantità dV ed aumenta la sua temperatura di dT , cede dQ alla sorgente a temperatura T_1 e ritorna alla temperatura T_1 . Il calore ceduto complessivamente è

$$Q_C = nRT_1 \ln \frac{V_D}{V_C} = W_{CD}$$

ed è negativo, come il lavoro, poiché $V_D < V_C$. Infine nella trasformazione DA il gas è di nuovo isolato termicamente, si aumenta la pressione esterna di dp , il volume del gas diminuisce di dV e la temperatura aumenta di dT . Il gas ritorna nello stato iniziale e vale, avendo assunto γ costante, la relazione

$$T_2 V_A^{\gamma-1} = T_1 V_D^{\gamma-1} .$$

Il lavoro subito è $W_{DA} = -\Delta U_{DA} = n c_V (T_1 - T_2) = -W_{BC}$. Sommando tutti i contributi otteniamo

$$Q = Q_A + Q_C = W = W_{AB} + W_{BC} + W_{CD} + W_{DA} = W_{AB} + W_{CD} ;$$

questa quantità coincide con l'area racchiusa dal ciclo. Il rendimento del ciclo è

$$\eta = 1 + \frac{Q_C}{Q_A} = 1 + \frac{nRT_1 \ln (V_D/V_C)}{nRT_2 \ln (V_B/V_A)} = 1 - \frac{T_1 \ln (V_C/V_D)}{T_2 \ln (V_B/V_A)} .$$

Dividendo membro a membro i termini delle relazioni

$$T_2 V_B^{\gamma-1} = T_1 V_C^{\gamma-1} , \quad T_2 V_A^{\gamma-1} = T_1 V_D^{\gamma-1}$$

si ottiene $(V_B V_A)^{\gamma-1} = (V_C V_D)^{\gamma-1}$ MathType@MTEF@5@5@+=
feaagKart1ev2aaatCvAUfeBSjuyZL2yd9gzLbvyNv2CaerbuLwBLn
hiov2DGi1BTfMBAeXatLxBI9gBaerbd9wDYLwzYbItLDharqqtubsr
4rNCHbGeaGqiVu0Je9sqqrpepCoxbbL8F4rqqrFfpeea0xe9Lq=Jc9
vqaqpepmoxbba9pwe9Q8fso=yqaqpepae9pg0FirpepeKkFroxfr=x
fr=xb9adbaqaeeGaciGaaiaabeqaamaabaabaaGcbaWaaeWaaeaada
WcaaqaiaadAfadaWgaaWcbaGaamyaaqabaaakeaacaWGwbWaaSba
aSqaaiaadgeaaeqaaaaaaOGaayjkaiaawMcaamaaCaaaleqabaGaeq
4SdCMAeyOeIoIaaGymaaaakiabg2da9maabmaabaWaaSaaeaacaWG
wbWaaSbaaSqaaiaadoeaaeqaaaGcbaGaamOvamaaBaaaleaacaWGeb

aabeaaaaakiaawIcacaGLPaaadaahaaWcbeqaaiabeo7aNjabgkHi
Tiaaigdaaaaaa@48B1@ ovvero $V_B V_A = V_C V_D$.
MathType@MTEF@5@5@+=
feaagKart1ev2aaatCvAUfeBSjuyZL2yd9gzLbvyNv2CaerbuLwBLn
hiov2DGi1BTfMBaeXatLxBI9gBaerbd9wDYLwzYbItLDharqqtubsr
4rNCHbGeaGqiVuoJe9sqqrpepCoxbbL8F4rqqrFfpeeaOxe9Lq=Jc9
vqaqpepmoxbba9pwe9Q8fso=yqaqpepaepgoFirpepeKkFroxfr=x
fr=xb9adbaqaeeGaciGaaiaabeqaamaabaabaaGcbaWaaSaaaeaaca
WGwbWaaSbaaSqaaiaadkeaaeqaaaGcbaGaamOvamaaBaaaleaacaWG
bbaabeaaaaGccqGH9aqpdWcaaqaiaadAfadaWgaaWcbaGaam4qaa
qabaaakeaacaWGwbWaaSbaaSqaaiaadseaaeqaaaaakiaac6caaaa@3F30@ Quindi
 $V_A V_D$

$$\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2} \quad (11.27)$$

Rendimento del ciclo di Carnot

Si noti il fatto molto importante che nella (11.27) non compare alcuna grandezza caratteristica del gas, ma solo i valori delle temperature delle sorgenti con cui il gas scambia calore: *il rendimento del ciclo di Carnot, descritto da un gas ideale con calore specifico costante, dipende solo dalle temperature a cui avvengono gli scambi isotermi di calore.* Vedremo più avanti, nel paragrafo 12.3, che questa proprietà è vera qualunque sia la sostanza che descrive il ciclo.

Poiché $T_1 < T_2$ verifichiamo che $\eta < 1$; inoltre da $V_B / V_A = V_C / V_D$ si ha $Q_A > |Q_C|$. Il gas complessivamente assorbe calore perché $Q_A + Q_C > 0$ e produce il lavoro $W = Q_A + Q_C$, pari alla somma algebrica di quello fatto durante l'espansione isoterma e subito durante la compressione isoterma (i lavori svolti durante le adiabatiche sono eguali ed opposti).

Ciclo di Stirling

Il ciclo termico di Stirling è composto da quattro trasformazioni reversibili, rappresentate nel piano (p, V) in figura 11.18:

- 1) trasformazione AB, espansione isoterma reversibile a temperatura T_2 ,
- 2) trasformazione BC, isocora reversibile da T_2 a $T_1 < T_2$,
- 3) trasformazione CD, compressione isoterma reversibile a temperatura T_1 ,
- 4) trasformazione DA, isocora reversibile da T_1 a T_2 .

Le trasformazioni AB e CD sono già state discusse nel caso del ciclo di Carnot e trascriviamo i risultati:

$$Q_A = Q_{AB} = W_{AB} = nRT_2 \ln \frac{V_B}{V_A} > 0 \quad ,$$

$$Q_C = Q_{CD} = W_{CD} = nRT_1 \ln \frac{V_D}{V_C} < 0 \quad .$$

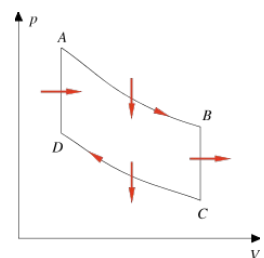


FIGURA 11.18

Nell'isocora BC il gas cede a una serie infinita di sorgenti a temperatura T_2 , $T_2 - dT$, $T_2 - 2 dT$, ..., $T_1 + dT$, T_1 il calore

$$Q_{BC} = \Delta U_{BC} = n c_V (T_1 - T_2) .$$

Nell'isocora DA avviene, con le stesse modalità, il processo inverso e il gas assorbe il calore

$$Q_{DA} = \Delta U_{DA} = n c_V (T_2 - T_1) = -Q_{BC} .$$

Come sappiamo, nelle isocore non viene scambiato lavoro.

Alla fine del ciclo l'infinita serie di sorgenti con temperature tra T_1 e T_2 ha assorbito e ceduto, durante le isocore, gli stessi calori e il calore realmente scambiato tra il gas e le sorgenti è $Q_A + Q_C$, cioè quello scambiato lungo le isoterme.

Il rendimento del ciclo di Stirling è dato pertanto da

$$\eta = 1 + \frac{Q_C}{Q_A} = 1 + \frac{nRT_1 \ln (V_D/V_C)}{nRT_2 \ln (V_B/V_A)} = 1 - \frac{T_1}{T_2} ,$$

poiché $V_A = V_D$ e $V_B = V_C$. Il rendimento del ciclo di Stirling è dunque *eguale a quello del ciclo di Carnot*.

Rendimento del ciclo di Stirling

Ciclo di Otto (motore a scoppio)

Il ciclo termico di Otto schematizza il funzionamento di un motore a scoppio a quattro tempi, come quello del motore automobilistico a benzina. Nel ciclo di Otto si suppone che la miscela aria-benzina sia assimilabile a un gas ideale biatomico e che il ciclo sia reversibile. Seguendo la figura 11.19 illustriamo le varie fasi del processo.

- 1) Nella trasformazione OA la miscela benzina-aria viene aspirata nel cilindro, a pressione costante (*fase di aspirazione*).
- 2) Nella trasformazione adiabatica reversibile AB la miscela nel cilindro viene compressa rapidamente dal pistone dal volume V_2 al volume V_1 (*fase di compressione*).
- 3) La trasformazione BC schematizza l'incendio della miscela dovuto alla scintilla prodotta dalla candela con conseguente esplosione, che provoca una rapida crescita della temperatura e della pressione del gas; si assume che il riscaldamento sia isocoro con assorbimento di calore da una successione di sorgenti a temperatura crescente:

$$Q_A = n c_V (T_C - T_B) .$$

Questa è la *fase di accensione e combustione*.

- 4) Il gas caldo si espande rapidamente spingendo il pistone e ritornando al volume V_2 con una trasformazione adiabatica reversibile CD , durante la quale viene compiuto lavoro (*fase di espansione*).
- 5) La trasformazione DA , isocora reversibile con la cessione del calore

$$Q_C = n c_V (T_A - T_D) ,$$

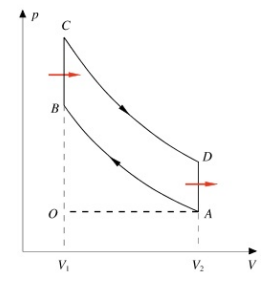


FIGURA 11.19

schematizza l'apertura della valvola verso il tubo di scappamento con conseguente riduzione della pressione al valore iniziale, mentre il gas cede calore all'ambiente (*fase di decompressione*).

6) Infine nella trasformazione AO a pressione costante il gas viene espulso dal cilindro e il pistone ritorna nella posizione iniziale (*fase di scarico*).

I *quattro tempi* sono le trasformazioni OA, AB, CD, AO.

Il *rendimento* del ciclo di Otto è dato da

$$\eta = 1 + \frac{Q_C}{Q_A} = 1 + \frac{n c_V (T_A - T_D)}{n c_V (T_C - T_B)} = 1 - \frac{T_D - T_A}{T_C - T_B} .$$

Rendimento del ciclo di Otto

Sperimentalmente è molto più facile misurare i volumi $V_1 (= V_B = V_C)$ e $V_2 (= V_A = V_D)$ e il loro rapporto $r = V_2 / V_1$ (*rapporto di compressione*). Dalle relazioni

$$T_D V_2^{\gamma-1} = T_C V_1^{\gamma-1} , \quad T_A V_2^{\gamma-1} = T_B V_1^{\gamma-1}$$

sottraendo membro a membro si ottiene

$$(T_D - T_A) V_2^{\gamma-1} = (T_C - T_B) V_1^{\gamma-1} .$$

Pertanto

$$\eta = 1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} = 1 - \frac{1}{r^{\gamma-1}} ,$$

avendo utilizzato $\gamma = 1.4$, valore valido per un gas biatomico.

Il rendimento aumenta all'aumentare del rapporto di compressione, che però non deve assumere valori troppo grandi se si vuole evitare il fenomeno dell'autocombustione, cioè l'esplosione anticipata dovuta al riscaldamento della miscela durante la fase di compressione. Mescolando alla benzina opportuni additivi si può ottenere $r = 10$ ovvero $\eta = 0.6$.

Il rendimento del ciclo di Otto calcolato con la formula appena ricavata va inteso come valore massimo teorico: nei motori reali si ottengono rendimenti $0.2 \div 0.3$. La differenza è dovuta a varie cause: innanzitutto il ciclo è solo un'approssimazione dei processi reali, che non possono essere così semplificati; per esempio le fasi di combustione ed espansione non sono nettamente separate, le fasi di compressione ed espansione sono state assunte adiabatiche perché molto rapide, cosicché sia trascurabile lo scambio di calore con l'esterno, ma non sono certamente reversibili (non c'è equilibrio meccanico). Inoltre sono stati trascurati gli attriti e le perdite di calore attraverso le pareti del cilindro. D'altra parte è importante avere un modello che indichi le massime prestazioni possibili.

Ciclo Diesel

Il funzionamento del *motore Diesel* è schematizzabile tramite un ciclo termico eseguito da un gas ideale biatomico (figura 11.20). La differenza con il

ciclo di Otto sta essenzialmente nell'autoaccensione graduale della miscela, rappresentata dalla trasformazione isobara reversibile BC .

Seguiamo, come fatto per il ciclo di Otto, le varie trasformazioni:

- 1) trasformazioni OA , isobara, *fase di aspirazione*;
- 2) trasformazione AB , adiabatica reversibile, *fase di compressione*;
- 3) trasformazione BC , isobara reversibile, *fase di iniezione e combustione*: il gas assorbe il calore

$$Q_A = n c_p (T_C - T_B) ;$$

- 4) trasformazione CD , adiabatica reversibile, *fase di espansione*;
- 5) trasformazione DA , isocora reversibile, *fase di decompressione*: il gas cede il calore

$$Q_C = n c_v (T_A - T_D) ;$$

- 6) trasformazione AO , isobara, *fase di scarico*. Il rendimento è dato da

$$\eta = 1 + \frac{Q_C}{Q_A} = 1 + \frac{n c_v (T_A - T_D)}{n c_p (T_C - T_B)} = 1 - \frac{T_D - T_A}{\gamma (T_C - T_B)} .$$

Utilizzando (11.22) per le due trasformazioni adiabatiche reversibili abbiamo

$$T_D V_2^{\gamma-1} = T_C V_3^{\gamma-1} , \quad T_A V_2^{\gamma-1} = T_B V_1^{\gamma-1}$$

da cui ricaviamo i valori di T_D e T_A . Inoltre si ha $T_B / T_C = V_1 / V_3$ essendo la trasformazione BC isobara. Definiamo

$$r_C = \frac{V_2}{V_1} , \quad r_E = \frac{V_2}{V_3}$$

rispettivamente *rapporto di compressione* e *rapporto di espansione*. Sostituendo nell'espressione del rendimento si ottiene

$$\eta = 1 - \frac{1/r_E^\gamma - 1/r_C^\gamma}{\gamma (1/r_E - 1/r_C)} .$$

Con $r_C = 15$ e $r_E = 5$ si trova $\eta = 0.56$. Anche ora i valori di rendimento così ottenuti vanno considerati come valori massimi teorici, per ragioni analoghe a quelle discusse nel ciclo di Otto.

Il motore Diesel presenta rendimento più elevato di quello del motore a ciclo di Otto perché può funzionare con rapporto di compressione più alto e può raggiungere temperature di combustione più elevate.

Esempio 11.12 Un ciclo irreversibile

0.2 moli di gas ideale biatomico compiono il ciclo $ABCD$ rappresentato in figura 11.21, dove la trasformazione AB è una isoterma irreversibile, mentre BC è una adiabatica, CD un'isobara e DA un'isocora, tutte reversibili.

I valori dei volumi sono $V_A = 5 \text{ l}$, $V_B = 10 \text{ l}$, $V_C = 15 \text{ l}$ e T_A vale 900 K.

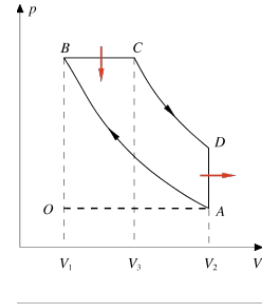
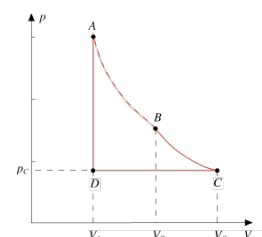


FIGURA 11.20

Rendimento del ciclo Diesel



Nell'isoterma AB il gas assorbe il calore $Q_0 = 860 \text{ J}$. Si determinino il lavoro ottenuto nel ciclo e il rendimento. Ripetere il calcolo nell'ipotesi che la trasformazione AB sia reversibile.

Soluzione

Il lavoro complessivo è $W = W_{AB} + W_{BC} + W_{CD}$ con

$$W_{AB} = Q_0 \quad , \quad W_{BC} = -\Delta U_{BC} = n c_V (T_B - T_C) \quad , \quad W_{CD} = p_C (V_D - V_C) \quad .$$

Il valore di T_C si ricava da

$$T_B V_B^{\gamma-1} = T_C V_C^{\gamma-1} \quad \Rightarrow \quad T_C = 765.3 \text{ K} \quad (\gamma = 1.4)$$

e allora $p_C = nRT_C/V_C = 0.848 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. Posto $c_V = 5 R/2$ si ha

$$W = 860 + 559.9 - 848.4 = 571.5 \text{ J} \quad .$$

Il calore assorbito è

$$Q_A = Q_{AB} + Q_{DA} = Q_0 + n c_V (T_A - T_D)$$

con $T_D = p_C V_D / n R = 255 \text{ K}$ per cui

$$Q_A = 860 + 2681.3 = 3541.3 \text{ J} \quad .$$

Il rendimento del ciclo irreversibile vale $\eta = 571.5/3541.3 = 0.161$. Se la trasformazione AB fosse reversibile, sarebbe

$$W_{AB} = Q_{AB} = nRT_A \ln \frac{V_B}{V_A} = 1037.3 \text{ J}$$

e sostituendo questo valore al precedente (860 J) si avrebbe

$$W = 748.8 \text{ J} \quad , \quad Q_A = 3718.6 \text{ J} \quad , \quad \eta = 0.201 \quad .$$

Visualizza Soluzione

Alcune note conclusive sui cicli termici

Negli esempi trattati di cicli termici abbiamo visto che il sistema scambia calore con varie sorgenti: dal punto di vista termico l'ambiente non è unico, ma cambia da trasformazione a trasformazione e anzi, nelle adiabatiche, non partecipa al processo. Possiamo dire, sempre da un punto di vista termico, che l'ambiente si può rappresentare con un numero, finito o infinito, di sorgenti di calore. Abbiamo anche verificato quanto detto all'inizio: il rendimento risulta sempre minore di 1 e le sorgenti sono sempre almeno due, una a temperatura T_2 che cede calore al sistema, l'altra a temperatura T_1 che assorbe calore dal sistema; il calore che il sistema assorbe è sempre maggiore, in modulo, di quello che il sistema cede, $Q_A > |Q_C|$, e si trova sempre $T_2 > T_1$.

Questi risultati sono più generali di quanto i pochi esempi visti possano far credere; infatti essi sono validi per qualsiasi ciclo termico. Vedremo nel capitolo 12 che tali fatti costituiscono un aspetto del secondo principio della termodinamica.

Cicli frigoriferi

In un *ciclo frigorifero* il sistema complessivamente assorbe lavoro e cede calore ($Q = W < 0$). Nella situazione più semplice il sistema assorbe il calore Q_0 dalla sorgente fredda, assorbe lavoro e cede il calore Q_C a una sorgente calda: risulta sempre $|Q_C| > Q_0$.

Si definisce *efficienza* o *coefficiente di prestazione* di un ciclo frigorifero il rapporto

$$\xi = \frac{Q_0}{|W|} \quad , \quad (11.28)$$

tanto maggiore quanto minore è il modulo del lavoro speso nel ciclo, a parità di calore Q_0 assorbito.

Efficienza di un ciclo frigorifero

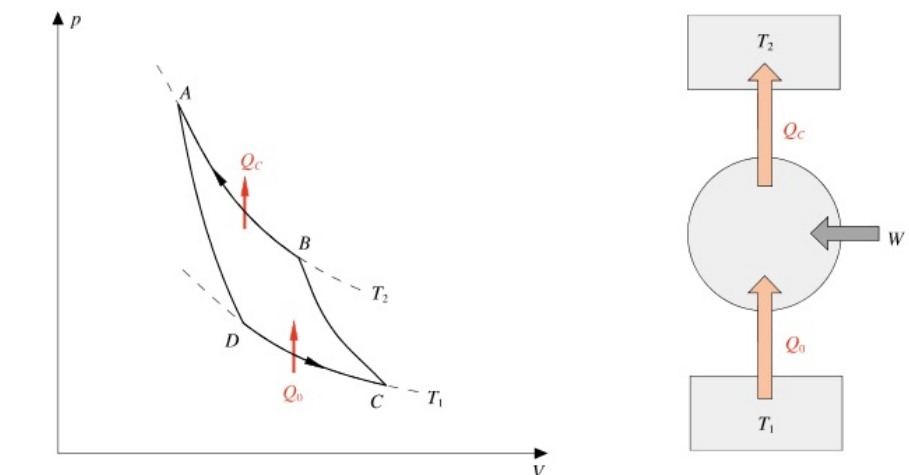


FIGURA 11.22

Un ciclo di Carnot percorso in senso inverso costituisce un esempio di ciclo frigorifero reversibile. Con riferimento alla figura 11.22 e anche alla figura 11.17, il gas assorbe il calore $Q_0 = nRT_1 \ln(V_C/V_D)$ dalla sorgente alla temperatura T_1 (sorgente fredda) e cede il calore $Q_C = nRT_2 \ln(V_A/V_B)$ alla sorgente alla temperatura T_2 (sorgente calda), assorbendo il lavoro $W = Q_0 + Q_C$. L'efficienza è

$$\xi = \frac{Q_0}{|Q_C + Q_0|} = \frac{nRT_1 \ln(V_C/V_D)}{nRT_2 \ln(V_B/V_A) - nRT_1 \ln(V_C/V_D)} = \frac{T_1}{T_2 - T_1} \quad .$$

ricordando che $V_B/V_A = V_C/V_D$. Tratteremo in seguito un esempio pratico di ciclo frigorifero.

Anche per i cicli frigoriferi sono verificati alcuni fatti di carattere generale: il calore ceduto dal sistema alle sorgenti calde è sempre maggiore, in modulo, di quello assorbito, cioè sottratto alla sorgente fredda e quindi il processo avviene sempre in presenza di lavoro fornito dall'ambiente al sistema ($Q_0 + |W| = |Q_C|$). Si tratta di un altro aspetto del secondo principio.

11.8 Gas reali. Equazione di stato. Energia interna

I *gas reali* non seguono le relazioni caratteristiche dei gas ideali riassunte alla fine del paragrafo 11.5, ma si avvicinano ad esse quanto più bassa è la pressione ed alta la temperatura. Inoltre un gas reale non mantiene sempre la fase gassosa, qualunque sia il valore delle sue coordinate termodinamiche, ma può passare alla fase liquida o solida (cambiamento di fase), come illustreremo nel paragrafo 11.9. Ci limitiamo per ora ad alcune osservazioni sull'equazione di stato e sulla dipendenza dell'energia interna dalle coordinate termodinamiche.

Equazione di stato di un gas reale

In un gas ideale in condizioni isoterme il prodotto pV ha un valore costante, che dipende dalla temperatura prescelta, ma non dalla pressione o dal volume. Tale condizione, a causa delle interazioni molecolari, non è soddisfatta dai gas reali. Le deviazioni diventano rilevanti quando, abbassando la temperatura, ci si approssima al cambiamento di fase gas-liquido oppure, alzando la pressione, si raggiunge la condizione di *gas denso*.

Nella figura 11.23 in basso è riportata, per una mole di azoto, la quantità pV in funzione della pressione, a varie temperature (ciascuna curva è isoterma). Per un gas ideale si dovrebbero avere linee parallele all'asse delle ascisse, in quanto il prodotto pV , eguale a nRT , non dipende dalla pressione se la temperatura è costante; tale situazione risulta approssimativamente realizzata a 300 K e a pressioni inferiori a 20 bar. Come ulteriore conferma mostriamo, in alto, il valore del rapporto pV/nT al tendere a zero della pressione: si vede che il limite è R .

L'andamento sperimentale del prodotto pV è approssimato abbastanza bene con uno sviluppo in serie (*sviluppo del viriale*),

$$\frac{pV}{nRT} = 1 + c_1 p + c_2 p^2 + c_3 p^3 + \dots$$

I coefficienti c_i , detti *coefficienti del viriale*, sono funzioni della temperatura, decrescenti all'aumentare della stessa, e dipendono dalla natura del gas; essi vengono determinati sperimentalmente. Uno sviluppo analogo, con coefficienti diversi, ma legati ai precedenti, si può fare in funzione di $1/V$, cioè della densità:

$$\frac{pV}{nRT} = 1 + \frac{d_1}{V} + \frac{d_2}{V^2} + \frac{d_3}{V^3} + \dots$$

Il comportamento tipico del gas ideale è il limite quando la pressione (o la densità) tende a zero.

Energia interna

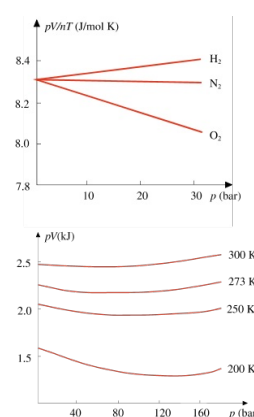


FIGURA 11.23

Come abbiamo discusso nel paragrafo 11.5 l'energia interna di un gas ideale è funzione solo della temperatura; pertanto le sue derivate parziali rispetto al volume e alla pressione, eseguite a temperatura costante, sono nulle:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = 0 \quad , \quad \left(\frac{\partial U}{\partial p}\right)_T = 0 \quad .$$

L'eventuale dipendenza dalla pressione per un gas reale si può verificare eseguendo un'espansione isoterma da uno stato a pressione p e temperatura T ad un altro a pressione $p_0 < p$ ed eguale temperatura; dalla misura del lavoro e del calore scambiati nella trasformazione si risale, tramite il primo principio, alla variazione di energia interna. Si trova che:

- a) la differenza $\Delta U = U(p, T) - U(p_0, T)$ è minore di zero,
- b) il modulo di ΔU cresce con l'aumentare di $p - p_0$.

Pertanto si ha

$$(\partial U / \partial p)_T \neq 0$$

e tale quantità inoltre risulta funzione della temperatura, ma non della pressione.

Quantitativamente si ottiene, ad esempio per una mole di aria a 301 K, $(\partial U / \partial p)_T \cong -6 \text{ J/bar}$: a temperatura costante l'energia interna è funzione lineare della pressione. Per pressioni elevate ($p > 40 \text{ bar}$) il comportamento è diverso.

Solo se il gas reale è rarefatto ($p \rightarrow 0$) la sua energia tende a dipendere solo dalla temperatura.

Espansione di Joule-Thomson

Già prima dell'esecuzione dell'esperienza sopra descritta, condotta nel 1932, Joule e Thomson nel 1852 studiarono il comportamento dell'energia interna di un gas reale con l'esperienza dell'espansione che porta il loro nome.

Due recipienti comunicano tra loro attraverso un setto poroso e un fluido viene fatto passare dal primo al secondo per effetto di una differenza di pressione. L'esperienza viene svolta in condizioni adiabatiche ($Q = 0$) e si osserva di norma una variazione della temperatura del fluido.

Quando il fluido è un gas (reale) si trova quasi sempre che esso si raffredda nell'espansione, ma in qualche caso si trova riscaldamento e anche nessuna variazione di temperatura, a seconda del gas su cui si sperimenta. Se si ammette che U sia funzione solo della temperatura, la relazione $\Delta U = -W$ non è quasi mai soddisfatta: si hanno infatti situazioni in cui $W = 0$ e $\Delta T \neq 0$ oppure $W < 0$ e $\Delta T < 0$. Assumendo sempre valido il primo principio si conclude che *l'energia interna di un gas reale non è funzione soltanto della temperatura.*

Se l'esperienza è condotta con un liquido saturo si ha sempre raffreddamento e anche una evaporazione parziale; tecnicamente il fenomeno è sfruttato nei cicli frigoriferi, come vedremo nel prossimo paragrafo.

valore v_G , tipico dello stato G_S , al valore v_L , tipico dello stato L_S , perché cambia il rapporto della quantità di sostanza nelle due fasi: la massa di liquido aumenta e quella di vapore diminuisce. In uno stato intermedio di equilibrio, corrispondente al volume specifico v_X , si ha $V_X m_L + m_G = V_L + V_G m_L + m_G = v_L m_L + v_G m_G$ $\text{MathType@MTEF@5@5@+=feaagKart1ev2aaatCvAUfeBSjuyZL2yd9gzLbvyNv2CaerbuLwBLnhiov2DGi1BTfMBaeXatLxBI9gBaerbd9wDYLwzYbItLDharqqtubsr4rNCHbGeaGqiVuoJe9sqqrpepCoxbbL8F4rqqrFfpeea0xe9Lq=Jc9vqaqpepm0xbba9pwe9Q8fso=yqaqpepaie9pgofirpepeKkFroxfr=xfr=xb9adbaqaeeGaciGaaiaabeqaamaabaabaaGcbaWaaSaaaeaacaWGwbWaaSbaaSqaaiaadIfaaeqaaaGcbaGaamyBamaaBaaaleaacaWGmbaabeaakiabgUcaRiaad2gadaWgaaWcbaGaam4raaqabaaaaOGaeyypaoZaaSaaaeaacaWGwbWaaSbaaSqaaiaadYeaeeqaaOGaey4kaSiamOvamaaBaaaleaacaWGHbaabeaaaOqaaiaad2gadaWgaaWcbaGaamitaaqabaGccqGHRaWkcaWGTbWaaSbaaSqaaiaadEeaaeqaaaaakiabg2da9maalaabaGaamODamaaBaaaleaacaWGHbaabeaaaOqaaiaad2gadaWgaaWcbaGaamitaaqabaGccqGHRaWkcaWG2bWaaSbaaSqaaiaadEeaaeqaaOGaamyBamaaBaaaleaacaWGHbaabeaaaOqaaiaad2gadaWgaaWcbaGaamitaaqabaGccqGHRaWkcaWG2bWaaSbaaSqaaiaadEeaaeqaaaaaaa@55FB@$ indicando con m_L la massa del liquido e m_G la massa di vapore presenti in equilibrio nello stato X .

Risulta

$$\frac{m_G}{m_L} = \frac{v_X - v_L}{v_X - v_G} = \frac{XL_S}{XG_S},$$

cioè il rapporto tra le masse di vapore e di liquido è pari all'inverso del rapporto delle distanze di X dai punti G_S e L_S , rappresentativi dell'inizio e della fine del processo di condensazione.

Riducendo ancora il volume al di sotto di v_L l'isoterma diventa praticamente verticale, cioè a una variazione piccola di volume corrisponde una notevolissima variazione di pressione, segno dell'incomprimibilità dei liquidi. Lo stato L è uno stato di liquido compresso.

La pressione costante che caratterizza il cambiamento di fase a una data temperatura si chiama *tensione di vapore saturo* (o *tensione di vapore del liquido*); essa dipende dalla temperatura secondo la relazione

$$\ln p = \ln A - \frac{B}{T} \quad \text{ovvero} \quad p = A e^{-B/T}, \quad (11.29)$$

Tensione di vapore saturo

dove A e B sono due parametri debolmente variabili con la temperatura (notiamo esplicitamente che non c'è dipendenza dal volume).

Altre due isoterme con temperature diverse, ma caratteristiche simili, sono

disegnate in figura 11.24, un po' sopra e un po' sotto all'isoterma descritta. Si nota che al crescere della temperatura il tratto orizzontale corrispondente alla condensazione diventa sempre più corto, fino a che si raggiunge un'isoterma particolare, in cui il tratto $G_S L_S$ è ridotto a un punto, il punto C . L'isoterma passante per C , e che in C ha un flesso a tangente orizzontale, si chiama *isoterma critica* e il punto C si chiama *punto critico*: le coordinate termodinamiche dello stato C si indicano col nome di *temperatura critica* T_c , *pressione critica* p_c , *volume critico* (specifico) v_c .

Il punto critico è il punto di massima pressione e temperatura in cui si ha equilibrio tra liquido e vapore. La temperatura T_c è la massima temperatura alla quale possiamo avere la fase liquida. Nella zona a destra dell'isoterma critica esistono solo stati di gas permanente: qualunque sia la pressione la sostanza resta sempre nella fase gassosa (si può cioè sempre liquefare un gas diminuendo la temperatura, ma non aumentando la pressione). Per $T > T_c$ le isoterme approssimano quelle di un gas ideale, tanto meglio quanto maggiore è la temperatura e minore la pressione.

Lungo l'isoterma critica, al di sopra del punto C , non c'è distinzione tra liquido e gas: con una piccola variazione delle coordinate termodinamiche si passa da una fase all'altra con continuità; lungo tale ramo dell'isoterma critica è nullo il calore latente di evaporazione. È interessante notare che con una trasformazione (non isoterma) si può passare dallo stato G allo stato L restando al di fuori della zona di condensazione, cioè si può passare dalla fase gassosa alla fase liquida senza condensazione.

Nella tabella 11.1 sono riportati i valori critici per alcune sostanze, sostituendo al volume critico il suo inverso, la *densità critica*.

Punto critico

Densità critica

Tabella 11.1 Punti critici			
Sostanza	T_c (K)	p_c (Pa)	ρ_c (kg/m ³)
acqua	647.3	$220.9 \cdot 10^5$	317
alcol etilico	516.3	$64.3 \cdot 10^5$	276
anidride carbonica	304.2	$73.9 \cdot 10^5$	468
argon	151.0	$48.6 \cdot 10^5$	537
azoto	126.2	$33.9 \cdot 10^5$	311
elio	5.3	$2.3 \cdot 10^5$	69
idrogeno	33.3	$13.3 \cdot 10^5$	31
ossigeno	154.8	$50.8 \cdot 10^5$	430

La zona di condensazione è limitata dalla curva CA , detta *curva di saturazione del vapore*, dalla curva CB , detta *curva di saturazione del liquido*, e inferiormente dalla linea isoterma AB , detta *linea tripla*: lungo di essa coesistono tutte e tre le fasi della sostanza, fase gassosa, fase liquida e fase solida. I valori di pressione e temperatura che caratterizzano la linea tripla si chiamano *pressione tripla* p_t e *temperatura tripla* T_t : invece il volume specifico varia lungo la linea tripla, a causa della graduale trasformazione di una fase

nell'altra. La coppia di valori p_t , T_t individua il cosiddetto *punto triplo della sostanza*.

Al di sotto della linea tripla si trovano stati di equilibrio solido-vapore ed è indicata un'isoterma lungo cui avviene la sublimazione, cioè il cambiamento di fase vapore-solido. Anche in questo caso è valida una relazione simile a (11.29) per la tensione di vapore del solido.

Nella figura 11.24 sono anche individuate le zone in cui la sostanza è solida (S) e quelle in cui c'è equilibrio solido-liquido (S - L).

La tabella 11.2 riporta alcuni valori di pressione tripla e temperatura tripla.

Punto triplo

Tabella 11.2 Punti tripli		
Sostanza	p_t (Pa)	T_t (K)
acqua	$6.11 \cdot 10^2$	273.16
anidride carbonica	$5.17 \cdot 10^5$	216.55
argon	$6.82 \cdot 10^4$	83.80
azoto	$1.25 \cdot 10^4$	63.18
elio	$5.04 \cdot 10^3$	2.17
idrogeno	$7.04 \cdot 10^3$	13.84
ossigeno	$1.52 \cdot 10^2$	54.36

Un'altra proprietà interessante che si riferisce al diagramma della figura 11.24 è la seguente: definendo le tre variabili

$$\pi = p/p_c, \quad \phi = v/v_c, \quad \tau = T/T_c,$$

ovvero utilizzando pressione, volume e temperatura del punto critico come unità di misura per pressione, volume e temperatura della sostanza data, il diagramma pV diventa un diagramma $\pi\phi$. Si trova che dopo tale trasformazione tutte le sostanze hanno praticamente lo stesso diagramma: il risultato è noto come *legge degli stati corrispondenti*.

Legge degli stati corrispondenti

Equazione di Van der Waals

Un'equazione di stato semiempirica, che permette di descrivere in modo accettabile il comportamento di un gas reale in prossimità delle transizioni gas-liquido, è stata introdotta nel 1873 da Van der Waals.

Con riferimento a n moli di gas l'equazione di Van der Waals si scrive

$$\left(p + a \frac{n^2}{V^2}\right)(V - nb) = nRT \quad (11.30)$$

Equazione di Van der Waals

dove a e b sono dei coefficienti caratteristici del gas in esame. Vedremo nel paragrafo 11.11 come si possa arrivare alla struttura della (11.30).

Un confronto tra le isoterme misurate sperimentalmente in un intervallo di valori di p e v in vicinanza del punto critico e l'andamento previsto sulla base della (11.30) indica un accordo ottimo per $T > T_c$ fino a pressioni prossima a

quella critica e accettabile anche a pressioni superiori. Per $T \leq T_c$ l'accordo è ancora buono, escludendo naturalmente la regione dove si ha coesistenza di liquido e vapore. Un'isoterma di Van der Waals in questa regione è mostrata in figura 11.25: in particolari condizioni gli stati di equilibrio lungo i tratti AB e CD possono essere realizzati, ma non quelli lungo BC .

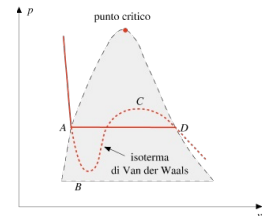


FIGURA 11.25

Esempio 11.13

Determinare le relazioni che esistono tra i coefficienti dell'equazione di Van der Waals e le coordinate termodinamiche del punto critico.

Soluzione

Consideriamo (11.30) con $n = 1$:

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = RT \quad ,$$

dove v è il volume specifico molare (V/n). Pertanto

$$p = \frac{RT}{v - b} - \frac{a}{v^2} \quad .$$

Nel punto critico l'isoterma ha un flesso a tangente orizzontale per cui valgono le due condizioni

$$\left(\frac{dp}{dv}\right)_{v=v_c} = 0 \quad , \quad \left(\frac{d^2p}{dv^2}\right)_{v=v_c} = 0 \quad .$$

Calcolando le due derivate si ottiene

$$RT_c = \frac{2a(v_c - b)^2}{v_c^3} \quad , \quad RT_c = \frac{3a(v_c - b)^3}{v_c^4}$$

ed eliminando T_c abbiamo la prima relazione cercata

$$b = \frac{v_c}{3} \quad , \quad v_c = 3b \quad .$$

Se si sostituisce nella prima condizione si trova $T_c = 8a/27Rb$; inserendo v_c e T_c così determinati nell'equazione di Van der Waals si ha $p_c = a/27b^2$. Viceversa, sostituendo nelle espressioni di p_c e T_c appena trovate b con $v_c/3$, si arriva alla seconda relazione

$$a = 3 v_c^2 p_c = \frac{9}{8} R v_c T_c$$

e l'ultima eguaglianza equivale a $p_c v_c = \frac{3}{8} R T_c$.

MathType@MTEF@5@5@+=

feaagKart1ev2aaatCvAUfeBSjuyZL2yd9gzLbvyNv2CaerbuLwBLn

hiov2DGi1BTfMBaeXatLxBI9gBaerbd9wDYLwzYbItLDharqqubsr

4rNCHbGeaGqiVu0Je9sqqrpepCoxbbL8F4rqqrFfpeeaOxe9Lq=Jc9
vqaqpepmoxbba9pwe9Q8fso=yqaqpepae9pgOFirpepeKkFroxfr=x
fr=xb9adbaqaeeGaciGaaiaabeqaamaabaabaaGcbaGaamiCamaaBa
aaleaacaWGJbaabeaakiaadAhadaWgaaWcbaGaam4yaaqabaGccqGH
9aqpdaWcaaqaiaaiodaeeaaacaaI4aaaaiaadkfacaWGubWaaSbaaS
qaaiaadogaeeqaaOGaaiOlaaaa@4037@ Questa relazione non risulta ben
verificata (basta ricorrere ai dati della tabella 11.1, ricordando che $v_c = A/\rho_c$
, con A massa molecolare). Si può concludere che, nei pressi del punto
critico, l'equazione di Van der Waals è un'approssimazione non pienamente
soddisfacente.

Visualizza Soluzione

Cicli frigoriferi reali

Un ciclo frigorifero che utilizza come sostanza un fluido reale è disegnato in figura 11.26: nel diagramma pV la linea tratteggiata delimita la zona in cui si ha l'equilibrio liquido-vapore. Descriviamo le varie trasformazioni indicate.

- 1) Nello stato A la massa di fluido è nella fase liquida (liquido saturo) alla temperatura T_2 ; la trasformazione irreversibile da A a B è un'espansione di Joule-Thomson (paragrafo 11.8), in cui il fluido si raffredda da T_2 a T_1 ; in B coesistono fase liquida e fase di vapore;
- 2) da B a C il fluido segue l'isoterma alla temperatura T_1 evaporando durante il processo finché nello stato C esso è nella fase di vapore (saturo); in questa trasformazione il fluido assorbe il calore Q_0 dalla sorgente fredda a temperatura T_1 con cui è in contatto termico;
- 3) dallo stato C il fluido è compresso adiabaticamente fino allo stato D , che ha la stessa pressione di A , ma temperatura superiore, restando sempre nella fase di vapore;
- 4) infine da D ad A la trasformazione è isobara, a contatto termico con la sorgente calda a temperatura T_2 : inizialmente la temperatura del vapore diminuisce fino a T_2 , poi la trasformazione diventa anche isoterma e il vapore condensa, cedendo calore alla sorgente.

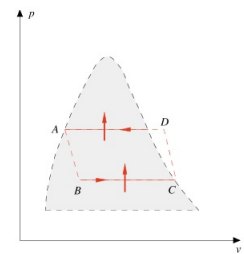


FIGURA 11.26

Gli scambi di calore avvengono durante i cambiamenti di fase ed è conveniente usare come sostanza che descrive il ciclo una sostanza, con temperatura critica abbastanza alta, che, nelle applicazioni normali, con temperature vicine a 0°C , passi facilmente dalla fase di vapore a quella liquida; comunemente utilizzati sono i gas tipo freon (formula chimica $\text{C F}_3 \text{ Br}$ o simile).

Il motore di un frigorifero commerciale comprende come parti essenziali un compressore (per la trasformazione CD), un condensatore (DA), una valvola per la espansione di Joule-Thomson (AB) e un evaporatore (BC); il calore è sottratto all'ambiente interno e ceduto all'ambiente esterno con consumo di energia elettrica.

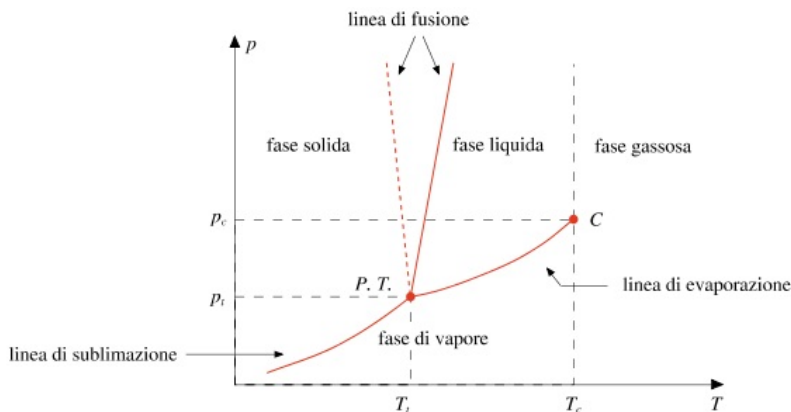


FIGURA 11.27

Diagrammi pT

Un'altra rappresentazione significativa delle proprietà di una sostanza omogenea pura, specialmente per quel che riguarda i cambiamenti di fase, è il diagramma pT di figura 11.27. Gli stati di equilibrio in cui coesistono due fasi (solido-vapore, solido-liquido, liquido-vapore) stanno su tre curve che si incontrano nel *punto triplo*. Il punto C rappresenta il *punto critico*, nella zona $T > T_c$ abbiamo solo fase gassosa.

La linea che separa la fase solida dalla fase liquida, *linea di fusione*, ha pendenza positiva: ciò vuol dire che aumentando la pressione aumenta la temperatura di fusione. Fa eccezione a questo comportamento l'acqua in cui all'aumentare della pressione la temperatura di fusione diminuisce; in tal caso la linea di fusione ha pendenza negativa (linea punteggiata).

Le altre linee di separazione, *linea di sublimazione* e *linea di evaporazione*, hanno sempre pendenza positiva; l'espressione analitica è del tipo (11.29).

Dal diagramma si vede che, a pressione costante e aumentando la temperatura (trasformazione isobara, parallela all'asse T), si possono avere tre tipi di comportamento: se $p < p_t$ si ha passaggio diretto dalla fase solida alla fase di vapore, se $p_t < p < p_c$ si hanno due cambiamenti di fase, solido-liquido e liquido-vapore, se $p > p_c$ si ha la fusione, ma il passaggio da liquido a gas avviene senza evaporazione.

Si capisce così perché una sostanza con elevata pressione tripla, come l'anidride carbonica ($p_t \approx 5$ bar dalla tabella 11.2), posta in un ambiente alla pressione ordinaria sublimi.

Sempre dal diagramma pT si vede che, a temperatura costante e aumentando la pressione (trasformazione isoterma, parallela all'asse p), è possibile passare dalla fase di vapore alla fase liquida e solida solo se $T < T_c$, mentre per $T > T_c$ la sostanza resta sempre gassosa, qualunque sia la pressione.

Una rappresentazione completa evidentemente deve essere tridimensionale, in coordinate p, V, T : i diagrammi pV e pT sono proiezioni sui piani (p, V) e (p, T) ortogonali tra loro. Le stesse proprietà si possono vedere in entrambi, però

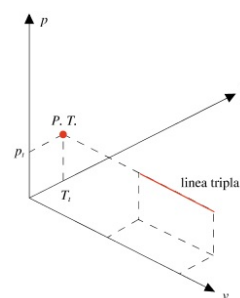


FIGURA 11.28

assumono un aspetto diverso. Per esempio, gli stati di equilibrio con tre fasi, che nel diagramma pV stanno su una linea, nel diagramma pT sono rappresentati da un punto, che è l'intersezione della linea tripla con il piano (p,T) .

Formula di Clapeyron

Consideriamo nel diagramma pV della figura 11.24 due isoterme reali molto

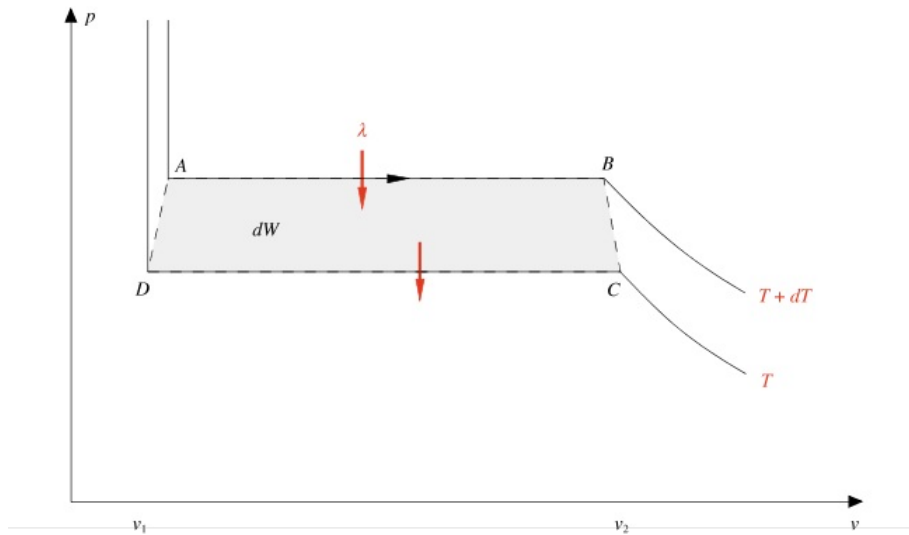


FIGURA 11.29

prossime, alle temperature T e $T + dT$, nella zona di equilibrio liquido-vapore e costruiamo il ciclo infinitesimo, riportato in figura 11.29: i tratti orizzontali finiti AB e CD sono due isoterme, i tratti verticali infinitesimi comportano uno scambio di calore infinitesimo e quindi trascurabile rispetto a quello delle isoterme: per questa ragione le trasformazioni BC e DA si possono considerare adiabatiche.

Il ciclo $ABCD$ è allora un ciclo di Carnot, descritto da una sostanza che non è un gas ideale. L'area del ciclo rappresenta il lavoro e, a meno di infinitesimi di ordine superiore, è pari all'area di un rettangolo di base $v_2 - v_1$ e altezza dp , $dW = dp (v_2 - v_1)$. Il calore viene assorbito nella trasformazione AB e, per unità di massa, è dato dal calore latente di evaporazione λ . Il rendimento è dato da

$$\eta = \frac{dW}{\lambda} = dp \frac{v_2 - v_1}{\lambda} .$$

Nel capitolo 12 dimostreremo che il rendimento del ciclo di Carnot non dipende dalla sostanza che descrive il ciclo; da (11.27)

$$\eta = 1 - \frac{T}{T + dT} \cong \frac{dT}{T} .$$

Eguagliando le due espressioni del rendimento otteniamo la *formula di Clapeyron*, che scriviamo nelle due forme equivalenti

$$\frac{dT}{dp} = \frac{T(v_2 - v_1)}{\lambda} \quad , \quad \frac{dp}{dT} = \frac{\lambda}{T(v_2 - v_1)} \quad . \quad (11.31)$$

La validità della (11.31) si estende agli altri cambiamenti di fase: in generale, per una certa sostanza che cambia di fase alla temperatura T , essa permette di calcolare di quanto cambia il valore di T al variare della pressione.

Nel diagramma pT della figura 11.24 l'equazione (11.31) descrive la pendenza dp/dT delle linee di separazione tra le varie fasi. Nell'evaporazione e nella sublimazione il volume specifico del gas è sempre maggiore di quello della fase condensata (liquido o solido), quindi $v_2 > v_1$ e $dp/dT > 0$: *le linee di evaporazione e sublimazione hanno pendenze positive*. Nella fusione per molte sostanze $v_{\text{liq}} > v_{\text{sol}}$ e $dp/dT > 0$; se invece $v_{\text{liq}} < v_{\text{sol}}$, come avviene nell'acqua che nel processo di solidificazione si espande, la linea di fusione ha pendenza negativa.

Mostriamo due esempi di applicazione della formula di Clapeyron, relativi ai cambiamenti di fase dell'acqua a pressione atmosferica. Nell'ebollizione, che avviene a $T = 373.15$ K, si ha $\lambda = 22.6 \cdot 10^5$ J/kg, v_2 (vapore) = 1.72 m³/kg, v_1 (liquido) = 10^{-3} m³/kg trascurabile rispetto a v_2 , e si trova

$$\frac{dT}{dp} = 28.4 \text{ K/bar} \Rightarrow \frac{dp}{dT} = 3.52 \cdot 10^{-2} \text{ bar/K} = 3.52 \cdot 10^3 \text{ Pa/K} \quad ;$$

un aumento di pressione di circa 3500 Pa fa aumentare di 1 K la temperatura di ebollizione dell'acqua. Passando alla fusione, che avviene a $T = 273.15$ K, i valori dei parametri sono $\lambda = 3.3 \cdot 10^5$ J/kg, v_2 (liquido) = $1 \cdot 10^{-3}$ m³/kg, v_1 (solido) = $1.09 \cdot 10^{-3}$ m³/kg e si ottiene

$$\frac{dT}{dp} = -7.4 \cdot 10^{-3} \text{ K/bar} \Rightarrow \frac{dp}{dT} = -135 \text{ bar/K} \quad ;$$

un aumento di pressione di 135 bar fa abbassare di 1 K la temperatura di fusione del ghiaccio. Entrambi i dati calcolati sono in buon accordo con i valori misurati. Il movimento dei ghiacciai viene spiegato proprio con l'abbassamento del punto di fusione sotto un'elevata pressione: quando la massa di ghiaccio preme contro un ostacolo, localmente la pressione è molto grande e il ghiaccio fonde, scorrendo intorno all'ostacolo e solidificando a valle.

Integriamo ora la (11.31) per il cambiamento di fase liquido-vapore, in condizioni non prossime al punto critico, assumendo che il vapore si comporti come un gas ideale, che v_{liq} sia molto minore di v_{vap} e che λ sia indipendente dalla temperatura, tutte ipotesi abbastanza verificate. Dato che $v_1 = v_{\text{liq}} = 0$ e che, in accordo con (11.9), $v_2 = v_{\text{vap}} = 1/\rho_{\text{vap}} = RT/Ap$, si ha

$$\frac{dp}{p} = \frac{\lambda A}{R} \frac{dT}{T^2} \Rightarrow \ln p = -\frac{\lambda A}{RT} + \text{costante} ;$$

si trova l'andamento della tensione di vapore del liquido con la temperatura descritto dalla (11.29).

11.10 Teoria cinetica dei gas

Le proprietà elastiche dei gas e l'esistenza della pressione esercitata da un gas sulle pareti del recipiente che lo contiene avevano suggerito, fin dai tempi di Newton, che i gas fossero composti da particelle in continuo movimento. L'idea era stata sviluppata da Bernoulli intorno al 1740 e infine Joule, nel 1848, era stato in grado di arrivare ad una espressione per la pressione di un gas contenuto in un dato volume.

Le ipotesi di partenza del modello cinetico, enunciate in termini moderni, sono le seguenti:

- 1) un gas è costituito da molecole eguali, in moto continuo e disordinato;
- 2) gli urti tra molecole e tra molecole e pareti del contenitore sono elastici;
- 3) non ci sono forze intermolecolari, se non durante gli urti: gli urti sono dovuti cioè a forze repulsive a corto raggio di azione, mentre si assumono trascurabili le forze attrattive agenti tra le molecole;
- 4) le dimensioni delle molecole sono molto piccole rispetto alle distanze medie tra di esse.

Modello cinetico del gas ideale

Sulla base della prima ipotesi (*caos molecolare*), in ogni istante, considerata una qualsiasi direzione orientata \mathbf{u} , ci sono tante molecole che hanno velocità concorde a \mathbf{u} quante hanno velocità discorde a \mathbf{u} ; la velocità media \mathbf{v}_m è quindi nulla. Infatti, macroscopicamente, un gas chiuso in un recipiente è in quiete, $\mathbf{P} = M\mathbf{v}_{CM} = 0$. Inoltre il numero di molecole per unità di volume deve essere lo stesso in ogni parte del recipiente occupato dal gas (densità costante).

La seconda ipotesi implica che negli urti tra molecole si conservano quantità di moto ed energia, mentre nell'urto di una molecola contro una parete si conserva solo l'energia (forze esterne impulsive).

Dalla terza ipotesi deriva che l'energia potenziale interna è nulla e quindi la sola forma di energia è quella cinetica.

Infine, la quarta ipotesi indica che il volume totale occupato dalle molecole è trascurabile rispetto a quello del recipiente.

Sulla base del modello cinetico è stata sviluppata, nella seconda metà dell'800, la teoria cinetica dei gas, che permette di arrivare a previsioni sul comportamento dei gas, verificabili sperimentalmente.

Calcolo della pressione

Si consideri un contenitore cubico di lato a riempito con un gas che si comporta come prescritto dal modello cinetico. La velocità di una molecola è data da $\mathbf{v} = v_x \mathbf{u}_x + v_y \mathbf{u}_y + v_z \mathbf{u}_z$: la componente $v_x \mathbf{u}_x$ è ortogonale alla parete yz , la componente $v_y \mathbf{u}_y$ alla parete xz , la componente $v_z \mathbf{u}_z$ alla parete xy .

Nell'urto elastico contro la parete yz cambia solo la componente $v_x \mathbf{u}_x$ che diventa $-v_x \mathbf{u}_x$ mentre le altre rimangono invariate, data l'assenza di forze di attrito (esempio 4.19). La variazione di quantità di moto nell'urto della molecola

con la parete yz è pari a $-2mv_x \mathbf{u}_x$, se m è la massa della molecola, e quindi l'impulso comunicato alla parete è $2mv_x \mathbf{u}_x$.

L'urto successivo contro la parete yz considerata avviene dopo un tempo $t = 2a/v_x$, necessario per attraversare nei due sensi il cubo lungo la direzione x . In realtà non è la stessa molecola che compie l'urto successivo perché nel tragitto $2a$ essa può subire un urto contro un'altra molecola e venire deviata. Tuttavia, a causa del moto completamente disordinato (prima ipotesi), per una molecola che perde la componente v_x ce n'è un'altra che, a seguito di un urto, acquista tale componente v_x .

Pertanto il numero di urti al secondo sulla parete yz è dato da $1/t = v_x/2a$ e l'impulso comunicato in un secondo, pari alla componente x della forza media esercitata sulla parete da una molecola (paragrafo 2.3), vale in modulo

$$F_x = 2 m v_x \frac{v_x}{2a} = \frac{m v_x^2}{a} .$$

La forza risultante sulla parete è

$$R_x = \frac{m}{a} \sum_i v_{x,i}^2$$

dove la somma è estesa a tutte le molecole; la pressione sulla parete yz di area $S = a^2$, dovuta agli urti molecolari, risulta essere quindi

$$p = \frac{R_x}{S} = \frac{m}{a^3} \sum_i v_{x,i}^2 = \frac{Nm}{V} \frac{1}{N} \sum_i v_{x,i}^2 ;$$

N è il numero totale di molecole nel cubo di volume $V = a^3$.

— Si chiama *velocità media quadratica* la quantità $\overline{v^2}$ —
 MathType@MTEF@5@5@+=
 feaagKart1ev2aaatCvAUfeBSjuyZL2yd9gzLbvyNv2CaerbuLwBLn
 hiov2DGi1BTfMBaeXatLxBI9gBaerbd9wDYLwzYbItLDharqqtubsr
 4rNCHbGeaGqiVuoJe9sqrpepCoxbbL8F4rqqrFfpeea0xe9Lq=Jc9
 vqaqpepmoxbba9pwe9Q8fso=yqaqpepaep9pgoFirpepeKkFroxfr=x
 fr=xb9adbeqaaeGaciGaaiaabeqaamaabaabaaGcbaGafqyXduNbae
 baaaa@37D6@ , definita come radice quadrata della media dei quadrati delle velocità:

$$\overline{v^2} = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2} = \frac{1}{N} \sum_i (v_{x,i}^2 + v_{y,i}^2 + v_{z,i}^2) .$$

Se il moto è completamente disordinato non c'è alcuna direzione preferita per le molecole e pertanto i valori medi quadratici $\overline{v_x^2}$, $\overline{v_y^2}$, $\overline{v_z^2}$ sono eguali tra loro:

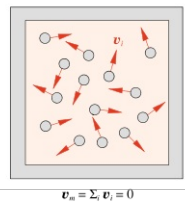
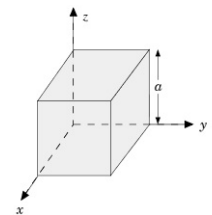


FIGURA 11.30

Velocità media quadratica

$$\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2} = \frac{\overline{v^2}}{3} .$$

In conclusione si ha l'equazione di Joule-Clausius-Krönig

$$p = \frac{Nm}{V} \frac{\overline{v^2}}{3} \Rightarrow pV = \frac{1}{3} Nm \overline{v^2} .$$

Il ragionamento è identico per quanto riguarda gli urti sulle altre pareti e si estende a contenitori di forma qualunque. Il risultato è generale, nel senso che non dipende da come sono distribuite le velocità delle singole molecole in un gas alla temperatura T , finché tutte le direzioni del moto sono equivalenti.

Definendo come *energia cinetica media di traslazione* delle molecole E_k

$$E_k = \frac{1}{2} m \overline{v^2} ,$$

si ha

$$pV = \frac{2}{3} N \overline{E_k} \quad (11.32)$$

il prodotto pressione per volume è proporzionale all'energia cinetica media di traslazione delle molecole $N E_k$, che nel modello cinetico coincide con l'energia totale.

La (11.32) è il risultato di una trattazione teorica; d'altra parte per un gas ideale vale l'equazione di stato (11.6) $pV = nRT$, che è basata su dati sperimentali. Eguagliando si trova

$$\overline{E_k} = \frac{3}{2} \frac{n}{N} R T = \frac{3}{2} \frac{R}{N_A} T ,$$

dato che $n N_A = N$. Ricordando la definizione (11.8) otteniamo

$$\overline{E_k} = \frac{3}{2} k_B T \quad (11.33)$$

l'energia cinetica media traslazionale di una molecola di un gas ideale è proporzionale alla temperatura del gas.

Se il modello cinetico è corretto, cosa che ancora non sappiamo confermare non avendo finora fatto delle previsioni verificabili sperimentalmente, abbiamo trovato il *significato microscopico della grandezza temperatura: essa è*

proporzionale all'energia cinetica media di traslazione delle molecole ovvero, per un dato gas, al quadrato della velocità media quadratica.

Per calcolare i valori delle velocità medie quadratiche previsti dal modello cinetico per un gas a temperatura T basta eguagliare (11.33) a $\frac{1}{2} m \overline{v^2}$

$$\overline{v} = \sqrt{\frac{3 k_B T}{m}} = \sqrt{\frac{3 R T}{A}}, \quad (11.34)$$

avendo moltiplicato, per passare dal secondo al terzo membro, numeratore e denominatore per N_A , numero di Avogadro; ricordiamo che A è la massa molecolare del gas. I risultati per alcuni gas a 300 K sono riportati in tabella 11.3 (con A espresso in kg, $R = 8314 \text{ J/kmol K}$).

Tabella 11.3 Velocità medie quadratiche		
gas	A (kg)	\overline{v} (m/s)
idrogeno	2	1934
elio	4	1368
vapor d'acqua	18	645
azoto	28	517
ossigeno	32	484

Nel paragrafo 9.13 abbiamo ricavato l'espressione (9.40) per la velocità di propagazione di un'onda elastica in un gas e nella tabella 9.1 riportato alcuni valori a 300 K. Vediamo che (9.40) e (11.34) sono molto simili, differendo soltanto per un fattore numerico tipicamente inferiore a 1.5. Ciò vuol dire che *la velocità di propagazione di una perturbazione in un gas è sostanzialmente eguale alla velocità media quadratica delle molecole* e che quindi gli urti molecolari costituiscono il meccanismo microscopico di interazione in un gas.

È appropriato fare ora un'osservazione relativa alla propagazione. Nel ricavare l'equazione delle onde in un gas abbiamo introdotto la funzione $s(x,t)$ che dà lo spostamento dalla posizione di equilibrio. Può sembrare non corretto parlare di equilibrio e di piccoli spostamenti da esso per un sistema i cui elementi hanno una velocità media quadratica dell'ordine di 10^3 m/s . Però il moto molecolare è completamente disordinato e pertanto qualsiasi volume di gas che contenga un sufficiente numero di molecole può essere considerato in equilibrio statico. La perturbazione elastica introduce una componente di moto macroscopico localmente ordinato che si sovrappone all'agitazione termica e che è rivelabile proprio perché ordinato.

Equipartizione dell'energia

Lo sviluppo successivo della teoria cinetica dei gas porta ad assegnare carattere generale alla relazione (11.33), in questo senso: *ad ogni termine quadratico dell'energia classica di una molecola di un corpo corrisponde, all'equilibrio termodinamico, un'energia media pari a $\frac{1}{2} k_B T$, essendo T la*

temperatura del sistema. Questo risultato può essere anche espresso affermando che ad ogni componente indipendente del moto compete la stessa energia media ossia *per ogni grado di libertà c'è il contributo* $\frac{1}{2} k_B T$; esso è noto come *principio dell'equipartizione dell'energia*.

Pertanto per un sistema con l gradi di libertà

$$\overline{E} = \frac{l}{2} k_B T \quad (11.35)$$

Equipartizione dell'energia

Le molecole di un gas ideale monoatomico presentano *tre gradi di libertà* e la loro energia, esclusivamente cinetica traslatoria, ha tre termini quadratici:

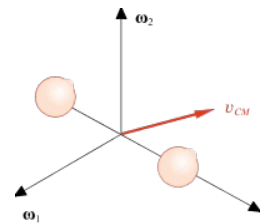
$$E_k = \frac{1}{2} m v_x^2 + \frac{1}{2} m v_y^2 + \frac{1}{2} m v_z^2$$

Per esse il principio dell'equipartizione dell'energia prevede

$$\overline{E}_k = \overline{E}_x + \overline{E}_y + \overline{E}_z = \frac{3}{2} k_B T$$

che è la (11.33). Si noti che \overline{E}_x non indica una componente dell'energia, che è una grandezza scalare, ma l'energia associata al moto lungo la direzione x .

Una molecola di un gas ideale biatomico può essere visualizzata come due punti (i due atomi) vincolati a restare a una data distanza tra loro e ha *cinque gradi di libertà* (si riveda il paragrafo 6.1). Tre sono legati al moto del centro di massa e ad essi compete l'energia $\frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$,



due sono legati alla rotazione della molecola rispetto ad un asse passante per il centro di massa e ortogonale all'asse della molecola; la velocità angolare ha due componenti e l'energia di rotazione è $\frac{1}{2} I \omega_1^2 + \frac{1}{2} I \omega_2^2$. Quindi da (11.35) $\overline{E}_k = \frac{5}{2} k_B T$.

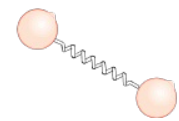


FIGURA 11.31

due sono legati alla rotazione della molecola rispetto ad un asse passante per il centro di massa e ortogonale all'asse della molecola; la velocità angolare ha due componenti e l'energia di rotazione è $\frac{1}{2} I \omega_1^2 + \frac{1}{2} I \omega_2^2$. Quindi da (11.35) $\overline{E}_k = \frac{5}{2} k_B T$.

WGfbWaaSbaaSqaiaadUgaaeqaaaaakiabg2da9maalaabaGaaGyn
 aaqaaiaaikdaaaGaam4AamaaBaaaleaacaWGIbaabeaakiaadsfaca
 GGUaaaaa@3E20@ Ad alta temperatura entra in 2 gioco un termine ulteriore
 dovuto al moto di vibrazione dei due atomi lungo l'asse della molecola.

Se consideriamo un *crystallo* formato da atomi distribuiti con regolarità nello spazio, che oscillano attorno alle loro posizioni di equilibrio interagendo con gli atomi circostanti tramite forze di tipo elastico, l'energia di ogni atomo è esprimibile come

$$U = \frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) + \frac{1}{2} k_x x^2 + \frac{1}{2} k_y y^2 + \frac{1}{2} k_z z^2 ,$$

dove k_x , k_y , k_z indicano le costanti elastiche caratteristiche del crystallo, associate alle tre componenti di oscillazione. Pertanto per l'atomo nel crystallo l'energia è data da tre termini quadratici legati all'energia cinetica e tre legati all'energia potenziale, corrispondenti a *sei gradi di libertà*. L'energia media, che coincide con l'energia interna, è quindi data da $U = 3 k_B T$ per atomo.

Le energie cinetiche medie calcolate per le molecole monoatomiche e biatomiche sono l'unica forma di energia interna di un gas e allora, per una mole di gas, deve sussistere l'eguaglianza

$$\Delta U = c_V \Delta T = \Delta \overline{E_k} = \frac{l}{2} N_A k_B \Delta T = \frac{l}{2} R \Delta T$$

da cui si ricava per il calore specifico molare a volume costante

$$c_V = \frac{l}{2} R .$$

Pertanto:

molecole monoatomiche	$l = 3$	$c_V = \frac{3}{2} R$,
-----------------------	---------	-------------------------

molecole biatomiche	$l = 5$	$c_V = \frac{5}{2} R$,
---------------------	---------	-------------------------

previsioni che sappiamo verificate sperimentalmente (paragrafo 11.5). Il fatto che non tutti i gas a molecola biatomica abbiano c_V pari a $5R/2$ suggerisce che per alcuni gas il contributo vibrazionale sia importante anche a temperatura ambiente.

Per una mole di solido ($l = 6$)

$$U = 3 N_A k_B T = 3 R T , \quad c_V = 3 R :$$

in effetti il calore specifico molare a volume costante tende, ad alte temperature e per tutti i solidi, al valore $3R$ (paragrafo 10.7, figura 10.5). La previsione dell'equipartizione dell'energia, dovuta a Maxwell e Boltzmann, venne anche confermata dalle osservazioni di Perrin sul *moto browniano*, moto

disordinato di particelle macroscopiche in una sospensione colloidale. L'interpretazione del fenomeno è che le particelle siano urtate dalle molecole e che quindi esse riflettano con il loro moto il moto molecolare.

Osserviamo che

$$\frac{1}{2} k_B T = 2.07 \cdot 10^{-21} \text{ J} = 1.29 \cdot 10^{-2} \text{ eV} \quad \text{con } T = 300 \text{ K} ;$$

l'*elettronvolt* (eV) è l'unità di energia usata in fisica atomica:

$$1 \text{ eV} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J} .$$

Elettronvolt

Alla temperatura della superficie del sole ($T \cong 6000 \text{ K}$) $\frac{1}{2} k_B T \cong 0.26 \text{ eV}$; in un plasma, utilizzato per ricerche di fusione termonucleare controllata, $\frac{1}{2} k_B T \cong 10^3 \text{ eV}$, corrispondente a $T \cong 2.3 \cdot 10^7 \text{ K}$.

Legge di Dalton

Abbiamo detto che le ipotesi fondamentali della teoria cinetica di un gas ideale sono l'assenza di interazioni tra le molecole del gas, se non durante gli urti, e le dimensioni delle molecole trascurabili rispetto alle distanze medie tra di esse. Se ora abbiamo una miscela di gas ideali, chimicamente inerti, contenuta in un volume V e alla temperatura T , le molecole di ciascun gas si comportano indipendentemente dalle molecole degli altri gas; come conseguenza si ha che la pressione esercitata dalla miscela gassosa sulle pareti del contenitore è data da

Miscela di gas ideali

$$p = \frac{R T}{V} \sum_i n_i \quad (11.36)$$

dove n_1, n_2, \dots sono il numero di moli di ciascun componente della miscela.

Se ogni singolo gas fosse contenuto da solo nel volume V alla temperatura T , esso eserciterebbe la pressione

$$p_i = n_i \frac{R T}{V} ,$$

detta *pressione parziale* del dato componente; da (11.36) vediamo che

$$p = \sum_i p_i :$$

Legge di Dalton

la pressione della miscela è pari alla somma delle pressioni parziali.

La relazione (11.36), ricavata sperimentalmente da Dalton, è nota come *legge di Dalton*. Notiamo anche che, definendo la frazione molare r_i relativa all' i -esimo componente come $r_i = n_i / \sum_i n_i$, si ha

$$p_i = n_i \frac{p}{\sum_i n_i} = r_i p .$$

Distribuzione delle velocità

Finora abbiamo parlato di energia cinetica media, però è possibile calcolare come sono distribuite le velocità delle singole molecole in un gas alla temperatura T . Tale calcolo è dovuto a Maxwell.

Consideriamo un gas formato da N_0 molecole e dN rappresenti il numero di molecole con il modulo della velocità compreso tra v e $v + dv$. Il calcolo di Maxwell porta alla relazione

$$dN = 4 \pi N_0 \left(\frac{m}{2 \pi k_B T} \right)^{3/2} v^2 e^{-m v^2 / 2 k_B T} dv = F(v) dv ; \quad (11.37)$$

Funzione di Maxwell

$F(v) = dN / dv$ si chiama *funzione di distribuzione di Maxwell delle velocità*.

La *velocità più probabile* v_p corrisponde al massimo della funzione $F(v)$ e si ottiene annullando la derivata di $F(v)$ rispetto a v ; risulta

$$v_p = \sqrt{\frac{2 k_B T}{m}} .$$

Velocità più probabile

Introduciamo la variabile $x = v/v_p$ che esprime la velocità delle molecole in unità v_p (quindi $dv = v_p dx$) e riscriviamo (11.37):

$$\frac{dN}{N_0} = \frac{F(v)}{N_0} dv = y(x) dx$$

avendo indicato con

$$y(x) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} x^2 e^{-x^2} \quad (11.38)$$

Densità di probabilità

la percentuale di molecole con velocità tale da essere compresa tra v/v_p e $(v + dv)/v_p$.

La funzione $y(x)$, che ha il significato di una *densità di probabilità*, è mostrata in figura 11.32. L'area colorata sotto la curva vale

$$\int_{x_1}^{x_2} y(x) dx$$

ed è la percentuale di molecole con x compreso tra x_1 e x_2 ; l'area complessiva sotto la curva vale 1.

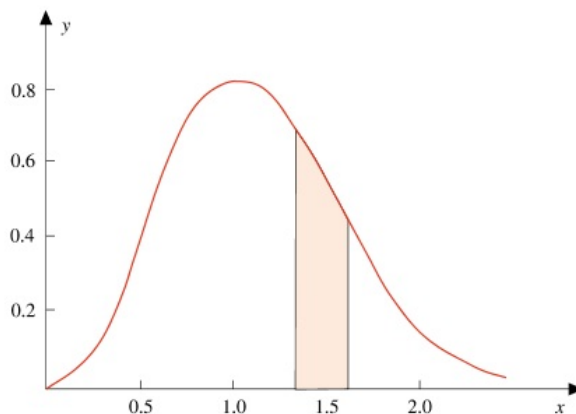


FIGURA 11.32

Per $x = 0$ ($v = 0$) $y(x)$ è nulla, è massima per $x = 1$ ($v = v_p$) e tende asintoticamente a zero per $x \gg 1$ ($v \gg v_p$): anche se poco probabili, velocità molto elevate sono possibili.

Dall'espressione di $F(v)$ o di $y(x)$ si può calcolare il valore della *velocità media* (cioè la media dei moduli delle velocità),

$$v_m = \frac{1}{N_0} \int v F(v) dv = v_p \int x y(x) dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} v_p = 1.128 v_p ,$$

Velocità media

e della *velocità media quadratica*

$$\overline{v} = \left[\frac{1}{N_0} \int v^2 F(v) dv \right]^{1/2} = v_p \left[\int x^2 y(x) dx \right]^{1/2} = \sqrt{\frac{3}{2}} v_p = \sqrt{\frac{3 k_B T}{m}} = 1.225 v_p .$$

Velocità media quadratica

La velocità media è maggiore di v_p a causa dell'asimmetria della funzione di distribuzione rispetto al massimo, cioè a causa della coda di $F(v)$ verso alti valori di velocità; per la stessa ragione v^- MathType@MTEF@5@5@+= feaagKart1ev2aaatCvAUfeBSjuyZL2yd9gzLbvyNv2CaerbuLwBLn hiov2DGi1BTfMBaeXatLxBI9gBaerbd9wDYLwzYbItLDharqqtubsr 4rNCHbGeaGqiVuoJe9sqqrpepCoxbbL8F4rqqrFfpeea0xe9Lq=Jc9 vqaqpepmoxbba9pwe9Q8fso=yqaqpepae9pg0FirpepeKkFroxfr=x fr=xb9adbeqaaeGaciGaaiaabeqaamaabaabaaGcbaGafqyXduNbae baaaa@37D6@ è maggiore di v_m .

Dalla tabella 11.3 possiamo dedurre i valori di v_p : per l'idrogeno a 300 K troviamo $v_p = 1579$ m/s. Poiché la velocità di fuga dalla terra è circa 10^4 m/s (paragrafo 5.4, esempio 5.2), le molecole di idrogeno nell'atmosfera che abbiamo $v \gg v_p$ possono sfuggire all'attrazione terrestre; una stima basata su un calcolo meno qualitativo dà una perdita di circa 600 Kg di idrogeno all'anno.

È possibile verificare sperimentalmente la distribuzione maxwelliana delle velocità con un apparato che sia in grado di misurare le velocità molecolari. Il dispositivo è mostrato in figura 11.33; esso è racchiuso all'interno di un contenitore in cui viene mantenuto un vuoto spinto, allo scopo di ridurre al

minimo la probabilità di urti tra molecole ovvero di massimizzare il cammino libero medio (vedi dopo).

La sorgente S dei raggi è costituita da un contenitore con un foro molto piccolo, in cui si trova un gas in equilibrio alla temperatura T . Dal foro escono molecole in varie direzioni, ma con una serie di fenditure C , larghe pochi decimi di millimetro, si sceglie in pratica la direzione di volo delle molecole: si parla di *fascio di molecole* o di *raggi molecolari*.

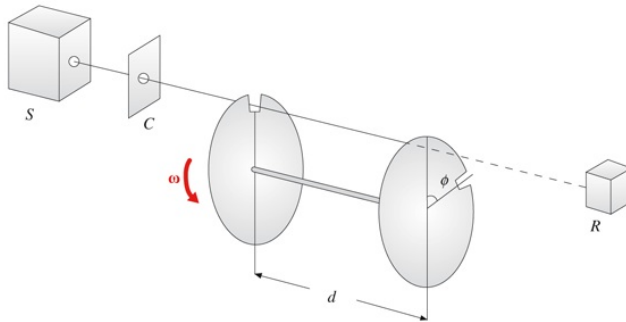


FIGURA 11.33

Sul cammino del fascio si pone un *selettore di velocità*, costituito da due dischi ruotanti con la stessa velocità angolare ω rispetto all'asse disegnato in figura e posti a distanza d uno dall'altro. Su ciascun disco è praticata una fenditura e tra le fenditure c'è l'angolo Φ .

Le molecole che attraversano il selettore entrano in un *rivelatore* R , costituito per esempio da un filo caldo di platino; colpendo il filo esse vengono ionizzate e danno luogo a una corrente che viene misurata. Questa corrente è proporzionale al numero di molecole che colpiscono il filo.

Supponiamo che una molecola nella sorgente, ad un certo istante, abbia posizione e velocità tali da poter uscire dal foro nella parete della sorgente e passare attraverso il collimatore: essa può raggiungere il rivelatore se riesce a passare anche attraverso le fenditure dei dischi. Superata la prima fenditura la molecola supera pure la seconda solo se la sua velocità è tale che il tempo t impiegato a percorrere la distanza d tra i dischi è eguale a quello impiegato dai dischi per ruotare dell'angolo Φ :

$$t = \frac{d}{v} = \frac{\phi}{\omega} \Rightarrow v = \frac{\omega d}{\phi} .$$

Il selettore trasmette solo le molecole la cui velocità è in un intorno di questo valore; variando ω si selezionano diverse velocità. Misurando col rivelatore il numero di molecole che arrivano su di esso in funzione di ω si verifica che la distribuzione delle velocità è in accordo con quella prevista da Maxwell. Si può anche verificare la dipendenza da T variando la temperatura della sorgente; cambia in tal caso la funzione di distribuzione delle velocità, cioè la curva della figura 11.32. Se per esempio T aumenta, il massimo si sposta verso destra e la

Raggi molecolari

Selettore di velocità

curva si allarga e si abbassa, dovendo restare unitaria l'area sottesa.

Cammino libero medio. Viscosità

Se pensiamo alle molecole come sfere rigide di diametro d , un urto tra di esse è possibile quando i loro centri si trovano al massimo a distanza d dalla traiettoria di una rispetto all'altra (figura 11.34).

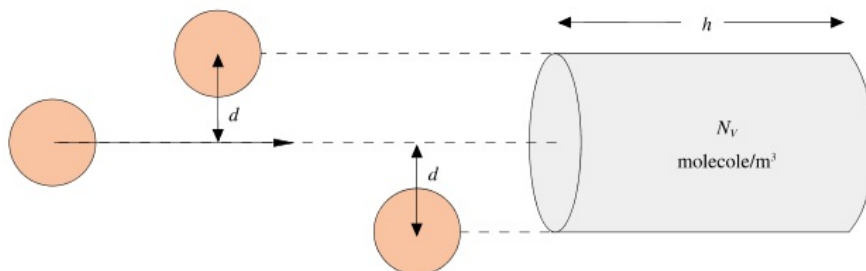


FIGURA 11.34

Da questo punto di vista possiamo dire che in un percorso lungo h una molecola spazza il volume $h \pi d^2$. Se ci sono N_V molecole per unità di volume, si hanno $N_V h \pi d^2$ urti nel percorso h , ovvero $N_V \pi d^2$ urti per unità di lunghezza. La distanza media tra gli urti, detta *cammino libero medio* è

$$\lambda = \frac{1}{N_V \pi d^2} .$$

In questo calcolo non si è tenuto in considerazione il movimento delle molecole urtate. Se si introduce questo effetto, sulla base della distribuzione di Maxwell delle velocità, si ottiene

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2} N_V \pi d^2} ; \tag{11.39}$$

Cammino libero medio

dall'equazione di stato nella forma (11.7), se $V = 1$ $N_V = p / k_B T$ e quindi

$$\lambda = \frac{k_B T}{\sqrt{2} p \pi d^2} .$$

Il cammino libero medio risulta inversamente proporzionale al numero di molecole per unità di volume, ovvero alla pressione. Valori tipici di λ a pressione atmosferica sono dell'ordine di 10^{-7} m = 0.1 μ m; con $p = 1$ Pa $\lambda \approx 1$ cm e con $p = 10^{-9}$ Pa $\lambda \approx 10^7$ m.

Si dimostra che la *viscosità* η del gas è legata al cammino libero medio dalla relazione

$$\eta = \frac{1}{3} N_v m \bar{v} \lambda = \frac{m \bar{v}}{3 \sqrt{2} \pi d^2} ,$$

avendo utilizzato (11.39). Dato che la velocità media quadratica è proporzionale a T , si vede che *la viscosità di un gas cresce con la temperatura, mentre è indipendente dalla pressione*. Queste previsioni sono pienamente confermate dall'esperienza.

Le formule trovate mostrano che da misure di viscosità si possono dedurre i valori dei cammini liberi medi e dei diametri molecolari; per questi ultimi l'ordine di grandezza risulta 10^{-10} m.

11.11 Cenni di teoria cinetica dei gas reali

La trattazione cinetica per i gas reali è piuttosto complessa, per cui ci limitiamo ad illustrare gli argomenti che portano all'equazione di Van der Waals (11.30).

Le ipotesi che bisogna rilasciare quando si considera un gas reale sono che le dimensioni delle molecole siano trascurabili e che non ci siano forze intermolecolari. L'energia interna non è quindi data solo dall'energia cinetica del moto molecolare, ma ha un contributo di energia potenziale dovuto all'interazione tra le molecole; inoltre il fatto che il raggio molecolare r non sia trascurabile rispetto al cammino libero medio porta a una correzione del cammino libero medio stesso che, come ipotesi plausibile, scriviamo nella forma $\lambda' = \lambda - r$.

Abbiamo visto che, in conseguenza di (11.39), la pressione p è inversamente proporzionale al cammino medio λ ; allora se in un gas ideale p va come $1/\lambda$, in un gas reale diciamo che p' va come $1/\lambda'$, ovvero $p'/p = \lambda/\lambda'$, cioè $p' = p \lambda/(\lambda - r)$: assumiamo questa come correzione alla pressione p data da (11.32). Utilizzando anche (11.39) abbiamo

$$p' = \frac{2}{3} \frac{N}{V} \frac{\overline{E}}{\lambda - r} = \frac{2}{3} \frac{N}{V} \frac{\overline{E}}{1 - \sqrt{2} N_V 4\pi r^3}$$

in cui si è posto $d = 2r$ e $N_V = N/V$ con N numero totale di molecole nel volume V .

Questo effetto porta ad un aumento della pressione, riconducibile a una maggior frequenza di urti contro le pareti, che spieghiamo supponendo che il numero di urti al secondo contro le pareti sia proporzionale al numero di urti tra molecole all'interno del gas e che quest'ultimo sia aumentato perché il cammino libero medio è diminuito.

Una ulteriore correzione deve essere apportata alla pressione p' per tener conto del fatto che nelle immediate vicinanze delle pareti le molecole risentono di una forza attrattiva verso l'interno del gas, dovuta alla dissimmetria della situazione (il ragionamento è analogo a quello sviluppato per la tensione superficiale, paragrafo 8.15). Tale correzione è proporzionale alla densità molecolare (N/V) e al numero di urti, a sua volta proporzionale a N/V . Pertanto la pressione effettiva è data da

$$p = p' - \alpha \left(\frac{N}{V} \right)^2$$

dove α è un coefficiente che dipende dalle forze intermolecolari. In conclusione, ricorrendo alla formula trovata prima per p' ,

$$\left(p + \alpha \frac{N^2}{V^2} \right) (V - \sqrt{2} N 4\pi r^3) = \frac{2}{3} N \overline{E}$$

ovvero, ponendo $n = N/N_A$, $a = \alpha N_A^2$, $b = N_A 4\pi r^3$,

$$\left(p + a \frac{n^2}{V^2}\right)(V - nb) = \frac{2}{3} n N_A \overline{E}$$

che confrontata con (11.30) mostra l'origine dei termini correttivi di pressione e di volume. Al termine $a n^2/V^2$ si dà il nome di *pressione interna*, al termine b di *covolume*. Se si usa per \overline{E} l'espressione, valida a rigore soltanto per un gas ideale monoatomico, $\frac{3}{2} k_B T$, si ottiene l'equazione di Van der Waals (11.30).

Nella tabella 11.4 sono riportati i valori delle costanti a e b per alcuni gas, ricavati sperimentalmente.

Tabella 11.4 Costanti di Van der Waals

gas	a (Pa m ⁶ /mol ²)	b (m ³ /mol)
acqua	0.551	$2.88 \cdot 10^{-5}$
ammoniaca	0.423	$3.74 \cdot 10^{-5}$
anidride carbonica	0.361	$4.29 \cdot 10^{-5}$
argon	0.133	$3.22 \cdot 10^{-5}$
azoto	0.137	$3.90 \cdot 10^{-5}$
elio	0.003	$2.34 \cdot 10^{-5}$
idrogeno	0.024	$2.66 \cdot 10^{-5}$
metano	0.227	$4.16 \cdot 10^{-5}$
ossigeno	0.136	$3.18 \cdot 10^{-5}$

Per un volume molare di azoto il termine correttivo a/V^2 vale 283 Pa.

A conclusione degli argomenti di teoria cinetica osserviamo che in questi paragrafi abbiamo visto una situazione molto comune in fisica. Da una parte abbiamo a disposizione un insieme di dati sperimentali che opportunamente interpretati ed estrapolati forniscono le semplici leggi del sistema gas ideale. Dall'altra abbiamo un modello teorico che risale a Bernoulli e che è stato sviluppato nell'ottocento da Joule, Clausius, Maxwell, Boltzmann e altri, il quale sulla base di ipotesi semplici e ragionevoli riguardo alla struttura interna e alle interazioni e nell'ambito della meccanica newtoniana si propone di spiegare le proprietà sperimentali del gas ideale. In questo senso il modello fornisce una descrizione delle quantità macroscopiche misurate in termini dei processi meccanici elementari che avvengono a livello atomico e molecolare e che ne costituiscono l'origine fisica.

La validità e i limiti di un modello teorico vengono fissati dal confronto con l'esperienza. Nel nostro caso risulta che esistono situazioni (gas caldo e rarefatto) in cui le semplici ipotesi del modello cinetico sono sufficienti per una descrizione soddisfacente: il gas si può correttamente immaginare come un insieme di oggetti materiali puntiformi o quasi, a seconda dei gradi di libertà, con interazioni trascurabili.

Opportune estensioni, che in sostanza cercano di descrivere classicamente gli effetti delle interazioni, permettono al modello di spiegare anche certi

fenomeni non corrispondenti pienamente alle ipotesi di base, come qualche proprietà dei gas reali. Esso però non è più utilizzabile quando entrano in gioco effetti tipici della struttura atomica non spiegabili classicamente, come avviene per temperature prossime a $T = 0$ o con molecole di struttura complessa.

11.12 Significato cinetico di temperatura e calore

Il confronto del dato sperimentale, costituito dall'equazione di stato, con l'espressione calcolata per l'energia cinetica ha suggerito il collegamento diretto tra temperatura ed energia cinetica media del moto molecolare. Il successo del modello cinetico nella spiegazione di vari fatti sperimentali porta a ritenere corretta questa interpretazione del concetto di temperatura e ad estenderla.

L'ipotesi di base è dunque che le molecole di una qualsiasi sostanza siano, compatibilmente con i vincoli a cui sono sottoposte, in moto continuo e disordinato, detto *moto di agitazione termica*. La temperatura è l'espressione dell'energia cinetica media di questo moto, sia che si tratti delle molecole di un gas, di quelle di un liquido o degli ioni che costituiscono il reticolo cristallino di un solido.

In un gas ideale l'energia cinetica è l'unica forma di energia, dato che le forze intermolecolari sono trascurabili. In un gas reale si manifesta l'interazione tra le molecole con la dipendenza dell'energia interna dalla pressione, ovvero dal numero di molecole per unità di volume e quindi dalla loro distanza.

Nei liquidi e nei solidi il legame tra le molecole e gli atomi viene evidenziato dalla presenza di calori latenti nei cambiamenti di fase solido-liquido e liquido-vapore, che hanno il significato di energia necessaria a vincere le forze intermolecolari.

All'agitazione termica si riconduce anche il meccanismo di scambio di energia che chiamiamo calore. La trasmissione di calore da un corpo caldo ad uno freddo, o all'interno di uno stesso corpo dalle zone più calde a quelle più fredde, cioè in presenza di un gradiente di temperatura, si spiega in termini di cessione di energia meccanica negli urti che avvengono tra le molecole più veloci e quelle più lente. Si comprende quindi, anche intuitivamente, la ragione per cui il calore passa spontaneamente da un corpo caldo ad uno freddo e non avviene il contrario e perché occorre sempre un mezzo materiale per la trasmissione del calore.

12.1 Enunciati del secondo principio della termodinamica

Il primo principio della termodinamica non pone limiti alle trasformazioni di energia da una forma all'altra, però la situazione sperimentale non appare simmetrica: mentre è sempre possibile trasformare integralmente lavoro in calore, per esempio sfruttando l'attrito, la trasformazione contraria di calore in lavoro sembra essere limitata, indipendentemente dal primo principio.

Il problema pratico della trasformazione di "calorico in forza motrice" portò Carnot, già nel 1824, a formulare i fondamenti del secondo principio della termodinamica.

Prendiamo in esame il caso di una macchina che compie un ciclo termico scambiando calore con due sorgenti. Si verifica sempre la situazione schematizzata in figura 12.1: il calore scambiato complessivamente dal sistema, che viene utilizzato per far funzionare la macchina M , con le due sorgenti di calore alle temperature T_1 e T_2 ($T_2 > T_1$) è dato dalla somma di una quantità Q_A , assorbita dalla sorgente a temperatura maggiore, e di una quantità Q_C , ceduta alla sorgente a temperatura minore. Si osserva che è sempre $Q_C < 0$, cioè non succede mai $Q_C = 0$ o $Q_C > 0$. Questo risultato comporta che Q_A non viene trasformato integralmente in lavoro, ma una parte Q_C viene sempre ceduta alla sorgente a temperatura inferiore. Il lavoro è $W = Q_A + Q_C$ in accordo con il primo principio ($\Delta U = 0$ in un processo ciclico), però non si ha mai $W = Q_A$, bensì $W < Q_A$.

Nel caso ci siano più sorgenti con cui la macchina M scambia calore la situazione è analoga: la somma dei calori assorbiti non si trasforma mai totalmente in lavoro, una parte viene sempre ceduta restando cioè sotto forma di calore scambiato. Non esistono esempi contrari: in un processo ciclico vi è una impossibilità di trasformazione integrale di calore in lavoro ovvero la trasformazione di calore in lavoro è sempre accompagnata da cessione di calore.

Se il processo non è ciclico è possibile ottenere una trasformazione integrale di calore in lavoro, però essa non è l'unico risultato finale del processo considerato, in quanto si verifica sempre una variazione dello stato termodinamico del sistema. Per esempio, in una espansione isoterma di un gas ideale, $\Delta U = 0$ perché T è costante e quindi $W = Q$, però lo stato finale del gas differisce da quello iniziale dato che il volume è aumentato e la pressione diminuita. Se volessimo riportare il gas nello stato iniziale, con una generica trasformazione, per costruire un ciclo termico, dovremmo assorbire lavoro e

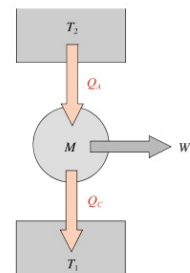


FIGURA 12.1

cedere calore, ricadendo nel caso precedente.

Accanto all'impossibilità finora discussa esiste un'altra impossibilità sperimentale. Se consideriamo due corpi a temperatura diversa e li mettiamo a contatto termico, c'è sempre una cessione di calore dal corpo caldo al corpo freddo fino a che si raggiunge l'equilibrio termico. Il calore non passa mai spontaneamente dal corpo freddo al corpo caldo. È possibile fare avvenire questo passaggio, come si realizza in una macchina frigorifera, ma deve essere eseguito un lavoro sulla sostanza che compie il ciclo.

Il *secondo principio della termodinamica* consiste nel prendere atto di queste impossibilità sperimentali, che non presentano eccezioni conosciute, e nel trasformarle in postulati, secondo i seguenti enunciati.

Enunciato di *Kelvin-Planck*

È impossibile realizzare un processo che abbia come unico risultato la trasformazione in lavoro del calore fornito da una sorgente a temperatura uniforme.

Secondo principio
della termodinamica

Enunciato di *Clausius*

È impossibile realizzare un processo che abbia come unico risultato il trasferimento di una quantità di calore da un corpo ad un altro a temperatura maggiore.

L'aggettivo *unico* utilizzato nei due enunciati è essenziale: abbiamo infatti già visto negli esempi dell'espansione isoterma di un gas ideale e del ciclo frigorifero che i processi proibiti dal secondo principio sono possibili, se non costituiscono l'unico risultato.

Conseguenza immediata del secondo principio, nell'enunciato di Kelvin-Planck, sono i fatti già evidenziati: in un processo ciclico per produrre effettivamente lavoro sono necessarie sempre almeno due sorgenti, cioè non può sussistere il risultato $Q_C = 0$, ma deve essere $Q_A > |Q_C|$ e quindi, secondo (11.26), $\eta < 1$.

In particolare, per un processo ciclico che si svolge utilizzando una sola sorgente, detto anche *ciclo monoterme*, non essendo possibile assorbire calore e produrre lavoro senza violare il secondo principio, devono valere le disequaglianze

$$Q \leq 0, W \leq 0.$$

Ciclo monoterme

Pertanto il sistema che compie il ciclo monoterme assorbe lavoro dall'ambiente esterno e cede calore alla sorgente, ossia trasforma integralmente lavoro in calore, senza limite alcuno, oppure non ha scambi energetici, $Q = 0$ e $W = 0$.

Se il ciclo monoterme è reversibile esso può venire percorso in senso contrario e, come sappiamo dal paragrafo 10.6, in tal caso gli scambi di calore e lavoro cambiano di segno: dovrebbero valere allora la disequaglianze

$$Q \geq 0, W \geq 0.$$

Poiché il segno di maggiore è in contrasto con il secondo principio, per un ciclo monoterme reversibile deve essere sempre, indipendentemente dal verso di percorrenza,

$$Q = 0, W = 0.$$

Gli enunciati di Kelvin-Planck e di Clausius, pur se riferiti a fatti sperimentali che appaiono molto diversi, sono strettamente connessi in quanto se fosse possibile realizzare uno dei processi proibiti sarebbe possibile realizzare anche l'altro.

Supponiamo infatti che sia possibile realizzare un processo ciclico che trasformi integralmente calore in lavoro, in contrasto con l'enunciato di Kelvin-Planck. Questo fatto è rappresentato nella figura 12.2, dove la macchina termica 1 produce il lavoro W trasformando il calore Q_A assorbito dalla sorgente a temperatura T_2 : $W = Q_A$ ed è nulla la cessione di calore alla sorgente fredda. Utilizziamo il lavoro W per far funzionare una macchina frigorifera, che preleva il calore Q_1 dalla sorgente a temperatura T_1 e cede il calore Q_2 alla sorgente a temperatura $T_2 > T_1$. Questa seconda macchina non contraddice l'enunciato di Clausius dato che nel processo interviene il lavoro $W' = -W$ fatto sul sistema (il lavoro W è fatto dalla macchina 1 ed è positivo, mentre W' è subito dalla macchina 2 ed è negativo: le due quantità sono eguali in modulo, ma opposte in segno). Il bilancio della macchina 2, sulla base del primo principio, è

$$Q_1 + Q_2 = W' = -W.$$

La macchina complessiva, costituita dall'insieme delle due macchine, assorbe Q_1 a temperatura T_1 e scambia

$$Q_A + Q_2 = W + Q_2 = -Q_1$$

a temperatura T_2 . Se Q_1 è assorbito, $-Q_1$ è ceduto. Il lavoro complessivo della macchina è nullo in quanto non c'è scambio di lavoro con l'ambiente esterno e l'unico risultato pertanto è il passaggio spontaneo di calore dalla sorgente a temperatura inferiore a quella a temperatura superiore, violando l'enunciato di Clausius.

Supponiamo ora di poter realizzare una macchina che come unico risultato faccia passare il calore Q da una sorgente a temperatura T_1 ad un'altra a temperatura $T_2 > T_1$ e consideriamo una seconda macchina che lavori normalmente tra le due sorgenti, in accordo col secondo principio. Dimensioniamo questa seconda macchina in modo che $Q_1 = Q$, cioè in modo da cedere alla sorgente a T_1 lo stesso calore che viene assorbito dalla prima macchina. Pertanto alla fine di un ciclo della macchina complessiva la sorgente a T_1 non scambia calore e il lavoro prodotto è dato da

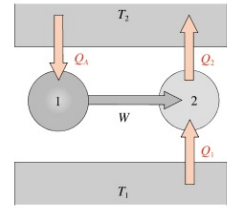


FIGURA 12.2

$$W = Q_2 + Q_1 = Q_2 + Q$$

ed è positivo, perché $Q_2 > |Q_1| = |Q|$; tale lavoro è eguale al calore complessivamente scambiato con la sorgente a T_2 e in conclusione l'unico risultato è la trasformazione integrale in lavoro del calore assorbito da una sola sorgente (a temperatura T_2), violando l'enunciato di Kelvin-Planck.

L'unione dei risultati ottenuti costituisce la cosiddetta *equivalenza tra i due enunciati del secondo principio della termodinamica* nel senso che abbiamo visto: la negazione di uno ha come conseguenza la negazione dell'altro.

Si noti che nella dimostrazione dell'equivalenza tra gli enunciati abbiamo implicitamente ammesso che le macchine collegate tra loro per formarne una complessiva compissero lo stesso numero di cicli nell'unità di tempo, ossia che a un ciclo completo di una corrispondesse un ciclo completo dell'altra. Si introduce questa ipotesi per semplicità e noi continueremo a farlo; peraltro i risultati ottenuti non dipendono da tale ipotesi.

Avvertiamo infine che nel resto del capitolo quando useremo il termine macchina intenderemo, come in questo paragrafo, indicare un sistema che compie un ciclo termodinamico qualsiasi, in particolare termico o frigorifero, reversibile o irreversibile. Da un punto di vista solamente termico l'ambiente, per una macchina o un sistema di macchine, è costituito dall'insieme di sorgenti o di corpi con cui avvengono gli scambi di calore.

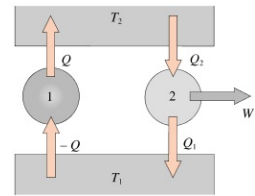


FIGURA 12.3

12.2 Reversibilità e irreversibilità

Nel capitolo 10 abbiamo posto l'attenzione, ai fini della reversibilità o irreversibilità di un processo, sulle caratteristiche di equilibrio degli stati termodinamici attraversati dal sistema. Estendiamo ora le nostre considerazioni all'ambiente.

Quando viene compiuta una trasformazione reversibile da uno stato A ad uno stato B , con scambio della quantità Q_{AB} e W_{AB} tra il sistema e l'ambiente, è sempre possibile ripercorrerla in senso inverso, scambiando le quantità $-Q_{AB}$ e $-W_{AB}$: alla fine sistema e ambiente sono ritornati ai rispettivi stati iniziali, dato che lo scambio totale di calore e lavoro è nullo per entrambi.

L'argomento si estende ai cicli reversibili: alla fine di un ciclo il sistema torna sempre nello stato iniziale, ma l'ambiente ha subito una modifica perché ha, per esempio, ceduto calore e assorbito lavoro. Percorrendo il ciclo in senso inverso gli scambi energetici dell'ambiente sono eguali ed opposti ed esso ritorna nello stato iniziale.

In generale possiamo dire che *una trasformazione reversibile non comporta alterazioni permanenti, nel senso che è sempre possibile riportare nei rispettivi stati iniziali il sistema e l'ambiente che con esso interagisce.*

Trasformazione
reversibile

La situazione è completamente diversa per le trasformazioni irreversibili, come ora discutiamo con alcuni esempi.

- a) Presenza durante il processo di effetti dissipativi dovuti alle forze di attrito, come avviene nello spostamento del pistone di un cilindro contenente un gas: contro le forze di attrito viene speso un certo lavoro W che alla fine ritroviamo trasformato integralmente in calore Q ceduto all'ambiente. Questo calore Q non può essere ritrasformato integralmente in lavoro: si è verificata una modifica permanente.
- b) Espansione libera di un gas (paragrafo 11.5): in essa $Q = W = 0$. Alla fine della trasformazione, se vogliamo riportare il gas nello stato iniziale possiamo utilizzare una compressione isoterma reversibile, che richiede un lavoro esterno. Il gas viene riportato nello stato iniziale, ma l'ambiente ha subito una modifica che non si può più recuperare.
- c) Passaggio di calore tra due corpi a contatto termico e che presentano una differenza finita di temperatura: alla fine si raggiunge l'equilibrio termico, senza produzione di lavoro, ma per ripristinare la situazione iniziale si dovrebbe fornire lavoro dall'esterno, per esempio utilizzando una macchina frigorifera reversibile.

Da questi, e da qualsiasi altro esempio, si conclude che *quando avviene una trasformazione irreversibile non è più possibile ritornare allo stato di partenza senza modificare il resto dell'universo*. Il sistema può essere riportato allo stato iniziale attraverso altre trasformazioni, ma l'ambiente subisce una modifica irreversibile. Nel paragrafo 12.9 commenteremo ulteriormente questa situazione.

Trasformazione
irreversibile

Le considerazioni esposte sono importanti perché nella pratica tutte le trasformazioni che avvengono in natura contengono fattori di irreversibilità. La rappresentazione di un fenomeno reale con una trasformazione reversibile costituisce quindi una idealizzazione del processo che permette di eseguire

calcoli altrimenti impossibili e avere stime sulle grandezze in gioco, spesso sotto forma di limiti superiori.

12.3 Teorema di Carnot

Il secondo principio è stato enunciato sulla base di due impossibilità, ma senza una esplicita espressione matematica, come è invece avvenuto per il primo principio.

Il teorema di Carnot rappresenta una prima precisazione quantitativa dell'enunciato di Kelvin-Planck, in quanto fissa la massima percentuale di calore assorbito da una macchina termica che può essere trasformata in lavoro.

Consideriamo due macchine che lavorano utilizzando le stesse sorgenti di calore alle temperature T_1 e $T_2 > T_1$, dimensionate in modo tale da produrre lo stesso lavoro (figura 12.4). Indichiamo le due macchine con i simboli X e R : per la prima macchina non facciamo per ora alcuna ipotesi di reversibilità o irreversibilità, mentre assumiamo che la seconda sia reversibile.

I rendimenti delle due macchine sono, data l'ipotesi sul lavoro,

$$\eta_X = \frac{W}{Q_2} \quad , \quad \eta_R = \frac{W}{Q'_2} \quad .$$

Dal primo principio abbiamo inoltre

$$Q_2 + Q_1 = W = Q'_2 + Q'_1 \quad . \quad (12.1)$$

Supponiamo che sia $\eta_X > \eta_R$ e costruiamo una macchina composta da X e R , in cui quest'ultima viene fatta funzionare come macchina frigorifera, assorbendo il lavoro $-W$ e il calore $-Q_1'$ MathType@MTEF@5@5@+= feaagKart1ev2aaatCvAUfeBSjuyZL2yd9gzLbvyNv2CaerbuLwBLn hiov2DGi1BTfMBaeXatLxBI9gBaerbd9wDYLwzYbItLDharqqtubsr 4rNCHbGeaGqiVuoJe9sqrpepCoxbbL8F4rqqrFfpeea0xe9Lq=Jc9 vqaqpepmoxbba9pwe9Q8fso=yqaqpepae9pgoFirpepeKkFroxfr=x fr=xb9adbaqaeeGaciGaaiaabeqaamaabaabaaGcbaGaamyuamaaDa aaleaacaIXaaabaGaai4jaaaaaaa@385F@ ; e cedendo il calore $-Q_2'$ MathType@MTEF@5@5@+= feaagKart1ev2aaatCvAUfeBSjuyZL2yd9gzLbvyNv2CaerbuLwBLn hiov2DGi1BTfMBaeXatLxBI9gBaerbd9wDYLwzYbItLDharqqtubsr 4rNCHbGeaGqiVuoJe9sqrpepCoxbbL8F4rqqrFfpeea0xe9Lq=Jc9 vqaqpepmoxbba9pwe9Q8fso=yqaqpepae9pgoFirpepeKkFroxfr=x fr=xb9adbaqaeeGaciGaaiaabeqaamaabaabaaGcbaGaamyuamaaDa aaleaacaIXaaabaGaai4jaaaaaaa@385F@ , come indicato in figura 12.5: sfruttiamo così una proprietà caratteristica di un processo reversibile, che abbiamo più volte evidenziato. Dall'ipotesi $\eta_X > \eta_R$ segue

$$\frac{W}{Q_2} > \frac{W}{Q'_2} \quad , \quad Q_2 < Q'_2 \quad , \quad Q_2 - Q'_2 < 0 \quad ,$$

e quindi, da (12.1),

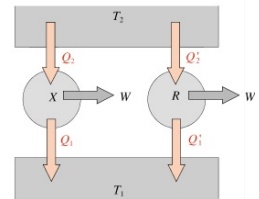


FIGURA 12.4

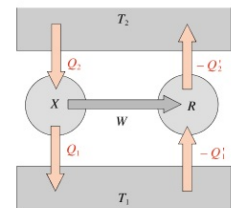


FIGURA 12.5

$$Q_1 - Q'_1 = Q'_2 - Q_2 > 0 .$$

Abbiamo complessivamente i seguenti risultati:

- a) la macchina assorbe il calore $Q = Q_1 - Q'_1 > 0$ dalla sorgente a temperatura T_1 ;
 b) non viene scambiato lavoro con l'ambiente esterno;
 c) la macchina cede il calore $-Q = Q_2 - Q'_2 < 0$ alla sorgente a temperatura T_2 .

L'unico risultato alla fine di un ciclo è il passaggio di calore dalla sorgente fredda alla sorgente calda, in contrasto con l'enunciato di Clausius. Allora è sbagliata l'ipotesi di partenza e deve essere

$$\eta_X \leq \eta_R . \tag{12.2}$$

Se anche la macchina X fosse reversibile, in alternativa al ragionamento precedente potremmo supporre $\eta_R > \eta_X$, far funzionare la macchina X come macchina frigorifera (calore e lavoro scambiati cambierebbero solo di segno dato che ora X è reversibile) e troveremmo $\eta_X \geq \eta_R$. Questa disuguaglianza è compatibile con (12.2) solo se

$$\eta_X = \eta_R . \tag{12.3}$$

Teorema di Carnot

In conclusione il teorema di Carnot afferma che tutte le macchine reversibili che lavorano tra le stesse sorgenti alle temperature T_1 e T_2 hanno rendimento eguale; qualsiasi altra macchina che lavori tra le stesse sorgenti non può avere rendimento maggiore. Il risultato è indipendente dal particolare sistema che compie il ciclo, come si deduce dal fatto che le proprietà del sistema non compaiono nella dimostrazione.

Abbiamo già studiato una particolare macchina reversibile che lavora tra due sorgenti, il ciclo di Carnot a gas ideale, il cui rendimento è dato da (11.27):

$$\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2} .$$

Da (12.3) deduciamo allora che (11.27) rappresenta il rendimento di tutte le macchine reversibili che lavorano con due sole sorgenti, alle temperature T_1 e T_2 .

Il teorema di Carnot risulta valido anche per macchine che lavorano con più sorgenti: *la macchina che funziona in modo reversibile è sempre quella il cui rendimento è il limite superiore dei rendimenti possibili*; non esiste però una formula generale come (11.27).

Ritornando al caso di due sorgenti e confrontando (11.26) con (11.27) si ha che, per qualsiasi macchina reversibile, la relazione tra calori scambiati e temperature a cui avviene lo scambio è

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0 \quad (12.4)$$

Ricordiamo che T è la temperatura misurata col termometro a gas ideale.

Fissate dunque le temperature delle sorgenti, T_1 e T_2 , con $T_2 > T_1$, per il teorema di Carnot

$$\eta_R = \eta_{\max} = 1 - \frac{T_1}{T_2} \quad (12.5)$$

la macchina reversibile è quella che sfrutta meglio l'energia fornita sotto forma di calore. Infatti, *a parità di calore assorbito Q_A , la macchina reversibile è quella che fornisce il lavoro massimo*,

$$W_{\max} = Q_A \eta_R = Q_A \left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right) = T_1 \left(\frac{Q_A}{T_1} - \frac{Q_A}{T_2}\right) \quad (12.6)$$

ovvero, *a parità di lavoro fornito, la macchina reversibile è quella che assorbe meno calore*

$$Q_{\min} = \frac{W}{\eta_R} = \frac{W}{1 - \frac{T_1}{T_2}} \quad (12.7)$$

Studio del rendimento massimo

Vediamo come bisogna scegliere in pratica le temperature delle sorgenti, sulla base di (12.5), per ottenere un valore abbastanza elevato di η_{\max} .

Una possibilità potrebbe essere di scegliere T_2 di poco superiore alla temperatura ambiente T_{amb} e $T_1 \ll T_{\text{amb}}$ ($T_1 = 0$ non è possibile, come vedremo). In tal caso però bisogna sottrarre il calore, ceduto durante il funzionamento della macchina, alla sorgente a bassissima temperatura, per evitare che T_1 cresca, e cederlo per esempio all'ambiente utilizzando una macchina frigorifera (non esiste cioè una sorgente che resti spontaneamente a T_1

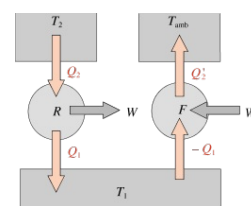


FIGURA 12.6

se $T_1 < T_{\text{amb}}$). Realizziamo allo scopo il processo rappresentato in figura 12.6. La macchina complessiva, costituita dalle macchine R e F , non scambia calore con la sorgente a T_1 , assorbe Q_2 dalla sorgente a T_2 e cede Q_2' all'ambiente alla temperatura T_{amb} . Essa produce il lavoro $W + W' < W$, in quanto W' , assorbito dalla macchina F , è negativo. Il rendimento è pertanto dato da

$$\eta = \frac{W + W'}{Q_2} = \frac{Q_1 + Q_2 - Q_1 + Q_2'}{Q_2} = \frac{Q_2 + Q_2'}{Q_2} = 1 + \frac{Q_2'}{Q_2} ,$$

come se si utilizzassero soltanto le due sorgenti alle temperature T_2 e T_{amb} ; è quindi inutile servirsi di una sorgente molto fredda, se quello che conta è il bilancio energetico globale.

L'unica scelta praticabile è $T_2 \gg T_1 \cong T_{\text{amb}}$, il che comporta l'uso di sorgenti calde, naturali o artificiali (nel qual caso occorre spendere energia per mantenerle).

La dipendenza di η_{max} da T_2 è rappresentata in figura 12.7, con $T_1 = 290$ K; $\eta = 0.5$ è raggiunto per $T_2 = 2T_1 = 580$ K.

Dato che tutte le macchine reali sono irreversibili, una qualsiasi macchina che lavori tra due sorgenti ha un rendimento piuttosto inferiore a quello dato da (12.5). La presenza di forze di attrito impedisce l'utilizzazione completa del lavoro prodotto, una parte del quale si trasforma invece in calore. Inoltre la sostanza che compie il ciclo si trova, durante l'espansione isoterma, a una temperatura T_2' inferiore a quella T_2 della sorgente, mentre nella compressione isoterma è ad una temperatura $T_1' > T_1$. In queste condizioni il rendimento effettivo approssima il valore

$$\eta' = 1 - \frac{T_1'}{T_2'} < 1 - \frac{T_1}{T_2} = \eta_R .$$

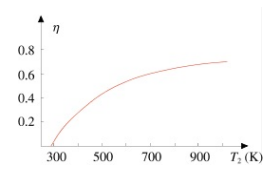


FIGURA 12.7

Esempio 12.1

Date due sorgenti alle temperature T_1 e T_2 , con $T_2 > T_1$, calcolare la variazione del rendimento massimo al variare di una delle due temperature, mantenendo costante l'altra, e trovare quale situazione è più vantaggiosa. Eseguire il calcolo con $T_1 = 300$ K, $T_2 = 400$ K, $\Delta T = 10$ K.

Soluzione

Le derivate del rendimento sono:

$$d\eta/dT_2 = T_1/T_2^2 , \quad d\eta/dT_1 = -1/T_2 .$$

Fissato T_1 , il rendimento cresce al crescere di T_2 ; fissato T_2 , il rendimento cresce al decrescere di T_1 (come è ovvio, si ha un aumento di rendimento al crescere della differenza $T_2 - T_1$). Dato che

$$\frac{d\eta}{dT_2} = \frac{T_1}{T_2} \left| \frac{d\eta}{dT_1} \right|$$

$Q_0 - Q_1 > 0 \Rightarrow Q_1 - Q_0 > 0$

feaagKart1ev2aaatCvAUfeBSjuyZL2yd9gzLbvyNv2CaerbuLwBLn
 hiov2DGi1BTfMBaeXatLxBI9gBaerbd9wDYLwzYbItLDharqqtubsr
 4rNCHbGeaGqiVu0Je9sqqrpepCoxbbL8F4rqqrFfpeea0xe9Lq=Jc9
 vqaqpepmoxbba9pwe9Q8fso=yqaqpepae9pg0FirpepeKkFroxfr=x
 fr=xb9adbaqaeeGaciGaaiaabeqaamaabaabaaGcbaGaamyuamaaBa
 aaleaacaIWaaabeaakiabgkHiTiaadgfadaqhaaWcbaGaaGimaaqa
 aiaaigdaaaGccqGH+aGpcaaIWaGaeyOoH4TaamyuamaaCaaaleqaba
 GaaGymaaaakiabgkHiTiaadgfaccqGH+aGpcaaIWaaaa@4497@

– si inverte il ciclo del frigorifero reversibile e la macchina complessiva non scambia lavoro, preleva

$Q_0 - Q_1$

feaagKart1ev2aaatCvAUfeBSjuyZL2yd9gzLbvyNv2CaerbuLwBLn
 hiov2DGi1BTfMBaeXatLxBI9gBaerbd9wDYLwzYbItLDharqqtubsr
 4rNCHbGeaGqiVu0Je9sqqrpepCoxbbL8F4rqqrFfpeea0xe9Lq=Jc9
 vqaqpepmoxbba9pwe9Q8fso=yqaqpepae9pg0FirpepeKkFroxfr=x
 fr=xb9adbaqaeeGaciGaaiaabeqaamaabaabaaGcbaGaamyuamaaBa
 aaleaacaIWaaabeaakiabgkHiTiaadgfadaqhaaWcbaGaaGimaaqa
 aiaaigdaaaaaa@3B21@ a bassa temperatura e cede $Q - Q'$, eguale in modulo a $Q_0 - Q_1$

feaagKart1ev2aaatCvAUfeBSjuyZL2yd9gzLbvyNv2CaerbuLwBLn
 hiov2DGi1BTfMBaeXatLxBI9gBaerbd9wDYLwzYbItLDharqqtubsr
 4rNCHbGeaGqiVu0Je9sqqrpepCoxbbL8F4rqqrFfpeea0xe9Lq=Jc9
 vqaqpepmoxbba9pwe9Q8fso=yqaqpepae9pg0FirpepeKkFroxfr=x
 fr=xb9adbaqaeeGaciGaaiaabeqaamaabaabaaGcbaGaamyuamaaBa
 aaleaacaIWaaabeaakiabgkHiTiaadgfadaqhaaWcbaGaaGimaaqa
 aiaaigdaaaaaa@3B21@ ad alta temperatura, andando contro l'enunciato di Clausius.

Pertanto $\xi \leq \xi_{rev}$. Se entrambi i frigoriferi sono reversibili vale il segno di eguaglianza. L'efficienza massima è $T_1 / (T_2 - T_1)$, come si ricava dal frigorifero di Carnot; essa è tanto maggiore quanto minore è la differenza di temperatura tra le sorgenti.

Visualizza Soluzione

Diagramma di Raveau

Per una macchina qualsiasi che lavori tra due sorgenti, scambiando il calore Q_2 alla temperatura T_2 e il calore Q_1 alla temperatura $T_1 < T_2$, la (12.4) è sostituita da

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \leq 0 \quad ,$$

relazione che si ottiene combinando (12.2) e (11.27). Accanto a questa, che deriva dal secondo principio, abbiamo la

$$Q_1 + Q_2 = W \quad ,$$

che deriva dal primo principio.

La disuguaglianza di Carnot, che equivale a $Q_2 \leq -T_2 Q_1 / T_1$, individua in un piano (Q_2, Q_1) una regione permessa, quella al di sotto della retta $Q_2 = -T_2 Q_1 / T_1$, e una vietata, quella al di sopra. Si noti che tale retta, passante per l'origine e con pendenza negativa $(-T_2/T_1)$, forma con l'asse Q_1 un angolo maggiore di 90° e minore di 135° , in quanto $T_1 > 0$ e $T_2 > T_1$.

Si considera poi la relazione $Q_1 + Q_2 = 0$, cioè la retta $Q_2 = -Q_1$. Anche questa divide il piano in due parti; una è quella in cui $Q_1 + Q_2 > 0$ ovvero $W > 0$, tipica di una macchina che assorbe calore ad alta temperatura, produce lavoro e cede calore a bassa temperatura (macchina termica); nell'altra parte $Q_1 + Q_2 < 0$ ovvero $W < 0$, relazione valida per una macchina che assorbe calore a bassa temperatura, assorbe lavoro e cede calore ad alta temperatura (macchina frigorifera), oppure di una macchina che assorbe lavoro, cede calore a T_1 e assorbe o cede calore a T_2 .

Nella figura 12.8, che costituisce il *diagramma di Raveau*, sono mostrate le condizioni trovate. La zona con colorazione uniforme è permessa dal secondo principio, la zona con tratteggio orizzontale è quella in cui si colloca il punto di funzionamento di una macchina termica ($Q_2 > 0, Q_1 < 0, Q_2 > |Q_1|$), la zona con tratteggio verticale è invece quella relativa alle macchine frigorifere ($Q_2 < 0, Q_1 > 0, |Q_2| > |Q_1|$). Nel resto della zona permessa è sempre $Q_1 < 0$ e $W < 0$, con le due possibilità $Q_2 > 0$, ma minore di $|Q_1|$, oppure $Q_2 < 0$. Si noti che il punto di funzionamento di una macchina reversibile può stare soltanto sulla retta $Q_2 = -T_2 Q_1 / T_1$.

Vedremo nel paragrafo 12.9 un diagramma analogo, riferito alle trasformazioni adiabatiche di un gas ideale.

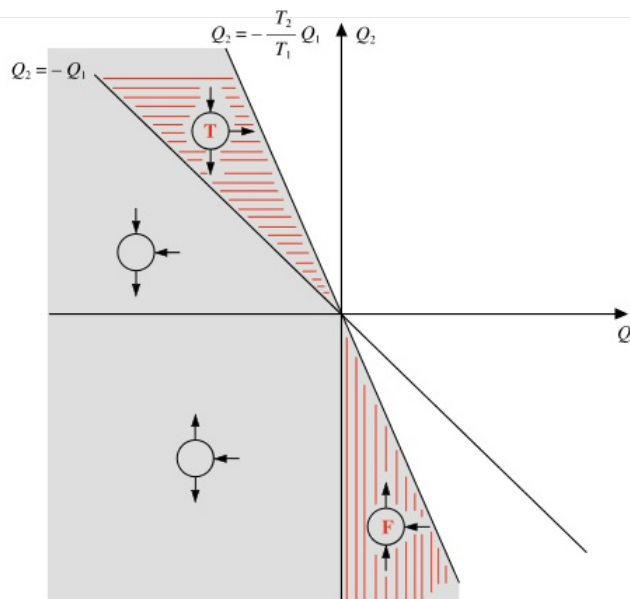


FIGURA 12.8

12.4 Temperatura termodinamica assoluta

Dalla dimostrazione del teorema di Carnot si deduce che il rendimento di un ciclo reversibile e quindi il rapporto tra il calore assorbito Q_2 e il calore ceduto Q_1 è funzione solo delle temperature delle sorgenti,

$$\frac{Q_2}{Q_1} = f(t_1, t_2) \quad ,$$

dove usiamo il simbolo t per indicare che ci riferiamo a una *temperatura empirica*, dipendente dal termometro impiegato. Inoltre nel seguito del ragionamento supponiamo che la funzione f dia il rapporto dei moduli dei calori scambiati.

Se una macchina reversibile A lavora tra le sorgenti a temperatura t_0 e t_2 scriviamo

$$\frac{Q_2}{Q_0} = f(t_0, t_2) \quad ,$$

mentre per una macchina reversibile B che utilizzi due sorgenti alle temperature t_0 e t_1 abbiamo

$$\frac{Q_1}{Q_0} = f(t_0, t_1) \quad .$$

Una macchina reversibile, composta da A e B come in figura 12.9, non scambia calore con la sorgente a temperatura t_0 e si comporta quindi come se lavorasse tra le sorgenti a t_2 e t_1 : possiamo scrivere

$$\frac{Q_2}{Q_1} = f(t_1, t_2) \quad .$$

Mettiamo insieme le espressioni precedenti:

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{Q_2}{Q_0} \frac{Q_0}{Q_1} \Rightarrow f(t_1, t_2) = \frac{f(t_0, t_2)}{f(t_0, t_1)} \quad .$$

Questa relazione non dipende dal valore di t_0 , che può essere qualsiasi, e quindi la funzione $f(t_1, t_2)$ risulta esprimibile come rapporto dei valori di una funzione g della temperatura:

$$f(t_1, t_2) = \frac{g(t_2)}{g(t_1)} \quad . \quad (12.8)$$

Tale funzione $g(t)$ si chiama *temperatura termodinamica assoluta*.

Costruiamo infatti un termometro costituito da una macchina reversibile che lavora tra la temperatura da misurare e la temperatura del punto triplo

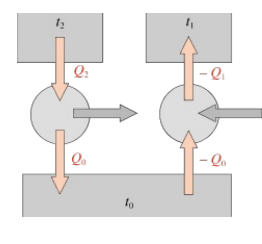


FIGURA 12.9

Temperatura
termodinamica
assoluta

dell'acqua, che è il nostro punto di riferimento, pari a 273.16 K, assorbendo il calore Q e cedendo il calore Q_{pt} . Da (12.8)

$$\frac{Q}{Q_{pt}} = \frac{g(t)}{g(t_{pt})} = \frac{g(t)}{273.16} \Rightarrow g(t) = 273.16 \frac{Q}{Q_{pt}} .$$

La caratteristica termometrica è il modulo del calore scambiato alla data temperatura e $g(t)$ è una temperatura assoluta in quanto, per il teorema di Carnot, il rapporto Q/Q_{pt} non dipende dalla sostanza che descrive il ciclo.

D'altra parte da (12.4) abbiamo che il rapporto tra i moduli dei calori scambiati soddisfa la relazione

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1}$$

dove T è la temperatura data dal termometro a gas ideale. Pertanto

$$\frac{g(t_2)}{g(t_1)} = \frac{T_2}{T_1} .$$

Le due scale sono quindi proporzionali; poiché coincidono al punto triplo dell'acqua, esse devono essere eguali. Si deduce che *la temperatura misurata col termometro a gas ideale è la temperatura assoluta.*

A parte l'importanza concettuale, il termometro a ciclo di Carnot nella pratica diventa l'unico utilizzabile a temperature di pochi kelvin, dove non è disponibile alcuna sostanza nella fase gassosa (l'elio a pressione atmosferica condensa a 4.2 K). I valori della temperatura vengono dedotti da accurate misure del calore scambiato.

Definizione dell'unità kelvin

Siamo adesso in grado di definire correttamente il kelvin, unità di misura della temperatura: *esso è pari a 1/273.16 della temperatura termodinamica del punto triplo dell'acqua, misurata con un termometro a ciclo di Carnot.*

Unità kelvin

Zero assoluto

In base alla definizione appena vista, una qualsiasi temperatura è data dalla relazione

$$T = 273.16 \frac{Q}{Q_{pt}} . \quad (12.9)$$

Se Q tende a zero, anche T tende a zero secondo (12.9).

Si chiama *zero assoluto* la temperatura a cui una trasformazione isoterma reversibile si svolge senza scambio di calore; nella (12.9) Q è infatti il calore scambiato, nel ciclo di Carnot, lungo l'isoterma a temperatura T . Di conseguenza a $T = 0$ una trasformazione isoterma reversibile coincide con una trasformazione

Definizione dello zero assoluto

adiabatica reversibile, cosa che non è possibile a nessun'altra temperatura (è invece possibile se la trasformazione è irreversibile, come si è visto nell'espansione libera di un gas ideale).

Vedremo in seguito che non è possibile raggiungere lo zero assoluto; la temperatura più bassa mai raggiunta è dell'ordine di 10^{-7} K.

12.5 Teorema di Clausius

La relazione (12.4), conseguenza del teorema di Carnot per le macchine reversibili che lavorano tra due sorgenti, può essere estesa e generalizzata a macchine termiche operanti con più sorgenti di calore. Sussiste infatti il *teorema di Clausius*: data una macchina M qualsiasi che scambia calore con n sorgenti, è valida la relazione

$$\sum_1^n \frac{Q_i}{T_i} \leq 0 \quad , \quad (12.10)$$

dove Q_1, Q_2, \dots, Q_n sono i calori scambiati con le sorgenti a temperatura T_1, T_2, \dots, T_n . La situazione è schematizzata nella figura 12.10, in cui non sono indicati i versi degli scambi energetici, che possono essere qualsiasi purché sia soddisfatta (12.10).

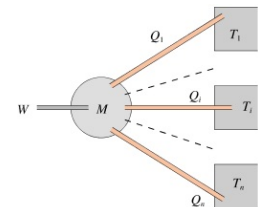


FIGURA 12.10

Per dimostrare (12.10), immaginiamo di aggiungere n macchine reversibili funzionanti tra le sorgenti già considerate alle temperature T_1, T_2, \dots, T_n e una sorgente a temperatura T_0 : ciascuna di queste macchine R_i scambia con la sorgente a T_i il calore $-Q_i$, opposto a quello scambiato con la stessa sorgente dalla macchina M , e con la sorgente a T_0 il calore Q_{0i} . L'insieme è mostrato in figura 12.11.

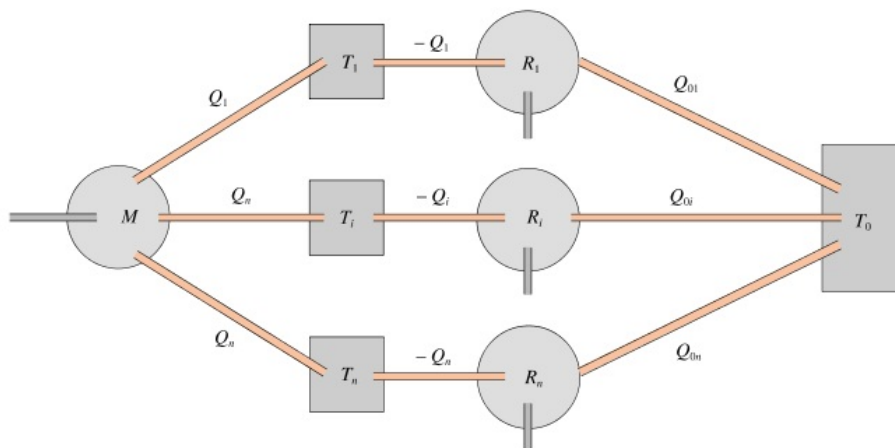


FIGURA 12.11

Applichiamo (12.4) a ciascuna macchina reversibile:

$$\begin{array}{l}
\text{per } R_1 \qquad -\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_{01}}{T_0} = 0 \Rightarrow \frac{Q_{01}}{T_0} = \frac{Q_1}{T_1} \quad , \\
\text{.....} \\
\text{per } R_i \qquad -\frac{Q_i}{T_i} + \frac{Q_{0i}}{T_0} = 0 \Rightarrow \frac{Q_{0i}}{T_0} = \frac{Q_i}{T_i} \quad , \\
\text{.....} \\
\text{per } R_n \qquad -\frac{Q_n}{T_n} + \frac{Q_{0n}}{T_0} = 0 \Rightarrow \frac{Q_{0n}}{T_0} = \frac{Q_n}{T_n} \quad ,
\end{array}$$

e sommando su tutte le macchine

$$\frac{1}{T_0} \sum_i Q_{0i} = \sum_i \frac{Q_i}{T_i} \quad .$$

Alla fine di un ciclo della macchina M e delle macchine reversibili R_1, \dots, R_n le sorgenti a T_1, \dots, T_n sono rimaste invariate in quanto ciascuna ha scambiato calori eguali ed opposti con le macchine. Pertanto la macchina complessiva costituita da M e dalle n macchine ausiliarie compie una trasformazione ciclica monoterma perché scambia calore solo con la sorgente a temperatura T_0 . Come abbiamo visto nel paragrafo 12.1, il calore totale scambiato durante un ciclo monoterma non può essere positivo e quindi

$$\sum_i Q_{0i} \leq 0 \Rightarrow \sum_i \frac{Q_i}{T_i} \leq 0$$

poiché $T_0 > 0$. Abbiamo così dimostrato (12.10).

Se lo scambio di calore di M avviene con una serie infinita di sorgenti, detto dQ il calore scambiato con la sorgente a temperatura T , la (12.10) diventa

$$\oint \frac{dQ}{T} \leq 0 \quad , \qquad (12.11)$$

dove il simbolo \oint che l'integrale è esteso a tutto il ciclo descritto dalla macchina M .

Le (12.10) e (12.11) esprimono il teorema di Clausius per una macchina generica. Se la macchina M è reversibile invertiamo tutti i cicli: tutti gli scambi di calore cambiano di segno e deve essere $\sum (-Q_{0i}) \leq 0$. Ne segue che le disuguaglianze di (12.10) e (12.11) vanno invertite e si ha compatibilità tra i due casi solo se

$$\sum_i \frac{Q_i}{T_i} = 0 \quad \text{oppure} \quad \oint \frac{dQ}{T} = 0 \quad . \qquad (12.12)$$

Macchine reversibili

Queste relazioni esprimono il *teorema di Clausius per le macchine reversibili*; la prima in particolare appare come generalizzazione di (12.4).

Quando il processo ciclico è irreversibile, a rigore vale il segno di minore o

eguale; però, sulla base delle considerazioni sui processi irreversibili sviluppate nel paragrafo 12.3, possiamo assumere che in generale si verifica la disuguaglianza e scrivere il *teorema di Clausius per le macchine irreversibili* come

$$\sum_i \frac{Q_i}{T_i} < 0 \quad \text{oppure} \quad \oint \frac{dQ}{T} < 0 . \quad (12.13)$$

Macchine irreversibili

Si tenga presente che la temperatura T nelle (12.12) e (12.13) è quella della sorgente con cui avviene lo scambio di calore: essa coincide con la temperatura del sistema che compie il ciclo solo se il processo è reversibile. Inoltre i calori sono quelli visti dal sistema, positivi se il sistema li assorbe, negativi se li cede.

Osserviamo infine che mentre la somma dei calori scambiati è sempre diversa da zero per un ciclo che scambia lavoro, in accordo con il primo principio, quando il calore scambiato viene diviso per il valore della temperatura della sorgente con cui avviene lo scambio e si somma su tutto il ciclo, il risultato è nullo se il ciclo è reversibile e negativo negli altri casi.

12.6 La funzione di stato entropia

Siano A e B due stati qualunque di un sistema termodinamico e passiamo da uno all'altro tramite due diverse trasformazioni reversibili, rappresentate dalle linee 1 e 2 della figura 12.12 in un diagramma bidimensionale; per un gas si tratterebbe, ad esempio, del piano (p, V) .

Se percorriamo in senso inverso la trasformazione 2 (chiamandola -2), abbiamo composto un ciclo reversibile, che si svolge da A a B lungo la prima trasformazione e da B ad A lungo la seconda invertita. Da (12.12)

$$\oint \frac{dQ}{T} = 0 = \int_A^B \left(\frac{dQ}{T} \right)_1 + \int_B^A \left(\frac{dQ}{T} \right)_{-2} = \int_A^B \left(\frac{dQ}{T} \right)_1 - \int_A^B \left(\frac{dQ}{T} \right)_2 \quad .$$

L'ultimo passaggio discende dalla proprietà delle trasformazioni reversibili secondo cui il cambio di verso nella trasformazione comporta soltanto il cambio di segno degli scambi energetici. Pertanto si ottiene

$$\int_A^B \left(\frac{dQ}{T} \right)_1 = \int_A^B \left(\frac{dQ}{T} \right)_2 = \dots = \int_A^B \left(\frac{dQ}{T} \right)_i$$

lungo qualsiasi trasformazione reversibile che colleghi gli stati A e B .

Il valore dell'integrale $\int_A^B \left(\frac{dQ}{T} \right)_{\text{rev}}$ MathType@MTEF@5@5@+=feaagKart1ev2aaatCvAUfeBSjuyZL2yd9gzLbvyNv2CaerbuLwBLn hiov2DGi1BTfMBaeXatLxBI9gBaerbd9wDYLwzYbItLDharqqtubsr 4rNCHbGeaGqiVuoJe9sqqrpepCoxbbL8F4rqqrFfppeaOxe9Lq=Jc9 vqaqpepmoxbba9pwe9Q8fso=yqaqpepae9pg0FirpepeKkFroxfr=x fr=xb9adbaqaeeGaciGaaiaabeqaamaabaabaaGcbaWaa8qmaeada qadaqaamaalaaabaGaamizaiaadgfaaeacaWGubaaaaGaayjkaiaa wMcaaaWcbaGaamyqaaqaaiaadkeaaOGaey4kIipakmaaBaaaleaaca WGYbGaamyzaiaadAhaaeqaaaaa@40EF@ , esteso ad una qualunque trasformazione reversibile che congiunge due stati di un sistema termodinamico, è sempre lo stesso, cioè non dipende dalla particolare trasformazione reversibile scelta per eseguire il calcolo. Si può quindi porre l'integrale eguale alla variazione di una funzione che dipende solo dalle coordinate termodinamiche del sistema nei due stati di equilibrio A e B :

$$\int_A^B \left(\frac{dQ}{T} \right)_{\text{rev}} = S_B - S_A = \Delta S \quad . \quad (12.14)$$

La *funzione di stato* così introdotta è detta *entropia* (il nome significa in greco trasformazione).

La definizione (12.14) dà l'entropia a meno di una costante additiva arbitraria. Se fissiamo uno stato di riferimento O la cui entropia vale S_O , la variazione di entropia nel passaggio da O ad A è

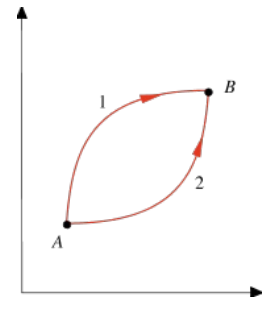


FIGURA 12.12

Definizione della
funzione entropia

$$S_A - S_O = \int_O^A \left(\frac{dQ}{T} \right)_{\text{rev}} \Rightarrow S_A = S_O + \int_O^A \left(\frac{dQ}{T} \right)_{\text{rev}} ;$$

analogamente nel passaggio da O a B

$$S_B - S_O = \int_O^B \left(\frac{dQ}{T} \right)_{\text{rev}} \Rightarrow S_B = S_O + \int_O^B \left(\frac{dQ}{T} \right)_{\text{rev}} .$$

Poiché la scelta della trasformazione reversibile è arbitraria, si ha pure

$$S_B = S_O + \int_O^A \left(\frac{dQ}{T} \right)_{\text{rev}} + \int_A^B \left(\frac{dQ}{T} \right)_{\text{rev}} = S_A + \int_A^B \left(\frac{dQ}{T} \right)_{\text{rev}} ,$$

che è la (12.14). Quindi l'entropia degli stati A e B è definita a meno di S_O , però la differenza di entropia è completamente definita, dato che nella differenza la costante arbitraria S_O scompare.

La (12.14) può essere scritta anche in forma infinitesima, cioè con riferimento ad una trasformazione reversibile infinitesima, che implica una variazione infinitesima delle coordinate termodinamiche:

$$dS = \left(\frac{dQ}{T} \right)_{\text{rev}} ; \quad (12.15)$$

dQ non è un differenziale esatto (si veda il paragrafo 10.5), però se tale quantità è divisa per T ed è considerata in una trasformazione reversibile, essa dà luogo al differenziale esatto dS .

L'entropia è una quantità additiva. Dati due sistemi di entropia S_1 e S_2 , l'entropia complessiva è espressa da $S = S_1 + S_2$. Questa proprietà è conseguenza del fatto che l'energia interna complessiva dei due sistemi è la somma delle energie interne come pure il lavoro complessivo è la somma dei lavori, per lo meno se i sistemi sono indipendenti, pertanto anche il calore scambiato dal sistema complessivo è la somma dei calori scambiati e il risultato si estende all'entropia (si noti che la parte del ragionamento riguardante U , Q , W è stata utilizzata nei bilanci energetici delle macchine risultanti dalla composizione di più macchine). In particolare risulta che se si aumenta la massa di un sistema, l'entropia aumenta in proporzione. L'entropia quindi ha le caratteristiche di una *grandezza estensiva*.

Supponiamo ora di avere una trasformazione irreversibile che collega lo stato A allo stato B e di voler calcolare la variazione di entropia del sistema che descrive la trasformazione. Le considerazioni finora esposte ci danno le seguenti indicazioni:

- l'entropia degli stati iniziale e finale è certamente definibile, a partire ad esempio da un certo stato di riferimento;
- conseguentemente è definibile la variazione $S_B - S_A$;
- la variazione $S_B - S_A$ non dipende dal tipo di trasformazione che collega A e B , ma solo dalle coordinate

termodinamiche di A e B , in quanto l'entropia è una funzione di stato.

Pertanto per il calcolo della variazione di entropia nella trasformazione irreversibile da A a B basta scegliere una qualsiasi trasformazione reversibile che colleghi A a B ed applicare a questa (12.14): il risultato è valido in ogni caso.

In conclusione, nell'evoluzione di un sistema da uno stato A ad uno stato B l'entropia del sistema in generale cambia: la variazione non dipende dalle modalità dell'evoluzione (sia essa reversibile o irreversibile), ma solo dagli stati A e B . La (12.14) fornisce il metodo di calcolo: la scelta della trasformazione reversibile AB da utilizzare è determinata solo da considerazioni sulla facilità del calcolo stesso.

L'unità di misura dell'entropia è il joule/kelvin, J/K.

Diagrammi TS

Osserviamo che l'entropia, essendo funzione di stato, può essere scelta come variabile indipendente (coordinata termodinamica) per descrivere, insieme ad una seconda variabile indipendente opportunamente scelta, lo stato termodinamico di un sistema (se descrivibile con due sole variabili).

Spesso viene considerata la coppia di variabili indipendenti S e T e tale scelta è giustificata dai seguenti motivi.

Nel piano (T, S) una trasformazione reversibile è rappresentata da un tratto di curva continua che fornisce il grafico della funzione $T(S)$. Il calore scambiato dal sistema che descrive la trasformazione è, secondo (12.15),

$$dQ_{\text{rev}} = T dS \Rightarrow Q_{\text{rev}} = \int_A^B T dS, \quad (12.16)$$

con riferimento alla figura 12.13. Ne deriva che il calore scambiato nella trasformazione, assorbito se si passa da A a B ($S_B > S_A$), ceduto se invece si va da B ad A , è dato dall'area sotto la curva AB . Nel piano (T, S) il calore ha una semplice interpretazione grafica, come il lavoro nel piano (p, V) , se le trasformazioni sono reversibili.

Un ciclo reversibile nel piano (T, S) delimita un'area che è pari alla somma algebrica dei calori scambiati in totale dal sistema, $Q_A + Q_C$, positiva se il ciclo è percorso in senso orario, negativa in caso contrario. Tale area rappresenta anche, per il primo principio, il lavoro compiuto. Il rendimento di una macchina che compie un ciclo termico ha una semplice rappresentazione: esso è dato dal rapporto tra l'area racchiusa dal ciclo (W) e l'area totale sottesa dalla curva superiore (Q_A); risulta così evidente che il rendimento della macchina è inferiore all'unità.

Nel piano (T, S) una trasformazione isoterma reversibile è rappresentata da un segmento orizzontale ($T = \text{costante}$), una trasformazione adiabatica reversibile da un segmento verticale ($S = \text{costante}$): infatti in tal caso $dQ_{\text{rev}} = 0$ e, da (12.15), $dS = 0$. Una trasformazione adiabatica reversibile è dunque

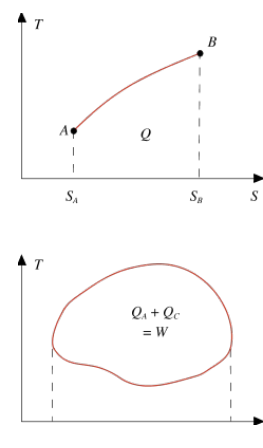


FIGURA 12.13

isoentropica, lungo di essa l'entropia del sistema non varia.

Un ciclo di Carnot ha la forma di un rettangolo e ricaviamo subito, da (12.16) visto che le temperature sono costanti o dalla figura 12.14,

$$Q_A = T_2 (S_2 - S_1) \quad , \quad Q_C = T_1 (S_1 - S_2) \quad ,$$

$$Q = Q_A + Q_C = (T_2 - T_1) (S_2 - S_1) = W \quad ,$$

$$\eta = 1 + \frac{Q_C}{Q_A} = 1 - \frac{T_1}{T_2} \quad .$$

Inoltre, $S_2 - S_1 = Q_A / T_2 = - Q_C / T_1$, che è la (12.4), e

$$W = (T_2 - T_1) (S_2 - S_1) = (T_2 - T_1) Q_A / T_2 \quad ,$$

che è la (12.6).

Abbiamo così trovato come si calcola la variazione di entropia in due importanti trasformazioni. In una isoterma reversibile alla temperatura T

$$\Delta S = \frac{Q}{T} \quad , \quad \textit{isoterma reversibile} \quad (12.17)$$

essendo Q il calore scambiato; in una adiabatica reversibile

$$\Delta S = 0 \quad . \quad \textit{adiabatica reversibile} \quad (12.18)$$

Sia (12.17) che (12.18) si ottengono anche direttamente da (12.14). Infine è evidente che per qualsiasi trasformazione ciclica la variazione di entropia della sostanza che descrive il ciclo è eguale a zero per definizione, essendo l'entropia funzione di stato:

$$\Delta S = 0 \quad . \quad \textit{trasformazione ciclica} \quad (12.19)$$

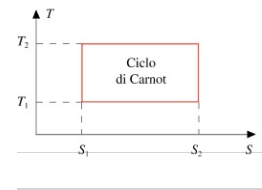


FIGURA 12.14

12.7 Il principio di aumento dell'entropia

Ritorniamo alla situazione rappresentata all'inizio del paragrafo 12.6, assumendo però che la trasformazione 1 sia irreversibile, mentre la 2 resta reversibile. Pertanto il ciclo formato dalle trasformazioni 1 e - 2 (cioè la 2 percorsa in senso inverso) è irreversibile: il teorema di Clausius (12.13) si scrive

$$\oint \frac{dQ}{T} = \int_A^B \left(\frac{dQ}{T} \right)_1 + \int_B^A \left(\frac{dQ}{T} \right)_{-2} = \int_A^B \left(\frac{dQ}{T} \right)_{\text{irr}} - \int_A^B \left(\frac{dQ}{T} \right)_{\text{rev}} < 0 .$$

L'ultimo integrale dà la variazione di entropia e quindi

$$S_B - S_A = \int_A^B \left(\frac{dQ}{T} \right)_{\text{rev}} > \int_A^B \left(\frac{dQ}{T} \right)_{\text{irr}} . \quad (12.20)$$

È necessario soffermarsi con attenzione sul significato della (12.20) per evitare $\int_A^B \frac{dQ}{T}$ possibili equivoci. L'integrale $\int_A^B \frac{dQ}{T}$ MathType@MTEF@5@5@+=

feaagKart1ev2aaatCvAUfeBSjuyZL2yd9gzLbvyNv2CaerbuLwBLn hiov2DGi1BTfMBaeXatLxBI9gBaerbd9wDYLwzYbItLDharqqtubsr 4rNCHbGeaGqiVu0Je9sqqrpepCoxbbL8F4rqqrFfpeea0xe9Lq=Jc9 vqaqpepmoxbba9pwe9Q8fso=yqaqpepae9pg0FirpepeKkFroxfr=x fr=xb9adbaqaeeGaciGaaiaabeqaaamaabaabaaGcbaWaa8qmaeaada WcaaqaiaadsgacaWGrrbaabaGaamivaaaaaSqaaiaadgeaeeaaacaWG cbaaniabgUIiYdaaaa@3C54@ , calcolato lungo una generica trasformazione AB dipende dalla trasformazione e non ha nessun particolare significato fisico, salvo che deve obbedire a (12.20) e quindi essere sempre minore dell'integrale $\int_A^B \left(\frac{dQ}{T} \right)_{\text{rev}}$ MathType@MTEF@5@5@+= feaagKart1ev2aaatCvAUfeBSjuyZL2yd9gzLbvyNv2CaerbuLwBLn hiov2DGi1BTfMBaeXatLxBI9gBaerbd9wDYLwzYbItLDharqqtubsr 4rNCHbGeaGqiVu0Je9sqqrpepCoxbbL8F4rqqrFfpeea0xe9Lq=Jc9 vqaqpepmoxbba9pwe9Q8fso=yqaqpepae9pg0FirpepeKkFroxfr=x fr=xb9adbaqaeeGaciGaaiaabeqaaamaabaabaaGcbaWaa8qmaeaada qadaqaamaalaaabaGaamizaiaadgfaaeaaacaWGubaaaaGaayjkaiaa wMcaaaWcbaGaamyqaaqaaiaadkeaaOGaey4kIipakmaaBaaaleaaca WGYbGaamyzaiaadAhaaeqaaaaa@40EF@ , il quale invece è indipendente dalla trasformazione, purché reversibile, e definisce la variazione della funzione di stato entropia secondo (12.14). In altre parole, se per una generica trasformazione AB effettivamente eseguita da un sistema B dQ siamo in grado di calcolare $\int_A^B \frac{dQ}{T}$ MathType@MTEF@5@5@+= feaagKart1ev2aaatCvAUfeBSjuyZL2yd9gzLbvyNv2CaerbuLwBLn hiov2DGi1BTfMBaeXatLxBI9gBaerbd9wDYLwzYbItLDharqqtubsr 4rNCHbGeaGqiVu0Je9sqqrpepCoxbbL8F4rqqrFfpeea0xe9Lq=Jc9

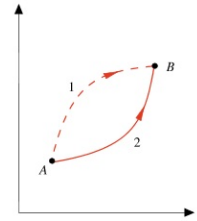


FIGURA 12.15

vqaqpepmoxbba9pwe9Q8fso=yqaqpepae9pgoFirpepeKkFroxfr=x
fr=xb9adbaqaaeGaciGaaiaabeqaamaabaabaaGcbaWaa8qmaeaada
WcaaqaiaaadsgacaWGrbaabaGaamivaaaaaSqaaiaadgeaaeaaacaWG
cbaaniabgUIiYdaaaa@3C54@ , in generale il risultato non è eguale alla
variazione di entropia $S_B - S_A$, ma minore; se vogliamo calcolare $S_B - S_A$ per
quella data trasformazione, dobbiamo servirci di un'altra trasformazione AB
reversibile.

In termini infinitesimi la (12.20) si scrive

$$dS = \left(\frac{dQ}{T} \right)_{\text{rev}} > \left(\frac{dQ}{T} \right)_{\text{irr}} . \quad (12.21)$$

Se il sistema che descrive la trasformazione AB è isolato termicamente, cioè non scambia calore, si ha $dQ = 0$ e quindi da (12.20)

$$S_B - S_A \geq 0 \Rightarrow S_B \geq S_A . \quad (12.22)$$

Principio di aumento dell'entropia

L'entropia di un sistema termicamente isolato non può diminuire: essa aumenta se la trasformazione è irreversibile, resta costante solo se la trasformazione è reversibile. La (12.22) esprime il *principio di aumento dell'entropia*; la sua forma infinitesima

$$dS \geq 0 \quad \text{ sistema isolato} \quad (12.23)$$

Formulazione matematica del secondo principio della termodinamica

viene chiamata *formulazione matematica del secondo principio della termodinamica*.

Un sistema isolato si ottiene sempre quando si considera un sistema propriamente detto ed il suo ambiente, cioè un universo termodinamico. Per l'universo termodinamico

$$\Delta S_u \geq 0 \quad \text{ con } \Delta S_u = \Delta S_{\text{sist}} + \Delta S_{\text{amb}} .$$

Se l'universo compie una trasformazione reversibile

$$\Delta S_u = 0 \Rightarrow \Delta S_{\text{sist}} = -\Delta S_{\text{amb}} ,$$

se invece l'universo compie una trasformazione irreversibile

$$\Delta S_u > 0 \Rightarrow \Delta S_{\text{sist}} \neq -\Delta S_{\text{amb}} .$$

In particolare, quando la trasformazione è ciclica, sappiamo da (12.19) che $\Delta S_{\text{sist}} = 0$; allora,

$$\begin{aligned} \text{se il ciclo è reversibile} & \quad \Delta S_u = \Delta S_{\text{amb}} = 0 ; \\ \text{se il ciclo è irreversibile} & \quad \Delta S_u = \Delta S_{\text{amb}} > 0 . \end{aligned}$$

Una conclusione importante che si trae dai risultati appena esposti è che *l'irreversibilità è sempre accompagnata da un aumento di entropia*

dell'universo. D'altra parte abbiamo già rilevato più volte che i processi naturali sono tutti sostanzialmente irreversibili. Possiamo quindi affermare che ogni processo naturale si svolge necessariamente nel verso che determina un aumento dell'entropia complessiva del sistema e del suo ambiente. L'evoluzione termina quando viene raggiunto il massimo valore dell'entropia compatibile con le condizioni fisiche di sistema e ambiente: tale stato corrisponde allo stato di equilibrio stabile.

Notiamo esplicitamente che l'aumento di entropia dell'universo, in presenza di trasformazioni irreversibili, non significa che l'entropia debba aumentare in tutte le varie parti del sistema e dell'ambiente che costituiscono l'universo termodinamico. In una o più parti l'entropia può diminuire, ma ce n'è almeno un'altra in cui aumenta, in modo da soddisfare la (12.22). Analoghe considerazioni valgono nei casi in cui l'entropia dell'universo resta costante.

Richiamiamo infine un uso pratico di (12.22) o (12.23) nel caso di un processo reversibile. Imporre $\Delta S_u = 0$ equivale a scrivere un'equazione tra quantità di calore scambiate e temperature che può diventare, come vedremo in molti esempi, una equazione tra le coordinate termodinamiche, utile per determinarne una in funzione delle altre. Pertanto nella risoluzione di problemi, oltre a servirsi del bilancio energetico (primo principio), conviene sempre verificare, nel caso di processi reversibili, quanta informazione si possa ricavare dalla costanza dell'entropia dell'universo (secondo principio).

12.8 Calcoli di variazioni di entropia

In questo paragrafo trattiamo alcuni processi tipici, in cui sistemi costituiti da corpi solidi o liquidi scambiano calore tra loro o con sorgenti, e calcoliamo le corrispondenti variazioni di entropia. L'argomento è completato nel paragrafo 12.9, dove ci occupiamo di sistemi costituiti da gas ideali.

Trasformazioni adiabatiche

Un sistema che compie una trasformazione adiabatica costituisce un caso particolare di universo termodinamico, in cui si assume che il sistema sia isolato termicamente dall'ambiente: l'ambiente non scambia calore col sistema, ma soltanto lavoro; pertanto $\Delta S_{\text{amb}} = 0$ e

$$\Delta S_{\text{sist}} = \Delta S_{\text{u}} \geq 0 .$$

Se la trasformazione è reversibile $\Delta S_{\text{sist}} = 0$, la trasformazione cioè è isoentropica. Come già detto nel paragrafo 12.6, il risultato si ottiene anche direttamente dalla definizione (12.14).

Per una trasformazione adiabatica irreversibile invece $\Delta S_{\text{sist}} > 0$, l'entropia aumenta. In effetti questa volta $dQ = 0$ non implica $dS = 0$: il calore scambiato lungo la trasformazione è nullo, però ΔS_{sist} non è calcolabile lungo questa trasformazione, bensì lungo un'altra con gli stessi estremi, ma reversibile, che non può essere adiabatica a sua volta. Questo perché *due stati collegati con una adiabatica irreversibile hanno necessariamente entropia diversa e non possono quindi essere collegati anche con una adiabatica reversibile, che è isoentropica* (e viceversa, due stati diversi per i quali è $\Delta S = 0$ non possono essere collegati con un'adiabatica irreversibile).

Scambi di calore con sorgenti

Consideriamo prima il caso della cessione di calore Q da una sorgente a temperatura T_2 a una sorgente a temperatura $T_1 < T_2$.

La sorgente che assorbe il calore Q ha una variazione di entropia

$$\Delta S_1 = \int_A^B \frac{dQ}{T_1} = \frac{1}{T_1} \int_A^B dQ = \frac{Q}{T_1} ,$$

mentre per la sorgente a T_2 che cede il calore $-Q$ si ha

$$\Delta S_2 = -\frac{Q}{T_2} .$$

L'universo è costituito dalle due sorgenti e

$$\Delta S_{\text{u}} = \Delta S_1 + \Delta S_2 = \frac{Q}{T_1} - \frac{Q}{T_2} = Q \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) ;$$

si verifica che la variazione è positiva, dato che $T_1 < T_2$. L'entropia della sorgente fredda è aumentata, quella della sorgente calda è diminuita, però $|\Delta S_2| < \Delta S_1$. Il processo contrario è proibito perché comporterebbe una diminuzione di entropia dell'universo.

Il fenomeno descritto è irreversibile; esso si può realizzare ponendo a contatto termico le sorgenti per il tempo necessario a scambiare il calore Q . Comunque sia, per definizione il processo di scambio di calore da parte di una sorgente è isoterma; per tale ragione abbiamo utilizzato (12.17) nel calcolo ΔS_1 e ΔS_2 , immaginando di compiere, per ciascuna sorgente, una trasformazione isoterma reversibile tra gli stessi stati iniziale e finale.

Esempio 12.3

Due sorgenti, una alla temperatura $T_2 = 380$ K e l'altra alla temperatura $T_1 = 280$ K, vengono messe in contatto termico tramite una lastra di alluminio, di area $S = 100$ cm² e spessore $d = 2.5$ cm. Calcolare, a regime, quanto calore passa in un secondo da una sorgente all'altra e la variazione di entropia dell'universo in un minuto.

Soluzione

Ricorriamo alla formula di Fourier per la trasmissione del calore per conduzione (paragrafo 10.9):

$$Q = kS \frac{\Delta T}{d} t = 201 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{10^{-2}}{2.5 \cdot 10^{-2}} \cdot 1 = 8040 \text{ J} \quad .$$

In un minuto passa il calore $Q' = 4.824 \cdot 10^5$ J e la variazione di entropia richiesta vale

$$\Delta S_u = \frac{Q'}{T_1} - \frac{Q'}{T_2} = 1722.9 - 1269.5 = 453.4 \text{ J/K} \quad .$$

L'entropia della lastra non varia, in quanto il calore assorbito è eguale, in modulo, al calore ceduto e la distribuzione di temperatura è costante nel tempo.

Visualizza Soluzione

Un passaggio di calore tra due sorgenti avviene anche quando tra di esse lavora una macchina, secondo la figura 12.16. La variazione di entropia del sistema macchina è nulla in un ciclo; l'ambiente è costituito dalle due sorgenti e la variazione complessiva di entropia è

$$\Delta S_u = \Delta S_{\text{amb}} = -\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} = -\left(\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2}\right) \quad . \quad (12.24)$$

Il segno meno è dovuto al fatto che con Q_1 e Q_2 intendiamo i calori scambiati dal sistema, mentre ora stiamo calcolando la variazione di entropia dell'ambiente, per il quale i calori hanno segno opposto. Dal teorema di Clausius

(12.10) vediamo che il termine tra parentesi è non positivo e quindi $\Delta S_u \geq 0$, come deve. Se la macchina è reversibile vale (12.12) e $\Delta S_u = 0$, altrimenti $\Delta S_u > 0$.

Il ragionamento resta valido se la macchina della figura 12.16 è frigorifera.

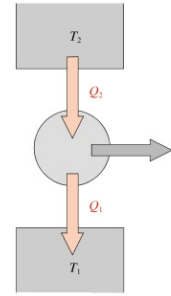


FIGURA 12.16

Esempio 12.4

Tra due sorgenti alle temperature $T_2 = 330$ K e $T_1 = 280$ K lavora una macchina termica: il lavoro $W = 100$ J prodotto in un ciclo viene utilizzato integralmente per fare compiere un ciclo tra le stesse temperature ad un frigorifero reversibile. In un ciclo completo delle due macchine la variazione di entropia dell'universo è $\Delta S_u = 0.28$ J/K. Calcolare il rendimento della macchina termica e i calori scambiati complessivamente con le sorgenti.

Soluzione

L'entropia dell'universo può cambiare solo durante il ciclo della prima macchina, poiché la seconda è reversibile. Chiamiamo Q_2 e Q_1 i calori scambiati dalla prima macchina e utilizziamo (12.24) e il primo principio:

$$\Delta S_u = -\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} = 0.28 \text{ J/K} \quad , \quad Q_1 + Q_2 = W = 100 \text{ J} \quad ,$$

da cui ricaviamo

$$Q_2 = 1177.4 \text{ J} \quad , \quad Q_1 = -1077.4 \text{ J} \quad , \quad \eta = \frac{W}{Q_2} = 0.085 \quad .$$

Invece il rendimento di una macchina reversibile che lavora tra le stesse sorgenti è

$$\eta_R = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 0.152 = 1 + \frac{Q_{1R}}{Q_{2R}} \quad .$$

Se questa macchina produce il lavoro $W = 100$ J, pari a $Q_{1R} + Q_{2R}$, si ha

$$Q_{2R} = 657.9 \text{ J} \quad , \quad Q_{1R} = -557.9 \text{ J} \quad .$$

Cambiati di segno, questi sono gli scambi energetici del frigorifero reversibile: assorbe $-Q_{1R} = 557.9$ J a T_1 , assorbe $-W = -100$ J e cede $-Q_{2R} = -657.9$ J a T_2 . Facendo il bilancio complessivo:

$$\begin{array}{ll} \text{calore assorbito a } T_2 & Q_2 - Q_{2R} = 1174.4 - 657.9 = 519.5 \text{ J} \\ \text{calore ceduto a } T_1 & Q_1 - Q_{1R} = -1077.4 + 557.9 = -519.5 \text{ J} \quad . \end{array}$$

Il risultato finale è il passaggio di 519.5 J dalla sorgente a 330 K a quella a 280 K. Se calcoliamo ΔS_u per questo processo diretto con la formula –

$Q/T_2 + Q/T_1$ troviamo ovviamente 0.28 J/K .

Visualizza Soluzione

Consideriamo adesso lo scambio di calore tra un corpo di massa m , calore specifico c costante, temperatura T_1 e una sorgente a temperatura T_2 , con cui il corpo viene messo a contatto termico.

Il processo è irreversibile (non c'è equilibrio termico); per il calcolo della variazione di entropia del corpo immaginiamo un processo reversibile con scambio di calore tra il corpo e infinite sorgenti a temperatura crescente $T_1 + dT$, $T_1 + 2 dT, \dots, T_2 - dT, T_2$. Con ciascuna sorgente viene scambiato il calore $dQ = mcdT$ e, da (12.14),

$$\Delta S_{\text{sist}} = S_2 - S_1 = \int_{T_1}^{T_2} mc \frac{dT}{T} = mc \ln \frac{T_2}{T_1} . \quad (12.25)$$

Se $T_1 < T_2$ il corpo assorbe calore dalla sorgente e la sua entropia aumenta; se $T_1 > T_2$ il corpo invece cede calore alla sorgente e la sua entropia diminuisce.

Il calore scambiato dal corpo è

$$Q = mc (T_2 - T_1)$$

e quindi il calore scambiato dalla sorgente è $-Q$. La variazione di entropia della sorgente è

$$\Delta S_{\text{amb}} = -\frac{Q}{T_2} = \frac{mc (T_1 - T_2)}{T_2} ;$$

essa è di segno opposto rispetto a ΔS_{sist} ed è diversa in modulo. La variazione di entropia dell'universo è data da

$$\Delta S_{\text{u}} = \Delta S_{\text{sist}} + \Delta S_{\text{amb}} = mc \ln \frac{T_2}{T_1} + \frac{mc (T_1 - T_2)}{T_2}$$

ed è facile verificare che essa è sempre positiva, sia per $T_2 > T_1$ che per $T_2 < T_1$. Per esempio, nel caso $T_2 > T_1$,

$$dS_{\text{sist}} = \frac{mcdT}{T} , \quad dS_{\text{amb}} = -\frac{mcdT}{T_2} ;$$

essendo sempre $T < T_2$ durante il processo, $dS_{\text{sist}} > |dS_{\text{amb}}|$ e la disuguaglianza si mantiene a integrazione effettuata:

$$\Delta S_{\text{sist}} = mc \ln \frac{T_2}{T_1} > \frac{mc |T_2 - T_1|}{T_2} = |\Delta S_{\text{amb}}| .$$

Quando $T_1 > T_2$, cambiano i segni delle variazioni di entropia ed è sempre T

$> T_2$, per cui $dS_{\text{amb}} > |dS_{\text{sist}}|$ e si ottiene di nuovo $\Delta S_u > 0$.

Con un ragionamento quasi identico si verifica, per il corpo, (12.21): infatti

$$\left(\frac{dQ}{T}\right)_{\text{rev}} = mc \frac{dT}{T} ,$$

mentre nel processo reale irreversibile la temperatura a cui avviene lo scambio di calore è la temperatura T_2 della sorgente per cui

$$\left(\frac{dQ}{T}\right)_{\text{irr}} = mc \frac{dT}{T_2} .$$

Quando $T_2 > T_1$, dT è positivo, T è minore di T_2 , dT/T è maggiore di dT/T_2 ; quando $T_2 < T_1$, dT è negativo, T è maggiore di T_2 e di nuovo dT/T è maggiore di dT/T_2 (in modulo è minore, ma si tratta di numeri negativi).

Scambi di calore tra due corpi

Un corpo di massa m_1 , calore specifico costante c_1 e temperatura T_1 , viene messo a contatto, in un recipiente isolato termicamente, con un altro corpo di massa m_2 , calore specifico c_2 e temperatura $T_2 > T_1$. Avviene uno scambio di calore irreversibile, considerata la differenza iniziale di temperatura tra i due corpi (irreversibilità termica), e i due corpi raggiungono l'*equilibrio termico* alla temperatura T_e data da

$$T_e = \frac{m_1 c_1 T_1 + m_2 c_2 T_2}{m_1 c_1 + m_2 c_2} ,$$

come si ricava eguagliando i moduli dei calori scambiati (vedi paragrafo 10.7). Per le variazioni di entropia dei due corpi utilizziamo (12.25):

$$\Delta S_1 = m_1 c_1 \ln \frac{T_e}{T_1} > 0 , \quad \Delta S_2 = m_2 c_2 \ln \frac{T_e}{T_2} < 0 .$$

L'intero processo è adiabatico (irreversibile) per cui $\Delta S_u = \Delta S_1 + \Delta S_2$ e si ha sempre $\Delta S_u > 0$.

Esempio 12.5

Due masse d'acqua, $m_2 = 100$ kg e $m_1 = 240$ kg, si trovano alle temperature $T_2 = 90^\circ\text{C}$ e $T_1 = 10^\circ\text{C}$. I recipienti che le contengono vengono posti in contatto termico tra loro e isolati dall'ambiente esterno. Calcolare la variazione di entropia. Ripartendo dalle stesse condizioni iniziali si fa lavorare tra le due masse una macchina termica reversibile finché viene raggiunto l'equilibrio termico. Calcolare la temperatura di equilibrio.

Soluzione

Nel primo caso $m_1 c (T_e - T_1) = -m_2 c (T_e - T_2)$ da cui risulta

$$T_e = 33.5^\circ\text{C} = 306.7 \text{ K} .$$

La variazione di entropia vale

$$\Delta S_u = \Delta S_{\text{sis}} = m_1 c \ln \frac{T_e}{T_1} + m_2 c \ln \frac{T_e}{T_2} = 9310 \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

ricordando che $c = 4186.8 \text{ J/kg K}$ (e che le temperature devono essere espresse in kelvin).

Nel secondo caso il processo è reversibile e quindi la variazione di entropia dell'universo è nulla:

$$\Delta S_u = 0 = m_1 c \ln \frac{T'_e}{T_1} + m_2 c \ln \frac{T'_e}{T_2} \Rightarrow T'_e = 304.8 \text{ K} = 31.6^\circ\text{C} .$$

È interessante notare come sia l'espressione matematica del secondo principio a fornire l'equazione risolutiva. È anche importante rendersi conto che in questo caso la macchina non lavora tra due sorgenti, ma tra due corpi con capacità termica finita la cui temperatura varia durante il processo. Il calore assorbito dalla macchina è $Q_A = m_2 c (T_2 - T'_e)$

MathType@MTEF@5@5@+= feaagKart1ev2aaatCvAUfeBSjuyZL2yd9gzLbvyNv2CaerbuLwBLn hiov2DGi1BTfMBaeXatLxBI9gBaerbd9wDYLwzYbItLDharqqtubsr 4rNCHbGeaGqiVuoJe9sqrpepCoxbbL8F4rqqrFfpeea0xe9Lq=Jc9 vqaqpepm0xbba9pwe9Q8fso=yqaqpepae9pg0FirpepeKkFroxfr=x fr=xb9adbaqaeeGaciGaaiaabeqaamaabaabaaGcbaGaamyuamaaBa aaleaacaWGbbaabeaakiabg2da9iaad2gadaWgaaWcbaGaaGOmaaqa baGccaWGJbWaaeWaaeaacaWGubWaaSbaaSqaiaaikdaaeqaaOGaey

OeIoIaamivamaaDaaaleaacaWGLbaabaGai4jaaaaaOGaayjkaiaa wMcaaaaa@4280@ quello ceduto è $Q_C = m_1 c (T_1 - T'_e)$

MathType@MTEF@5@5@+= feaagKart1ev2aaatCvAUfeBSjuyZL2yd9gzLbvyNv2CaerbuLwBLn hiov2DGi1BTfMBaeXatLxBI9gBaerbd9wDYLwzYbItLDharqqtubsr 4rNCHbGeaGqiVuoJe9sqrpepCoxbbL8F4rqqrFfpeea0xe9Lq=Jc9 vqaqpepm0xbba9pwe9Q8fso=yqaqpepae9pg0FirpepeKkFroxfr=x fr=xb9adbaqaeeGaciGaaiaabeqaamaabaabaaGcbaGaamyuamaaBa aaleaacaWGJbaabeaakiabg2da9iaad2gadaWgaaWcbaGaaGymaaqa baGccaWGJbWaaeWaaeaacaWGubWaaSbaaSqaiaaigdaaeqaaOGaey

OeIoIaamivamaaDaaaleaacaWGLbaabaGai4jaaaaaOGaayjkaiaa wMcaaaaa@42A0@ , il lavoro prodotto è $W = Q_A + Q_C$, il rendimento $\eta = W/Q_A$.

Visualizza Soluzione

Cambiamenti di fase

I cambiamenti di fase sono processi isotermi: mettendo insieme (12.17) e (10.18), la variazione di entropia di m chilogrammi di una sostanza che cambia fase alla temperatura T è

$$\Delta S = \frac{m\lambda}{T} . \tag{12.26}$$

Esempio 12.6

Un blocco di ghiaccio alla temperatura $T_1 = 0^\circ\text{C}$ viene posto a contatto, in un ambiente termicamente isolato, con un blocco di rame alla temperatura $T_2 = 100^\circ\text{C}$; ad equilibrio raggiunto si è sciolta una quantità m_x di ghiaccio. La capacità termica del blocco di rame è $C = 6 \cdot 10^3 \text{ J/K}$ e il calore latente di fusione del ghiaccio è $\lambda = 3.34 \cdot 10^5 \text{ J/kg}$. Calcolare il valore di m_x e la variazione di entropia dell'universo.

Soluzione

Dal testo si deduce che la temperatura di equilibrio è T_1 , in quanto non fonde tutto il ghiaccio. La massa che fonde si ricava da

$$m_x \lambda = C (T_2 - T_1) \Rightarrow m_x = 1.80 \text{ kg} .$$

La variazione di entropia del ghiaccio che cambia fase è, da (12.26),

$$\Delta S_g = \frac{m_x \lambda}{T_1} = \frac{C (T_2 - T_1)}{T_1} = 2197 \frac{\text{J}}{\text{K}} ,$$

mentre quella del blocco di rame si ricava da (12.25):

$$\Delta S_{\text{Cu}} = C \ln \frac{T_1}{T_2} = -1872 \frac{\text{J}}{\text{K}} .$$

Per l'universo $\Delta S_u = \Delta S_g + \Delta S_{\text{Cu}} = 325 \text{ J/K}$.

Visualizza Soluzione

Esempio 12.7

Una macchina termica lavora tra una massa d'acqua $m_2 = 10^6 \text{ kg}$ alla temperatura $T_2 = 10^\circ\text{C}$ e una massa di ghiaccio $m_1 = 0.2 \cdot 10^6 \text{ kg}$ alla temperatura $T_1 = 0^\circ\text{C}$. Calcolare il massimo lavoro ottenibile.

Soluzione

Il massimo lavoro si ha impiegando una macchina reversibile che assorbe calore dall'acqua e cede calore al ghiaccio facendolo fondere; nel processo la temperatura dell'acqua diminuisce e alla fine diventa T_1 . Infatti il calore che il ghiaccio può assorbire dall'acqua è

$$Q = m_2 c (T_2 - T_1) = 4.19 \cdot 10^{10} \text{ J} \quad (c = 4186.8 \text{ J/kg K}),$$

inferiore al calore che sarebbe necessario per fondere tutto il ghiaccio

$$m_1 \lambda = 6.69 \cdot 10^{10} \text{ J} \quad (\lambda = 3.34 \cdot 10^5 \text{ J/kg}) .$$

Essendo la macchina reversibile $\Delta S_u = 0$, ovvero, essendo $\Delta S_{\text{sist}} = 0$,

$$\Delta S_{\text{amb}} = \Delta S_a + \Delta S_g = m_2 c \ln \frac{T_1}{T_2} + \frac{Q_0}{T_1} = 0$$

dove Q_0 è il calore assorbito dal ghiaccio, che risulta pari a $4.11 \cdot 10^{10}$ J. La macchina pertanto assorbe Q , cede $-Q_0$ e compie il lavoro

$$W = Q - Q_0 = 8 \cdot 10^8 \text{ J} \quad ,$$

con rendimento $\eta = W/Q = 0.019$. Se la temperatura dell'acqua restasse costante durante il processo, il rendimento sarebbe

$$\eta = 1 - \frac{273.15}{283.15} = 0.035 \quad .$$

Visualizza Soluzione

Riscaldamento per attrito

Riprendiamo dal paragrafo 10.6 l'esempio del corpo il cui moto viene frenato da una forza di attrito. Il lavoro dissipativo W è eguale all'opposto della variazione di energia interna del corpo e del sistema che esercita la forza di attrito, secondo (10.2): $W = U_A - U_B$ e, siccome il lavoro è negativo, l'energia interna aumenta ($U_B > U_A$) e aumenta la temperatura da T_{amb} a T . Successivamente viene ceduto calore all'ambiente, $Q = U_A - U_B = W$ e la temperatura dei corpi che hanno partecipato al fenomeno ritorna al valore iniziale T_{amb} , così come U ritorna da U_B a U_A .

In definitiva i corpi hanno subito una trasformazione ciclica: la loro entropia è aumentata durante il riscaldamento ed è calcolabile con formule tipo (12.25), immaginando una cessione di calore reversibile al posto del processo reale adiabatico irreversibile; però durante la cessione di calore all'ambiente l'entropia dei corpi diminuisce e alla fine l'unica variazione di entropia diversa da zero è quella dell'ambiente, che riceve il calore $-Q$ (si ricordi che Q è negativo, in quanto è il calore ceduto dal corpo):

$$\Delta S_{\text{amb}} = -\frac{Q}{T_{\text{amb}}} = -\frac{W}{T_{\text{amb}}} = \Delta S_u > 0 \quad .$$

Quello descritto è solo un caso particolare; è possibile mantenere costante la velocità del corpo con la fornitura di lavoro motore che bilanci il lavoro resistente (equilibrio dinamico nel moto uniforme reale) e ciò comporta una cessione continua di calore all'ambiente. Oppure si può considerare il caso dell'innalzamento stabile di temperatura di un corpo in quiete in cui si raggiunge un equilibrio energetico nel senso che il calore ceduto dal corpo all'ambiente è compensato dall'energia fornita al corpo attraverso fenomeni di attrito. In ogni situazione si verifica sempre $\Delta S_u > 0$, segnale dell'irreversibilità di questi processi.

12.9 Entropia del gas ideale

Consideriamo n moli di gas ideale che passano dallo stato A (p_A, V_A, T_A) allo stato B (p_B, V_B, T_B). Il calore scambiato nella trasformazione si esprime attraverso il primo principio (11.18):

$$dQ = nc_v dT + dW .$$

Per il calcolo della variazione di entropia dobbiamo utilizzare una trasformazione AB reversibile e questo ci permette di servirci delle relazioni

$$dW = p dV , \quad pV = nRT \Rightarrow dW = nRT \frac{dV}{V} .$$

Pertanto

$$S_B - S_A = \int_A^B \left(\frac{dQ}{T} \right)_{\text{rev}} = \int_A^B nc_v \frac{dT}{T} + \int_A^B nR \frac{dV}{V} .$$

Integrando si ottiene la prima delle (12.27); alle successive si passa tramite l'equazione di stato e la relazione di Mayer:

$$\begin{aligned} S_B - S_A &= nc_v \ln \frac{T_B}{T_A} + nR \ln \frac{V_B}{V_A} , \\ S_B - S_A &= nc_v \ln \frac{p_B}{p_A} + nc_p \ln \frac{V_B}{V_A} , \\ S_B - S_A &= nc_p \ln \frac{T_B}{T_A} - nR \ln \frac{p_B}{p_A} . \end{aligned} \quad (12.27) ,$$

Le (12.27) si possono scrivere anche in forma più compatta:

$$\begin{aligned} S_B - S_A &= nc_v \ln \frac{T_B V_B^{\gamma-1}}{T_A V_A^{\gamma-1}} , \\ S_B - S_A &= nc_v \ln \frac{p_B V_B^\gamma}{p_A V_A^\gamma} , \\ S_B - S_A &= nc_p \ln \frac{T_B p_B^{(1-\gamma)/\gamma}}{T_A p_A^{(1-\gamma)/\gamma}} . \end{aligned} \quad (12.28)$$

Dati gli stati iniziale e finale, la variazione di entropia di un gas ideale si può dunque scrivere utilizzando una qualsiasi delle espressioni viste, indipendentemente dalla trasformazione AB realmente avvenuta; si vede che in generale *la variazione di entropia dipende da due coordinate termodinamiche*.

Dalle espressioni generali (12.27) ricaviamo in particolare:

$$\begin{aligned}
\text{trasformazione isoterma} \quad S_B - S_A &= nR \ln \frac{V_B}{V_A} = -nR \ln \frac{P_B}{P_A} \quad , \\
\text{trasformazione isocora} \quad S_B - S_A &= nc_V \ln \frac{T_B}{T_A} = nc_V \ln \frac{P_B}{P_A} \quad , \\
\text{trasformazione isobara} \quad S_B - S_A &= nc_p \ln \frac{T_B}{T_A} = nc_p \ln \frac{V_B}{V_A} \quad ,
\end{aligned} \tag{12.29}$$

Si noti come nell'integrazione che porta alle (12.27) si sia assunto costante il calore specifico molare a volume costante (e la stessa assunzione è stata fatta nel paragrafo 12.8 per i calori specifici di corpi solidi o liquidi). Se questa ipotesi non è verificata si hanno formule particolari a seconda della dipendenza di c_V dalla temperatura, però la sostanza dei ragionamenti non cambia.

Esempio 12.8

n moli di gas ideale monoatomico compiono nel piano (p,V) il ciclo rappresentato nella figura 12.17a. Nel piano (T,S) il ciclo si trasforma come indicato nella figura 12.17b. Calcolare nelle due rappresentazioni il valore del lavoro compiuto dal sistema.

Soluzione

Nel piano (p,V) l'area racchiusa dal ciclo si calcola facilmente:

$$W = (p_A - p_D)(V_C - V_D) = nR(T_B - T_A) - nR(T_C - T_D) = nR[(T_B + T_D) - (T_A + T_C)] \quad .$$

Nel piano (T,S) il legame tra temperatura ed entropia è dato dalle (12.29), che scriviamo in forma infinitesima e poi integriamo esplicitando la temperatura:

$$\text{trasformazione isobara} \quad dS = nc_p \frac{dT}{T} \Rightarrow T = A e^{S/nc_p} \quad ,$$

$$\text{trasformazione isocora} \quad dS = nc_V \frac{dT}{T} \Rightarrow T = B e^{S/nc_V} \quad .$$

Si spiega così l'aspetto delle trasformazioni e si capisce perché la pendenza è maggiore per le isocore ($c_V < c_p$). Il lavoro complessivo è eguale al calore complessivo e quindi

$$W = \oint T dS = \int_A^B nc_p dT + \int_B^C nc_V dT + \int_C^D nc_p dT + \int_D^A nc_V dT = nc_p [(T_B - T_A) + (T_D - T_C)]$$

+ $nc_V[(T_C - T_B) + (T_A - T_D)] = n(c_p - c_V)[(T_B + T_D) - (T_A + T_C)]$, che, in base alla relazione di Mayer, è identica all'espressione precedente.

In generale, dalla definizione di calore specifico molare $c = \frac{1}{n} \frac{dQ}{dT}$,
 MathType@MTEF@5@5@+=

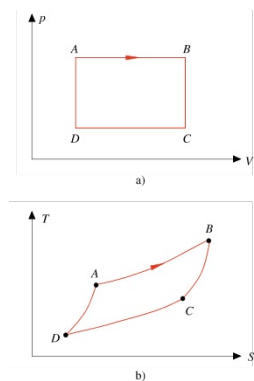


FIGURA 12.17
(Esempio 12.8)

feaagKart1ev2aaatCvAUfeBSjuyZL2yd9gzLbvyNv2CaerbuLwBLn
 hiov2DGi1BTfMBaeXatLxBI9gBaerbd9wDYLwzYbItLDharqqtubsr
 4rNCHbGeaGqiVuoJe9sqqrpepCoxbbL8F4rqqrFfpeeaOxe9Lq=Jc9
 vqaqppemoxbba9pwe9Q8fso=yqaqpepae9pgoFirpepeKkFroxfr=x
 fr=xb9adbaqaaeGaciGaaiaabeqaamaabaabaaGcbaGaam4yaiabg2
 da9maalaabaGaaGymaaqaaiaad6gaaaWaaSaaaeaacaWGKbGaamyu
 aaqaaiaadsgacaWGubaaiaacYcaaaa@3DE3@ , si ha per una
 trasformazione reversibile

$$c = \frac{1}{n} \frac{T dS}{dT} = \frac{T}{n} \frac{dS}{dT} = \frac{T}{n} \frac{1}{dT/dS} ,$$

relazione che esprime il legame tra il calore specifico e la pendenza della curva rappresentativa nel piano (T, S) . Se c non dipende dalla temperatura, si integra facilmente e si ritrova l'andamento esponenziale di T con S appena visto per le isobare e le isocore.

Visualizza Soluzione

Trasformazioni adiabatiche

Quando la trasformazione AB è adiabatica reversibile $S_B = S_A$; eguagliando a zero le (12.28) si ritrovano le equazioni (11.22).

Nel piano (p, V) le adiabatiche reversibili formano la famiglia di curve $pV^\gamma = \text{costante}$, mostrate nella figura 12.18; a ciascuna curva compete un *valore costante dell'entropia* e per questo tali curve sono chiamate anche *isoentropiche*.

Si verifica che $S_1 < S_2 < S_3 < \dots < S_i$. Infatti, per esempio, $S_3 - S_2$ si calcola con-giungendo con una qualsiasi trasformazione reversibile un generico punto della curva 2 con un generico punto della curva 3 (su una curva tutti i punti corrispondono a stati con la stessa entropia). Possiamo in particolare scegliere un'isocora per la quale, in base a (12.29),

$$S_3 - S_2 = nC_V \ln \frac{P_B}{P_A} \Rightarrow S_3 > S_2 \text{ poiché } P_B > P_A .$$

Una speciale adiabatica irreversibile è l'espansione libera, che è anche isoterma: da (12.29)

$$S_B - S_A = nR \ln \frac{V_B}{V_A}$$

e risulta $S_B > S_A$ essendo $V_B > V_A$: ciò è in accordo col fatto che nel caso specifico $\Delta S_{\text{sist}} = \Delta S_{\text{u}}$.

Trattiamo ora in generale le trasformazioni adiabatiche irreversibili di un gas ideale. Date n moli di gas nello stato A , tracciamo le curve corrispondenti a

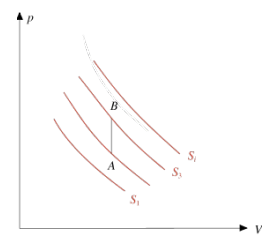


FIGURA 12.18

una isoterma reversibile e a una adiabatica reversibile passanti per A (figura 12.19). Una espansione adiabatica irreversibile che parte da A non può avere lo stato finale nella zona colorata al di sotto dell'isoentropica passante per A in quanto ciò comporterebbe una diminuzione di entropia, come discusso prima analizzando la figura 12.18, mentre deve essere $\Delta S > 0$. Inoltre la temperatura di tale stato finale è $\leq T_A$ perché durante un'espansione adiabatica un gas si raffredda sempre, a meno che non si tratti di un'espansione libera che è isoterma (a parità di volume finale il raffreddamento è sempre minore per una adiabatica irreversibile che per una adiabatica reversibile). Gli stati finali stanno quindi sotto l'isoterma (per il primo principio) e sopra l'isoentropica (per il secondo principio), nella zona indicata con un grigio intenso.

In una compressione adiabatica che parte da A lo stato finale deve sempre stare sopra l'isoentropica e deve avere volume minore di V_A : la zona a disposizione è quella indicata in grigio chiaro; a parità di volume finale, il riscaldamento è maggiore nell'adiabatica irreversibile che in quella reversibile.

Le leggi della termodinamica pongono quindi vincoli ben precisi agli stati finali accessibili da un dato stato iniziale tramite una trasformazione adiabatica irreversibile. Si osservi inoltre che quando si passa tramite un'adiabatica irreversibile da uno stato A a uno stato B , con S_B necessariamente maggiore di S_A , non è più possibile ritornare in A adiabaticamente, né in modo reversibile né in modo irreversibile, perché sarebbe in ogni caso $\Delta S < 0$ (tale osservazione è valida per qualsiasi sistema e non solo per il gas ideale, come del resto abbiamo già rilevato nel paragrafo 12.6).

Possiamo dire che una trasformazione adiabatica irreversibile presenta una *irreversibilità in senso stretto*, cioè non è proprio possibile tornare allo stato iniziale con lo stesso tipo di trasformazione. Questo non è il caso di altre trasformazioni irreversibili: l'intervento dell'ambiente con le sue variazioni di entropia rende possibile il ritorno allo stato iniziale con lo stesso tipo di trasformazione (ma non necessariamente attraverso gli stessi stati) senza violare il principio di aumento dell'entropia dell'universo termodinamico.

Concludiamo con un'ultima osservazione, anch'essa di carattere generale. Due stati scelti a caso di un sistema termodinamico non sono sempre collegabili con una trasformazione adiabatica reversibile o irreversibile; fissato lo stato iniziale ciò può avvenire solo per stati finali le cui coordinate termodinamiche soddisfano ben determinate condizioni, come si è visto. Con riferimento al primo principio ci rendiamo conto che la situazione $W = -\Delta U$ è molto particolare, nel senso che la maggior parte delle trasformazioni di un sistema termodinamico avvengono solo se c'è anche scambio di calore.

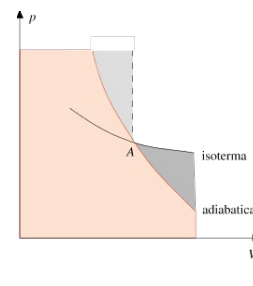


FIGURA 12.19

12.10 Energia inutilizzabile

Un fenomeno strettamente connesso con l'*irreversibilità dei processi naturali* e quindi con l'*aumento di entropia dell'universo* è la *degradazione dell'energia*, ovvero la *perdita di disponibilità di lavoro*.

Affrontiamo questo argomento discutendo prima alcuni esempi di processi che presentano irreversibilità meccanica o termica, che avvengono cioè in assenza di equilibrio meccanico o termico.

A. Espansione libera

Nell'espansione libera non c'è equilibrio meccanico; il gas non produce lavoro e non scambia calore, $W = Q = 0$, la sua temperatura resta costante, il suo volume aumenta. Abbiamo calcolato nel paragrafo 12.9 la variazione di entropia del gas, che coincide con quella dell'universo per l'adiabaticità del processo:

$$\Delta S_u = nR \ln \frac{V_B}{V_A} .$$

Potremmo collegare gli stati A e B con una trasformazione isoterma reversibile in cui il gas assorbe il calore Q alla temperatura T producendo il lavoro (11.23)

$$W_R = nRT \ln \frac{V_B}{V_A} = T \Delta S_u .$$

La differenza tra il lavoro che avremmo potuto ottenere operando in modo reversibile tra gli stessi stati e il lavoro effettivamente ottenuto è uguale al prodotto della variazione di entropia dell'universo nella trasformazione irreversibile reale per la temperatura costante a cui avviene l'espansione:

$$W_R - W = T \Delta S_u .$$

B. Passaggio di calore da una sorgente calda a una fredda.

Il processo che consideriamo caso tipico di irreversibilità termica consiste nel sottrarre il calore Q a una sorgente a temperatura T_2 e cederlo a una sorgente a temperatura $T_1 < T_2$. Il lavoro prodotto in corrispondenza del passaggio di calore è nullo, $W = 0$. Abbiamo calcolato nel paragrafo 12.8 che in questo processo

$$\Delta S_u = -\frac{Q}{T_2} + \frac{Q}{T_1} .$$

Se prelevassimo Q dalla sorgente calda con una macchina reversibile operante tra T_1 e T_2 , produrremmo il lavoro (12.6)

$$W_R = Q\eta_R = Q \left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right) = T_1 \Delta S_u ;$$

anche questa volta troviamo $W_R - W = T_1 \Delta S_u$ essendo T_1 la temperatura della sorgente fredda.

C. Macchina irreversibile che lavora tra due sorgenti.

La macchina assorbe Q_2 a temperatura T_2 , cede Q_1 a temperatura T_1 e produce il lavoro W , inferiore al lavoro W_R prodotto da una macchina reversibile che lavora tra le stesse sorgenti, a parità di calore assorbito:

$$W_R - W = Q_2 \left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right) - (Q_1 + Q_2) = T_1 \left(-\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2}\right) .$$

Il termine tra parentesi è la variazione (12.24) di entropia delle sorgenti durante un ciclo della macchina irreversibile e quindi

$$W_R - W = T_1 \Delta S_u .$$

Questi esempi sono casi particolari di una proprietà che può essere dimostrata in generale: *quando avviene un processo irreversibile in cui l'entropia dell'universo aumenta di ΔS_u , la grandezza*

$$E_{IN} = T_0 \Delta S_u \quad (12.30)$$

Energia inutilizzabile

è pari alla differenza tra il lavoro che si sarebbe potuto ottenere se il processo fosse stato reversibile e il lavoro effettivamente ottenuto; T_0 è la temperatura più bassa tra quelle delle sorgenti disponibili nell'ambiente.

E_{IN} viene chiamata *energia inutilizzabile*: non si tratta di energia persa, ma *sprecata*, in accordo col primo principio secondo cui l'energia viene convertita e non perduta.

Per chiarire il concetto, riprendiamo in considerazione l'esempio C. È stato assorbito il calore Q_2 che non viene utilizzato al massimo producendo W_R ; la parte che non si riesce a utilizzare viene ceduta alla sorgente a T_1 e diventa inutilizzabile. In effetti, posto

$$W_R = Q_2 + Q_{1R} = Q_2 - |Q_{1R}| , \quad W = Q_2 + Q_1 = Q_2 - |Q_1| ,$$

da $W_R > W$ risulta $|Q_1| > |Q_{1R}|$, il calore veramente ceduto è maggiore in modulo di quello minimo che si sarebbe potuto cedere, e

$$E_{IN} = W_R - W = |Q_1| - |Q_{1R}| .$$

L'energia inutilizzabile è proprio il calore in più ceduto a T_1 a causa dell'irreversibilità della macchina.

Se questa fosse reversibile, si potrebbe riutilizzare W_R per farla funzionare in ciclo inverso riassorbendo $-Q_{1R}$ a T_1 e cedendo $-Q_2$ a T_2 e l'universo non

subirebbe modifiche. Invece, avendo ceduto un calore Q_1 maggiore in modulo di Q_{1R} , il lavoro che occorre per riassorbire $-Q_1$, anche operando con un frigorifero reversibile tra T_1 e T_2 , è maggiore in modulo di W_R e la differenza che occorrerebbe in più è proprio E_{IN} : *l'universo ha subito una modifica e l'energia inutilizzabile ne è una misura.*

Quanto detto mostra E_{IN} sotto un altro aspetto: anche rianalizzando gli altri esempi discussi troviamo che *l'energia inutilizzabile è pari al lavoro supplementare che bisognerebbe spendere per riportare in modo reversibile il sistema complessivo nello stato iniziale.*

Esempio 12.9

Un corpo di massa $m = 5$ kg, avente inizialmente la velocità $v = 20$ m/s, viene frenato da una forza di attrito e si ferma. Per avere la stessa quantità di energia resa inutilizzabile quanto calore deve passare da una sorgente a $T_2 = 400$ K a una sorgente a $T_1 = 300$ K e quale deve essere il rapporto di espansione di una mole di gas ideale che si espande liberamente a $T = 300$ K?

Soluzione

L'energia inutilizzabile nel caso del corpo che si ferma è pari al modulo della variazione di energia cinetica ovvero a $\frac{1}{2}mv^2 = 10^3$ J. Nel passaggio di calore tra due sorgenti

$$E_{IN} = Q \left(1 - \frac{T_1}{T_2} \right) = Q \cdot 0.25 \Rightarrow Q = 4 \cdot 10^3 \text{ J} \quad .$$

Nell'espansione libera

$$E_{IN} = nRT \ln \frac{V_B}{V_A} \Rightarrow \frac{V_B}{V_A} = 1.493$$

Visualizza Soluzione

La pompa di calore

Una macchina reversibile che lavora tra T_1 e T_2 ha il rendimento

$$\eta_R = 1 - \frac{T_1}{T_2} = \frac{T_2 - T_1}{T_2} = \frac{\Delta T}{T_2} \quad .$$

Operando a temperatura ordinaria e con ΔT piccolo il rendimento è piccolo (qualche per cento): del calore assorbito Q_2 solo una minima percentuale $\eta_R Q_2$ viene trasformata in lavoro, la maggior parte $(1 - \eta_R) Q_2$ viene ceduta a T_1 , da cui può essere recuperata con un frigorifero reversibile.

Ponendo appunto l'attenzione sul ciclo inverso, Kelvin fece notare che con una modesta spesa di lavoro è possibile far passare notevoli calori da T_1 a T_2 ,

quando la differenza $T_2 - T_1$ è piccola. Questo è il concetto alla base delle *pompe di calore*.

Una macchina frigorifera reale presenta certamente fattori di irreversibilità, ma se anche l'efficienza effettiva fosse la metà di quella teorica il sistema sarebbe egualmente conveniente.

Per fissare le idee, consideriamo le temperature $T_1 = 277 \text{ K} = 4^\circ\text{C}$ e $T_2 = 295 \text{ K} = 22^\circ\text{C}$, tipiche rispettivamente di un ambiente freddo e di una casa riscaldata. Da (11.28) risulta un'efficienza teorica

$$\xi = \frac{Q_0}{|W|} = \frac{T_1}{T_2 - T_1} = 15.7 \Rightarrow |W| = 0.065 Q_0 \quad .$$

In modulo, il calore ceduto a T_2 è

$$|Q| = |W| + Q_0 = 1.065 Q_0 \Rightarrow \frac{|W|}{|Q|} = 0.061 = \eta_R \quad .$$

Se Q è il calore che bisogna fornire alla casa per compensare le perdite attraverso muri e finestre, utilizzando una pompa di calore possiamo ipotizzare una spesa di lavoro dell'ordine del 10% di Q , prelevando Q_0 da una sorgente fredda (per esempio l'acqua di un fiume o di un lago).

Con un sistema di riscaldamento convenzionale l'energia da spendere è almeno pari a Q ; la pompa di calore consentirebbe un risparmio di circa il 90%.

Ragionando in termini di energia inutilizzabile, lo spreco è piccolo rispetto ai calori in gioco: assumendo un'efficienza pari alla metà di quella teorica, è pur sempre $E_{\text{IN}}/Q \cong 0.06$, mentre nel caso convenzionale $E_{\text{IN}} = Q$, tutta l'energia in gioco è inutilizzabile.

Nella pratica, essendo costruzione e gestione non banali, la pompa di calore è risultata economicamente conveniente per grossi impianti; vi è però un notevole interesse per l'estensione a piccole utenze.

12.11 Conclusioni termodinamiche sull'entropia

Le leggi della termodinamica introducono la definizione di particolari grandezze fisiche legate allo stato di un sistema:

principio dell'equilibrio termico \Rightarrow	temperatura
primo principio \Rightarrow	energia interna
secondo principio \Rightarrow	entropia

Le proprietà di temperatura ed energia interna sono state ampiamente discusse e anche il loro significato fisico appare chiaro, soprattutto dopo lo studio della teoria cinetica dei gas che, pur se riferita a un particolare sistema, porta a considerazioni di carattere microscopico estendibili almeno in parte ad altri sistemi.

Sofferamoci adesso sull'entropia per riassumere gli aspetti macroscopici, rinviando al paragrafo 12.12 una discussione sul suo significato microscopico.

In quanto funzione di stato l'entropia in generale cambia al variare delle coordinate termodinamiche del sistema. Non bisogna quindi associare la variazione di entropia esclusivamente a scambi di calore: abbiamo visto che essa varia anche in una trasformazione adiabatica irreversibile. La (12.14) fissa il metodo di calcolo e ci dice che solo nelle trasformazioni reversibili ΔS è sempre conseguenza di uno scambio di calore.

Quando si passa a considerare un universo termodinamico che descrive trasformazioni reali, l'entropia complessiva cresce sempre. *L'aumento di entropia dell'universo è il segnale dell'irreversibilità*, ovvero di una modifica permanente dell'universo: una volta che ΔS_u si è verificata, non è più possibile tornare a uno stato entropico precedente; è questo il significato più profondo dell'irreversibilità.

Le impossibilità enunciate con il secondo principio trovano nella variazione di entropia dell'universo la loro espressione quantitativa. Inoltre ΔS_u ha anche una implicazione energetica: l'energia che l'irreversibilità dei processi costringe a sprecare è proporzionale a ΔS_u secondo (12.30); quindi maggiore è ΔS_u , cioè più lontana la trasformazione da un possibile equilibrio, maggiore è lo spreco di energia.

La trasformazione reversibile di un sistema da uno stato A a uno stato B rappresenta lo svolgimento ottimale di un processo, in quanto $\Delta S_u = 0$. Nel fenomeno reale, anche se gli stati iniziale e finale del sistema sono gli stessi, sono differenti le situazioni fisiche all'interno del sistema e tra sistema e ambiente, per cui l'universo reale è diverso da quello ideale: in un certo senso ΔS_u misura questa differenza di comportamento.

12.12 Entropia e probabilità

Uno stato termodinamico è individuato dai valori delle coordinate termodinamiche; tuttavia esso può corrispondere a un numero molto grande di distribuzioni diverse della posizione e della velocità dei singoli elementi che lo compongono, come abbiamo già detto nel paragrafo 10.1. Ad esempio, ai fini della pressione esercitata da un gas su una parete, è indifferente che l'urto sulla parete avvenga da parte di una molecola o di un'altra, purché con la stessa velocità: le due configurazioni microscopiche sono diverse, lo stato termodinamico è lo stesso.

Possiamo pertanto affermare che *uno stato termodinamico corrisponde a N stati dinamici*: N è un numero molto grande che viene anche indicato con il nome di *probabilità termodinamica*. Si ammette che sia più probabile uno stato termodinamico a cui corrisponde un maggior numero di stati dinamici e che un sistema tenda a evolvere naturalmente verso stati più probabili.

Probabilità
termodinamica

Appare allora evidente che deve esistere un legame tra entropia e probabilità termodinamica. Tale relazione è stata enunciata per la prima volta da Boltzmann:

$$S = k_B \ln N + \text{costante} , \quad (12.31)$$

dove k_B è la costante di Boltzmann (11.8).

Il legame logaritmico si spiega intuitivamente tenendo conto che la probabilità è una grandezza moltiplicativa mentre l'entropia è additiva. Se un sistema si trova in uno stato a caratterizzato da un valore S_a dell'entropia e da una probabilità termodinamica N_a e un altro sistema in uno stato b caratterizzato da S_b e N_b , l'insieme dei due ha entropia $S_a + S_b$ e probabilità termodinamica $N_a N_b$. Se c'è una relazione tra probabilità ed entropia, deve essere tale da trasformare un prodotto in una somma: la funzione logaritmo ha questa proprietà.

Un esempio classico sul numero di stati dinamici corrispondenti a un certo stato termodinamico è quello che considera n particelle distinguibili suddivise in due scatole eguali. Nella tabella 12.1 indichiamo per alcuni piccoli valori di n i vari stati termodinamici differenti tra loro sulla base di quante particelle stanno a sinistra e quante a destra; N è il numero di stati dinamici corrispondenti a una certa partizione, cioè il numero di modi per realizzare questa partizione. Si vede che se n è il numero di particelle, $n + 1$ è il numero di stati termodinamici e 2^n il numero totale di stati dinamici.

Tabella 12.1

$n = 2$			$n = 6$			$n = 10$		
sinistra	destra	N	sinistra	destra	N	sinistra	destra	N
0	2	1	0	6	1	0	10	1
1	1	2	1	5	6	1	9	10
2	0	1	2	4	15	2	8	45
			3	3	20	3	7	120
			4	2	15	4	6	210
			5	1	6	5	5	252
			6	0	1	6	4	210
						7	3	120
						8	2	45
						9	1	10
						10	0	1

Il numero di stati dinamici corrispondenti a uno stato termodinamico con m particelle a destra e $n - m$ a sinistra è dato dalla formula di calcolo combinatorio

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

che rappresenta il numero di combinazioni distinte di n oggetti a gruppi di m . Per esempio, la ripartizione di 6 particelle con 2 in una scatola si può fare in $N = 15$ modi diversi:

$$N = \binom{6}{2} = \frac{6!}{2!4!} = \frac{5 \cdot 6}{2} = 15 \quad .$$

N è massimo quando il numero di particelle è eguale nelle due scatole: *lo stato più probabile corrisponde all'equipartizione.*

Se con 6 particelle il rapporto tra la probabilità di una distribuzione uniforme e quella con una sola particella a destra (o a sinistra) è pari a $20/6$, con 10 particelle sale a $252/10$. Passando a 10^2 , 10^3 , ... particelle i rapporti di probabilità crescono molto rapidamente. L'esempio si presta molto bene per spiegare la ripartizione di un gas tra due contenitori comunicanti: se il numero di molecole fosse piccolo si potrebbero osservare fluttuazioni di densità nei contenitori, ma con un numero di molecole che è dell'ordine del numero di Avogadro si osservano solo stati assai prossimi all'equilibrio. Gli stati lontani da quelli più probabili non sono impossibili, ma sono talmente improbabili che non riusciremo mai ad osservarli. Concludiamo che non solo il gas non si concentrerà mai spontaneamente in un solo contenitore, ma che nemmeno piccolissime variazioni di densità nei due contenitori saranno osservate.

Un gas che compie un'espansione libera si trova inizialmente nelle condizioni della prima riga della tabella 12.1; alla fine della trasformazione lo troviamo equipartito tra i due contenitori. Il sistema è isolato e la sua entropia è aumentata; d'altra parte la probabilità termodinamica ha raggiunto il massimo valore possibile. La situazione è in realtà più complessa: anche nello stato termodinamico iniziale il numero di stati dinamici è enorme, perché le molecole

non sono ferme; tuttavia nell'espansione gli stati dinamici aumentano: infatti la temperatura, e quindi l'energia cinetica media del moto molecolare, restano costanti, però aumenta il volume e quindi aumentano le configurazioni geometriche possibili, a parità di distribuzione delle velocità.

Analogamente, un gas ideale che compie una generica espansione adiabatica irreversibile si raffredda, ma si espande e la probabilità termodinamica aumenta: l'aumento di volume predomina sulla diminuzione di temperatura; invece nella compressione adiabatica irreversibile è l'aumento di temperatura ad essere più importante della diminuzione di volume, dal punto di vista del numero di stati dinamici disponibili (i due effetti si equivalgono soltanto se la trasformazione adiabatica è reversibile).

Passiamo a considerare un sistema gassoso non isolato, per esempio un gas che compie una trasformazione isocora: l'entropia del gas può aumentare o diminuire a seconda che venga ceduto o sottratto calore. In corrispondenza la probabilità termodinamica aumenta o diminuisce perché, pur restando costante il volume, cambia la velocità media molecolare con la temperatura.

Accenniamo infine a una sostanza che cambia fase. Premettiamo che in un cambiamento di fase si ha un mutamento della struttura interna: da un solido spazialmente ordinato si passa a un liquido che, pur presentando un certo ordine su piccole distanze, è spazialmente disordinato e a un gas che è completamente disordinato e in cui ogni molecola ha a disposizione un volume notevole (circa 1000 volte maggiore che nel liquido, se guardiamo il rapporto delle densità). Il numero di stati dinamici aumenta in corrispondenza. Anche l'entropia aumenta: per far passare una sostanza dalla fase solida alla fase liquida occorre fornire una certa quantità di calore per unità di massa e ΔS è dato da (12.16); altrettanto succede nella evaporazione e nella sublimazione. Nei processi inversi l'entropia della sostanza diminuisce e diminuisce la probabilità termodinamica.

Vediamo ora due applicazioni numeriche di (12.31), per renderci conto dell'entità delle variazioni di probabilità termodinamica associate a semplici processi, già considerati per quanto riguarda la variazione di entropia.

Esempio 12.10

Il calore $Q = 1$ J passa da una sorgente a $T_2 = 301$ K ad una sorgente a $T_1 = 300$ K. Calcolare il rapporto tra la probabilità termodinamica dello stato finale e quella dello stato iniziale.

Soluzione

Sappiamo che la variazione di entropia del processo è

$$\Delta S_u = -\frac{Q}{T_2} + \frac{Q}{T_1} \cong 10^{-5} \frac{\text{J}}{\text{K}} .$$

Scriviamo questa stessa variazione di entropia come

$$\Delta S_u = (k_B \ln N_{\text{fin}} + \text{costante}) - (k_B \ln N_{\text{in}} + \text{costante}) = k_B \ln \frac{N_{\text{fin}}}{N_{\text{in}}}$$

$$\Rightarrow \ln \frac{N_{\text{fin}}}{N_{\text{in}}} = \frac{\Delta S_u}{k_B} \cong 10^{18} \quad , \quad \frac{N_{\text{fin}}}{N_{\text{in}}} \cong e^{10^{18}} :$$

tale è il rapporto cercato. L'osservazione del processo inverso, cioè passaggio spontaneo di calore da 300 K a 301 K è estremamente improbabile.

Visualizza Soluzione

Esempio 12.11

Una mole di gas ideale, contenuta in un recipiente di volume V , si espande liberamente fino ad occupare il volume $2V$. Calcolare il rapporto $N_{\text{fin}}/N_{\text{in}}$.

Soluzione

Si procede come nell'esempio 12.10. Da una parte

$$\Delta S_u = nR \ln \frac{2V}{V} = 5.76 \text{ J/K} \quad ,$$

dall'altra, secondo (12.31),

$$\Delta S_u = k_B \ln \frac{N_{\text{fin}}}{N_{\text{in}}} \Rightarrow \frac{N_{\text{fin}}}{N_{\text{in}}} = e^{4.2 \cdot 10^{23}} \quad .$$

Di nuovo si constata come sia estremamente improbabile il processo inverso e cioè che il gas passi spontaneamente dal volume $2V$ al volume V .

Visualizza Soluzione

La relazione di Boltzmann, che costituisce il collegamento tra la termodinamica macroscopica e la trattazione statistica dei fenomeni termici, suggerisce che le impossibilità sancite dal secondo principio derivino da enormi differenze di probabilità. Da questo punto di vista potremmo correttamente utilizzare il termine *estremamente improbabile al posto di impossibile* per dare maggiore precisione concettuale agli enunciati del secondo principio (però la realtà sperimentale resta quella descritta).

La (12.31) lega l'aumento dell'entropia nell'evoluzione di un sistema isolato alla tendenza del sistema a occupare stati sempre più probabili. Spesso questo fatto viene brevemente riferito come tendenza di un sistema isolato dall'ordine al disordine; però è preferibile parlare di *tendenza verso stati termodinamici in cui è a disposizione il maggior numero di stati dinamici possibili*, il che non comporta necessariamente maggior disordine, a meno che non si intenda disordine come sinonimo di probabilità termodinamica.

Prendiamo per esempio in esame il seguente processo: un blocco di ghiaccio

alla temperatura di fusione $T_0 = 273.15$ K si trova dentro un contenitore adiabatico e su di esso viene versata una piccola massa m d'acqua a temperatura $T_0 + \Delta T$, con ΔT piccolo. L'acqua cede al ghiaccio il calore $-Q = -mc\Delta T$ portandosi a T_0 , una massa $m_g = Q/\lambda$ di ghiaccio fonde e alla fine abbiamo acqua e ghiaccio in equilibrio a T_0 . La variazione di entropia dell'universo è

$$\Delta S_u = \Delta S_a + \Delta S_g = mc \ln \frac{T_0}{T_0 + \Delta T} + \frac{mc\Delta T}{T_0} = mc \ln \frac{T_0}{T_0 + \Delta T} + \frac{m_g \lambda}{T_0}$$

ed è positiva. Con $m = 0.1$ kg e $\Delta T = 10$ K risulta $m_g = 12.5 \cdot 10^{-3}$ kg, $\Delta S_a = -15.05$ J/K, $\Delta S_g = 15.33$ J/K, $\Delta S_u = 0.28$ J/K.

Inizialmente avevamo acqua a $T_0 + \Delta T$ e ghiaccio a T_0 , alla fine c'è un po' più d'acqua a T_0 e un po' meno ghiaccio a T_0 . Il numero di stati dinamici dell'acqua iniziale è diminuito perché è scesa la sua temperatura, però nella fusione del ghiaccio la massa m_g è passata in uno stato con maggiore probabilità termodinamica: l'aumento ΔS_u ci dice che il numero di stati dinamici è complessivamente aumentato, malgrado la temperatura di una parte del sistema sia diminuita e, per certi versi, il sistema finale sembra più ordinato di quello iniziale.

A maggior ragione potremmo avere dubbi sul passaggio ordine-disordine se la temperatura iniziale del ghiaccio fosse stata $T < T_0$ e l'acqua fosse solidificata, per cui alla fine avremmo avuto ghiaccio a temperatura T' compresa tra T e T_0 , con un aumento di entropia.

Se però il concetto di maggior disordine a cui porterebbe un aumento di entropia dell'universo non viene legato, come intuitivamente si potrebbe pensare, al valor medio dell'energia molecolare, ma più in generale al numero di configurazioni dinamiche accessibili, che non dipende soltanto dalle velocità, la questione si risolve. In questo senso la (12.31) ci dà anche la corretta definizione di disordine molecolare.

La discussione su entropia e probabilità termodinamica porta alla conclusione che il secondo principio, e il principio di aumento dell'entropia che ad esso equivale, hanno origine dalla stessa composizione atomica della materia e dal fatto che gli atomi, o le molecole, sono in movimento continuo e incontrollabile. Attraverso gli urti eventuali differenze tendono a scomparire e un sistema isolato si porta verso stati in cui grandezze macroscopiche come temperatura e pressione sono uniformi, segno della completa casualità del moto molecolare. In questi stati più probabili il numero di stati dinamici corrispondenti è massimo e di conseguenza è massima la nostra ignoranza sul piano della conoscenza meccanica del moto molecolare.

La stessa irreversibilità meccanica o termica ha origine da questa situazione: una volta raggiunto l'equilibrio è praticamente impossibile, a causa del gran numero di molecole presenti e del loro moto completamente disordinato, che si

verifichino le condizioni per trasferire stabilmente energia da una parte del sistema ad un'altra, come sarebbe necessario per invertire una espansione libera o lo scambio di calore tra due corpi (da cui l'enunciato di Clausius). Si può anche intuire come, in tale contesto, sia praticamente impossibile anche la trasformazione integrale di calore in lavoro, ossia il passaggio completo da una forma di energia più disordinata a una meno disordinata (da cui l'enunciato di Kelvin-Planck).

12.13 Cenni sul terzo principio della termodinamica

Il terzo principio della termodinamica stabilisce che la variazione di entropia associata ad una trasformazione reversibile di un sistema tende a zero al tendere a zero della temperatura termodinamica assoluta (enunciato di Nernst-Simon). Tale enunciato si applica in particolare ad ogni trasformazione isoterma reversibile durante la quale una variabile di stato intensiva del sistema cambia.

Esso venne proposto, in forma leggermente diversa, da Nernst nel 1906 in conseguenza di una serie di risultati sperimentali. La sua base teorica moderna richiede una formulazione statistico-quantistica dell'entropia ed esula dalla termodinamica classica.

L'entropia di un sistema in un dato stato si può scrivere in generale

$$S(T, X) = S(0, X) + \int_0^T \left(\frac{dQ}{T} \right)_{\text{rev}}$$

dove X è una coordinata termodinamica, ad esempio la pressione o il volume, che nel passaggio da 0 a T viene mantenuta costante; $S(0, X)$ è una costante che rappresenta il valore dell'entropia del sistema per $T = 0$. È stata avanzata l'ipotesi che per T tendente a zero non solo le variazioni dell'entropia, ma anche l'entropia stessa tenda a zero, per cui la costante $S(0, X)$ sarebbe nulla per qualsiasi sistema termodinamico allo zero assoluto. In tale ipotesi l'entropia in un generico stato A si scrive

$$S_A = \int_0^{T_A} \left(\frac{dQ}{T} \right)_{\text{rev}} ;$$

inoltre anche la costante di (12.31) risulta nulla e quindi, da $S = 0$ per $T = 0$, segue $N = 1$: nello stato termodinamico di zero assoluto qualsiasi sistema avrebbe un solo stato dinamico.

In effetti l'ipotesi di nullità dell'entropia per $T = 0$, che appare corretta in moltissimi casi, è valida per quei sistemi che sono in grado di raggiungere uno stato di equilibrio termodinamico interno anche a bassissima temperatura. Esistono però dei sistemi, come ad esempio il vetro di silice e alcuni solidi molecolari (H_2 , N_2 , CO_2), che presentano un valore dell'entropia diverso da zero anche per $T = 0$.

Per quanto riguarda il vetro di silice tale risultato è conseguenza del fatto che a bassissime temperature la trasformazione del vetro a quarzo cristallino, dove le molecole di SiO_2 sono disposte ordinatamente (unico stato dinamico) è estremamente lenta ovvero improbabile. Il sistema mantiene lo stato amorfo, caratterizzato da un elevato numero di stati dinamici e pertanto $S(0, X)$ è maggiore di zero.

Nel caso dei solidi molecolari avviene che al di sotto di una certa temperatura la probabilità di rotazione delle molecole, che porterebbe ad uno stato finale caratterizzato dalla stessa orientazione di tutte le molecole (stato dinamico unico), è praticamente nulla; il sistema presenta molecole spazialmente ordinate, ma orientate completamente a caso e la sua entropia, anche per $T = 0$, è maggiore di zero.

Questi risultati, che contraddicono la validità generale dell'ipotesi $S(0) = 0$, non sono però in contrasto con l'enunciato del terzo principio.

Dal terzo principio segue il fatto che *i calori specifici devono tendere a zero al tendere a zero della temperatura*, risultato confermato sperimentalmente; così come è confermata un'altra deduzione, *la tendenza a zero per $T \rightarrow 0$ del coefficiente di dilatazione termica di ogni sostanza*.

Per quanto riguarda la proprietà dei calori specifici, osserviamo che il calore specifico molare è dato, nella forma generale, da

$$c_x = \frac{1}{n} \left(\frac{dQ}{dT} \right)_x = T \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_x = \left(\frac{\partial s}{\partial \ln T} \right)_x$$

dove X è la coordinata termodinamica che si mantiene costante ed $s = S/n$ l'entropia molare. Per $T \rightarrow 0$, $\ln T$ tende a meno infinito e ds , per il terzo principio, tende a zero. Pertanto c_X tende a zero. Ciò è confermato, come si è detto, sperimentalmente: a bassi valori di T , il calore specifico è proporzionale a T^3 per materiali non conduttori e a T per metalli.

La conseguenza forse più importante del terzo principio è l'impossibilità di raggiungere lo zero assoluto. Per $T \rightarrow 0$ la variazione di entropia associata ad una trasformazione isoterma reversibile tende a zero e quindi tende a zero il prodotto $T\Delta S$, che è il valore del calore scambiato. Pertanto, al tendere a zero della temperatura, diventa sempre più arduo sottrarre calore a un corpo. Il risultato che *con un numero finito di processi non è possibile raggiungere lo zero assoluto* viene assunto come enunciato del terzo principio della termodinamica, alternativo, ma equivalente a quello di Nernst-Simon.

Le leggi della termodinamica che abbiamo finora esposto, così come le definizioni delle grandezze termodinamiche, si applicano a qualsiasi sistema; in realtà, per esemplificarle e capirne il significato in applicazioni pratiche, ci siamo riferiti a trasformazioni in sistemi composti da una o più sostanze pure: un blocco di metallo, una massa di liquido e, soprattutto, un certo numero di moli di gas, quasi sempre ideale. Tali sistemi sono descrivibili tramite le coordinate termodinamiche p , V , T , legate tra loro da un'equazione di stato, caratteristica del sistema (si veda il paragrafo 10.2); essi sono chiamati *sistemi semplici* o *sistemi pVT*.

In questo capitolo esponiamo le proprietà generali dei sistemi pVT con lo scopo di arrivare ad espressioni delle variazioni di energia interna, entalpia ed entropia calcolabili a partire da opportuni parametri misurabili. Introduciamo anche altre funzioni di stato, che sono utili per la determinazione dell'equilibrio termodinamico in particolari condizioni.

13.1 Potenziali termodinamici

Dall'espressione infinitesima del primo principio (10.7) e da (12.21), scritta come $TdS \geq dQ$, abbiamo $dU + dW = dQ \leq TdS$ ovvero

$$dU + dW - TdS \leq 0 \quad . \quad (13.1)$$

Il segno di eguaglianza vale solo se la trasformazione è reversibile. Supponendo di poter esprimere il lavoro come pdV otteniamo

$$dU + pdV - TdS \leq 0 \quad . \quad (13.2)$$

Questa relazione costituisce la base per la definizione di alcune funzioni di stato, dette *potenziali termodinamici*, che sono utili in particolari trasformazioni per trovare le condizioni di equilibrio di un sistema. Tutte queste funzioni hanno la stessa unità di misura di lavoro e energia.

Entalpia libera

Consideriamo un sistema che compie una trasformazione da uno stato A a uno stato B tali da avere temperatura e pressione eguali tra loro ed eguali, per esempio, a quelle dell'ambiente. Durante la trasformazione T e p dell'ambiente restano costanti mentre i corrispondenti valori del sistema sono in generale diversi, se la trasformazione non è reversibile.

Da (13.2), se p e T sono costanti, abbiamo

$$d(U + pV - TS) \leq 0 \Rightarrow dG \leq 0 ;$$

potenziale di Gibbs

$$G = U + pV - TS \quad (13.3)$$

è una funzione di stato, detta *entalpia libera* o *potenziale di Gibbs*, che ha la proprietà di decrescere per una trasformazione tra stati con la stessa temperatura e pressione. Pertanto *lo stato di equilibrio termodinamico di un sistema in condizioni isoterme e isobare è quello in cui l'entalpia libera del sistema è minima*. È chiaro che le condizioni suddette si riferiscono allo stato iniziale e finale, ma per il calcolo di G non importa come si svolge la trasformazione perché G è funzione di stato; è lecito dunque supporre p e T sempre costanti, come abbiamo fatto per ricavare $G_B \leq G_A$.

Energia libera

Si ripete l'argomento precedente, però in condizioni isoterme e isocore, cioè temperatura e volume eguali negli stati iniziale e finale. In questo caso da (13.2) abbiamo

$$d(U - TS) \leq 0 \Rightarrow dF \leq 0 ;$$

Energia libera o
potenziale di
Helmholtz

$$F = U - TS \quad (13.4)$$

è detta *energia libera* o *potenziale di Helmholtz*. Il valore minimo dell'energia libera indica il raggiungimento dello stato di equilibrio termodinamico in condizioni isoterme e isocore.

Nel caso resti costante solo la temperatura dell'ambiente esterno e quindi del sistema nello stato iniziale e finale, da (13.1)

$$dW \leq TdS - dU = -dF ,$$

$$W \leq -\Delta F . \quad (13.5)$$

In queste condizioni isoterme il lavoro massimo ottenibile è eguale alla diminuzione di energia libera, se la trasformazione è reversibile; altrimenti $-\Delta F$ è il limite superiore.

Si verifica subito che per una trasformazione isoterma reversibile di un gas ideale ($\Delta U = 0$) risulta

$$W = -\Delta F = -\Delta(U - TS) = T\Delta S$$

e da (12.29) si ritrova (11.23). Da (13.5) impariamo che in una isoterma irreversibile di un gas ideale calore e lavoro scambiati sono necessariamente minori che nella reversibile avente gli stessi estremi.

Entalpia

Siano ora eguali, nello stato iniziale e finale, pressione ed entropia. Da (13.2)

$$d(U + pV) \leq 0 \Rightarrow dH \leq 0 ;$$

$$H = U + pV \quad (11.24)$$

è la funzione di stato *entalpia* già introdotta nel paragrafo 11.6. *Nei processi isobari e isoentropici lo stato di equilibrio termodinamico è quello di minima entalpia.* Da (13.3) e (11.24) abbiamo

$$G = H - TS \quad . \quad (13.6)$$

La principale proprietà dell'entalpia è che la sua variazione è eguale al calore scambiato in una trasformazione isobara, come già rilevato nel paragrafo 11.6. Infatti

$$dH = dU + pdV + Vdp \quad \text{e se } dp = 0 \quad dH = dU + pdV = dQ \quad .$$

Il risultato si applica alla maggior parte delle reazioni chimiche, che avvengono in contenitori aperti, sotto la pressione atmosferica. In una reazione chimica lo stato iniziale si riferisce ai reagenti, lo stato finale ai prodotti e abbiamo

$$\Delta H = H_{\text{prod}} - H_{\text{reag}} \quad ;$$

riprenderemo questo argomento più avanti, con vari esempi.

Anche i cambiamenti di fase avvengono a pressione costante e le variazioni di entalpia sono quindi eguali ai calori scambiati. Prendiamo come riferimento un processo di evaporazione, rappresentato dal tratto orizzontale di isoterma nella figura 11.24, a cui partecipano n moli di sostanza. Il calore latente è

$$\lambda = \frac{H_2 - H_1}{n} = h_2 - h_1 \quad ,$$

dove h è l'entalpia molare (nel seguito indicheremo con la lettera minuscola i valori molari delle varie funzioni di stato e delle variabili estensive); gli indici 1 e 2 si riferiscono alle due fasi.

La variazione di entropia è

$$S_2 - S_1 = \frac{n\lambda}{T} = \frac{n(h_2 - h_1)}{T} \Rightarrow s_2 - s_1 = \frac{\lambda}{T} = \frac{h_2 - h_1}{T} \quad .$$

Da questa e da (13.6)

$$h_1 - Ts_1 = h_2 - Ts_2 \Rightarrow g_1 = g_2 \quad ;$$

durante l'evaporazione (o la condensazione) l'entalpia libera molare resta costante. Il risultato è in accordo con la proprietà di G : durante la trasformazione p e T sono costanti e tutti gli stati sono di equilibrio, in essi G ha il suo valore minimo e non può cambiare.

Se consideriamo lo stesso cambiamento di fase a temperatura $T + dT$ e pressione $p + dp$, deve essere

$$g_1 + dg_1 = g_2 + dg_2 \Rightarrow dg_1 = dg_2 \quad .$$

Da (13.3) per una trasformazione infinitesima reversibile

$$dG = dU + pdV + Vdp - TdS - SdT = Vdp - SdT$$

perché $dU + pdV = TdS$. Quindi, sempre per mole,

$$v_1 dp - s_1 dT = v_2 dp - s_2 dT \Rightarrow \frac{dp}{dT} = \frac{s_2 - s_1}{v_2 - v_1} = \frac{\lambda}{T(v_2 - v_1)} .$$

Formula di Clapeyron

Abbiamo così ritrovato dalle proprietà dell'entalpia libera durante i cambiamenti di fase la formula di Clapeyron (11.31).

Per completezza, notiamo altri due risultati che si ottengono da (13.1). Se nello stato iniziale e stato finale entropia e volume hanno lo stesso valore, è $dU \leq 0$: in condizioni isoentropiche e isocore lo stato di equilibrio è individuato dal minimo dell'energia interna.

Se U e V sono costanti, con il che $dQ = 0$, cioè la trasformazione è adiabatica, $TdS \geq 0$ e ritroviamo il principio di aumento dell'entropia per i sistemi isolati, come deve essere avendo introdotto in partenza (12.21).

Riassumendo, l'introduzione dei potenziali termodinamici è utile nella ricerca degli stati di equilibrio termodinamico dei sistemi che compiono le trasformazioni descritte; si tratta di casi comuni visto che spesso una trasformazione naturale si svolge in contatto con l'ambiente che è a temperatura e pressione costanti.

Nell'evoluzione verso lo stato di equilibrio abbiamo individuato quali funzioni decrescono, indicando così il verso del fenomeno: precisamente

$$\begin{array}{l} F \\ H \\ G \end{array} \text{ decresce in condizioni di } \begin{array}{l} T \text{ e } V \\ S \text{ e } p \\ T \text{ e } p \end{array} \text{ costanti .}$$

La decrescita si arresta nello stato di equilibrio quando il potenziale termodinamico considerato ha raggiunto il valore minimo.

Osserviamo esplicitamente che le definizioni date sono sempre valide e che le variazioni dei potenziali termodinamici possono essere calcolate per qualsiasi trasformazione, non solo per quelle indicate, che sono soltanto più significative.

Il termine potenziale termodinamico viene usato per queste funzioni che servono a individuare gli stati di equilibrio di un sistema termodinamico in analogia con la terminologia meccanica: infatti la condizione di equilibrio stabile di un sistema meccanico corrisponde al valore minimo dell'energia potenziale.

Entalpia e reazioni chimiche

Abbiamo già notato che la maggior parte delle reazioni chimiche avviene in condizioni di pressione esterna costante, e pari alla pressione atmosferica, per cui il calore complessivamente scambiato dal sistema formato dai reagenti e dai prodotti di reazione, è eguale alla variazione di entalpia tra stato finale e iniziale:

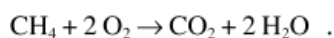
$$Q = \Delta H = H(\text{prodotti di reazione}) - H(\text{reagenti}).$$

Reazione esotermica

Quando il calore è ceduto all'ambiente ΔH è negativa e si parla di *reazione*

esotermica (caso tipico sono i processi di combustione), quando invece il calore è assorbito dal sistema ΔH è positiva e la reazione si dice *endotermica* (come ad esempio avviene nella scissione di un composto nei suoi componenti).

Il processo di combustione del metano in presenza di ossigeno porta alla produzione di anidride carbonica e vapor d'acqua:



Per ogni mole di metano che brucia (si tratta di 16 grammi) vengono ceduti all'ambiente $802 \cdot 10^3 \text{ J}$ sotto forma di calore e quindi $\Delta h = - 802 \cdot 10^3 \text{ J/mol}$; nella combustione di n moli di metano la variazione di entalpia è $n\Delta h$, essendo l'entalpia una grandezza estensiva. Se la reazione viene fatta avvenire in senso contrario, produzione di metano e ossigeno da anidride carbonica e vapor d'acqua, la variazione di entalpia è opposta, il processo è endotermico.

Quest'ultima proprietà discende dal fatto che l'entalpia è una funzione di stato; un'altra conseguenza molto importante è che *la variazione di entalpia in una reazione chimica non dipende da come avviene la reazione, cioè direttamente o per stadi intermedi, risultato noto anche come legge di Hess*. Ad esempio, se una reazione può avvenire direttamente dallo stato 1 allo stato 3 oppure con uno stadio intermedio, dallo stato 1 allo stato 2 e poi dallo stato 2 allo stato 3, abbiamo

$$\Delta H_{1,3} = \Delta H_{1,2} + \Delta H_{2,3} .$$

L'aspetto pratico di questa relazione è che può essere utilizzata come equazione in una incognita per calcolare una delle tre variazioni di entalpia, note le altre due, come chiariamo con l'esempio seguente.

Quando una mole di carbonio brucia producendo anidride carbonica $\Delta H_{1,3} = - 393.5 \cdot 10^3 \text{ J/mol}$, quando invece il risultato è ossido di carbonio, $\Delta H_{1,2} = - 110.5 \cdot 10^3 \text{ J/mol}$. Scriviamo questi processi:



Complessivamente al processo partecipano due moli di carbonio e due di ossigeno con la formazione di due moli di anidride carbonica, però in un caso avviene la formazione intermedia di ossido di carbonio. Dalla legge di Hess

$$- 2 \cdot 393.5 \cdot 10^3 = - 2 \cdot 110.5 \cdot 10^3 + \Delta H_{2,3} \Rightarrow \Delta H_{2,3} = - 566 \cdot 10^3 \text{ J} .$$

Abbiamo così ricavato il risultato che nella combustione di una mole di ossido di carbonio che porta a una mole di anidride carbonica vengono ceduti all'ambiente $283 \cdot 10^3 \text{ J}$, ovvero che per scindere l'anidride carbonica in ossido di carbonio e ossigeno occorre cedere al sistema $283 \cdot 10^3 \text{ J}$ per mole di CO_2 .

Nella reazione appena descritta si parte da due elementi, carbonio e ossigeno, e si forma il composto anidride carbonica; la variazione di entalpia, in

Reazione
endotermica

Legge di Hess

Calore di formazione

questo e nei casi analoghi, si chiama anche *entalpia* o *calore di formazione* (quindi per CO_2 l'entalpia di formazione è $-393.5 \cdot 10^3 \text{ J/mol}$). Si assume nulla per definizione l'entalpia di formazione degli elementi.

Il valore dell'entalpia di formazione in una reazione non dipende solo dalla reazione specifica, ma anche dalla temperatura e pressione a cui è stata realizzata. Ciò è conseguenza del fatto che lo stato di un sistema dipende dalle coordinate termodinamiche p e T e l'entalpia è una funzione di stato. Pertanto i valori ΔH di varie reazioni possono essere confrontati solo se misurati nelle medesime condizioni di temperatura e pressione. A tal fine sono state fissate alcune condizioni arbitrarie di temperatura e pressione, che sono definite come *condizioni standard*, cioè pressione atmosferica e temperatura di 298 K (= 25°C).

Tabella 13.1 Entalpie standard di formazione

Sostanza	ΔH (J/mol)	Sostanza	ΔH (J/mol)
AgCl (s)	$-127.00 \cdot 10^3$	HNO ₃ (l)	$-173.20 \cdot 10^3$
Al ₂ O ₃ (s)	$-166.98 \cdot 10^4$	H ₂ SO ₄ (l)	$-811.32 \cdot 10^3$
CO (g)	$-110.50 \cdot 10^3$	KCl (s)	$-435.89 \cdot 10^3$
CO ₂ (g)	$-393.50 \cdot 10^3$	NH ₃ (g)	$-461.90 \cdot 10^2$
CH ₄ (g)	$-748.48 \cdot 10^2$	NO (g)	$903.70 \cdot 10^2$
C ₂ H ₂ (g)	$226.75 \cdot 10^3$	NO ₂ (g)	$338.00 \cdot 10^2$
C ₂ H ₄ (g)	$522.84 \cdot 10^2$	N ₂ O (g)	$816.00 \cdot 10^2$
CaCO ₃ (s)	$-120.71 \cdot 10^4$	NaCl (s)	$-411.00 \cdot 10^3$
CaCl ₂ (s)	$-795.00 \cdot 10^3$	NaOH (s)	$-426.80 \cdot 10^3$
CaO (s)	$-635.50 \cdot 10^3$	Na ₂ SO ₄ (s)	$-138.45 \cdot 10^4$
Cr ₂ O ₃ (s)	$-113.97 \cdot 10^4$	PbO (s)	$-219.20 \cdot 10^3$
FeO (s)	$-271.90 \cdot 10^3$	SO ₂ (g)	$-296.90 \cdot 10^3$
Fe ₂ O ₃ (s)	$-822.20 \cdot 10^3$	SO ₃ (g)	$-395.20 \cdot 10^3$
H ₂ O (g)	$-241.80 \cdot 10^3$	SiCl ₄ (l)	$-640.10 \cdot 10^3$
H ₂ O (l)	$-285.90 \cdot 10^3$	SiO ₂ (s)	$-910.90 \cdot 10^3$
HCl (g)	$-923.00 \cdot 10^2$	ZnO (s)	$-348.00 \cdot 10^3$

Le entalpie di formazione degli elementi come ad esempio Ag (s), Al (s), C (s, *grafite*), Ca (s), Cl₂ (g), Cr (s), Fe (s), H₂ (g), K (s), N₂ (g), Na (s), O₂ (g), Pb (s), S (s), Si (s), Zn (s) sono nulle.

Le lettere *s*, *l*, *g* stanno per solido, liquido, gas.

In tabella 13.1 riportiamo le entalpie di formazione per alcuni composti; ne illustriamo l'uso con un esempio. Nella reazione in cui il carbonato di calcio dà ossido di calcio e anidride carbonica,



le entalpie di formazione sono, rispettivamente, $-1207 \cdot 10^3$, $-635.5 \cdot 10^3$, $-393.5 \cdot 10^3 \text{ J/mol}$. Pertanto l'entalpia di formazione dei prodotti di reazione è $-1029 \cdot 10^3 \text{ J}$. Nel passaggio dallo stato iniziale allo stato finale l'entalpia varia di

$$\Delta H = (-1029 \cdot 10^3) - (-1207 \cdot 10^3) = 178 \cdot 10^3 \text{ J} \quad .$$

La reazione è endotermica e avviene solo se viene ceduto dall'ambiente al

sistema il calore $178 \cdot 10^3 \text{ J/mol}$.

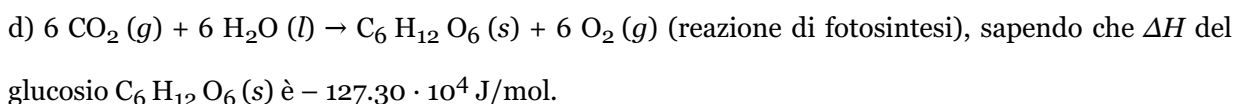
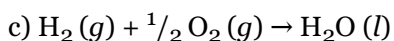
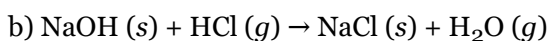
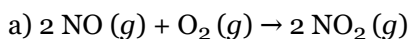
In generale dunque la variazione di entalpia in una reazione chimica può essere scritta

$$\Delta H = \sum_f H_f - \sum_i H_i ,$$

dove $\sum_f H_f$ indica la somma delle entalpie di formazione dei composti nello stato finale, cioè dei prodotti di reazione, e $\sum_i H_i$ la somma delle entalpie di formazione dei composti nello stato iniziale, cioè dei reagenti; se un reagente o un prodotto di reazione è un elemento la corrispondente entalpia di formazione si assume nulla, come detto.

Esempio 13.1

Si calcoli la variazione di entalpia per le seguenti reazioni:



a) Le entalpie di formazione per NO, O₂ e NO₂ sono rispettivamente 90.4, 0, 33.8 kJ/mol.

$$\Delta H = (2 \cdot 33.8 - 2 \cdot 90.4) \text{ kJ} = -112.2 \text{ kJ} .$$

In condizioni standard la reazione è esotermica.

b) Le entalpie di formazione per NaOH, HCl, NaCl e H₂O sono rispettivamente - 426.8, - 92.30, - 411.00, - 241.8 kJ/mol.

$$\Delta H = (-411.00 - 241.80) - (-426.80 - 92.30) \text{ kJ} = -133.70 \text{ kJ}.$$

In condizioni standard la reazione è esotermica.

c) Le entalpie di formazione per H₂, O₂ ed H₂O (l) sono rispettivamente 0, 0, - 285.9 kJ/mol.

$$\Delta H = -285.9 \text{ kJ} .$$

In condizioni standard la reazione è esotermica.

d) Le entalpie di formazione per CO₂, H₂O (l), C₆H₁₂O₆ e O₂ sono rispettivamente - 393.5, - 285.9, - 1273.0, 0 kJ/mol.

$$\Delta H = -1273 - (-6 \cdot 393.5 - 6 \cdot 285.9) \text{ kJ} = +2803.4 \text{ kJ}.$$

La reazione è endotermica con un elevato valore del calore di formazione per mole di glucosio. La grande quantità di energia richiesta è fornita dalla luce solare.

L'ultima relazione scritta è molto utile per determinare la variazione di entalpia globale se sono note le entalpie di formazione oppure per calcolare l'entalpia di formazione di un particolare composto se sono note le entalpie di formazione degli altri partecipanti alla reazione e la variazione globale di entalpia. In tutti questi calcoli bisogna prestare attenzione ai numeri di moli delle varie sostanze, cioè ai coefficienti che compaiono davanti ai simboli dei composti.

Osserviamo infine che abbiamo trattato qui per la prima volta un sistema la cui composizione non resta costante durante la trasformazione; lo stato iniziale è di equilibrio termodinamico (per questo basta immaginare separati i reagenti, ciascuno in equilibrio alla data temperatura e pressione) e lo stesso si può dire per lo stato finale, però la composizione del sistema è cambiata, pur restando la stessa la massa totale. Riprenderemo questo argomento da un punto di vista generale nel paragrafo 13.6.

13.2 Proprietà generali dei sistemi pVT

In un sistema pVT una grandezza termodinamica funzione di stato, come l'energia interna, l'entropia e i potenziali termodinamici, è funzione di una qualsiasi coppia delle variabili di stato p , V , T e può a sua volta essere considerata una coordinata termodinamica: abbiamo visto un esempio nei diagrammi TS del paragrafo 12.6.

All'equazione di stato scritta nella forma esplicita $V = V(p, T)$ si può applicare il teorema del differenziale totale (appendice A):

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T dp + \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p dT . \quad (13.7)$$

La lettera scritta accanto al simbolo di derivata parziale ricorda esplicitamente che la derivata è eseguita mantenendo costante quella variabile, ad esempio derivata del volume rispetto alla pressione mantenendo costante la temperatura.

I coefficienti della (13.7) sono legati a proprietà elastiche e termiche del sistema. Precisamente ricordiamo dal paragrafo 7.5 che si definisce *modulo di compressibilità isoterma* la grandezza β tale che

$$\frac{1}{\beta} = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T , \quad (7.8)$$

ovvero tale che il suo reciproco κ (*coefficiente di compressibilità isoterma*) dà il valore assoluto della variazione relativa del volume con la pressione a temperatura costante (a un aumento della pressione corrisponde sempre una diminuzione di volume, per cui β è sempre positiva).

Coefficiente di compressibilità isoterma

Inoltre abbiamo definito nel paragrafo 10.10 il *coefficiente di dilatazione cubica*

$$\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p , \quad (10.24)$$

Coefficiente di dilatazione cubica

che dà la variazione relativa di volume con la temperatura a pressione costante; α può essere sia positivo (nella maggior parte delle sostanze) che negativo, come avviene nell'acqua tra 0°C e 4°C (figura 10.16). Alcuni valori di α e β sono riportati rispettivamente nelle tabelle 10.9 e 7.4. Dalle definizioni (7.8) e (10.24) ricaviamo che

$$\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T = -\frac{V}{\beta} , \quad \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \alpha V \quad (13.8)$$

e quindi la (13.7) può essere scritta

$$dV = -\frac{V}{\beta} dp + \alpha V dT \quad (13.9)$$

Da questa si ottengono le relazioni

$$dp = -\frac{\beta}{V} dV + \alpha\beta dT \quad (13.10)$$

$$dT = \frac{1}{\alpha V} dV + \frac{1}{\alpha\beta} dp \quad (13.11)$$

e per i coefficienti abbiamo espressioni analoghe a (13.8):

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T = -\frac{\beta}{V} \quad , \quad \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \alpha\beta \quad (13.12)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p = \frac{1}{\alpha V} \quad , \quad \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V = \frac{1}{\alpha\beta} \quad (13.13)$$

In pratica bastano le due grandezze α e β per caratterizzare le relazioni tra le variazioni infinitesime di volume, pressione e temperatura. Sia α che β sono in generale funzioni delle coordinate termodinamiche, però nei solidi e nei liquidi la dipendenza è piuttosto debole per cui possono essere considerate costanti in intervalli non molto ampi di variabilità delle coordinate.

Assumendo α e β costanti la (13.9) può essere facilmente integrata con il risultato

$$V_B/V_A = e^{\alpha(T_B - T_A) - 1/\beta(p_B - p_A)}$$

se A e B sono gli stati iniziale e finale; similmente si possono integrare (13.10) e (13.11).

Ricordiamo infine, con riferimento alla figura 11.24, che al punto critico l'isoterma di un fluido reale presenta un flesso a tangente orizzontale e quindi $(\partial p / \partial V)_T = 0$. Ne segue che in un fluido al *punto critico*

$$\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = -\frac{(\partial p / \partial T)_V}{V(\partial p / \partial V)_T} = \infty \quad ,$$

$$\beta = \left[-\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T\right]^{-1} = -V \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T = 0 \quad ,$$

avendo usato i risultati dell'appendice A per le derivate parziali.

Esempio 13.2

Calcolare i valori di α e β in un gas ideale.

Soluzione

In un gas ideale $pV = nRT$ per cui

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \frac{nR}{p} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \frac{nR}{pV} = \frac{1}{T} \quad ,$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T = -\frac{nRT}{p^2} \Rightarrow \frac{1}{\beta} = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T = \frac{nRT}{p^2V} = \frac{1}{p} \quad .$$

Quindi $\alpha = 1/T$, $\beta = p$ (risultato già trovato nel paragrafo 7.5): le relative proprietà termiche ed elastiche sono determinate direttamente dalle coordinate termodinamiche temperatura e pressione. Pertanto i gas reali, sufficientemente lontani dal punto di liquefazione, hanno praticamente gli stessi coefficienti di dilatazione cubica e di compressibilità isoterma.

Visualizza Soluzione

Esempio 13.3

Una data massa di acqua (o mercurio o rame) si trova alla temperatura ambiente e alla pressione di 10^5 Pa (= 1 bar \approx 1 atm); essa viene riscaldata a volume costante facendo aumentare la temperatura di 1 K. Calcolare il corrispondente aumento di pressione.

Soluzione

A volume costante $dV = 0$ e da (13.10) si ha

$$dp = \alpha\beta dT \Rightarrow \Delta p = \alpha\beta\Delta T$$

assumendo α e β costanti. In base ai valori noti delle costanti abbiamo

acqua	$\Delta p = 1.8 \cdot 10^{-4} \cdot 2.1 \cdot 10^9 \Delta T = 3.8 \cdot 10^5 \Delta T$,
mercurio	$\Delta p = 1.8 \cdot 10^{-4} \cdot 2.8 \cdot 10^{10} \Delta T = 5.0 \cdot 10^6 \Delta T$,
rame	$\Delta p = 5.1 \cdot 10^{-5} \cdot 1.4 \cdot 10^{11} \Delta T = 7.1 \cdot 10^6 \Delta T$,

e, per un aumento di temperatura di 1 K, rispettivamente

$$\Delta p = 3.8 \text{ bar} \quad , \quad 50 \text{ bar} \quad , \quad 71 \text{ bar} \quad .$$

Questo è l'aumento di pressione sulle pareti del contenitore che mantiene costante il volume.

Visualizza Soluzione

Esempio 13.4

Consideriamo le stesse sostanze dell'esempio 13.3, che occupano a pressione atmosferica un volume $V = 10^{-3}$ m³, e sottoposte, in modo isoterma reversibile, a una variazione di pressione $\Delta p = 100$ bar = 10^7 Pa. Calcolare il lavoro fornito nel processo (si riveda l'esempio 8.1).

Soluzione

Essendo la trasformazione reversibile $dW = pdV$; inoltre da (13.9) se $dT = 0$ si ha $dV = -Vdp/\beta$. Pertanto

$$W = \int p dV = - \int \frac{V}{\beta} p dp \quad .$$

Assumiamo nel calcolo del lavoro costante β e trascurabile la variazione di V (considerati i grandi valori del modulo di compressibilità); allora

$$W = - \frac{V}{2\beta} (p_b^2 - p_a^2) \cong - \frac{V}{2\beta} p_b^2 \quad .$$

Il segno meno significa che il lavoro è fatto sul sistema. In modulo:

$$\text{acqua} \quad W = \frac{10^{-3}}{2.1 \cdot 10^9} \frac{10^{14}}{2} = 23.8 \text{ J} \quad ,$$

$$\text{mercurio} \quad W = \frac{10^{-3}}{2.8 \cdot 10^{10}} \frac{10^{14}}{2} = 1.8 \text{ J} \quad ,$$

$$\text{rame} \quad W = \frac{10^{-3}}{1.4 \cdot 10^{11}} \frac{10^{14}}{2} = 0.4 \text{ J} \quad ,$$

Le rispettive variazioni di volume ($\Delta V = V\Delta p / \beta$ in modulo) sono $4.8 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$, $3.6 \cdot 10^{-7} \text{ m}^3$, $0.8 \cdot 10^{-7} \text{ m}^3$, effettivamente molto piccole; l'ordine di grandezza di $\Delta V / V$ va da 10^{-3} a 10^{-4} .

Visualizza Soluzione

Esempio 13.5

Per un volume $V = 10^{-3} \text{ m}^3$ delle stesse sostanze degli esempi 13.3 e 13.4, a pressione atmosferica e temperatura ambiente, calcolare il lavoro in una trasformazione isobara in cui la temperatura aumenti di $\Delta T = 10 \text{ K}$.

Soluzione

In condizioni isobare $dp = 0$ e da (13.9) $dV = \alpha V dT$; quindi

$$W = \int p dV = \alpha V p \Delta T$$

assumendo α e V costanti per gli stessi motivi dell'esempio 13.4. Abbiamo:

$$\text{acqua} \quad W = 1.8 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-3} \cdot 10^5 \cdot 10 = 0.18 \text{ J} \quad ,$$

$$\text{mercurio} \quad \text{come per l'acqua} \quad ,$$

$$\text{rame} \quad W = 5.1 \cdot 10^{-5} \cdot 10^{-3} \cdot 10^5 \cdot 10 = 0.05 \text{ J} \quad .$$

Anche in questo caso le variazioni di volume sono molto piccole, rispettivamente $1.8 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$ (acqua e mercurio), $5.1 \cdot 10^{-7} \text{ m}^3$ (rame).

Visualizza Soluzione

Prendiamo adesso in esame le variazioni delle funzioni di stato, nel

passaggio da uno stato di equilibrio ad un altro infinitamente vicino, al variare di due delle coordinate p, V, T ; per il calcolo ci serviamo di nuovo del teorema del differenziale totale.

Nel caso dell'energia interna abbiamo tre possibili espressioni:

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV \quad , \quad (13.14)$$

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial U}{\partial p}\right)_T dp \quad , \quad (13.15)$$

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial p}\right)_V dp + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_p dV \quad ;$$

delle sei derivate solo due sono indipendenti.

In una trasformazione a volume costante il lavoro è nullo, dal primo principio $dQ = dU$ e si ottiene per il *calore specifico molare a volume costante*

$$c_V = \frac{1}{n} \left(\frac{dQ}{dT}\right)_V = \frac{1}{n} \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V \quad . \quad (13.16)$$

Calore specifico molare a volume costante

Se si considera la massa invece del numero di moli basta sostituire m al posto di n e fare attenzione alle unità di misura.

Da (13.14) e (13.16) segue che la variazione di energia interna si può scrivere

$$dU = nc_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV \quad ; \quad (13.17)$$

in generale l'energia interna di un sistema pVT dipende dalla temperatura e dal volume, solo in un gas ideale $(\partial U / \partial V)_T = 0$.

Il calore scambiato in un processo reversibile infinitesimo risulta

$$dQ = dU + pdV = nc_V dT + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p\right] dV \quad . \quad (13.18)$$

Consideriamo ora la funzione di stato *entalpia*. In un processo reversibile, utilizzando (11.24), abbiamo

$$dQ = dU + pdV = d(H - pV) + pdV = dH - pdV - Vdp + pdV$$

e quindi

$$dQ = dH - Vdp \quad , \quad (13.19)$$

formula strutturalmente analoga a $dQ = dU + pdV$ e con gli stessi limiti di validità. Se la pressione resta costante nella trasformazione la variazione di entalpia eguaglia il calore scambiato e questa proprietà, già ricavata nel paragrafo 13.1, resta valida anche se la trasformazione isobara è irreversibile.

Da $dQ = dH$ a pressione costante segue per il *calore specifico molare a pressione costante*

$$c_p = \frac{1}{n} \left(\frac{dQ}{dT} \right)_p = \frac{1}{n} \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_p \quad (13.20)$$

Calore specifico
molare a pressione
costante

Scrivendo la variazione di entalpia in funzione di temperatura e pressione

$$dH = \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_p dT + \left(\frac{\partial H}{\partial p} \right)_T dp$$

e servendoci di (13.20) otteniamo

$$dH = nc_p dT + \left(\frac{\partial H}{\partial p} \right)_T dp \quad (13.21)$$

per la quale vale lo stesso commento fatto a proposito di (13.17): in generale l'entalpia di un sistema pVT è funzione di due variabili, solo per un gas ideale $(\partial H / \partial p)_T = 0$.

La (13.21), inserita nella (13.19), permette di scrivere il calore scambiato in un processo reversibile infinitesimo:

$$dQ = nc_p dT + \left[\left(\frac{\partial H}{\partial p} \right)_T - V \right] dp \quad (13.22)$$

espressione alternativa a (13.18). Riprendiamo ora la definizione (11.24) di entalpia:

$$dH = d(U + pV) = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T dV + d(pV) \quad ,$$

avendo usato (13.14). Per una trasformazione isobara

$$nc_p = \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_p = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V + \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p + p \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = nc_v + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + p \right] \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \quad .$$

Ricorriamo a (10.24) e otteniamo

$$c_p - c_v = \frac{1}{n} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + p \right] \alpha V \quad (13.23)$$

Sottraendo (13.18) da (13.22) e utilizzando (13.23) e (13.11) si ottiene anche

$$c_p - c_v = -\frac{1}{n} \left[\left(\frac{\partial H}{\partial p} \right)_T - V \right] \alpha \beta \quad (13.24)$$

Esempio 13.6

Si consideri un gas reale per cui valgono le proprietà

$$\left(p + \frac{a}{V^2} \right) (V - b) = RT \quad , \quad U = cT - \frac{a}{V} + \text{costante}$$

con riferimento a una mole; a, b, c, R sono costanti. Calcolare c_p e c_v (l'espressione di U per un gas

che segue l'equazione di Van der Waals verrà giustificata nell'esempio 13.12).

Soluzione

Ricorriamo a (13.16) e (13.23), oltre che a (10.24):

$$c_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_T = c$$

$$c_p - c_V = \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + p \right] \alpha V = \left(\frac{a}{V^2} + p \right) \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = \frac{RT}{V-b} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p .$$

La derivata del volume rispetto alla temperatura a pressione costante si calcola esplicitando dall'equazione di stato la relazione tra V e T e risulta

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = \frac{R}{p - \frac{a}{V^2} + \frac{2ab}{V^3}} .$$

In definitiva si ottiene

$$c_p - c_V = R \frac{p + \frac{a}{V^2}}{p - \frac{a}{V^2} + \frac{2ab}{V^3}} = \frac{R}{1 - \frac{2a(V-b)^2}{RTV^3}}$$

e si vede che la differenza tra i calori specifici dipende dai valori delle coordinate termodinamiche. Solo se $a = 0$ $c_p - c_V = R$.

Visualizza Soluzione

Dopo energia interna ed entalpia prendiamo in esame l'entropia. Possiamo scrivere, con il solito formalismo,

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V dT + \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T dV , \quad dS = \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_p dT + \left(\frac{\partial S}{\partial p} \right)_T dp .$$

Dalla definizione $dS = dQ / T$ abbiamo

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V = \frac{1}{T} \left(\frac{dQ}{dT} \right)_V = \frac{nc_V}{T} , \quad \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_p = \frac{1}{T} \left(\frac{dQ}{dT} \right)_p = \frac{nc_p}{T} ,$$

e quindi

$$dS = nc_V \frac{dT}{T} + \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T dV , \quad (13.25)$$

$$dS = nc_p \frac{dT}{T} + \left(\frac{\partial S}{\partial p} \right)_T dp . \quad (13.26)$$

Se analizziamo l'insieme dei risultati che abbiamo ottenuto, vediamo che

nelle varie formule compaiono le derivate dell'energia interna, dell'entalpia o dell'entropia rispetto alle coordinate p , V , T e i parametri α e β , a loro volta espressi tramite derivate del volume rispetto a temperatura e pressione. Per poter eseguire un calcolo effettivo occorre dunque conoscere l'equazione di stato e le espressioni esplicite delle funzioni di stato; dal confronto tra le pressioni teoriche e le misure sperimentali relative a c_p , c_V e al legame tra p , V , e T otterremo così sia una verifica della teoria che ha fornito le espressioni esplicite che la determinazione di eventuali parametri. L'esempio 13.6 mostra appunto questo modo di procedere. Altrimenti è dalle misure sperimentali che si ricavano valori di $(\partial U/\partial T)_V$ e $(\partial U/\partial V)_T$ e si cerca di trovare un'espressione fenomenologica di $U(V,T)$, oppure di $U(p,T)$ se sono state sviluppate le formule in funzione di questa coppia di variabili.

13.3 Relazioni di Maxwell

Il formalismo del paragrafo precedente può essere ulteriormente sviluppato ricorrendo alle proprietà delle forme differenziali lineari ricordate nel terzo paragrafo dell'appendice A.

Le coordinate termodinamiche direttamente misurabili p, V, T e le funzioni di stato U, S, H, F, G , a loro volta possibili coordinate termodinamiche anche se non direttamente misurabili, formano un insieme di otto variabili ciascuna delle quali può essere espressa come funzione di qualsiasi altre due, essendo appunto due sole le variabili indipendenti, come conseguenza dell'esistenza di una equazione di stato.

Possiamo pertanto scrivere sempre le relazioni

$$f = f(x, y) \quad , \quad df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x dy \quad ;$$

poiché sappiamo che df è un differenziale esatto, cioè che la forma differenziale lineare è integrabile con risultato univoco, deve valere la condizione di integrabilità

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad (13.27)$$

che costituisce un vincolo aggiuntivo per le nostre grandezze. Riprendiamo le definizioni dei *potenziali termodinamici*

$$H = U + pV \quad , \quad F = U - TS \quad , \quad G = H - TS$$

e il primo principio $dU = dQ - dW$ che scriviamo

$$dU = TdS - pdV \quad , \quad (13.28)$$

facendo riferimento a una trasformazione infinitesima reversibile (ma il risultato non dipende dalla trasformazione). Deduciamo allora

$$dH = d(U + pV) = dU + pdV + Vdp = TdS - pdV + pdV + Vdp \quad ,$$

$$dH = TdS + Vdp \quad , \quad (13.29)$$

che poteva essere dedotta direttamente anche da (13.19). Analogamente

$$dF = d(U - TS) = TdS - pdV - TdS - SdT \quad ,$$

$$dF = -SdT - pdV \quad , \quad (13.30)$$

$$dG = d(H - TS) = TdS + Vdp - TdS - SdT \quad ,$$

$$dG = -SdT + Vdp \quad . \quad (13.31)$$

Le espressioni trovate per le variazioni infinitesime di U, H, F, G mostrano la dipendenza dalle variazioni di una coppia delle variabili considerate (p, V, T, S), che sono dette *naturali*; per l'energia interna sono variabili naturali S e V , per l'entalpia S e p , per l'energia libera T e V , per l'entalpia libera T e p . Si osservi che si tratta proprio della coppia di variabili individuate nel paragrafo 13.1 per ciascuna funzione U, H, F, G in relazione al problema della stabilità dell'equilibrio.

Confrontando (13.28), (13.29), (13.30), (13.31) con l'espressione generale

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x dy$$

si ottiene

$$T = \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V = \left(\frac{\partial H}{\partial S}\right)_p, \quad (13.32)$$

$$p = -\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T, \quad (13.33)$$

$$V = \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_S = \left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)_T, \quad (13.34)$$

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V = -\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_p : \quad (13.35)$$

le variabili naturali si possono esprimere come derivate delle funzioni U, H, F, G .

Una conseguenza immediata di (13.35) è la possibilità di stabilire una relazione diretta tra U e F e tra H e G :

$$U = F + TS = F - T \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V = -T^2 \left[\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{F}{T} \right) \right]_V,$$

$$H = G + TS = G - T \left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_p = -T^2 \left[\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{G}{T} \right) \right]_p.$$

La rappresentazione tramite le variabili naturali ha un notevole vantaggio concettuale: infatti la conoscenza per una data sostanza della relazione funzionale $U = U(S, V)$, oppure $H(S, p)$, $F(T, V)$, $G(T, p)$, costituisce una descrizione più completa di quella fornita dall'usuale relazione tipo $V = V(p, T)$.

Per esempio se è nota $U(S, V)$ si calcolano subito temperatura e pressione da (13.32) e (13.33),

$$T = \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V, \quad p = -\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S,$$

e così si stabilisce il legame tra T, p e V , cioè l'equazione di stato. Anche H, F, G si calcolano facilmente dalle loro definizioni e da (13.34) e (13.35). Infine possiamo calcolare i calori specifici; ad esempio

$$c_V = \frac{1}{n} \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = \frac{1}{n} \left(\frac{\partial U}{\partial S} \right)_V \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V = \frac{1}{n} \frac{(\partial U / \partial S)_V}{(\partial T / \partial S)_V} = \frac{1}{n} \frac{(\partial U / \partial S)_V}{(\partial^2 U / \partial S^2)_V} \quad . \quad (13.36)$$

Malgrado questa semplicità concettuale le espressioni tipo $U(S,V)$ non vengono usate nella pratica in quanto U e S non sono grandezze direttamente misurabili, ma vengono sempre riferite alle più usuali coordinate p, V, T sperimentalmente accessibili, per cui la scrittura dell'equazione $U = U(S,V)$ non è facile. Una descrizione del sistema in termini di $V = V(p,T)$ e $U = U(T,V)$ risulta analiticamente più semplice.

Esempio 13.7

Un sistema obbedisce all'equazione di stato

$$U = U(S,V) = A e^{S/A} V^B$$

con A e B costanti. Determinare temperatura, pressione e calore specifico a volume costante e trovare a quale condizione devono soddisfare A e B affinché il sistema sia un gas ideale.

Soluzione

Dalle (13.32), (13.33)

$$T = \left(\frac{\partial U}{\partial S} \right)_V = \frac{A}{V^B} \frac{e^{S/A}}{A} = \frac{U}{A} \Rightarrow U = AT \quad ,$$

$$p = - \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_S = A e^{S/A} \frac{B}{V^{B+1}} = \frac{B}{V} U \Rightarrow pV = ABT \quad ;$$

è stata così stabilita la relazione tra p, V, T . Da (13.36)

$$n c_V = \frac{(\partial U / \partial S)_V}{(\partial^2 U / \partial S^2)_V} = \frac{T}{(\partial T / \partial S)_V} = \frac{T}{\frac{1}{A} (\partial U / \partial S)_V} = A \quad .$$

Inoltre da (13.23), essendo $(\partial U / \partial V)_T = 0$,

$$n(c_p - c_V) = p\alpha V = p \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = AB \quad .$$

Quindi A è la capacità termica a volume costante, mentre AB è la differenza tra le capacità termiche a pressione costante e a volume costante. Da $A = nc_V$ e $AB = n(c_p - c_V)$ risulta poi $B = \gamma - 1$ con $\gamma = c_p / c_V$. Il sistema ha tutte le caratteristiche di un gas ideale con calori specifici costanti; deve però essere $c_p - c_V = R$ ovvero $AB = nR$, cioè $A = nc_V, B = R / c_V$.

[Visualizza Soluzione](#)

Esempio 13.8

L'entalpia libera di una mole di un certo gas reale si può esprimere, in un determinato intervallo di valori di pressione e temperatura, tramite la relazione

$$G(p, T) = 2 \cdot 10^{-4} p + 10T \ln(p/2 \cdot 10^5) - 10^{-7} pT^2 + \text{cost J} \quad .$$

Il gas compie un'espansione dallo stato A ($p_A = 5$ bar, $T_A = 300$ K) allo stato B ($p_B = 1.4$ bar, T_B), con una variazione $\Delta G_{AB} = 406$ J. Determinare la temperatura T_B e la variazione di entropia del gas ΔS_{AB} .

Successivamente il gas raggiunge con una trasformazione isobara lo stato C ($T_C = 250$ K). Determinare il calore scambiato nella trasformazione BC e l'espressione del calore specifico molare a pressione costante. Tale espressione è accettabile anche a temperature prossime allo zero assoluto?

Soluzione

La variazione di entalpia libera è

$$\Delta G_{AB} = G(p_B, T_B) - G(p_A, T_A) = 406 \text{ J} = 2 \cdot 10^{-4} p_B + 10 T_B \ln(p_B/2 \cdot 10^5) - 10^{-7} p_B T_B^2 - 2 \cdot 10^{-4} p_A - 10 T_A \ln(p_A/2 \cdot 10^5) + 10^{-7} p_A T_A^2 \quad .$$

Da questa si ricava un'equazione di secondo grado in T_B che ha come soluzione fisica $T_B = 200$ K.

Per calcolare la variazione di entropia usiamo (13.35):

$$S = - \left(\frac{\partial G}{\partial T} \right)_p = -10 \ln(p/2 \cdot 10^5) + 2 \cdot 10^{-7} pT \text{ J/K} \Rightarrow \Delta S_{AB} = S_B - S_A = -18.8 \text{ J/K} \quad .$$

Nella trasformazione isobara $Q = \Delta H$ e, nel caso specifico, ci serviamo della relazione

$$H = -T^2 \left[\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{G}{T} \right) \right]_p = T^2 \left(2 \cdot 10^{-4} \frac{p}{T^2} + 10^{-7} p \right) = 2 \cdot 10^{-4} p + 10^{-7} pT^2 \text{ J}$$

$$\Rightarrow Q = \Delta H = H_C - H_B = 10^{-7} p_B (T_C^2 - T_B^2) = 315 \text{ J} \quad .$$

Secondo (13.20)

$$c_p = \frac{1}{n} \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_p = 2 \cdot 10^{-7} pT \text{ J/mol K}$$

(il valore medio, tra T_B e T_C , è $6.3 \approx 0.76 R$ J/mol K).

Per $T \rightarrow 0$ anche $c_p \rightarrow 0$: l'espressione è in accordo con il terzo principio e quindi accettabile, almeno qualitativamente.

Visualizza Soluzione

Esempio 13.9

L'entalpia libera di una mole di un gas reale ha l'espressione

$$G(p, T) = c_1 p + RT \ln p - c_2 T^2 + \text{cost}$$

con c_1 e c_2 costanti. Ricavare l'equazione di stato del gas. In una trasformazione isobara in cui la

temperatura varia di ΔT quanto vale la variazione di entropia del gas?

Soluzione

Per ricavare l'equazione di stato ricorriamo a (13.34):

$$V = \left(\frac{\partial G}{\partial p} \right)_T = c_1 + \frac{RT}{p} \Rightarrow p(V - c_1) = RT \quad .$$

Il risultato è determinato dai primi due termini dell'entalpia libera. Il terzo termine può essere una qualsiasi $f(T)$, che non contribuisce nella (13.34) essendo la derivata eseguita a T costante. Pertanto l'equazione di stato trovata corrisponde a infinite espressioni di $G(p,T)$, differenti tra loro per una generica $f(T)$. Come visto nell'esempio 13.8,

$$S = - \left(\frac{\partial G}{\partial T} \right)_p = -R \ln p + 2c_2 T \quad ,$$

$$\Delta S = S_B - S_A = -R \ln \frac{p_B}{p_A} + 2c_2 (T_B - T_A) \quad .$$

In una trasformazione isobara $\Delta S = 2c_2 \Delta T$.

Visualizza Soluzione

La reale utilità della formulazione attraverso le variabili naturali risulta dall'applicazione della condizione di integrabilità (13.27) alle relazioni da (13.28) a (13.31). Si ottiene

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_S = - \left(\frac{\partial p}{\partial S} \right)_V \quad , \quad (13.37)$$

Relazioni di Maxwell

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_S = \left(\frac{\partial V}{\partial S} \right)_p \quad , \quad (13.38)$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V \quad , \quad (13.39)$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial p} \right)_T = - \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \quad . \quad (13.40)$$

Queste equazioni, che valgono in qualsiasi stato di equilibrio di un sistema pVT sono dette *relazioni di Maxwell*.

Un aspetto interessante è che esse legano le derivate dell'entropia a grandezze direttamente misurabili e la convenienza di ciò si vede considerando le (13.25) e (13.26), che diventano

$$dS = nc_v \frac{dT}{T} + \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V dV = nc_v \frac{dT}{T} + \alpha \beta dV \quad , \quad (13.41)$$

$$dS = nc_p \frac{dT}{T} - \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p dp = nc_p \frac{dT}{T} - \alpha V dp, \quad (13.42)$$

Abbiamo usato la proprietà $(\partial p / \partial T)_V = - (\partial p / \partial V)_T (\partial V / \partial T)_P$ (si veda A.2) e le definizioni di α e β . Poiché in generale le grandezze c_V , c_p , α , β sono note per le varie sostanze, si hanno in pratica utili relazioni per il calcolo delle variazioni di entropia.

Moltiplicando (13.41) e (13.42) per T , otteniamo due espressioni per il calore scambiato dal sistema durante una trasformazione infinitesima reversibile:

$$dQ = nc_V dT + \alpha \beta T dV = nc_p dT - \alpha V T dp. \quad (13.43)$$

Esempio 13.10

Si riprenda l'esempio 13.4, compressione isoterma reversibile, e si calcoli il calore scambiato, la variazione di entropia e la variazione di energia interna; si supponga $T = 300$ K.

Soluzione

Da (13.43) e nelle stesse ipotesi di costanza di α e V

$$dQ = -\alpha V T dp \Rightarrow Q = -\alpha V T \Delta p, \quad \Delta S = -\alpha V \Delta p;$$

il calore è ceduto dal sistema, la cui entropia diminuisce. Per l'energia interna utilizziamo il primo principio $\Delta U = Q - W$, prendendo i risultati dell'esempio 13.4.

	Q (J)	ΔS (J/K)	ΔU (J)
acqua	- 540	- 1.8	- 516.2
mercurio	- 540	- 1.8	- 538.2
rame	- 153	- 0.5	- 152.6

Il calore è ceduto quasi completamente a spese dell'energia interna, che diminuisce nel processo: si nota che $W \ll Q$ e quindi $Q \cong \Delta U$, come in pratica è sempre verificato per sistemi solidi o liquidi. Se fosse $\alpha < 0$, come avviene per l'acqua tra 0°C e 4°C , il calore sarebbe assorbito durante la compressione isoterma.

Visualizza Soluzione

Esempio 13.11

Si consideri una trasformazione adiabatica reversibile di un sistema pVT e si calcoli la relazione tra le variazioni di pressione, volume, temperatura.

Soluzione

Poniamo $dS = 0$ nelle (13.41) e (13.42):

$$\frac{dT}{T} = -\frac{\alpha\beta}{nc_V} dV, \quad \frac{dT}{T} = \frac{\alpha V}{nc_p} dp.$$

Un aumento di pressione causa un aumento di temperatura se α è positivo e una diminuzione se α è negativo; invece il volume diminuisce sempre se aumenta la pressione. Assumendo costanti tutti i coefficienti

$$\frac{T_B}{T_A} = e^{-c_1(V_B - V_A)} = e^{c_2(p_B - p_A)} \Rightarrow V_B - V_A = -\frac{c_2}{c_1}(p_B - p_A)$$

con $c_1 = \alpha\beta / nc_V$, $c_2 = \alpha V / nc_p$.

Si tratta di effetti piccoli: se un litro di mercurio, a temperatura ambiente e pressione atmosferica, viene sottoposto adiabaticamente a un aumento di pressione di 100 bar la sua temperatura aumenta di $\sim 0.3 \text{ K}$ ($\Delta T/T = 10^{-3}$) e il suo volume diminuisce di $0.3 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$ ($\Delta V/V = 3 \cdot 10^{-4}$).

Visualizza Soluzione

L'espressione (13.41) della variazione di entropia può essere utilmente inserita nella (13.28):

$$dU = T \left[nc_V \frac{dT}{T} + \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V dV \right] - p dV = nc_V dT + \left[T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V - p \right] dV ;$$

confrontando con (13.17) si vede che il termine tra parentesi quadre è pari a $(\partial U / \partial V)_T$ e quindi, anche in base a (13.12),

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V - p = \alpha\beta T - p . \quad (13.44)$$

La variazione di energia interna col volume, a temperatura costante, è espressa esclusivamente attraverso la conoscenza dell'equazione di stato $p = p(V, T)$ che permette di calcolare $(\partial p / \partial T)_V$, ovvero attraverso la conoscenza dei parametri α e β .

In un gas ideale $\alpha = 1/T$ e $\beta = p$ (esempio 13.2) e quindi $(\partial U / \partial V)_T = 0$, l'energia interna non dipende dal volume. Invece in un sistema reale l'energia interna è funzione del volume a causa dell'interazione tra le molecole: infatti se viene variato il volume si modifica la distanza media delle molecole e varia l'energia potenziale media di queste.

Procedendo allo stesso modo con le equazioni (13.29), (13.42), (13.21) si trova per la variazione di entalpia con la pressione a temperatura costante

$$\left(\frac{\partial H}{\partial p} \right)_T = V - T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = V(1 - \alpha T) , \quad (13.45)$$

che risulta nulla solo per il gas ideale in cui $\alpha = 1/T$.

Le relazioni (13.44) e (13.45), collegate rispettivamente a (13.23) e (13.24), portano entrambe al risultato

$$c_p - c_V = \frac{\alpha^2 \beta TV}{n}, \quad (13.46)$$

che può essere ottenuto anche eguagliando (13.41) con (13.42) e confrontando con (13.11). La (13.46), valida per qualsiasi sistema pVT , è una relazione fondamentale: essa mostra che è sempre $c_p > c_V$ e che la differenza diminuisce al diminuire della temperatura; per $T \neq 0$ $c_p = c_V$ solo se $\alpha = 0$ come avviene per l'acqua a 4°C .

Il rapporto $\gamma = c_p / c_V$ è pertanto sempre maggiore o eguale a uno; si dimostra che vale la relazione

$$\gamma = \frac{c_p}{c_V} = \frac{(\partial V / \partial p)_T}{(\partial V / \partial p)_S} = \frac{\beta_S}{\beta}, \quad (13.47)$$

essendo definito dalla

$$\frac{1}{\beta_S} = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_S \quad (13.48)$$

il *modulo di compressibilità adiabatica* β_S ($\kappa_S = 1/\beta_S$ si dice *coefficiente di compressibilità adiabatica*); risulta sempre $\beta_S \geq \beta$ (ovvero $\kappa \geq \kappa_S$). Abbiamo già incontrato β_S nel paragrafo 9.13, in relazione al calcolo della velocità di propagazione di un'onda elastica in un gas. Da (13.46) e (13.47) risulta

$$\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta_S} = \kappa - \kappa_S = \frac{\alpha^2 TV}{nc_p}.$$

Poiché β_S può essere determinato da misure di velocità del suono, tale relazione può essere usata per calcolare β .

In conclusione, partendo dalle formule generali ricavate nel paragrafo 13.2 e servendoci delle relazioni di Maxwell, abbiamo ottenuto espressioni utili per il calcolo dell'energia interna, dell'entropia e dei potenziali termodinamici. In tali espressioni compaiono le grandezze c_p , c_V , α , β : sperimentalmente c_p , α , β sono misurabili con relativa facilità, mentre la determinazione di c_V , soprattutto per sostanze solide e liquide, è molto difficile; però il problema si risolve con la relazione (13.46). A questo punto tramite (13.41) o (13.42) siamo in grado di calcolare ΔS (e quindi Q in un processo reversibile), mentre (13.44) e (13.45) ci permettono di calcolare ΔU e ΔH .

La condizione di integrabilità (13.27) è essenziale per arrivare ai suddetti risultati; la sua validità nel nostro contesto è assicurata dal fatto che dU e dS sono differenziali esatti, in quanto energia interna ed entropia sono funzioni di stato, come stabilito dal primo e dal secondo principio della termodinamica. Invece nulla di simile si può affermare per dQ , come abbiamo già detto più volte; una semplice verifica si può fare sull'equazione (13.18) che scriviamo

Modulo di
compressibilità
adiabatica
Coefficiente di
compressibilità
adiabatica

$$dQ = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p\right] dV \quad .$$

Si vede subito che (13.27) non è soddisfatta; infatti le derivate dei due coefficienti

$$\frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = \frac{\partial^2 U}{\partial V \partial T} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial T} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p\right]_V = \frac{\partial^2 U}{\partial T \partial V} + \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$$

non sono eguali; lo sarebbero solo se fosse $(\partial p / \partial T)_V = 0$, ma ciò non è vero in generale in quanto sappiamo che $(\partial p / \partial T)_V = \alpha \beta$.

Esempio 13.12

Determinare per una mole di un gas reale che segue l'equazione di Van der Waals le espressioni dell'energia interna e dell'entropia; nell'ipotesi che c_V non dipenda dalla temperatura scrivere l'equazione delle adiabatiche reversibili.

Soluzione

Riscriviamo (11.30) esplicitando la pressione,

$$p = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2} \Rightarrow \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \frac{R}{V-b} \quad .$$

Da (13.44) e (13.17)

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = \frac{RT}{V-b} - p = \frac{a}{V^2} \quad , \quad dU = c_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV = c_V dT + \frac{a}{V^2} dV \quad .$$

Pertanto, a seconda che c_V dipenda o non dipenda dalla temperatura, abbiamo

$$U = \int c_V dT - \frac{a}{V} + \text{cost} \quad , \quad U = c_V T - \frac{a}{V} + \text{cost} \quad .$$

Il termine negativo $-a/V$ indica il contributo all'energia interna dovuto alle forze attrattive tra le molecole; esso decresce all'aumentare del volume, cioè della distanza media intermolecolare. Per l'entropia applichiamo (13.41):

$$dS = c_V \frac{dT}{T} + \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V dV = c_V \frac{dT}{T} + R \frac{dV}{V-b} \quad ,$$

$$S = \int c_V \frac{dT}{T} + R \ln(V-b) + \text{cost} \quad , \quad S = c_V \ln T + R \ln(V-b) + \text{cost} \quad .$$

In una trasformazione adiabatica reversibile, con c_V costante,

$$\Delta S = c_V \ln \frac{T_B}{T_A} + R \ln \frac{V_B - b}{V_A - b} = 0 \Rightarrow T(V-b)^{R/c_V} = \text{costante} \quad .$$

Esempio 13.13

Un gas di Van der Waals compie una trasformazione isoterma reversibile. Calcolare la variazione di energia libera molare.

Soluzione

La variazione di F in una isoterma reversibile si calcola ricorrendo a (13.33):

$$\begin{aligned}\Delta F &= \int_{V_A}^{V_B} \left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_T dV = - \int_{V_A}^{V_B} p dV = - \int_{V_A}^{V_B} \left(\frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2} \right) dV \\ &= -RT \ln \frac{V_B-b}{V_A-b} - a \left(\frac{1}{V_B} - \frac{1}{V_A} \right) .\end{aligned}$$

Il lavoro scambiato è $W = -\Delta F$, secondo (13.5). Se $a = b = 0$ si ritrova la formula valida per il gas ideale (11.23).

Visualizza Soluzione

Esempio 13.14

Una mole di gas di Van der Waals, con $a = 0.12 \text{ Pa m}^6/\text{mol}^2$ e $b = 10^{-4} \text{ m}^3/\text{mol}$, viene compressa in modo adiabatico reversibile da $V_A = 2 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3$ a $V_B = 10^{-2} \text{ m}^3$; la temperatura iniziale è $T_A = 300 \text{ K}$. Successivamente il gas si espande liberamente fino al volume iniziale V_A . Raggiunto l'equilibrio, il gas ritorna nello stato iniziale con una trasformazione isocora reversibile. Il calore specifico molare a volume costante è $c_V = 20.3 \text{ J/mol K}$. Calcolare la temperatura del gas nello stato B e nello stato C dopo l'espansione libera; calcolare inoltre le variazioni di entropia del gas nelle trasformazioni BC e CA e la variazione di entropia dell'universo nel ciclo. Stimare infine l'energia resa inutilizzabile nel ciclo.

Soluzione

Prendiamo i vari risultati ottenuti nell'esempio 13.12. Per la compressione adiabatica reversibile

$$T_A (V_A - b)^{R/c_V} = T_B (V_B - b)^{R/c_V} \Rightarrow T_B = 399.4 \text{ K} .$$

Nell'espansione libera

$$\Delta U = 0 \Rightarrow U_C - U_B = c_V (T_C - T_B) - a \left(\frac{1}{V_A} - \frac{1}{V_B} \right) = 0 ,$$

$$T_C = T_B + \frac{a}{c_V} \left(\frac{1}{V_A} - \frac{1}{V_B} \right) = 399.1 \text{ K} .$$

Si ha una diminuzione di temperatura molto piccola, $\Delta T = -0.3 \text{ K}$; questo perché il nostro gas reale si discosta poco dal gas ideale ($a/V^2 \ll p$, $b \ll V$). Le variazioni di entropia sono:

$$\Delta S_{BC} = c_V \ln \frac{T_C}{T_B} + R \ln \frac{V_A - b}{V_B - b} = 5.79 \text{ J/K} \quad ,$$

$$\Delta S_{CA} = c_V \ln \frac{T_A}{T_C} = -5.79 \text{ J/K} = -\Delta S_{BC} \quad ,$$

$$\Delta S_u = \Delta S_{BC} = 5.79 \text{ J/K} \text{ (BC unica trasformazione irreversibile).}$$

Approssimando la trasformazione BC ad una isoterma, il massimo lavoro ottenibile si calcola con la formula dell'esempio 13.13 e risulta $W_{\text{rev}} = 2310 \text{ J}$; lo stesso valore si ottiene da $T_C \Delta S_u$ e corrisponde all'energia resa inutilizzabile nel ciclo.

Visualizza Soluzione

Esempio 13.15

Una mole di sostanza in fase liquida, inizialmente nello stato A ($T_A = 400 \text{ K}$, $p_A = 10^5 \text{ Pa}$, $V_A = 2 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3$), compie la transizione di fase liquido-vapore assorbendo il calore $Q = 4.5 \cdot 10^4 \text{ J}$ e si porta nello stato B ($V_B = 2.5 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3$). Dallo stato B , con una espansione isoterma reversibile, il vapore passa nello stato C ($V_C = 4 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3$). Si assuma che l'equazione di stato del vapore sia quella di Van der Waals, con $a = 0.36 \text{ m}^6 \text{ Pa/mol}^2$ e $b = 0$. Calcolare la variazione ΔG_{AC} di entalpia libera, ΔS_{AC} di entropia, ΔU_{AC} di energia interna e il calore scambiato nell'espansione isoterma. Verificare inoltre nella trasformazione BC la relazione esistente tra ΔG e ΔU .

Soluzione

Nella transizione di fase pressione e temperatura restano costanti; sappiamo inoltre che resta costante l'entalpia libera, per cui $\Delta G_{AC} = \Delta G_{BC}$. Nella trasformazione BC , isoterma, integriamo (13.34):

$$\Delta G_{BC} = \int_B^C V dp \quad \text{con} \quad dp = \left(\frac{RT}{V^2} + \frac{2a}{V^3} \right) dV$$

$$\Rightarrow \Delta G_{BC} = RT \ln \frac{V_B}{V_C} + 2a \left(\frac{1}{V_B} - \frac{1}{V_C} \right) = -1552.2 \text{ J} \quad .$$

Per le variazioni di entropia abbiamo:

$$\Delta S_{AB} = \frac{Q}{T_A} = 112.5 \text{ J/K} \quad , \quad \Delta S_{BC} = R \ln \frac{V_C}{V_B} = 3.9 \text{ J/K}$$

(esempio 13.13 con T costante e $b = 0$); segue $\Delta S_{AC} = 116.4 \text{ J/K}$. La variazione di energia interna durante la transizione di fase si può calcolare con il primo principio:

$$\Delta U_{AB} = Q - W = Q - p_A (V_B - V_A) = 4.25 \cdot 10^4 \text{ J} \quad .$$

Nell'espansione isoterma

$$\Delta U_{BC} = a \left(\frac{1}{V_B} - \frac{1}{V_C} \right) = 5.4 \text{ J} \quad .$$

Il calore scambiato in questa trasformazione reversibile è

$$Q_{BC} = T_A \Delta S_{BC} = 1563 \text{ J}$$

(si potrebbe anche calcolare il lavoro come nell'esempio 13.13 e applicare il primo principio). La relazione tra ΔG e ΔU si ricava da

$$G = H - TS = U + pV - TS \Rightarrow \Delta G = \Delta U + \Delta(pV) - T\Delta S \quad ,$$

tenendo conto che la trasformazione BC è isoterma. Dall'equazione di Van der Waals si ricava

$$\Delta(pV) = p_C V_C - p_B V_B = -\frac{a}{V_C} + \frac{a}{V_B} = \Delta U_{BC}$$

e quindi $\Delta G_{BC} = 2\Delta U_{BC} - T_A \Delta S_{BC}$, che risulta verificata dai dati numerici ($-1552.2 = 10.8 - 1563$).

Visualizza Soluzione

13.4 Espansione di Joule-Thomson

Nel paragrafo 11.8 abbiamo descritto sommariamente l'espansione di Joule-Thomson; riprendiamo ora più in dettaglio l'argomento, anche alla luce delle nuove nozioni sviluppate.

Schematicamente l'esperienza avviene mettendo una massa di fluido in un condotto isolato termicamente, separato in due parti da un setto poroso; due pistoni, pure isolanti, sono liberi di muoversi senza attrito; le pressioni nei due recipienti, delimitati dal setto e dai pistoni, sono mantenute costanti tramite il movimento dall'esterno dei pistoni stessi. Supponiamo che inizialmente il fluido sia tutto a sinistra, nel volume V_A alla pressione p_A e alla temperatura T_A , e che alla fine esso sia tutto a destra, nel volume V_B alla pressione p_B e alla temperatura T_B (figura 13.1); supponiamo inoltre che sia $p_A > p_B$.

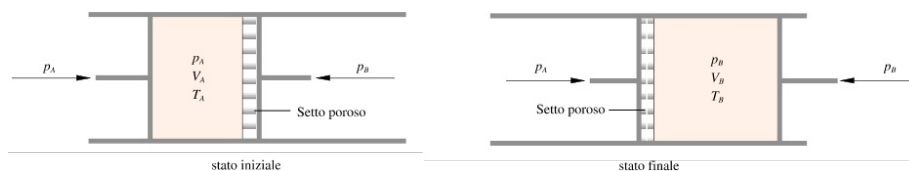


FIGURA 13.1

Il lavoro compiuto per l'uscita dal recipiente di sinistra della massa di fluido contenuta nel volume V_A e l'entrata in quello di destra della stessa massa, contenuta nel volume V_B , è dato da

$$W = \int_{V_A}^0 p_A dV_A + \int_0^{V_B} p_B dV_B = -p_A V_A + p_B V_B .$$

Data la scelta dei materiali la trasformazione è adiabatica, il calore scambiato è nullo e quindi, dal primo principio,

$$\Delta U = U_B - U_A = -W = p_A V_A - p_B V_B \Rightarrow H_A = U_A + p_A V_A = H_B = U_B + p_B V_B :$$

l'entalpia del sistema rimane la stessa nel passaggio attraverso il setto, ovvero l'*espansione di Joule-Thomson* è un *processo isoentalpico*.

Con l'aiuto di una pompa che mantiene una differenza di pressione finita $p_A - p_B$ il fenomeno può essere reso continuo: il fluido si muove in regime stazionario nel condotto, subendo una diminuzione di pressione nel passaggio attraverso il setto poroso e senza scambiare calore; la trattazione resta la stessa, se si può trascurare la variazione di energia cinetica della massa fluida.

Storicamente l'esperimento è stato ideato da Joule e Thomson nel 1853 per studiare la dipendenza dell'energia interna dei gas dalle coordinate termodinamiche con un dispositivo più sensibile di quello visto per l'esperienza dell'espansione libera.

In un gas ideale l'entalpia è funzione solo della temperatura e, quindi, se un processo è isoentalpico, esso è anche isoterma; invece con i gas reali si trovano, nell'espansione di Joule-Thomson, variazioni di temperatura positive, negative o nulle, a seconda delle condizioni sperimentali.

Una misura può essere effettuata in questo modo: si tengono fisse p_A e T_A , si eseguono varie espansioni con diversi valori di $p_B (< p_A)$ e si determina ogni volta T_B , cioè a partire da uno stato iniziale di data entalpia corrispondente alla coppia di valori p_A, T_A si arriva a stati finali di eguale entalpia corrispondenti a diversi valori p_B, T_B . Poi si ripete la misura partendo da un diverso stato iniziale. I risultati possono essere rappresentati graficamente, come è fatto, in maniera solo qualitativa, nella figura 13.2.

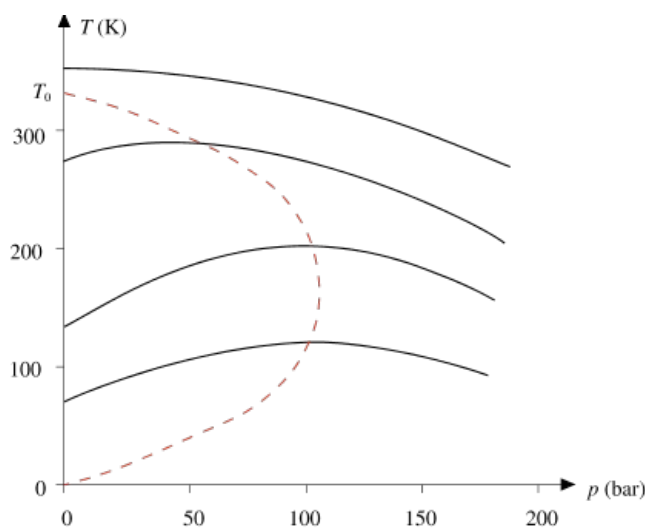


FIGURA 13.2

Tabella 13.2 Temperatura massima di inversione (K)

aria	659
argon	780
azoto	621
elio	40
idrogeno	204
ossigeno	764

Ciascuna curva continua è una curva isoentalpica; ricordando che il fenomeno procede da pressione alta a pressione bassa, cioè da destra a sinistra, e che gli stati iniziale e finale stanno su una stessa curva, vediamo che a seconda della scelta dello stato iniziale e dell'abbassamento di pressione possono esserci aumenti o diminuzioni di temperatura (e anche $\Delta T = 0$). Alcune curve isoentalpiche presentano un massimo, detto punto di inversione; la curva tratteggiata che collega i punti di inversione si chiama *curva di inversione*: nella parte di piano a destra della curva di inversione l'espansione di Joule-Thomson comporta sempre riscaldamento, nella parte a sinistra raffreddamento. Per $p = 0$ la curva di inversione determina una temperatura T_0 che è la massima temperatura di inversione; per $T > T_0$ una curva isoentalpica ha sempre pendenza negativa, non si ha mai raffreddamento.

La pendenza di una curva isoentalpica $(\partial T / \partial p)_H$ è detta *coefficiente di Joule-Thomson*. Dalla regola di derivazione

$$\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T = -\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_H$$

e dalle (13.20), (13.45) otteniamo

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_H = \frac{1}{nc_p} \left[T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p - V \right] = -\frac{V(1-\alpha T)}{nc_p} . \quad (13.49)$$

Coefficiente di Joule-Thomson

In un gas ideale $(\partial H/\partial p)_T = 0$, quindi $(\partial T/\partial p)_H = 0$, una curva isoentalpica è una retta parallela all'asse delle pressioni.

La variazione di entropia nell'espansione di Joule-Thomson si calcola da (13.29):

$$dS = \frac{1}{T} dH - \frac{V}{T} dp$$

e se $dH = 0$

$$dS = -\frac{V}{T} dp \quad \text{ovvero} \quad \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_H = -\frac{V}{T} .$$

La derivata dell'entropia rispetto alla pressione, a entalpia costante, è negativa e quindi se la pressione diminuisce l'entropia aumenta. Siccome la trasformazione è adiabatica il sistema coincide con l'universo e il risultato dimostra che il processo descritto è irreversibile. Pertanto gli stati intermedi non sono stati di equilibrio e non possono essere rappresentati nel piano T, p : la curva isoentalpica non è la rappresentazione grafica dell'espansione di Joule-Thomson.

Abbiamo già accennato nei paragrafi 11.8 e 11.9 che se il fluido è un liquido saturo si ottiene sempre raffreddamento e evaporazione parziale e che l'effetto è sfruttato nei cicli frigoriferi.

L'applicazione principale dell'effetto di raffreddamento si ha nella liquefazione dei gas. Per gas come l'aria, l'argon, l'anidride carbonica che hanno la massima temperatura di inversione T_0 superiore alla temperatura ambiente (nell'aria $T_0 = 659$ K) non c'è bisogno di raffreddamento iniziale, che invece è necessario per l'idrogeno ($T_0 = 202$ K) e per l'elio ($T_0 = 40$ K). Il processo di liquefazione consiste in una successione di espansioni in cui il gas che si raffredda viene riciclato raffreddando il gas che entra nell'apparecchio fino a che non si raggiunge la temperatura di liquefazione alla data pressione.

Per dare un'idea dell'entità del raffreddamento diciamo che con aria a temperatura ambiente (293 K) e a pressione atmosferica, un'espansione con pressione iniziale di 2 bar comporta $\Delta T = -0.3$ K, mentre se la pressione iniziale è di 204 bar $\Delta T = -47$ K.

La liquefazione dell'aria è un procedimento industriale fondamentale per la produzione di ossigeno, azoto e gas nobili; la separazione tra i vari gas componenti è possibile in quanto le temperature di liquefazione sono differenti.

Esempio 13.16

Determinare il coefficiente di Joule-Thomson per un gas di Van der Waals.

Soluzione

Nella (13.49) occorre inserire $(\partial V/\partial T)_p$, che abbiamo già calcolato nell'esempio 13.6. Con riferimento ad una mole

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_H = \frac{1}{c_p} \left(\frac{RT}{p - \frac{a}{V^2} + \frac{2ab}{V^3}} - V \right) .$$

Trascuriamo $2ab/V^3$ e per V utilizziamo l'equazione di Van der Waals:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_H = \frac{1}{c_p} \left(\frac{RT}{p - \frac{a}{V^2}} - \frac{RT}{p + \frac{a}{V^2}} - b \right) = \frac{1}{c_p} \left(\frac{2aRT}{V^2 \left(p^2 - \frac{a^2}{V^4} \right)} - b \right) = \frac{1}{c_p} \left(\frac{2aRT}{p^2 V^2} - b \right),$$

dove abbiamo trascurato a^2/V^4 . Con l'ulteriore approssimazione $p^2 V^2 = R^2 T^2$ si arriva al risultato

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_H = \frac{1}{c_p} \left(\frac{2a}{RT} - b \right) .$$

Ad esempio, nell'ossigeno a 300 K si ricava 0.27 K/bar.

Visualizza Soluzione

13.5 Miscele di gas ideali

Un'estensione naturale dello studio delle proprietà dei sistemi pVT riguarda i sistemi composti da sostanze diverse, come una soluzione di un sale in acqua o una miscela di gas. Trattiamo qui soltanto il caso di una miscela di gas ideali inerti, per mostrare come si affronta il problema.

Abbiamo già visto nel paragrafo 11.10 la legge di Dalton (11.36) che riguarda la pressione di una *miscela di gas ideali*. Supponiamo anche adesso di avere un contenitore di volume V in cui è racchiusa la miscela di gas alla temperatura T e di considerare grandezze estensive come l'energia interna U , l'entalpia H , l'entropia S , l'energia libera F e l'entalpia libera G . Si dimostra che in questa situazione sussiste il *teorema di Gibbs*: *il valore di una grandezza estensiva relativo ad una miscela in cui le interazioni tra i costituenti elementari siano trascurabili è pari alla somma dei valori relativi a ciascun componente, se questo occupasse da solo lo stesso volume alla stessa temperatura.*

Teorema di Gibbs

Ad esempio, detta U_i l'energia interna dell' i -esimo componente, contenuto da solo nel volume V alla temperatura T , l'energia interna della miscela è data da

$$U = \sum_i U_i .$$

Ciascun termine è funzione soltanto della temperatura e quindi anche l'energia interna totale è funzione soltanto della temperatura. Molto spesso ci si riferisce a una mole di sostanza e la relazione precedente si scrive

$$nu = \sum_i n_i u_i ,$$

dove n_i è il numero di moli dell' i -esimo componente, $n = \sum_i n_i$ è il numero totale di moli, e utilizziamo le lettere minuscole per indicare le grandezze molari, come già fatto nel paragrafo 13.1. Ricordando la definizione di frazione molare r_i del paragrafo 11.10 abbiamo

$$u = \sum_i r_i u_i \quad (13.50)$$

Energia interna molare di una miscela di gas ideali

per l'energia interna molare della miscela. Analogamente si ottiene per l'entalpia

$$H = \sum_i H_i , \quad h = \sum_i r_i h_i . \quad (13.51)$$

Entalpia molare di una miscela di gas ideali

Siccome i gas sono ideali possiamo scrivere

$$du_i = c_{v,i} dT , \quad du = c_v dT = (\sum_i r_i c_{v,i}) dT ,$$

$$dh_i = c_{p,i} dT , \quad dh = c_p dT = (\sum_i r_i c_{p,i}) dT ,$$

e quindi ricaviamo per i *calori specifici molari della miscela*

$$c_V = \sum_i r_i c_{V,i} \quad , \quad c_p = \sum_i r_i c_{p,i}$$

ovvero per le capacità termiche

$$C_V = n c_V = \sum_i n r_i c_{V,i} = \sum_i n_i c_{V,i} = \sum_i C_{V,i} \quad , \quad C_p = n c_p = \sum_i C_{p,i} .$$

Pertanto anche *le capacità termiche della miscela obbediscono al teorema di Gibbs*, come del resto deve essere trattandosi di grandezze estensive. Si verifica poi facilmente che $c_p - c_V = R$.

Passando a considerare l'entropia, scriviamo

$$S = \sum_i S_i \quad , \quad n s = \sum_i n_i s_i \quad ,$$

dove ripetiamo che ciascuna S_i è calcolata per l' i -esimo componente nelle condizioni V e T di volume e temperatura e $p_i = r_i p$ di pressione (p_i è la pressione parziale del paragrafo 11.10). Pertanto il contributo del componente i -esimo all'entropia della miscela è dato, secondo la terza delle relazioni (12.27) da

$$S_i = n_i \sigma_i(T) - n_i R \ln p_i + \text{costante}$$

dove $\sigma_i(T)$ è funzione solo di T . In totale (e tralasciando la costante)

$$S = \sum_i S_i = \sum_i n_i \sigma_i(T) - \sum_i n_i R \ln p_i \quad ;$$

inoltre ricordando che $p_i = r_i p$

$$S = \sum_i n_i \sigma_i(T) - \sum_i n_i R \ln p - \sum_i n_i R \ln r_i .$$

Nella miscela ciascun componente è alla pressione $p = \sum_i p_i$; l'entropia di un gas ideale dipende dalla pressione, per cui l'entropia di ciascun componente immaginato separato dagli altri, alla temperatura T e alla pressione p , sarebbe

$$S'_i = n_i \sigma_i(T) - n_i R \ln p$$

e l'entropia della miscela di gas, considerati separati, sarebbe

$$S' = \sum_i S'_i = \sum_i n_i \sigma_i(T) - \sum_i n_i R \ln p .$$

Confrontando col valore determinato col teorema di Gibbs troviamo

$$\Delta S = S - S' = -R \sum_i n_i \ln r_i$$

che risulta sempre positiva perché $r_i < 1$, in accordo con il secondo principio della termodinamica, dato che il processo di mescolamento è irreversibile. La quantità ΔS si chiama *entropia di mescolamento*.

Vediamo in conclusione che l'entropia della miscela può essere calcolata sia a partire dalle entropie molari iniziali,

$$S = \sum_i S_i = \sum_i n_i s_i \quad , \quad s_i = \sigma_i(T) - R \ln p_i$$

$$s = \frac{S}{n} = \sum_i r_i s_i = \sum_i r_i [\sigma_i(T) - R \ln p_i] \quad ,$$

Calori specifici molari di una miscela di gas ideali

Entropia di mescolamento

Entropia molare di una miscela di gas ideali

che dalle entropie molari finali (nel senso sopra precisato),

$$S = S' + \Delta S = \sum_i S'_i - R \sum_i n_i \ln r_i = \sum_i n_i s'_i - R \sum_i n_i \ln r_i ,$$

$$s'_i = \sigma_i(T) - R \ln p ,$$

$$s = \frac{S}{n} = \sum_i r_i (s'_i - R \ln r_i) . \quad (13.52)$$

Osserviamo che i ragionamenti fatti hanno valore solo se i gas sono diversi tra loro; essi perdono significato se i gas sono identici, perché perde significato il concetto di mescolamento; in tal caso deve essere $\Delta S = 0$, mentre la formula ricavata darebbe $\Delta S \neq 0$. Questo risultato è noto come *paradosso di Gibbs* ed è risolvibile in quanto le due situazioni non sono paragonabili, nemmeno per estrapolazioni: infatti sperimentalmente è sempre possibile separare due gas diversi, ma non c'è maniera di separare due gas identici. Teoricamente la spiegazione del paradosso di Gibbs si basa sull'indistinguibilità di molecole identiche, che è un concetto fondamentale di meccanica quantistica.

La situazione descritta per l'entropia non si presenta per energia interna ed entalpia in quanto tali grandezze non dipendono dalla pressione ($u_i = u'_i, h_i = h'_i$).

Paradosso di Gibbs

Invece per il calcolo di *energia libera* ed *entalpia libera*, che dipendono dall'entropia, si hanno risultati analoghi a (13.52):

$$F = U - TS , \quad nf = nu - Tns \Rightarrow f = u - Ts = \sum_i r_i u_i - T \sum_i r_i s'_i + RT \sum_i r_i \ln r_i$$

$$= \sum_i r_i (u_i - Ts'_i) + RT \sum_i r_i \ln r_i = \sum_i r_i f'_i + RT \sum_i r_i \ln r_i ,$$

avendo utilizzato (13.50) e (13.52) e definito $f'_i = u_i - T s'_i$, energia libera molare dell'i-esimo componente nella miscela. Pertanto

$$f = \sum_i r_i f_i = \sum_i r_i (f'_i + RT \ln r_i) \quad (13.53)$$

Energia libera molare di una miscela di gas ideali

e analogamente, per l'*entalpia libera molare*,

$$g = \sum_i r_i g_i = \sum_i r_i (g'_i + RT \ln r_i) . \quad (13.54)$$

Entalpia libera molare di una miscela di gas ideali

Le relazioni da (13.50) a (13.54) mostrano che in sostanza le grandezze molari relative alla miscela si calcolano come medie pesate dei valori delle stesse grandezze relative ai singoli componenti, prendendo per pesi le frazioni molari; nel caso di S, F, G bisogna tener conto di termini correttivi se si considerano i valori molari s'_i, f'_i, g'_i , riferiti alle coordinate termodinamiche p, V, T e non i valori s_i, f_i, g_i , riferiti a p_i, V, T .

Esempio 13.17

Una miscela gassosa è costituita da una mole di gas ideale monoatomico ($c_{V,1} = 3R/2$) e da una mole

di gas ideale biatomico ($c_{V,2} = 5R/2$). Essa viene riscaldata isobaricamente dalla temperatura T_1 alla temperatura T_2 . Calcolare le espressioni del calore assorbito, della variazione di energia interna, del lavoro compiuto e della variazione di entropia.

Soluzione

Abbiamo $n_1 = n_2 = 1$, $n = n_1 + n_2 = 2$, $r_1 = r_2 = 1/2$ e quindi

$$c_V = \frac{1}{2} \frac{3}{2} R + \frac{1}{2} \frac{5}{2} R = 2R \Rightarrow c_p = 3R.$$

Allora

$$Q = nc_p \Delta T = 6R (T_2 - T_1) \quad , \quad \Delta U = nc_V \Delta T = 4R (T_2 - T_1) \quad ,$$

$$W = Q - \Delta U = 2R (T_2 - T_1) = nR\Delta T.$$

Nella variazione di entropia il termine $R \ln r_i$ è costante, per cui

$$\Delta S = n\Delta s = n \sum_i r_i \Delta s_i' = n \sum_i r_i c_{p,i} \ln \frac{T_2}{T_1} = \ln \frac{T_2}{T_1} \sum_i n_i c_{p,i} = nc_p \ln \frac{T_2}{T_1} = 6R \ln \frac{T_2}{T_1} \quad ,$$

come si poteva calcolare direttamente dalla definizione $dS = (dQ/T)_{\text{rev}}$. Vediamo che, una volta stabilito il metodo di calcolo di c_V e c_p , la miscela si può trattare come un unico gas ideale.

Visualizza Soluzione

13.6 Sistemi aperti. Potenziale chimico. Regola delle fasi

In tutte le situazioni esaminate finora, il sistema in esame scambiava soltanto energia con l'ambiente, ma la sua massa era ritenuta costante. Pur conservando questa proprietà di costanza della massa totale, sono molto comuni i casi in cui un sistema è suddiviso in più parti, tra le quali può esserci anche scambio di massa: ciò avviene, per esempio, nel cambiamento di fase di una sostanza, nella dissoluzione di una sostanza in un'altra, nei processi di diffusione; anche una reazione chimica provoca una situazione di questo tipo, in cui alcune sostanze presenti nello stato iniziale possono scomparire del tutto o in parte per dare luogo ad altre sostanze.

Un *sistema chiuso* può quindi essere composto da *sottoinsiemi aperti*, e si può pensare di essere sempre in tali condizioni anche in presenza di un unico *sistema aperto* se si include l'ambiente. Limitandoci ai sistemi pVT vediamo che per la descrizione di un *sistema aperto* non sono più sufficienti due sole variabili termodinamiche scelte nella terna p, V, T , ma ne è necessaria un'altra per esprimere la quantità di materia contenuta nel sistema (o la massa).

La (13.28) deve allora essere scritta in forma più generale,

$$dU = TdS - pdV + \mu dn \quad , \quad (13.55)$$

Potenziale chimico

dove l'ultimo termine esprime il contributo alla variazione di energia interna del sistema dovuto al cambiamento dn del numero di moli; assumiamo $dn > 0$ se la materia entra nel sistema. In conseguenza di (13.55) la variazione di entalpia si scrive

$$dH = TdS + Vdp + \mu dn \quad (13.56)$$

e analogamente

$$dF = -SdT - pdV + \mu dn \quad , \quad (13.57)$$

$$dG = -SdT + Vdp + \mu dn \quad . \quad (13.58)$$

La grandezza intensiva μ così definita si chiama *potenziale chimico*. Se confrontiamo le relazioni appena scritte con l'espressione del differenziale totale di una funzione troviamo che

$$\mu = \left(\frac{\partial U}{\partial n} \right)_{S,V} = \left(\frac{\partial H}{\partial n} \right)_{S,p} = \left(\frac{\partial F}{\partial n} \right)_{T,V} = \left(\frac{\partial G}{\partial n} \right)_{T,p} \quad . \quad (13.59)$$

Il potenziale chimico del sistema esprime così la variazione di una delle grandezze U, H, F, G rispetto alla variazione del numero di moli, calcolata

mantenendo costanti le relative variabili naturali.

Considerando in particolare l'energia libera e l'entalpia libera, la loro natura di grandezze estensive permette di scrivere $F = nf$ e $G = ng$ per cui, da (13.59),

$$\mu = \left(\frac{\partial F}{\partial n} \right)_{T,V} = f \quad , \quad (13.60)$$

$$\mu = \left(\frac{\partial G}{\partial n} \right)_{T,p} = g \quad . \quad (13.61)$$

In un processo a temperatura e volume costanti il potenziale chimico coincide con l'energia libera molare, mentre in un processo a temperatura e pressione costanti esso coincide con l'entalpia libera molare.

Prendiamo in esame un sistema chiuso formato da due sottosistemi, costituiti dalla stessa sostanza e messi a contatto, cosicché possano scambiare materia (contatto chimico o diffusivo): essi sono posti in un recipiente a pareti rigide, di volume totale V , e sono separati da una parete porosa permeabile alla sostanza; inoltre essi sono alla stessa temperatura T , che è mantenuta costante tramite il contatto termico con un serbatoio. Sappiamo dal paragrafo 13.1 che lo stato di equilibrio, a T e V costanti, è quello in cui l'energia libera del sistema è minima, fatto che si esprime con la condizione $dF = 0$.

L'energia libera varia durante il processo per effetto del cambiamento del numero di moli n_1 e n_2 delle due parti, cambiamento però soggetto alla condizione $n_1 + n_2 = \text{costante}$. Pertanto, all'equilibrio abbiamo

$$dF = dF_1 + dF_2 = \left(\frac{\partial F_1}{\partial n_1} \right)_{T,V} dn_1 + \left(\frac{\partial F_2}{\partial n_2} \right)_{T,V} dn_2 = 0 \quad .$$

Questa relazione è compatibile con $dn_1 + dn_2 = 0$ solo se

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial n_1} \right)_{T,V} = \left(\frac{\partial F_2}{\partial n_2} \right)_{T,V}$$

ovvero, da (13.59), solo se

$$\mu_1 = \mu_2 \Rightarrow f_1 = f_2 \quad .$$

Nello stato di equilibrio del processo considerato i potenziali chimici delle due parti, ovvero le energie libere molari, devono essere uguali.

Il flusso spontaneo di materia, in assenza di forze esterne, avviene dalla zona a potenziale chimico maggiore a quella a potenziale chimico minore. Infatti in una fase intermedia del processo deve essere $dF < 0$, cioè

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial n_1} \right)_{T,V} dn_1 + \left(\frac{\partial F_2}{\partial n_2} \right)_{T,V} dn_2 < 0 \quad .$$

Da $dn_1 + dn_2 = 0$ si ha $dn_2 = -dn_1$ e quindi

$$(\mu_1 - \mu_2) dn_1 < 0 \quad .$$

Il flusso di materia dalla parte 1 alla parte 2, che comporta $dn_1 < 0$, si ha solo se $\mu_1 > \mu_2$; esso termina quando il potenziale chimico, ovvero l'energia libera molare, sono uniformi in tutto il sistema. In questi processi il potenziale chimico rispetto al flusso di materia gioca lo stesso ruolo della temperatura rispetto al flusso di calore.

Esempio 13.18

Un gas ideale è contenuto in un recipiente a pareti rigide di volume V , suddiviso in due parti separate da una parete rigida permeabile al gas; nella parte 1, di volume V_1 , ci sono $n_{1,0}$ moli di gas alla pressione p_1 , nella parte 2, di volume V_2 , $n_{2,0}$ moli di gas alla pressione p_2 . La temperatura del sistema è mantenuta costante al valore T . Determinare, nello stato finale di equilibrio, la distribuzione del numero di moli.

Soluzione

In equilibrio deve essere $\mu_1 = \mu_2$, cioè $f_1 = f_2$, ovvero

$$u_1 - Ts_1 = u_2 - Ts_2 \quad .$$

Siccome il gas è lo stesso e la temperatura è la stessa ovunque, l'energia interna molare, che dipende solo dalla temperatura, deve essere la stessa dalle due parti, $u_1 = u_2$; ciò comporta $s_1 = s_2$. L'entropia molare dipende da due variabili, per esempio temperatura e pressione: ne segue che la pressione nelle due parti deve essere la stessa e quindi

$$\frac{n_1 R T}{V_1} = \frac{n_2 R T}{V_2} \Rightarrow \frac{n_1}{n_2} = \frac{V_1}{V_2} \quad , \quad \frac{n_1}{V_1} = \frac{n_2}{V_2} \quad .$$

Nello stato di equilibrio il numero di moli di una parte è proporzionale al volume di quella parte, cioè la densità è costante in tutto il sistema.

Il flusso avviene dalla parte a pressione maggiore a quella a pressione minore: infatti, sappiamo che durante il processo $dF < 0$, cioè $(f_1 - f_2) dn_1 < 0$, ovvero $f_1 > f_2$ se il flusso è dalla parte 1 alla parte 2.

Poiché è sempre $u_1 = u_2$ abbiamo

$$u_1 - Ts_1 > u_2 - Ts_2 \Rightarrow -Ts_1 > -Ts_2 \Rightarrow s_1 < s_2 \quad .$$

Per l'espressione dell'entropia ricorriamo a (12.27):

$$c_p \ln T - R \ln p_1 < c_p \ln T - R \ln p_2 \Rightarrow p_1 > p_2 \quad .$$

Notiamo che, per tutto il sistema, la condizione $dF = dU - Tds < 0$ corrisponde a $ds > 0$ essendo $dU = 0$: ciò è in accordo col fatto che il processo è irreversibile e avviene senza scambio di calore (oltre a $dU = 0$ è anche $dW = 0$). Bisogna dire che i risultati si potevano ottenere direttamente dalla definizione di equilibrio termodinamico (che deve essere anche meccanico); però così abbiamo verificato, in un caso semplice, l'applicazione di un metodo generale.

sono c e in totale il numero di equazioni è $c(f - 1)$.

I potenziali chimici sono funzioni di p , T e delle frazioni molari $r_i = n_i/n$ (n_i è il numero di moli dell' i -esimo componente); le frazioni molari sono c , ma devono soddisfare alla condizione $\sum_i r_i = 1$, per cui quelle indipendenti sono $c - 1$; il ragionamento va esteso a tutte le fasi e quindi in totale abbiamo $(c - 1)f$ variabili indipendenti più pressione e volume, cioè $(c - 1)f + 2$.

La differenza tra il numero di variabili indipendenti e il numero di equazioni è detta *varianza del sistema* (o numero di gradi di libertà del sistema): essa dà il numero di variabili che possono essere fissate arbitrariamente in uno stato di equilibrio del sistema. Dalla differenza di $(c - 1)f + 2$ e $c(f - 1)$ risulta

$$v = c - f + 2 .$$

(13.63)

Regola delle fasi

La (13.63), dovuta a Gibbs, si dice *regola delle fasi*. Vediamo alcuni esempi per chiarirne il significato.

- 1) Sistema omogeneo chimicamente definito: c'è un solo componente ed una sola fase, quindi $v = 2$, si possono fissare arbitrariamente le variabili p e T .
- 2) Sistema omogeneo miscela di due sostanze pure: $c = 2, f = 1, v = 3$; si possono fissare arbitrariamente p, T e il rapporto n_1/n_2 . Se le sostanze sono $m, f = 1, v = m + 1$ in corrispondenza a p, T e $m - 1$ frazioni molari.
- 3) Sostanza pura solida o liquida in equilibrio col suo vapore: $c = 1, f = 2, v = 1$; se è data la temperatura la pressione è fissata e corrisponde alla tensione di vapore a quella temperatura secondo una formula tipo (11.29).
- 4) Sostanza pura in tre fasi diverse (solida, liquida, gassosa) in equilibrio: $c = 1, f = 3, v = 0$. Non c'è alcun grado di libertà, l'equilibrio si ha solo per una particolare coppia valori di temperatura e pressione (*punto triplo*).
- 5) Sistema costituito da due sostanze solubili allo stato liquido, ma insolubili allo stato solido: ci sono due componenti e quattro fasi (solido a , solido b , soluzione liquida, vapore) per cui $v = 0$. Esiste un solo insieme di valori $p, T, n_a/n_b$ per cui le quattro fasi possono coesistere in equilibrio. Tali valori determinano il cosiddetto *punto eutettico* e il rapporto n_a/n_b di equilibrio si dice *composizione eutettica*.

Punto eutettico
Composizione
eutettica

L'insieme degli argomenti trattati fa capire l'importanza del concetto di potenziale chimico nella ricerca degli stati di equilibrio di un sistema pVT , soprattutto a temperatura e pressione costanti.

Come abbiamo già avuto modo di rilevare in altri casi simili, le leggi trovate sono poi di utilità pratica se abbiamo a disposizione espressioni analitiche dei potenziali chimici in funzione di coordinate termodinamiche misurabili. A questo proposito, se si tratta di miscele di gas ideali, tornano utili le espressioni ricavate nel paragrafo 13.5; negli altri casi occorrono opportuni modelli, derivati da ipotesi teoriche o da misure sperimentali. Ricordiamo quanto detto alla fine del paragrafo 10.1: la trattazione termodinamica, per la sua grande generalità, può essere applicata a qualsiasi sistema, però, proprio per questo, non può dare risultati che tengono conto di particolari strutture atomiche o molecolari.

1.1 Introduzione

La meccanica riguarda lo studio del moto di un corpo: essa spiega la relazione che esiste tra le cause che generano il moto e le caratteristiche di questo e la esprime con leggi quantitative. Se il corpo è esteso, come lo sono tutti i corpi materiali, il moto può risultare notevolmente complicato.

Per questa ragione, seguendo un processo molto comune in Fisica, iniziamo lo studio del moto dal più semplice corpo, quello puntiforme, detto *punto materiale* o spesso anche *particella*: si tratta di un corpo privo di dimensioni ovvero che presenti dimensioni trascurabili rispetto a quelle dello spazio in cui può muoversi o degli altri corpi con cui può interagire.

L'introduzione di tale concetto rende innanzitutto più semplice la trattazione di alcuni aspetti di certi problemi. Per esempio, se siamo interessati a studiare il moto della luna intorno alla terra, possiamo considerare in prima approssimazione sia la terra che la luna come punti materiali, dato che le loro dimensioni sono trascurabili rispetto alla distanza. Inoltre, più in generale, lo studio del sistema *punto materiale* permette di definire nel modo più facile alcune grandezze meccaniche fondamentali e di capirne il significato con immediatezza, in assenza delle complicazioni che deriverebbero dalla struttura estesa del corpo.

D'altra parte un corpo esteso solo eccezionalmente si muove come un punto materiale (si parla in tal caso di *traslazione*, come vedremo in seguito); esso può compiere contemporaneamente altri tipi di moto, come *rotazioni* (ad esempio una ruota) o *vibrazioni* (una goccia di liquido che cade). Studieremo pertanto anche il moto dei corpi non puntiformi e capiremo allora l'utilità dello studio preliminare del punto materiale.

L'analisi completa del moto riguarda sia il collegamento del moto stesso alle interazioni del corpo con i corpi circostanti che la descrizione geometrica dell'evoluzione temporale del fenomeno di movimento. Questa parte della meccanica, descrittiva del moto di un corpo, indipendentemente dalle cause che lo determinano, viene detta *cinematica*, mentre il perché del moto viene studiato nella *dinamica*.

Noi cominceremo il nostro studio della meccanica dalla *cinematica del punto*, lo proseguiremo con la *dinamica del punto* e lo concluderemo con la trattazione più generale della *dinamica dei sistemi di punti*, che applicheremo a casi molto diversi tra loro, come i corpi solidi e i fluidi.

Il moto di un punto materiale è determinato se è nota la sua posizione in funzione del tempo in un determinato *sistema di riferimento*, ossia ad esempio

le sue coordinate $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ in un sistema di riferimento cartesiano. Questa scelta, anche se è la più comune, non è unica; in determinate situazioni fisiche possono essere più idonei altri sistemi di riferimento, come quelli basati su coordinate polari.

La *traiettoria* è il luogo dei punti occupati successivamente dal punto in movimento e costituisce una curva continua nello spazio. Lo studio delle variazioni di posizione lungo la traiettoria nel tempo porterà a definire il concetto di *velocità*, mentre lo studio delle variazioni della velocità con il tempo introdurrà la grandezza

accelerazione; si noti che l'occuparsi di variazioni comporterà necessariamente il collegamento con il concetto matematico di *derivata*.

Le *grandezze fondamentali* in cinematica sono pertanto lo *spazio*, la *velocità*, l'*accelerazione* e il *tempo*; quest'ultimo molto spesso viene usato come variabile indipendente, in funzione di cui si esprimono le altre grandezze.

La *quiete* è un particolare tipo di moto in cui le coordinate restano costanti e quindi velocità e accelerazione sono nulle. Dobbiamo però sottolineare, e riprenderemo in dettaglio questo aspetto successivamente, che è necessario specificare sempre il sistema di riferimento rispetto a cui si osserva il moto. Si osservi come un punto in quiete in un sistema di riferimento possa apparire in moto rispetto ad un altro. Oppure si pensi al volo di un uccello visto da una persona ferma o da un'altra persona in un'auto in movimento.

Di norma dunque la traiettoria di una particella in moto ha una forma diversa ed è rappresentata da un'equazione diversa in diversi sistemi di riferimento.

Nei paragrafi successivi svilupperemo i concetti di velocità e accelerazione, considerando in generale le funzioni $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ continue e derivabili. Più avanti, dopo aver trattato la dinamica del punto, ci occuperemo del problema del *moto relativo*, cioè delle relazioni che esistono tra le descrizioni di uno stesso moto visto da due sistemi di riferimento in movimento l'uno rispetto all'altro.

Traiettoria

1.2 Moto rettilineo

Il primo moto che prendiamo in considerazione, sempre iniziando dal caso più semplice, è quello rettilineo. Esso si svolge lungo una retta sulla quale vengono fissati arbitrariamente un'origine e un verso; il moto del punto è descrivibile tramite una sola coordinata $x(t)$. La geometria del moto rettilineo è rappresentata in figura 1.1.

Sperimentalmente $x(t)$ può essere determinata ponendo lungo la retta dei traguardi con dispositivi a cellula fotoelettrica collegati ad un cronometro o per via televisiva o per mezzo di fotografia rapida. Con questi sistemi possiamo ottenere coppie di valori x_i, t_i e ricercare una relazione tra x e t , cioè la funzione $x(t)$. Anche la scelta dell'origine dei tempi è arbitraria: $t = 0$ può coincidere con l'inizio della nostra osservazione, ma ciò non è assolutamente necessario.

Le misure ottenute possono essere rappresentate in un sistema con due assi cartesiani. Sull'asse delle ordinate riportiamo i valori di x e su quello delle ascisse i corrispondenti valori del tempo: la figura si chiama *diagramma orario*. È necessario ovviamente introdurre delle unità di riferimento nei due assi, ad esempio la lunghezza corrispondente ad un intervallo di tempo di un secondo nelle ascisse e quella relativa ad uno spostamento di un metro nelle ordinate.

Nelle figure 1.2, 1.3, 1.4, sono riportate le misure e i diagrammi orari corrispondenti a tre diversi moti di un punto materiale.

Si osservi che in una misura fisica reale ciascun dato è affetto da errori e pertanto i punti che rappresentano le varie misure non si dispongono esattamente su una retta, una parabola o su altri tipi di curve. L'espressione di $x(t)$ è ottenibile solo tramite opportuni metodi di ottimizzazione analitica.

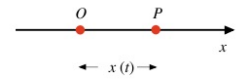


FIGURA 1.1

Diagramma orario

1.3 Velocità nel moto rettilineo

Introduciamo ora il concetto di *velocità media* e *velocità istantanea* nel moto rettilineo. Se al tempo $t = t_1$ il punto si trova nella posizione $x = x_1$ e al tempo $t = t_2$ nella posizione $x = x_2$, $\Delta x = x_2 - x_1$ rappresenta lo spazio percorso nell'intervallo di

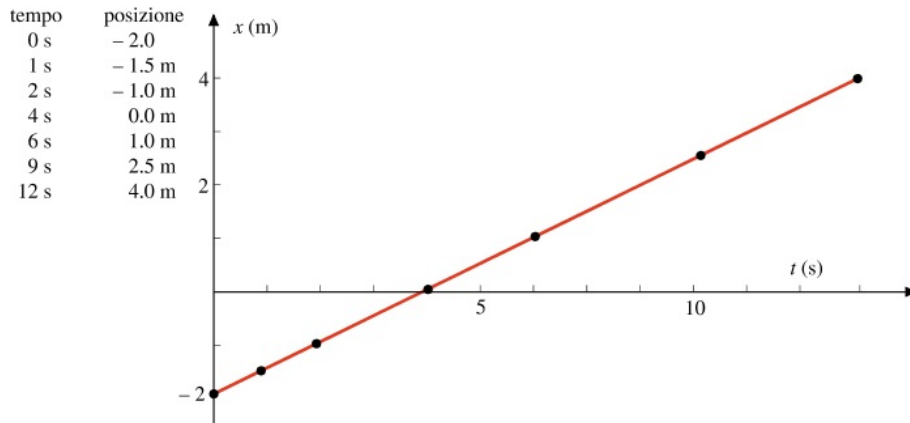


FIGURA 1.2 Al tempo $t = 4\text{ s}$ il punto passa per l'origine; il moto è rappresentabile tramite una relazione lineare tra x e t del tipo $x = at + b$, dove a e b sono due costanti che assumono i valori $a = 0.5\text{ ms}^{-1}$, $b = -2\text{ m}$.

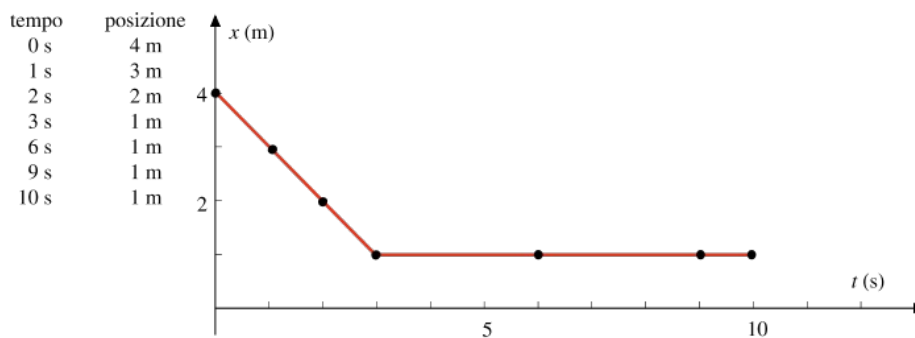


FIGURA 1.3 Il punto nel suo moto si avvicina all'origine con una relazione lineare tra x e t del tipo $x = at + b$, con $a = -1\text{ ms}^{-1}$, $b = 4\text{ m}$. Raggiunta la posizione $x = 1\text{ m}$ si ferma, restando in tale posizione.

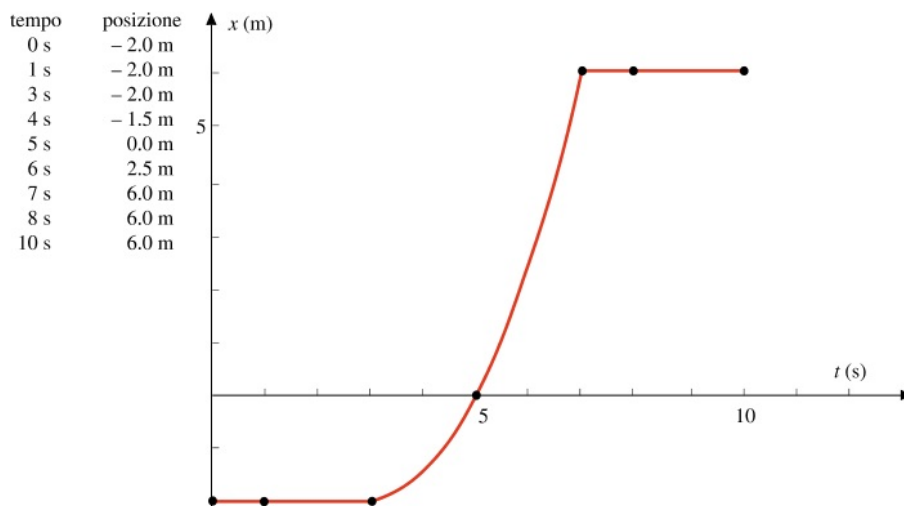


FIGURA 1.4 Nell'intervallo di tempo tra $t = 0$ e $t = 3$ s il punto rimane fermo nella posizione $x = -2$ m, successivamente si muove secondo il verso positivo della retta con una relazione quadratica tra x e t del tipo $x = a + b(t - t_0)^2$, in cui $a = -2$ m, $b = 0.5 \text{ ms}^{-2}$, $t_0 = 3$ s. Nella posizione $x = 6$ m il punto si ferma.

tempo $\Delta t = t_2 - t_1$. Possiamo caratterizzare la rapidità con cui avviene lo spostamento tramite la velocità media

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} .$$

Velocità media

Tale grandezza fornisce una informazione *complessiva*, ma non dà quasi nessuna indicazione sulle caratteristiche effettive del moto.

Per individuare la funzione $x(t)$ e le sue variazioni aumentiamo il numero di misure nell'intervallo di spazio Δx , cioè suddividiamo l'intervallo Δx in numerosi piccoli intervalli $(\Delta x)_1, (\Delta x)_2, \dots, (\Delta x)_i, \dots, (\Delta x)_n$ percorsi rispettivamente negli intervalli di tempo $(\Delta t)_1, (\Delta t)_2, \dots, (\Delta t)_i, \dots, (\Delta t)_n$. Le corrispondenti velocità medie sono $v_i = (\Delta x)_i / (\Delta t)_i$; in generale $v_1, v_2, \dots, v_i, \dots, v_n$ non sono eguali tra loro e a v_m . Infatti in un generico moto rettilineo la velocità non è costante nel tempo (ciò comporterebbe appunto $v_1 = v_2 = \dots = v_i = \dots = v_n = v_m$).

Il processo di suddivisione in spazi sempre più piccoli può essere continuato e il limite a tale procedura è posto dalla capacità di apprezzare piccoli intervalli da parte degli strumenti utilizzati per la misura degli intervalli di spazio e di tempo. In ogni caso se Δx risulta suddiviso in un numero elevatissimo di intervallini dx , ciascuno percorso nel tempo dt , si può definire la velocità istantanea, ad un istante t , del punto in movimento come il rapporto $v = dx/dt$, calcolato in quel determinato istante.

Il metodo che abbiamo descritto in un modo abbastanza semplice consiste matematicamente nel calcolare il limite per $\Delta t \rightarrow 0$ del rapporto incrementale $\Delta x/\Delta t$. Pertanto la velocità di un punto nel moto rettilineo è data dalla derivata dello spazio rispetto al tempo:

$$v = \frac{dx}{dt} ; \quad (1.1)$$

Velocità istantanea

la *velocità istantanea*, cioè, *rappresenta la rapidità di variazione temporale della posizione nell'istante t considerato*.

Il segno della velocità indica il verso del moto sull'asse x : se $v > 0$ la coordinata x cresce (nella figura 1.1 il punto va da sinistra verso destra), mentre se $v < 0$ il moto avviene nel verso opposto.

A sua volta la velocità può essere funzione del tempo $v(t)$; vedremo esempi specifici nei paragrafi 1.5, 1.6, 1.7. Nel caso particolare in cui sia $v = \text{costante}$ si parla di *moto rettilineo uniforme*.

In conclusione, se è nota, perché calcolata o misurata, la funzione $x(t)$ ovvero, come si dice, se è nota la legge oraria, si può ottenere la velocità

istantanea con l'operazione di derivazione (1.1).

Possiamo d'altra parte risolvere il problema inverso, cioè ricavare la funzione $x(t)$ se è nota la dipendenza dal tempo della velocità istantanea, $v(t)$. Supponiamo che il punto materiale si trovi nella posizione x al tempo t e nella posizione $x + dx$ al tempo $t + dt$; dalla (1.1) vediamo che lo spostamento infinitesimo dx è eguale al prodotto del tempo dt impiegato a percorrerlo per il valore della velocità al tempo t :

$$dx = v(t) dt ,$$

qualunque sia la dipendenza della velocità dal tempo. Lo spostamento complessivo sulla retta su cui si muove il punto, in un intervallo finito di tempo $\Delta t = t - t_0$, è dato dalla somma di tutti i successivi valori dx . Per fare il calcolo utilizziamo la operazione di integrazione: $\Delta x = \int_{x_0}^x dx = \int_{t_0}^t v(t) dt$

Il primo integrale è immediato e vale $x - x_0$; pertanto

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t v(t) dt . \quad (1.2)$$

Questa è la relazione generale che permette il calcolo dello spazio percorso nel moto rettilineo, qualunque sia il tipo di moto. Il termine x_0 rappresenta la *posizione iniziale* del punto, occupata nell'istante iniziale t_0 . Pertanto per calcolare $x(t)$, nota $v(t)$, è necessario conoscere la condizione iniziale del moto. Matematicamente la presenza della costante x_0 è la conseguenza del fatto che abbiamo risolto un'equazione differenziale del primo ordine, quale è la (1.1); si veda a questo proposito l'appendice A.

Osserviamo esplicitamente che Δx rappresenta lo spostamento complessivo e non lo spazio percorso, nel senso che ora precisiamo: se per esempio il punto avesse eseguito una serie di spostamenti che alla fine l'avessero riportato alla posizione iniziale, Δx risulterebbe nullo, anche se il punto nel suo movimento ha percorso vari spazi; Δx cioè non è la somma dei moduli degli spostamenti, bensì la somma algebrica (si veda l'importanza del segno della velocità).

Ricordando la definizione di velocità media, $v_m = (x - x_0)/(t - t_0)$, da (1.2) ricaviamo la relazione tra velocità media e velocità istantanea:

$$v_m = \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^t v(t) dt \quad . \quad (1.3)$$

La (1.3) coincide con la definizione matematica di valor medio di una funzione in un dato intervallo; pertanto la velocità media, pari al rapporto tra lo spazio complessivamente percorso e il tempo impiegato a percorrerlo, è eguale al valor medio della velocità istantanea nell'intervallo di tempo considerato. Nell'esempio visto sopra di un punto che parte da una certa posizione e vi ritorna dopo un certo tempo, la velocità media è nulla mentre la velocità istantanea deve avere valori diversi da zero e certamente cambia segno almeno una volta. Da questa e da simili situazioni deriva l'affermazione iniziale che la velocità media non dà informazioni sulle possibili varie fasi del moto effettivo; d'altra parte essa è utile per valutare globalmente la rapidità di uno spostamento.

Moto rettilineo uniforme

Come prima applicazione di (1.2) consideriamo il caso particolare del *moto rettilineo uniforme*, in cui $v = \text{costante}$. Si ha:

$$x(t) = x_0 + v \int_{t_0}^t dt = x_0 + v(t - t_0) \quad , \quad x(t) = x_0 + v t \quad . \quad (1.4)$$

La seconda espressione vale se $t_0 = 0$.

Le (1.4) si chiamano leggi orarie o equazioni del moto rettilineo uniforme; esse mostrano che in questo moto lo spazio è una funzione lineare del tempo: in tempi eguali sono percorsi spazi eguali (si rivedano le figure 1.2 e 1.3). La velocità istantanea, costante, coincide con la velocità media.

Esempio 1.1

Due punti materiali si trovano nell'istante iniziale $t = 0$ sullo stesso asse x , rispettivamente nella posizione x_1 con velocità v_1 e nella posizione $x_2 > x_1$ con velocità v_2 . Il moto dei punti è uniforme. Discutere quali sono le situazioni in cui i punti ad un certo istante si urtano e determinare dove e quando si urtano.

Soluzione

I punti si urtano in questi tre casi

1. $v_1 > 0, v_2 < 0$ (i punti si vengono incontro);
2. $v_1 > 0, v_2 > 0, v_1 > v_2$ (entrambi i punti si muovono nel verso positivo, il primo punto che è più indietro deve essere più veloce);

3. $v_1 < 0, v_2 < 0, v_1 > v_2$ (caso speculare rispetto al precedente).

La soluzione può essere impostata in modo generale. Le equazioni del moto dei due punti, che danno la posizione rispetto all'origine, sono secondo (1.4)

$$x = x_1 + v_1 t \quad , \quad x = x_2 + v_2 t \quad .$$

Nell'istante in cui i punti si urtano le loro coordinate devono essere eguali; imponendo questa condizione si ha il tempo dell'urto:

$$t = \frac{x_2 - x_1}{v_1 - v_2} \quad .$$

Sostituendo questo tempo in una qualsiasi delle due leggi orarie si trova la posizione nell'istante dell'urto:

$$x = \frac{v_1 x_2 - v_2 x_1}{v_1 - v_2} \quad .$$

Nelle figure 1.5 sono rappresentati i tre casi; le posizioni iniziali sono $x_1 = 3\text{m}$, $x_2 = 8\text{m}$, le velocità sono indicate accanto a ciascuna figura (per le unità di misura si veda la nota nel successivo paragrafo). Le rette rappresentano i diagrammi orari dei moti (grafici di $x(t)$ in funzione del tempo); la pendenza rispetto all'asse t è proprio la velocità, in base alla definizione (1.1) ovvero alla legge (1.4). Si noti come, utilizzando qualitativamente il diagramma orario, si potessero individuare subito i tre casi richiesti e gli altri tre in cui non si ha urto (rette divergenti nel semipiano $t \geq 0$).

Nascondi soluzione

1.4 Accelerazione nel moto rettilineo

Abbiamo detto che nel caso più generale di moto rettilineo la velocità è funzione del tempo, $v(t)$. Se in un determinato intervallo di tempo Δt essa varia di una quantità Δv , possiamo definire la grandezza *accelerazione media* come $a_m = \Delta v / \Delta t$. Con un procedimento analogo a quello utilizzato per passare dal concetto di velocità media a quello di velocità istantanea definiamo l'*accelerazione istantanea*, cioè la *rapidità di variazione temporale della velocità*, come

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad (1.5)$$

dove nel secondo passaggio abbiamo usato (1.1).

Se $a = 0$ la velocità è costante (moto rettilineo uniforme); quando a è positiva la velocità cresce nel tempo mentre per $a < 0$ la velocità decresce. Si faccia attenzione che è il segno algebrico della velocità istantanea e non quello dell'accelerazione a fornire il verso del moto.

Nota la dipendenza della velocità dal tempo abbiamo dunque visto come con l'operazione di derivazione si ottenga la funzione $a(t)$. Se invece conosciamo $a(t)$ possiamo ricavare $v(t)$ tramite l'integrazione dell'equazione differenziale (1.5):

da $dv = a(t) dt$ scriviamo $\Delta v = \int_{v_0}^v dv = \int_{t_0}^t a(t) dt$ e pertanto

$$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^t a(t) dt, \quad (1.6)$$

relazione generale che permette il calcolo della velocità se è nota l'accelerazione in funzione del tempo. Come visto precedentemente, dato che è stata risolta un'equazione differenziale del prim'ordine abbiamo nella soluzione una costante v_0 , che rappresenta la velocità del punto all'istante iniziale t_0 . Per calcolare esplicitamente $v(t)$ si devono conoscere la forma analitica di $a(t)$ e la *velocità iniziale* v_0 . Vale inoltre per Δv la stessa osservazione fatta per Δx calcolato con (1.2): si tratta sempre di variazioni algebriche complessive.

Anticipando quanto vedremo nel capitolo 2, osserviamo che l'accelerazione è una grandezza molto importante in quanto essa è legata dalla legge di Newton, $F = ma$, all'interazione del punto materiale di massa m con l'esterno, espressa dalla forza F . Quindi la conoscenza della legge oraria $x(t)$ ci permette di ricavare, derivando, $v(t)$ e $a(t)$ e conseguentemente la forza $F(t)$ che agisce sul punto. Viceversa se è nota la forza agente $F(t)$ determiniamo $a(t)$ e da questa, integrando, $v(t)$ e $x(t)$ purché siano note le condizioni iniziali, cioè i valori della velocità e della posizione del punto nell'istante iniziale t_0 .

Supponiamo ora di trovarci in una situazione fisica in cui sia nota la

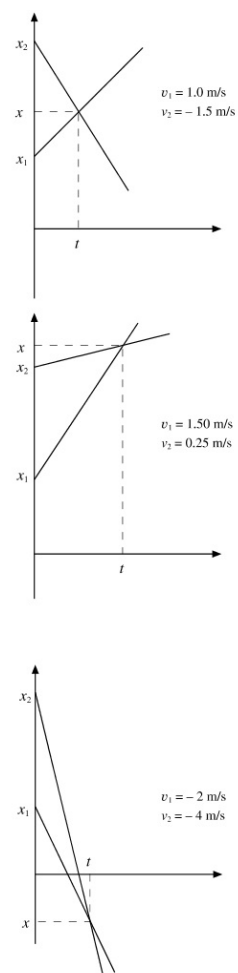


FIGURA 1.5
(Esempio 1.1)

dipendenza dell'accelerazione dalla posizione, cioè la funzione $a(x)$. In tal caso è possibile ricavare il valore della velocità in ogni posizione x , $v(x)$, utilizzando il concetto matematico di funzione di funzione.

Infatti se ad un certo istante t il punto occupa una determinata posizione x , con un valore v della velocità e a dell'accelerazione, queste si possono pensare come funzioni della posizione oltre che del tempo e si può scrivere $v(t) = v[x(t)]$, $a(t) = a[x(t)]$. Deriviamo la prima rispetto al tempo sfruttando la regola di derivazione delle funzioni di funzioni:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} v[x(t)] = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} .$$

Quindi $a = v \frac{dv}{dx}$ MathType@MTEF@5@5@+= feaagKart1ev2aaatCvAUfeBSjuyZL2yd9gzLbvyNv2CaerbuLwBLn hiov2DGi1BTfMBaeXatLxBI9gBaerbd9wDYLwzYbItLDharqqtubsr 4rNCHbGeaGqiVuoJe9sqqrpepCoxbbL8F4rqqrFfpeea0xe9Lq=Jc9 vqaqpepmoxbba9pwe9Q8fso=yqaqpepae9pg0FirpepeKkFr0xfr=x fr=xb9adbaqaaeGaciGaaiaabeqaamaabaabaaGcbaGaamyiaiabg2 da9iaadAhadaWcaaqaiaadsgacaWG2baabaGaamizaiaadIhaaaaa aa@3CB7@

che scriviamo $a dx = v dv$: se dalla posizione x , dove il punto dx possiede la velocità v e l'accelerazione a , si ha uno spostamento dx , il punto subisce una variazione di velocità dv ; dx e dv sono legati dalla relazione data. Integrando \int_x

$\int_x a(x) dx = \int_{v_0}^v v dv$ MathType@MTEF@5@5@+= feaagKart1ev2aaatCvAUfeBSjuyZL2yd9gzLbvyNv2CaerbuLwBLn hiov2DGi1BTfMBaeXatLxBI9gBaerbd9wDYLwzYbItLDharqqtubsr 4rNCHbGeaGqiVuoJe9sqqrpepCoxbbL8F4rqqrFfpeea0xe9Lq=Jc9 vqaqpepmoxbba9pwe9Q8fso=yqaqpepae9pg0FirpepeKkFr0xfr=x fr=xb9adbaqaaeGaciGaaiaabeqaamaabaabaaGcbaWaa8qmaeaaca WGHbWaaeWaaeaacaWG4baacaGLOaGaayzkaaaaleaacaWG4bWaaSba aWqaaiaaicdaaeqaaaWcbaGaamiEaaqdcqGHRiI8aOGaaGPaVlaayk W7caWGKbGaamiEaiaaykW7cqGH9aqpdaWdXbqaaiaadAhacaaMc8Ua amizaiaadAhaaSqaaiaadAhadaWgaaadbaGaaGimaaqabaaaleaaca

WG2baaniabgUIiYdaaaa@4FC9@ ed esplicitando il secondo integrale si ottiene:

$$\int_{x_0}^x a(x) dx = \frac{1}{2} v^2 - \frac{1}{2} v_0^2 ; \quad (1.7)$$

v_0 è la velocità del punto nella posizione x_0 .

La conoscenza della dipendenza dell'accelerazione dalla posizione, $a(x)$, cioè di come varia l'interazione del punto materiale con l'esterno, $F(x)$, permette il calcolo della variazione della velocità nel passaggio del punto dalla posizione x_0 alla posizione x . Poiché la relazione è quadratica non si ha l'informazione sul segno della velocità, che però è ricavabile considerando i segni di v_0 e di a .

Unità di misura

Quando si introduce una nuova grandezza fisica bisogna sempre precisare come si misura e in che unità è espresso il risultato numerico della misura. Trattiamo questo argomento nell'appendice B, che consigliamo di leggere subito per fissare le idee sulle grandezze assunte come fondamentali e sulla nozione di dimensioni di una grandezza fisica; essa servirà poi come quadro riassuntivo delle unità delle varie grandezze, che definiremo di volta in volta nel testo.

Il moto di un punto è espresso dalla conoscenza della posizione nel tempo e queste due grandezze si misurano, nel sistema internazionale delle unità di misura (S.I.), in metri (m) e in secondi (s) rispettivamente, come già detto nel paragrafo 1.2 a proposito dei diagrammi orari. La velocità e l'accelerazione si possono determinare con misure di spazi percorsi e di tempi impiegati a percorrerli, secondo le definizioni (1.1) e (1.5). Di conseguenza l'unità di misura della velocità è

$$\text{metro/secondo} = \text{m/s} = \text{ms}^{-1} \quad ,$$

dell'accelerazione è

$$(\text{metro/secondo})/\text{secondo} = \text{m/s}^2 = \text{ms}^{-2} \quad .$$

Le unità suddette, per quanto molto usate, non hanno un nome particolare. Per la velocità esiste l'unità pratica chilometro all'ora, km/h:

$$1 \frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{10^3}{3.6 \cdot 10^3} \text{ms}^{-1} = 0.278 \text{ms}^{-1} \Rightarrow 1 \text{ms}^{-1} = 3.6 \frac{\text{km}}{\text{h}} \quad .$$

Moto rettilineo uniformemente accelerato

Riassumendo, il moto rettilineo più generale è *vario*, intendendo con questo termine che l'accelerazione non è costante; se invece l'accelerazione è costante durante il moto, questo si dice *uniformemente accelerato* e la dipendenza della velocità dal tempo è lineare, come si ricava da (1.6):

$$v(t) = v_0 + a(t - t_0) \quad , \quad \text{se } t_0 = 0 \quad v(t) = v_0 + a t \quad . \quad (1.8)$$

Utilizzando (1.2) e (1.8) si calcola la posizione $x(t)$:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t [v_0 + a(t - t_0)] dt = x_0 + \int_{t_0}^t v_0 dt + \int_{t_0}^t a(t - t_0) dt \quad ,$$

$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2} a(t - t_0)^2 \quad ; \quad (1.9)$$

se $t_0 = 0$

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \quad .$$

Dunque nel moto rettilineo uniformemente accelerato la velocità è una funzione lineare del tempo mentre lo spazio è una funzione quadratica del tempo (si riveda la figura 1.4).

Se a è costante la (1.7) diventa

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0) \quad (1.10)$$

Esempio 1.2

Un punto passa per l'origine al tempo $t = 0$ con velocità $v_0 > 0$; per $t > 0$ la dipendenza dell'accelerazione dalla posizione è data da $a = -Ax - B$, con A e B costanti positive. Si determini la posizione in cui il punto si ferma.

Soluzione

Applichiamo la relazione (1.7) con $x_0 = 0$ e velocità finale $v = 0$, dato che il problema richiede la posizione in cui il punto si ferma.

Abbiamo

$$\int_0^x (-Ax - B) dx = -\frac{1}{2} v_0^2$$

e integrando

$$\frac{1}{2} Ax^2 + Bx = \frac{1}{2} v_0^2 \quad .$$

Dalla soluzione di questa equazione di secondo grado si ha la posizione cercata: $x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 + Av_0^2}}{A}$.
L'altra soluzione dà $x < 0$ e non ha significato fisico nel nostro problema.

In generale, per ogni x possiamo calcolare $v(x)$, appunto perché si conosce $a(x)$. Più difficile è calcolare posizione, velocità e accelerazione in funzione del tempo; vedremo nel capitolo 9 la soluzione di questo problema.

Nascondi soluzione

Esempio 1.3

Un'automobile è in grado di passare dalla quiete alla velocità di 100 km/h in t secondi, muovendosi con moto uniformemente accelerato. Esprimere il valore dell'accelerazione e calcolarlo per $t = t_1 = 5$ s e per $t = t_2 = 8$ s. Quanto vale lo spazio percorso nei due casi?

E la velocità media?

Soluzione

Utilizziamo la relazione (1.8) con $v_0 = 0$ per cui $a = v/t$. Trasformiamo la velocità finale nell'unità m/s, $100 \text{ km/h} = 27.8 \text{ m/s}$. Pertanto:

$$\text{con } t_1 = 5 \text{ s} \quad a_1 = \frac{27.8}{5} = 5.6 \text{ m/s}^2 \quad ,$$

$$\text{con } t_2 = 8 \text{ s} \quad a_2 = \frac{27.8}{8} = 3.5 \text{ m/s}^2 \quad .$$

Gli spazi necessari per raggiungere nel tempo dato la velocità voluta sono:

$$x_1 = \frac{1}{2} a_1 t_1^2 = 70 \text{ m} \quad , \quad x_2 = \frac{1}{2} a_2 t_2^2 = 112 \text{ m} \quad .$$

Nel moto uniformemente accelerato

$$v_m = \frac{x - x_0}{t} = \frac{1}{t} (v_0 t + \frac{1}{2} a t^2) = v_0 + \frac{1}{2} a t = v_0 + \frac{1}{2} (v - v_0) = \frac{v_0 + v}{2} \quad .$$

Per il caso in esame v_0 e v sono fissate e quindi si ottiene lo stesso risultato sia con t_1 che con t_2 : $v_m = 13.9 \text{ m/s} = 50 \text{ km/h}$.

Nascondi soluzione

Esempio 1.4

Un punto materiale parte dall'origine con velocità iniziale v_0 positiva ed è sottoposto ad un'accelerazione negativa $-a$ costante. Calcolare la massima distanza dall'origine raggiunta dal punto lungo il semiasse positivo, l'istante t_1 in cui si ferma, l'istante t_2 in cui ripassa per l'origine e la velocità che ha per $t = t_2$.

Soluzione

L'equazione del moto (1.9) è $x = v_0 t - \frac{1}{2} a t^2$ MathType@MTEF@5@5@+= feaagKart1ev2aaatCvAUfeBSjuyZL2yd9gzLbvyNv2CaerbuLwBLn hiov2DGi1BTfMBaeXatLxBI9gBaerbd9wDYLwzYbItLDharqqtubsr 4rNCHbGeaGqiVu0Je9sqqrpepCoxbbL8F4rqqrFfpeea0xe9Lq=Jc9 vqaqpepmoxbba9pwe9Q8fso=yqaqpepae9pg0FirpepeKkFroxfr=x fr=xb9adbaqaeeGaciGaaiaabeqaamaabaabaaGcbaGaamiEaiaayk W7caaMc8Uaeyypa0JaaGPaVlaaykW7caWG2bWaaSbaaSqaiaaica daaaGaamyiaaadshadaahaaWcbeqaiaaikaadaaaaaa@474B@ , la velocità varia nel tempo secondo (1.8), $v = v_0 - at$, e si annulla per $t = t_1 = v_0/a$; in questo istante il punto si ferma e torna verso l'origine; la distanza dall'origine è

$$x(t_1) = v_0 \left(\frac{v_0}{a} \right) - \frac{1}{2} a \left(\frac{v_0}{a} \right)^2 = \frac{v_0^2}{2a} \quad ;$$

lo stesso risultato si ottiene da (1.10) ponendo $v = 0$.

Il punto ripassa nell'origine quando $v_0 - at = 0$, che ammette la soluzione $t = 0$ (istante iniziale) e la soluzione

$$t = t_2 = \frac{2v_0}{a} = 2t_1 \quad ;$$

il tempo per andare dall'origine a $x = x(t_1)$ è lo stesso che per ritornare da questa posizione all'origine. Per $t > t_2$ il moto avviene lungo il semiasse negativo e il punto si allontana indefinitamente dall'origine.

La velocità per $t = t_2$ è

$$v(t_2) = v_0 - at_2 = v_0 - a\left(\frac{2v_0}{a}\right) = -v_0 \quad ,$$

eguale ed opposta alla velocità iniziale. Cioè il punto ripassa per l'origine con la stessa velocità in modulo.

Questi risultati erano prevedibili semplicemente considerando che nel tratto da $x = 0$ a $x = x_1$ e da x_1 a 0 l'accelerazione, in modulo, è la stessa; quindi, in modulo, la variazione di velocità è la stessa (da v_0 a zero e da zero a v_0), secondo (1.10); ne consegue che eguale è il tempo di percorrenza, da (1.8).

L'andamento in funzione del tempo di accelerazione, velocità e posizione è mostrato in figura, con $a = 1 \text{ m/s}^2$ e $v_0 = 2 \text{ m/s}$.

Nascondi soluzione

Esempio 1.5

Due punti materiali si muovono sullo stesso asse nello stesso verso con velocità costanti v_1 e v_2 ; il primo punto insegue il secondo e può raggiungerlo, in quanto $v_1 > v_2$. All'istante $t = 0$, quando la distanza tra i due punti è d , il primo punto inizia a frenare uniformemente (accelerazione costante e negativa, che scriviamo $-a$). Determinare quale relazione deve esistere tra v_1 , v_2 , d , a affinché il primo punto non tamponi il secondo e calcolare il tempo di frenata.

Soluzione

La condizione di non tamponamento implica che il primo punto raggiunga il secondo avendo proprio la velocità v_2 e non una velocità maggiore. Deve quindi essere:

$$v_1 - at = v_2 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{v_1 - v_2}{a} \quad ,$$

durata della frenata uniforme. Nell'istante t in cui il primo punto raggiunge il secondo la coordinata di entrambi è

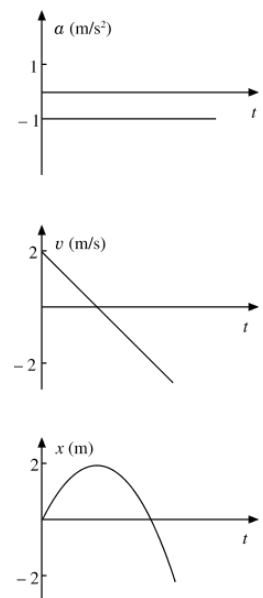


FIGURA 1.6
(Esempio 1.4)

$$x_1 + v_1 t - \frac{1}{2} a t^2 = x_2 + v_2 t \quad ,$$

dove x_1 e x_2 sono le posizioni al tempo $t = 0$. Dall'eguaglianza, ricordando che $x_2 - x_1 = d$, si ha

$$(v_1 - v_2)t - \frac{1}{2} a t^2 = d \quad ;$$

si inserisce il valore del tempo di frenata e si trova

$$d = \frac{(v_1 - v_2)^2}{2a} \quad .$$

Un'applicazione pratica è la seguente: un automobilista che procede ad una certa velocità (v_1) si accorge che più avanti c'è un'altra auto che procede a velocità minore (v_2). In linea di principio, se si inizia a frenare quando la distanza è d , c'è sempre una soluzione per a , però nella pratica se $v_1 - v_2$ è grande e d è piccola, la soluzione potrebbe corrispondere a una decelerazione che il sistema frenante di un'auto non può sviluppare. Un valore indicativo di a è 4 m/s^2 ; con $v_1 = 100 \text{ km/h}$ e $v_2 = 50 \text{ km/h}$, $v_1 - v_2 = 13.9 \text{ m/s}$ e $d = 24 \text{ m}$: se si inizia a frenare a distanza minore l'urto è inevitabile.

Nel caso di ostacolo fermo ($v_2 = 0$) la formula precedente dà lo spazio di arresto: $d = v_1^2 / 2a$. A 100 km/h e con $a = 4 \text{ m/s}^2$ risulta $d = 96.6 \text{ m}$.

Questi calcoli non tengono conto del tempo di reazione Δt (tra la percezione dell'ostacolo e l'azione sul freno), durante il quale i punti percorrono gli spazi $v_1 \Delta t$ e $v_2 \Delta t$, per cui la loro distanza diminuisce di $(v_1 - v_2) \Delta t$. Tale valore va aggiunto a d . Con $\Delta t = 1 \text{ s}$ la correzione, nei due casi visti, è di 13.9 m e 27.8 m .

Nascondi soluzione

Esempio 1.6

Un punto materiale parte dall'origine al tempo $t = 0$ con velocità iniziale di 2 m/s nel verso delle x negative. Esso è sottoposto ad un'accelerazione non costante $a = kt$ con $k = 0.1 \text{ m/s}^3$. Determinare l'istante t_1 e la posizione x_1 in cui il punto si ferma, l'istante t_2 in cui il punto ripassa nell'origine e la velocità v_2 in quell'istante, l'espressione generale della velocità media.

Soluzione

Applichiamo (1.6) con $a = kt$ e (1.2):

$$v = -v_0 + \frac{kt^2}{2} \quad , \quad x = -v_0 t + \frac{kt^3}{6} \quad ;$$

abbiamo tenuto conto della condizione iniziale $x = 0$ per $t = 0$ e del fatto che la velocità iniziale è negativa ($-v_0 = -2$ m/s). Il punto inizia a muoversi nel verso delle x negative e rallenta fino a fermarsi in quanto a è positiva. L'arresto si ha per

$$v = 0 \Rightarrow \frac{kt_1^2}{2} = v_0 \quad , \quad t_1 = \sqrt{\frac{2v_0}{k}} = 6.32 \text{ s} \quad ,$$

nella posizione

$$x_1 = -v_0 t_1 + \frac{kt_1^3}{6} = -\frac{8}{9k} v_0^{3/2} = -8.43 \text{ m} \quad .$$

Passando dall'origine a x_1 l'accelerazione aumenta da zero a $kt_1 = 0.63$ m/s².

Il punto ripassa nell'origine ($x = 0$) quando

$$\frac{kt_2^3}{6} = v_0 t_2 \Rightarrow t_2 = \sqrt{\frac{6v_0}{k}} = \sqrt{3} t_1 = 10.95 \text{ s} < 2 t_1 .$$

La velocità nell'origine vale

$$v = -v_0 + \frac{kt_2^2}{2} = 2v_0 > v_0 \quad .$$

Per $t = t_2$ l'accelerazione vale $kt_2 = 1.1$ m/s². È proprio il continuo aumento dell'accelerazione a far sì che il tempo di ritorno sia minore di quello di andata e che $v(t_2)$ sia maggiore di v_0 ; si confronti con i risultati dell'esempio 1.4, in cui l'accelerazione è costante. In figura sono riportati i grafici di $a(t)$, $v(t)$, $x(t)$. Le velocità medie si calcola così:

$$v_m = \frac{x - x_0}{t} = \frac{v(0)t + kt^3/6}{t} = v(0) + \frac{kt^2}{6} = v(0) + \frac{1}{3} [v(t) - v(0)] = \frac{2v(0) + v(t)}{3} \quad .$$

Si noti la differenza con quanto calcolato nell'esempio 1.3 per il moto uniformemente accelerato.

Nascondi soluzione

Negli esempi appena visti abbiamo mostrato come si applicano le leggi del moto rettilineo e come si rappresentano graficamente i risultati. Viceversa, dall'esame di un diagramma orario siamo adesso in grado di dedurre le caratteristiche del moto. Rivedendo le figure 1.2, 1.3, 1.4 notiamo che le prime due rappresentano tratti di moto uniforme mentre la terza si riferisce ad un tratto di moto uniformemente accelerato.

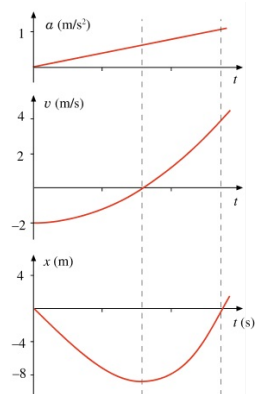


FIGURA 1.7

(Esempio 1.6)

1.5 Moto verticale di un corpo

Se trascuriamo l'attrito con l'aria, *un corpo lasciato libero di cadere in vicinanza della superficie terrestre si muove verso il basso con una accelerazione costante che vale in modulo $g = 9.8 \text{ ms}^{-2}$* : il moto osservato sperimentalmente è dunque rettilineo uniformemente accelerato.

Prendiamo un sistema di riferimento con origine al suolo e asse x rivolto verso l'alto, come in figura 1.8. In questo sistema $a = -g = -9.8 \text{ ms}^{-2}$: lo capiamo, per esempio, considerando che il corpo cadendo si muove lungo il verso negativo dell'asse x per cui la velocità è negativa e negativa deve essere l'accelerazione, in quanto la velocità nel tempo diventa sempre più negativa. Questi segni dipendono dalla scelta del verso dell'asse x ; se fosse orientato verso il basso a sarebbe positiva.

Esaminiamo alcune possibili situazioni, cominciando dalla caduta da un'altezza h con velocità iniziale nulla: le condizioni iniziali sono perciò $x_0 = h$ e $v_0 = 0$ per $t = t_0 = 0$. Ricorriamo alle formule (1.8, 1.9, 1.10), con $a = -g$, per scrivere le espressioni della velocità in funzione del tempo e della posizione, della posizione in funzione del tempo e del tempo in funzione della posizione:

$$v(t) = -gt \quad , \quad v(x) = \sqrt{2g(h-x)} \quad ,$$

$$x(t) = h - \frac{1}{2}gt^2 \quad , \quad t(x) = \sqrt{\frac{2(h-x)}{g}} \quad .$$

In particolare il tempo di caduta e la velocità al suolo sono:

$$t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad , \quad v_c = \sqrt{2gh} \quad .$$

Posto ad esempio $h = 10 \text{ m}$, si ha $t_c = 1.4 \text{ s}$ e $v_c = 14 \text{ m/s}$ ($= 38.9 \text{ km/h}$). Se invece il punto è lanciato verso il basso (condizioni iniziali $x_0 = h$ e $v_0 = -v_1$), si trovano le seguenti espressioni:

$$v(t) = -v_1 - gt \quad , \quad v(x) = \sqrt{v_1^2 + 2g(h-x)} \quad ,$$

$$x(t) = h - v_1t - \frac{1}{2}gt^2 \quad , \quad t(x) = -\frac{v_1}{g} + \sqrt{\frac{v_1^2}{g^2} + \frac{2(h-x)}{g}} \quad ,$$

$$t_c = -\frac{v_1}{g} + \sqrt{\frac{v_1^2}{g^2} + \frac{2h}{g}} \quad , \quad v_c = \sqrt{v_1^2 + 2gh} \quad .$$

Nel calcolo di $t(x)$, che comporta la risoluzione di un'equazione di secondo grado, si è scartata la soluzione negativa che in questo caso non ha significato. Osserviamo che t_c risulta minore di quello calcolato nella situazione precedente proprio perché il punto possiede una velocità iniziale rivolta verso il basso; per

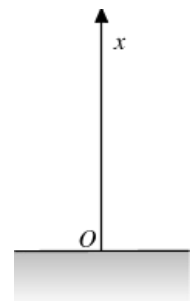


FIGURA 1.8

la stessa ragione v_c risulta maggiore. Ponendo $v_1 = 0$ ovviamente si ritrovano i risultati visti prima.

Infine lanciamo il punto verso l'alto, con velocità v_2 , ma partendo dal suolo: le condizioni iniziali sono $x_0 = 0$ e $v_0 = v_2 > 0$ per $t = 0$. Questa volta

$$v = v_2 - g t \quad , \quad x = v_2 t - \frac{1}{2} g t^2 \quad .$$

Il punto inizialmente sale verso l'alto con velocità che decresce progressivamente ($v > 0$, ma $a < 0$: il punto viene frenato): esso si ferma, cioè ha una velocità nulla, nell'istante $t_M = v_2 / g$ e nella posizione $x_M = x(t_M) = v_2^2 / 2g$. Per $t \geq t_M$ siamo nella stessa situazione del primo esempio, punto che cade da un'altezza x_M con velocità iniziale nulla; risulta $t_c = 2 x_M / g = 2 t_M$

MathType@MTEF@5@5@+=
 feaagKart1ev2aaatCvAUfeBSjuyZL2yd9gzLbvyNv2CaerbuLwBLn
 hiov2DGi1BTfMBaeXatLxBI9gBaerbd9wDYLwzYbItLDharqqtubsr
 4rNCHbGeaGqiVu0Je9sqqrpepC0xbbL8F4rqqrFfpeea0xe9Lq=Jc9
 vqaqpepmoxbba9pwe9Q8fs0=yqaqpepae9pg0FirpepeKkFroxfr=x
 fr=xb9adbaqaeeGaciGaaiaabeqaamaabaabaaGcbaGaamiDamaaBa
 aaleaacaWGJbaabeaakiabg2da9maakaaabaGaaG0maiaadIhadaWg
 aaWcbaGaamytaaqaabaGccaGGVaGaam4zaaWcbaakiabg2da9iaads
 hadaWgaaWcbaGaamytaaqaabaaaaa@4095@ e la durata complessiva del moto è
 pertanto $2t_M = 2 v_2 / g$. Si noti che si tratta della stessa situazione vista
 nell'esempio 1.4.

Se ricaviamo $t(x)$ dalla legge oraria e $v(x)$ da (1.10) otteniamo:

$$t(x) = \frac{v_2}{g} \pm \sqrt{\frac{v_2^2}{g^2} - \frac{2x}{g}} = t_M \pm \sqrt{t_M^2 - \frac{2x}{g}} \quad , \quad v(x) = \pm \sqrt{v_2^2 - 2gx} \quad .$$

Il doppio segno è legato al fatto che il punto passa due volte nella stessa posizione, una volta salendo (segno negativo per il tempo, segno positivo per la velocità) e una volta scendendo (segni opposti). In particolare $x = 0$ è occupato alla partenza ($t = 0, v = v_2$) e all'arrivo ($t = 2 t_M, v = -v_2$): il punto ritorna nell'origine con velocità eguale in modulo a quella di partenza, ma ovviamente di segno opposto.

In conclusione, abbiamo utilizzato le due leggi generali

$$v(t) = v_0 - g t \quad , \quad x(t) = x_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \quad ,$$

valide per un moto uniformemente accelerato con accelerazione $-g$ e le abbiamo adattate a tre diverse situazioni, verificando che i termini v_0 e $x_0 + v_0 t$ dipendono dalle condizioni iniziali, mentre $-g t$ e $-\frac{1}{2} g t^2$

MathType@MTEF@5@5@+=

feagKart1ev2aaatCvAUfeBSjuyZL2yd9gzLbvyNv2CaerbuLwBLn
 hiov2DGi1BTfMBaeXatLxBI9gBaerbd9wDYLwzYbItLDharqqtubsr
 4rNCHbGeaGqiVu0Je9sqqrpepCoxbbL8F4rqqrFfpeea0xe9Lq=Jc9
 vqaqpepmoxbba9pwe9Q8fso=yqaqpepae9pg0FirpepeKkFroxfr=x
 fr=xb9adbaqaeeGaciGaaiaabeqaamaabaabaaGcbaGaeyOeIoIaam
 4zaiaaykW7caaMc8UaamiDaiaykW7caaMc8UaamyzaiaaykW7caaM
 c8UaaGPaVlabgkHiTmaalaabaGaaGymaaqaaiaaikdaaaGaaGPaVl
 aaykW7caWGNbGaaGPaVlaadshadaahaaWcbeqaaiaaikdaaaaaa@4E61@

si trovano in tutte le soluzioni, appunto perché caratteristici del moto uniformemente accelerato con accelerazione $-g$. Ripetiamo che con l'asse x orientato verso il basso accelerazione e velocità cambiano di segno, però i procedimenti e i risultati fisici sono gli stessi.

Esempio 1.7

Dato un corpo che cade liberamente partendo da fermo, si calcolino le posizioni x_0, x_1, x_2, \dots occupate a intervalli di tempo regolari $(0, t, 2t, 3t, \dots)$ e se ne facciano le differenze $x_{n+1} - x_n$. Che conclusione si può trarre?

Soluzione

Orientiamo l'asse x verso il basso; abbiamo le condizioni iniziali $x = 0$ e $v = 0$ per $t = 0$, quindi $x = \frac{1}{2} g t^2$

feagKart1ev2aaatCvAUfeBSjuyZL2yd9gzLbvyNv2CaerbuLwBLn
 hiov2DGi1BTfMBaeXatLxBI9gBaerbd9wDYLwzYbItLDharqqtubsr
 4rNCHbGeaGqiVu0Je9sqqrpepCoxbbL8F4rqqrFfpeea0xe9Lq=Jc9
 vqaqpepmoxbba9pwe9Q8fso=yqaqpepae9pg0FirpepeKkFroxfr=x
 fr=xb9adbaqaeeGaciGaaiaabeqaamaabaabaaGcbaGaamiEaiabg2
 da9maalaabaGaaGymaaqaaiaaikdaaaGaam4zaiaadshadaahaaWc
 beqaaiaaikdaaaaaa@3C4E@ . Scriviamo i tempi e le corrispondenti posizioni:

0	t	$2t$	$3t$	$4t$	$5t$...
0	$\frac{1}{2} g t^2$	$\frac{1}{2} g 4t^2$	$\frac{1}{2} g 9t^2$	$\frac{1}{2} g 16t^2$	$\frac{1}{2} g 25 t^2$...

Le successive differenze $x_1 - x_0, x_2 - x_1, \dots$ sono:

$$\frac{1}{2} g t^2, \frac{3}{2} g t^2, \frac{5}{2} g t^2, \frac{7}{2} g t^2, \frac{9}{2} g t^2, \dots$$

Si nota che esse valgono 3 volte, 5 volte, 7 volte, ecc. la prima: questa proprietà venne chiamata da Galileo *legge dei numeri dispari*. Essa è caratteristica del moto in cui lo spazio percorso cresce col quadrato del tempo, cioè del moto uniformemente accelerato.

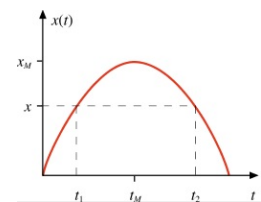


FIGURA 1.9

Esempio 1.8

Un punto materiale viene lasciato cadere all'istante $t = 0$ con velocità iniziale nulla. Un secondo punto materiale viene lanciato verso il basso all'istante $t = t_0 > 0$, con velocità iniziale v_0 : riuscirà a raggiungere il primo punto?

Soluzione

Le leggi orarie dei due moti sono:

$$x_1 = \frac{1}{2} g t^2 \quad , \quad x_2 = v_0 (t - t_0) + \frac{1}{2} g (t - t_0)^2 \quad ;$$

l'asse x è orientato verso il basso e ha l'origine nel punto di partenza dei due corpi. Eguagliamo le due espressioni trovando così il tempo in cui i due corpi occupano la stessa posizione:

$$t = \frac{t_0}{2} \frac{2 v_0 - g t_0}{v_0 - g t_0} = \frac{t_0}{2} \left(1 + \frac{v_0}{v_0 - g t_0} \right) \quad .$$

Se esiste una soluzione, deve essere $t > t_0$, ovvero il termine tra parentesi deve essere maggiore di 2 e quindi la frazione maggiore di 1: ciò è sempre vero se $v_0 > g t_0$.

Determinato t , conviene calcolare la coordinata x del punto di incontro e confrontarla con l'altezza h rispetto al suolo del punto di partenza. Solo se $x \leq h$ il secondo punto raggiunge effettivamente il primo; altrimenti questo tocca il suolo prima di essere raggiunto.

Nascondi soluzione

1.6 Moto armonico semplice

Il *moto armonico semplice* lungo un asse rettilineo è un moto *vario* la cui legge oraria è definita dalla relazione

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi) \quad (1.11)$$

A , ω , ϕ sono grandezze costanti: A è detta *ampiezza del moto*, $\omega t + \phi$ *fase del moto*, ϕ *fase iniziale*, ω *pulsazione*.

Discutiamo le caratteristiche spaziali di questo moto. I valori estremi assunti dalla funzione seno sono $+1$ e -1 : pertanto il punto che obbedisce alla (1.11) percorre un segmento di ampiezza $2A$ con centro nell'origine; il massimo spostamento dall'origine è pari ad A , donde il nome di ampiezza del moto. Al tempo $t = 0$ il punto occupa la posizione $x(0) = A \sin \phi$: note le costanti A e ϕ , possiamo determinare la posizione iniziale del punto (solo se $\phi = 0$ o $\phi = \pi$ il punto è nell'origine per $t = 0$).

Il moto armonico, considerando che la funzione seno è periodica con periodo 2π , risulta essere *periodico*: in effetti il punto descrive oscillazioni di ampiezza A rispetto al centro O , tutte eguali tra loro e caratterizzate dalla durata, detta *periodo* T del moto armonico. Ciò rientra nella definizione generale: il moto di un punto si dice periodico quando ad intervalli di tempo eguali il punto ripassa nella stessa posizione con la stessa velocità (e questo avviene per qualsiasi posizione). Si osservi che la realizzazione di moti o più in generale di fenomeni caratterizzati da una periodicità è fondamentale per la misura del tempo.

Per determinare il periodo T consideriamo due tempi t' e t , con $t' - t = T$; per definizione $x(t') = x(t)$ e quindi da (1.11), dovendo le fasi nei due istanti differire di 2π , periodo della funzione seno, abbiamo $\omega t' + \phi = \omega t + \phi + 2\pi$: ne segue che $T = t' - t$ vale

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{ovvero} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \quad (1.12)$$

Capiamo così il significato di ω : il moto si ripete velocemente (piccoli valori di T) quando la pulsazione è grande mentre il moto è lento (T grande) per bassi valori della pulsazione.

Si definisce *frequenza* ν del moto il numero di oscillazioni in un secondo:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

È molto importante osservare che *il periodo, e quindi la frequenza, di un moto armonico semplice sono indipendenti dall'ampiezza del moto*.

Fissato il valore della pulsazione abbiamo una classe di moti armonici, caratterizzati dallo stesso periodo, che differiscono tra loro per i diversi valori

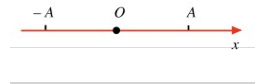


FIGURA 1.10

Periodo

Frequenza

dell'ampiezza e della fase iniziale, cioè, come vedremo, per le diverse condizioni iniziali.

La velocità del punto che si muove con moto armonico si ottiene derivando $x(t)$:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \omega A \cos(\omega t + \phi) \quad (1.13)$$

Con una ulteriore derivazione si ottiene l'accelerazione del punto:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \sin(\omega t + \phi) = -\omega^2 x \quad (1.14)$$

In figura 1.11 sono rappresentate le funzioni $x(t)$, $v(t)$, $a(t)$; si è posto $\Phi = 0$.

La velocità assume il valore massimo nel centro di oscillazione (preso come origine O) dove vale ωA e si annulla agli estremi ($x = A$ e $x = -A$) dove si inverte il senso del moto. L'accelerazione si annulla nel centro di oscillazione e assume il valore massimo in modulo ($\omega^2 A$) agli estremi, dove si inverte la velocità; inoltre essa è sempre proporzionale ed opposta allo spostamento dal centro di oscillazione.

A parte il valore dell'ampiezza, le tre funzioni $x(t)$, $v(t)$, $a(t)$ mostrano lo stesso andamento temporale: la forma e il periodo sono eguali, c'è solo uno spostamento di una rispetto all'altra lungo l'asse dei tempi.

Quest'ultima caratteristica viene indicata dicendo che le funzioni sono sfasate tra di loro. In particolare la velocità è sfasata di $\pi/2$ rispetto allo spostamento (è in *quadratura di fase*), mentre l'accelerazione è sfasata di π sempre rispetto allo spostamento (è in *opposizione di fase*).

Le costanti A e Φ individuano le condizioni iniziali:

$$x(0) = x_0 = A \sin \phi \quad , \quad v(0) = v_0 = \omega A \cos \phi \quad .$$

Viceversa, note le condizioni iniziali x_0 e v_0 , si calcolano A e Φ :

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{\omega x_0}{v_0} \quad , \quad A^2 = x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2} \quad .$$

Inserendo (1.14) in (1.7) si può calcolare la dipendenza della velocità dalla posizione, $v(x)$:

$$\int_{x_0}^x a(x) dx = -\omega^2 \int_{x_0}^x x dx = \frac{1}{2} \omega^2 (x_0^2 - x^2) = \frac{1}{2} v^2 - \frac{1}{2} v_0^2$$

e quindi $v^2 = v_0^2 + \omega^2 (x_0^2 - x^2)$. Con riferimento al centro, dove $x_0 = 0$ e $v_0 = \omega A$

$$v^2(x) = \omega^2 (A^2 - x^2) \quad (1.15)$$

Nel centro $v = \omega A$ oppure $v = -\omega A$ a seconda del verso di passaggio.

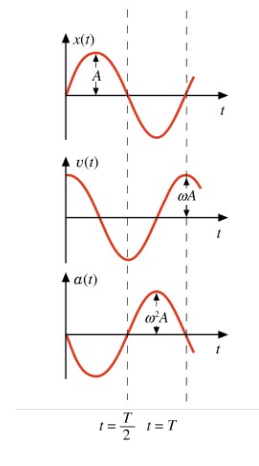


FIGURA 1.11

Dalla legge oraria (1.11) abbiamo ricavato che l'accelerazione è proporzionale allo spostamento, con segno negativo: $a = -\omega^2 x$. Se invece si trova che in un certo moto l'accelerazione risulta proporzionale allo spostamento con costante di proporzionalità negativa si dimostra che quel moto è armonico semplice. In altre parole, la condizione necessaria e sufficiente perché un moto sia armonico è data dall'equazione

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad (1.16)$$

Equazione differenziale del moto armonico

detta *equazione differenziale del moto armonico*. Le funzioni seno e coseno, e le loro combinazioni lineari, sono *tutte e sole* le funzioni che soddisfano alla condizione (1.16) nel campo reale.

Quest'ultimo fatto ci porta a osservare esplicitamente che le proprietà generali del moto armonico semplice restano eguali se invece della funzione seno utilizziamo la funzione coseno. Le due funzioni differiscono solo per un termine di sfasamento pari a $\pi/2$: $\sin(\omega t + \Phi) = \cos(\omega t + \psi)$ con $\psi = \Phi - \pi/2$. Ovvero, $x = A \sin(\omega t + \Phi)$ e $x = A \cos(\omega t + \Phi)$ rappresentano lo stesso moto, solo che per esempio il primo è visto a partire dall'istante t_0 e il secondo dall'istante $t_0 + T/4$.

In questo paragrafo abbiamo sempre parlato di moto; però se in un diverso fenomeno fisico si trova una grandezza f che obbedisce a un'equazione con la struttura di (1.16), $d^2 f / dz^2 + k^2 f = 0$ MathType@MTEF@5@5@+=feaagKart1ev2aaatCvAUfeBSjuyZL2yd9gzLbvyNv2CaerbuLwBLn hiov2DGi1BTfMBaeXatLxBI9gBaerbd9wDYLwzYbItLDharqqtubsr 4rNCHbGeaGqiVuoJe9sqqrpepCoxbbL8F4rqqrFfpeeaOxe9Lq=Jc9 vqaqpepmoxbba9pwe9Q8fso=yqaqpepae9pgoFirpepeKkFroxfr=x fr=xb9adbaqaeeGaciGaaiaabeqaamaabaabaaGcbaWaaSaaaeaaca WGKbWaaWbaaSqabeaacaIYaaaaOGaamOzaaqaiaaadsgacaWG6bWa aWbaaSqabeaacaIYaaaaaakiabgUcaRiaadUgadaahaaWcbeqaai aaikdaaaGccaWGMbGaeyypa0JaaGimaaaa@4118@, la soluzione è sempre $f(z) = A \sin(kz + \Phi)$ cioè $dz f$ descrive un'oscillazione rispetto alla variabile z , il cui periodo dipende da k . Può trattarsi di oscillazioni elettriche in un circuito o di oscillazioni di pressione in un gas interessato da un fenomeno sonoro, però la base matematica è la stessa. Riprenderemo l'argomento nel capitolo nono dove trattiamo più in generale l'*oscillatore armonico semplice*, come si chiama un sistema che obbedisce a (1.16).

Unità di misura

Elenchiamo le nuove grandezze introdotte e le loro unità di misura:

ampiezza : stessa unità di x , metri

periodo : è un tempo, si esprime in secondi

frequenza : inverso del tempo, si esprime in s^{-1} ; questa unità ha un nome, hertz: $1 \text{ Hz} = 1 \text{ s}^{-1}$

fase : argomento del seno o del coseno, dimensionalmente è un angolo e si misura in radianti (rad)

pulsazione : $2\pi/T$ unità di misura $\text{rad/s} = \text{rad s}^{-1}$.

1.7 Moto rettilineo smorzato esponenzialmente

Consideriamo un altro esempio di moto *vario*, in cui l'accelerazione soddisfa alla condizione $a = -k v$, con k costante positiva (che si misura in s^{-1} essendo pari a un rapporto a/v). L'accelerazione in questo moto è sempre contraria alla velocità, che perciò deve necessariamente diminuire, e varia con la stessa legge con cui varia la velocità. La condizione si traduce nell'equazione differenziale t

$$\frac{dv}{dt} = -k v$$

che si integra col metodo della *separazione delle variabili*, vedi appendice A;

$$\frac{dv}{v} = -k dt \Rightarrow \int_{v_0}^v \frac{dv}{v} = -k \int_0^t dt \Rightarrow \ln \frac{v}{v_0} = -k t \quad ;$$

v_0 è la velocità del punto nell'istante iniziale $t = 0$ (deve essere $v_0 \neq 0$ altrimenti nell'istante iniziale si avrebbe $v = 0$, $a = 0$ e non potrebbe esserci moto). Passando agli esponenziali

$$v(t) = v_0 e^{-kt} \quad ;$$

la velocità decresce esponenzialmente nel tempo e quindi il punto alla fine si ferma.

Calcoliamo anche come varia la velocità con la posizione, con un metodo analogo a quello seguito nel paragrafo 1.4:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} v = -k v \Rightarrow \frac{dv}{v} = -k \frac{dx}{dx} \quad , \quad dv = -k dx \quad .$$

Integrando, $\int_{v_0}^v \frac{dv}{v} = -k \int_0^x dx \Rightarrow v(x) = v_0 e^{-kx}$

MathType@MTEF@5@5@+=
 feaagKart1ev2aaatCvAUfeBSjuyZL2yd9gzLbvyNv2CaerbuLwBLn
 hiov2DGi1BTfMBaeXatLxBI9gBaerbd9wDYLwzYbItLDharqqtubsr
 4rNCHbGeaGqiVu0Je9sqqrpepC0xbbL8F4rqqrFfpeea0xe9Lq=Jc9
 vqaqpepm0xbba9pwe9Q8fso=yqaqpepae9pg0FirpepeKkFroxfr=x
 fr=xb9adbaqaeeGaciGaaiaabeqaamaabaabaaGcbaWaa8qCaeaaca
 WGKbGaamODaiabg2da9iabgkHiTiaadUgadaWdXbqaaiaadsgacaWG
 4baaleaacaIWaaabaGaamiEaaqdcqGHRiI8aaWcbaGaamODamaaBa
 aameaacaIWaaabeaaaSqaaiadAhaaOGaey4kIipakiaaykW7caaM
 c8UaaGPaVlabgkDiElaaykW7caaMc8UaaGPaVlaadAhadaqadaqaai
 aadIhaaiaawIcacaGLPaaacqGH9aqpcaWG2bWaaSbaaSqaiaaicda
 aeqaaOGaeyOeIoIaam4AaiaadIhaaaa@5B09@

L'andamento della velocità con la posizione è lineare decrescente; la velocità si annulla per $x = v_0 / k$ e in questa posizione il punto si ferma.

La legge oraria si ricava per integrazione da $v(t)$ secondo (1.2):

$$x(t) = x_0 + \int_0^t v(t) dt = \int_0^t v_0 e^{-kt} dt = -\frac{v_0}{k} [e^{-kt}]_0^t = \frac{v_0}{k} (1 - e^{-kt}) ;$$

il punto tende asintoticamente alla posizione v_0 / k . La stessa espressione per $x(t)$ si ottiene eguagliando $v(t) = v_0 e^{-kt}$ e $v(x) = v_0 - k x$. In figura 1.12 sono mostrati gli andamenti di $v(t)$, $v(x)$, $x(t)$.

Osserviamo che la rapidità di variazione della funzione e^{-kt} è determinata dal valore di k . Posto $\tau = 1/k$, in un intervallo di tempo pari a τ la funzione si riduce di un fattore $e \cong 2.72$:

$$e^{-k(t+\tau)} / e^{-kt} = e^{-k\tau} = e^{-1} ;$$

τ si chiama *costante di tempo* e si misura ovviamente in secondi. Se k è grande τ è piccola e la decrescita è rapida; viceversa se k è piccola τ è grande e la decrescita è lenta. In pratica dopo un tempo di $\approx 5\tau$ il fenomeno si può considerare terminato. Analogamente, la funzione $1 - e^{-kt}$ si avvicina a 1 con rapidità che è sempre determinata da k . Nella figura 1.13 sono mostrati i grafici delle due funzioni, con il tempo misurato in unità di τ .

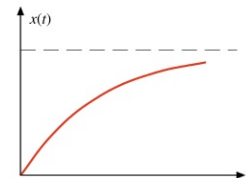
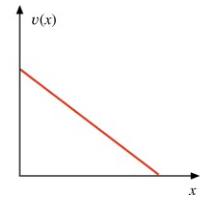
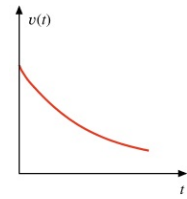


FIGURA 1.12

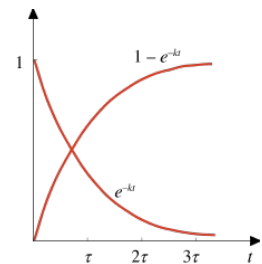


FIGURA 1.13

1.8 Paradosso di Zenone

Riprendiamo l'esempio 1.1 così formulato: all'istante $t = 0$ il punto P_1 passa nell'origine con velocità $v_1 > 0$ mentre P_2 si trova in $x_0 > 0$ con velocità positiva $v_2 < v_1$; dove e quando P_1 raggiungerà P_2 . Dall'esempio già visto abbiamo le risposte

$$x^* = \frac{v_1 x_0}{v_1 - v_2}, \quad t^* = \frac{x_0}{v_1 - v_2}.$$

La soluzione è molto semplice. Tuttavia possiamo affrontare il problema in modo più contorto come ha fatto Zenone, nel quinto secolo A.C.

Quando P_1 è giunto in x_0 al tempo t_0 , P_2 è avanzato di s_0 :

$$t_0 = \frac{x_0}{v_1}, \quad s_0 = t_0 v_2 = x_0 \frac{v_2}{v_1}.$$

Quando P_1 ha percorso il tratto ulteriore s_0 nel tempo t_1 , P_2 è avanzato di s_1 :

$$t_1 = \frac{s_0}{v_1} = x_0 \frac{v_2}{v_1^2}, \quad s_1 = t_1 v_2 = x_0 \frac{v_2^2}{v_1^2}.$$

E così via... Per raggiungere P_2 , P_1 deve percorrere

$$\text{lo spazio } x_0 + s_0 + s_1 + \dots = x_0 \left[1 + \frac{v_2}{v_1} + \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 + \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^3 + \dots \right]$$

$$\text{nel tempo } t_0 + t_1 + t_2 + \dots = \frac{x_0}{v_1} \left[1 + \frac{v_2}{v_1} + \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 + \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^3 + \dots \right].$$

Zenone non sapeva che la somma di un numero infinito di termini può avere un limite finito (del resto il calcolo infinitesimale è stato sviluppato da Leibniz e Newton nel settecento); così concludeva paradossalmente che Achille più veloce (P_1) non avrebbe mai raggiunto la tartaruga (P_2) o che una freccia non può raggiungere il bersaglio, pur sapendo che ciò è contrario all'evidenza sperimentale.

Invece noi sappiamo che, essendo $v_2/v_1 < 1$, la somma tra parentesi quadre vale $(1 - v_2/v_1)^{-1}$ e si ritrova $x = x_0 v_1 / (v_1 - v_2)$, $t = x_0 / (v_1 - v_2)$. Dividere un intervallo in un numero infinito di tratti non vuol dire che occorre un tempo infinito per percorrerlo.

Abbiamo ripreso questo esempio nella visuale di Zenone per esporre la soluzione corretta, basata sul calcolo infinitesimale (che in realtà non è nemmeno necessario nella soluzione semplice), e mettere quindi in evidenza come sia necessario ricorrere ai concetti dell'analisi matematica per una rappresentazione corretta dei fenomeni di movimento: del resto lo si capisce chiaramente se si riesaminano le connessioni tra spazio percorso, velocità e

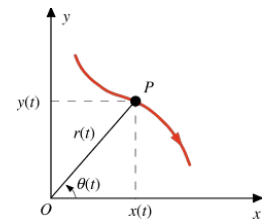


FIGURA 1.14

accelerazione nei vari casi trattati di moto rettilineo.

1.9 Moto nel piano. Posizione e velocità

Nel caso che il moto sia vincolato a svolgersi su di un piano la *traiettoria* del punto P , mostrata in figura 1.14, è in generale una *linea curva*. La descrizione del moto diventa subito più complessa e necessita di un numero maggiore di informazioni rispetto al caso del moto rettilineo. Pensando per esempio a come avviene lo spostamento di P ad un certo istante, non basta specificare il valore numerico dello spostamento, ma occorre precisare in quale direzione sta avvenendo il moto e con quale verso; e in generale questa direzione istantanea cambia continuamente lungo la traiettoria.

Grandezze con caratteristiche direzionali oltre che numeriche si chiamano *vettori*: la definizione è meglio precisata nell'appendice C insieme alle principali proprietà algebriche e alle operazioni di derivazione e integrazione fatte su vettori. Consigliamo di leggere attentamente questa appendice prima di proseguire nello studio del moto nel piano.

Vedremo tra poco che anche la velocità e l'accelerazione nel moto piano sono grandezze vettoriali e questa caratteristica è vera più in generale per qualsiasi tipo di moto in una, due o tre dimensioni; nel caso unidimensionale del moto rettilineo la direzione è fissata e la natura vettoriale, che non è stata messa esplicitamente in evidenza, si manifesta nel segno, cioè nel verso: infatti bisogna sempre precisare il verso del moto sulla retta (segno della velocità) e il segno dell'accelerazione.

Ritornando al moto su di un piano la posizione del punto viene individuata da due coordinate. Esse possono essere, con riferimento ad un sistema di assi cartesiani ortogonali, $x(t)$ e $y(t)$ oppure, in termini di coordinate polari nel piano, $r(t)$ e $\theta(t)$. Le relazioni che intercorrono tra le coordinate cartesiane e quelle polari sono, come si deduce subito dalla figura 1.14,

$$x = r \cos \theta \quad , \quad y = r \sin \theta \quad ; \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad , \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x} \quad .$$

La posizione del punto P può anche essere individuata per mezzo del *raggio vettore* (vedi appendice C)

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{OP} = x(t) \mathbf{u}_x + y(t) \mathbf{u}_y$$

Raggio vettore

dove \mathbf{u}_x e \mathbf{u}_y rappresentano i *versori degli assi cartesiani*, che si considerano fissi nel tempo. Se è nota la dipendenza dal tempo di \mathbf{r} , cioè la funzione $\mathbf{r}(t)$, è individuato il moto del punto P : conoscere $\mathbf{r}(t)$ significa ovviamente dare $x(t)$ e $y(t)$ oppure $r(t)$ e $\theta(t)$; ed è vero il viceversa.

La posizione del punto lungo la traiettoria può anche essere data da una coordinata curvilinea s , misurata a partire da un'origine arbitraria. Il valore di s esprime la lunghezza della traiettoria e varia nel tempo durante il moto: ds/dt indica la variazione temporale della posizione lungo la traiettoria cioè la velocità

istantanea del punto, come definita nel moto rettilineo. Se diamo la forma della traiettoria e la velocità con cui viene percorsa abbiamo fornito una descrizione completa del moto. Questa può essere riassunta nella grandezza *velocità vettoriale* che ora definiamo.

Consideriamo due posizioni occupate dal punto P al tempo t e al tempo $t + \Delta t$: esse sono individuate dai vettori $\mathbf{r}(t)$ e $\mathbf{r}(t + \Delta t) = \mathbf{r}(t) + \Delta \mathbf{r}$. Si costruisce il rapporto incrementale $\frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$ e si definisce velocità vettoriale il limite per $\Delta t \rightarrow 0$:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (1.17)$$

La velocità vettoriale è la derivata del raggio vettore rispetto al tempo. Osserviamo che al limite l'incremento $d\mathbf{r}$ del raggio vettore risulta in direzione tangente alla traiettoria nel punto P e in modulo eguale allo spostamento infinitesimo ds lungo la traiettoria, per cui possiamo scrivere $d\mathbf{r} = ds \mathbf{u}_T$ dove \mathbf{u}_T è il versore della tangente alla curva, variabile nel tempo man mano che il punto avanza lungo la traiettoria. In sostanza pensiamo il moto come una successione di spostamenti rettilinei infinitesimi con direzione variabile: la direzione istantanea del moto coincide con quella della tangente alla traiettoria nel punto occupato all'istante considerato. La (1.17) diventa più esplicita:

$$\mathbf{v} = \frac{ds}{dt} \mathbf{u}_T = v \mathbf{u}_T \quad ; \quad (1.18)$$

pertanto la velocità vettoriale \mathbf{v} individua in ogni istante con la sua direzione e verso la direzione e il verso del moto e con il suo modulo $v = ds/dt$ la velocità istantanea con cui è percorsa la traiettoria.

Abbiamo visto che a livello infinitesimo $d\mathbf{r} = ds \mathbf{u}_T$; però dalla figura 1.15 si vede che per uno spostamento finito l'incremento del raggio vettore $\Delta \mathbf{r}$ è ben diverso dallo spazio effettivamente percorso lungo la curva (uno è la corda, l'altro l'arco). Si faccia quindi attenzione a non confondere i due concetti, raggio vettore e suoi incrementi finiti da una parte, percorso effettivo dall'altra; per esempio un punto potrebbe percorrere un'orbita chiusa ritornando al punto di partenza e in tal caso il raggio vettore non cambia, ma il punto ha percorso una traiettoria finita ($\Delta \mathbf{r} = 0$, $\Delta s \neq 0$) con velocità vettoriale istantanea diversa da zero (semmai, con ovvia estensione dal moto rettilineo, risulta nulla la velocità vettoriale media).

Vogliamo ora sottolineare una proprietà fondamentale delle relazioni vettoriali come (1.18) con l'aiuto anche della figura 1.15. La traiettoria del moto e il fatto che la velocità si scrive $v\mathbf{u}_T$ sono caratteristiche *intrinseche*, che cioè non dipendono dalla scelta del sistema di riferimento. Si può spostare l'origine O in un'altra posizione, si possono ruotare gli assi, ma la curva (non la sua espressione analitica), la direzione, il verso, il modulo della velocità restano gli stessi. In figura 1.15 per esempio se si sposta l'origine cambia certamente \mathbf{r} , ma

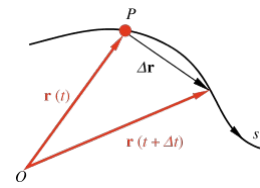


FIGURA 1.15

non $\Delta \mathbf{r}$ e quindi $d\mathbf{r}$. Si parla di *invarianza* delle relazioni vettoriali rispetto alla scelta del sistema di riferimento.

D'altra parte un vettore si scrive esplicitamente attraverso le sue componenti e queste si dipendono dal sistema di riferimento. Calcoliamo le componenti della velocità nelle due situazioni più comuni.

Componenti cartesiane

Poiché $\mathbf{r} = x \mathbf{u}_x + y \mathbf{u}_y$,

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \mathbf{u}_x + \frac{dy}{dt} \mathbf{u}_y = v_x \mathbf{u}_x + v_y \mathbf{u}_y .$$

La velocità del punto P , che si muove lungo la traiettoria, ha come componenti cartesiane le velocità v_x e v_y dei due moti rettilinei descritti dai punti proiezione di P sugli assi cartesiani. Quindi $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

MathType@MTEF@5@5@+= feaagKart1ev2aaatCvAUfeBSjuyZL2yd9gzLbvyNv2CaerbuLwBLn hiov2DGi1BTfMBaeXatLxBI9gBaerbd9wDYLwzYbItLDharqqtubsr 4rNCHbGeaGqiVu0Je9sqqrpepCoxbbL8F4rqqrFfppea0xe9Lq=Jc9 vqaqpepmoxbb9pwe9Q8fso=yqaqpepae9pg0FirpepeKkFroxfr=x fr=xb9adbaqaeeGaciGaaiaabeqaamaabaabaaGcbaGaamODaiabg2 da9maakaabaGaamODamaaDaaaleaacaWG4baabaGaaGOMaaaakiab gUcaRiaadAhadaqhaaWcbaGaamyEaaqaaiaaikdaaaaabeaaaaa@3EB6@ e, detto Φ l'angolo tra il vettore \mathbf{v} e l'asse x , $\tan \Phi = v_y / v_x$: date le componenti possiamo ricostruire il vettore. Si osservi che se ruotiamo gli assi cambiano v_x e v_y .

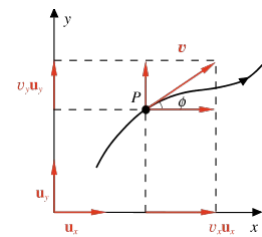


FIGURA 1.16

Componenti polari

Introduciamo i vettori \mathbf{u}_r e \mathbf{u}_θ , rispettivamente versore della direzione di \mathbf{r} e versore ortogonale alla stessa, come in figura 1.17; si noti che questi versori cambiano direzione (ruotano) durante il moto.

Il raggio vettore \mathbf{r} può essere espresso come $r \mathbf{u}_r$ e pertanto:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dr}{dt} \mathbf{u}_r + r \frac{d\mathbf{u}_r}{dt} \Rightarrow \mathbf{v} = \frac{dr}{dt} \mathbf{u}_r + r \frac{d\theta}{dt} \mathbf{u}_\theta = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_\theta . \quad (1.19)$$

Si è utilizzato per la derivata del vettore \mathbf{u}_r il risultato ricavato in appendice C.

La velocità che, si ricordi, è sempre tangente alla traiettoria si scompone in due componenti: la *velocità radiale* \mathbf{v}_r , diretta lungo \mathbf{r} e di modulo dr/dt e la *velocità trasversa* \mathbf{v}_θ , ortogonale a \mathbf{r} e di modulo $r d\theta/dt$; \mathbf{v}_r dipende dalle variazioni del modulo del raggio vettore, \mathbf{v}_θ è collegata alle variazioni di direzione dello stesso. Il risultato della scomposizione si può anche ottenere considerando che lo spostamento infinitesimo $d\mathbf{r}$ ha le componenti dr e $r d\theta$ (a meno di infinitesimi di ordine superiore): dividendo per dt si hanno le

Velocità radiale
Velocità trasversa

componenti della velocità.

Il modulo della velocità è, con queste componenti,

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2} .$$

In definitiva abbiamo mostrato come si determina la velocità se è nota la posizione, in coordinate cartesiane o polari. Analogamente a quanto fatto per il moto rettilineo, ci poniamo il problema inverso e la soluzione si ricava da (1.17) integrando:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{v}(t) dt . \quad (1.20)$$

L'integrazione esplicita può essere effettuata ricorrendo alle componenti, per esempio cartesiane, e ricadiamo nella (1.2), applicata ai moti rettilinei *componenti*; calcolate $x(t)$ e $y(t)$ abbiamo $\mathbf{r}(t)$. Resta essenziale la conoscenza delle condizioni iniziali.

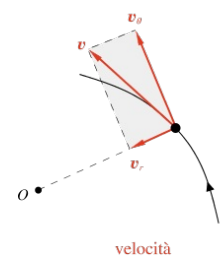
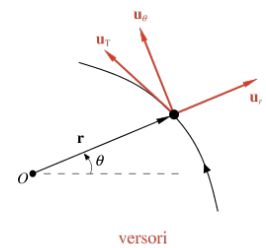


FIGURA 1.17

1.10 Accelerazione nel moto piano

L'accelerazione nel moto piano deve esprimere le variazioni della velocità sia come modulo che direzione e quindi ci aspettiamo che abbia due componenti, una legata alla variazione del modulo della velocità e la seconda al cambiamento di direzione del moto. Nel moto rettilineo, dove la velocità mantiene sempre la stessa direzione, l'accelerazione è espressa da un solo termine.

Nella figura 1.18 è mostrata la situazione in modo qualitativo, ma già si capisce che l'accelerazione non è parallela alla velocità ed è diretta verso la concavità della curva che rappresenta la traiettoria.

Anche nel moto piano l'accelerazione si definisce come derivata della velocità rispetto al tempo (ed è una grandezza vettoriale):

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \quad (1.21)$$

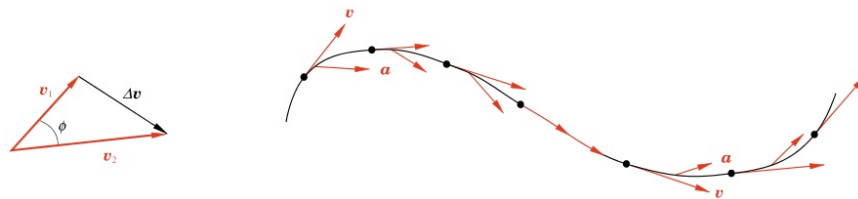


FIGURA 1.18

$$a = \sqrt{a_T^2 + a_N^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{v^4}{R^2}}$$

Utilizziamo (1.18) e la regola di derivazione di un vettore:

$$\mathbf{a} = \frac{d}{dt}(v \mathbf{u}_T) = \frac{dv}{dt} \mathbf{u}_T + v \frac{d\mathbf{u}_T}{dt} = \frac{dv}{dt} \mathbf{u}_T + v \frac{d\phi}{dt} \mathbf{u}_N$$

La prima componente, parallela alla velocità, esprime la variazione del modulo della velocità; il secondo termine, dipendente dalla variazione di direzione della velocità, è ortogonale a questa: \mathbf{u}_N è un vettore ortogonale a \mathbf{u}_T diretto verso la concavità della traiettoria, e $d\phi/dt$ dice quanto rapidamente cambia la direzione di \mathbf{u}_T e quindi di \mathbf{u}_N . Per esprimere in maniera più significativa la componente normale, ricorriamo alla figura 1.19 che mostra il moto durante un istante dt . Al limite per $\Delta t \rightarrow 0$ le rette normali alla traiettoria in due punti molto vicini tra loro si incontrano nel punto C , che coincide con il centro della circonferenza tangente alla traiettoria nel punto P (circonferenza osculatrice) e si chiama anche *centro di curvatura* della traiettoria nel punto P . L'arco di traiettoria ds è pari a $Rd\phi$ con $R = CP$ raggio di curvatura (da non

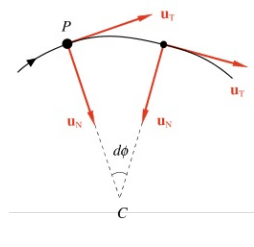


FIGURA 1.19

confondere con il raggio vettore). Al variare di P lungo la traiettoria variano sia il valore di R che la posizione di C , che può passare da una parte all'altra della curva come in figura 1.18 e andare all'infinito nei tratti rettilinei. Pertanto

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{1}{R} v$$

e sostituendo nell'espressione dell'accelerazione trovata prima

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt} \mathbf{u}_T + \frac{v^2}{R} \mathbf{u}_N = \mathbf{a}_T + \mathbf{a}_N, \quad (1.22)$$

Accelerazione
tangenziale
Accelerazione
centripeta

in modulo $a = a_T^2 + a_N^2 = \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{v^4}{R^2}$

MathType@MTEF@5@5@+=
feaagKart1ev2aaatCvAUfeBSjuyZL2yd9gzLbvyNv2CaerbuLwBLn
hiov2DGi1BTfMBaeXatLxBI9gBaerbd9wDYLwzYbItLDharqqtubsr
4rNCHbGeaGqiVu0Je9sqqrpepCoxbbL8F4rqqrFfppeaoxe9Lq=Jc9
vqaqpepmoxbba9pwe9Q8fs0=yqaqpepae9pg0FirpepeKkFroxfr=x
fr=xb9adbaqaeeGaciGaaiaabeqaamaabaabaaGcbaGaamyaiabg2
da9maakaabaGaamyamaaDaaaleaacaWG4baabaGaaGomaaakiab
gUcaRiaadggadaqhaaWcbaGaamOBaaqaaiaaikdaaaaabeaakiabg2
da9maakaabaWaaeWaaeadaWcaaqaiaadsgacaWG2baabaGaamiz
aiaadshaaaaacaGLOaGaayzkaaWaaWbaaSqaabeaacaIYaaaaOGaey
4kaSYaaSaaaeacaWG2bWaaWbaaSqaabeaacaIoaaaaGcbaGaamOu
amaaCaaaleqabaGaaGomaaaaaaabeaaaaa@4A80@

Le due componenti si chiamano *accelerazione tangenziale* e *accelerazione normale* o *centripeta* (perché diretta sempre verso il centro di curvatura).

In un moto curvilineo vario entrambe le componenti sono diverse da zero; se però il moto curvilineo è uniforme è nulla a_T . Invece nel moto rettilineo vario è nulla a_N e solo nel moto rettilineo uniforme $a_T = a_N = 0$. In altre parole con $a_T \neq 0$ il moto è sempre vario, con $a_N \neq 0$ è sempre curvilineo.

Le proprietà discusse finora non hanno bisogno del supporto di un sistema di riferimento (sono invarianti). Determiniamo adesso le componenti cartesiane e polari dell'accelerazione, come fatto per la velocità.

Componenti cartesiane

Le componenti cartesiane dell'accelerazione sono le accelerazioni dei due moti rettilinei proiezioni sugli assi del moto di P lungo la traiettoria curva:

$$\mathbf{a} = \frac{dv_x}{dt} \mathbf{u}_x + \frac{dv_y}{dt} \mathbf{u}_y = \frac{d^2x}{dt^2} \mathbf{u}_x + \frac{d^2y}{dt^2} \mathbf{u}_y = a_x \mathbf{u}_x + a_y \mathbf{u}_y .$$

Se ϕ è l'angolo che \mathbf{u}_T forma con \mathbf{u}_x , si deduce dalla figura 1.20 che:

$$a_x = \frac{dv}{dt} \cos \phi - \frac{v^2}{R} \sin \phi ,$$

$$a_y = \frac{dv}{dt} \sin \phi - \frac{v^2}{R} \cos \phi .$$

Dalle componenti tangenziale e centripeta si ricavano subito quelle cartesiane; e viceversa, basta risolvere il sistema lineare nelle incognite dv/dt e v^2/R .

Componenti polari

Ci serviamo di (1.19) e ricordiamo che \mathbf{u}_r e \mathbf{u}_θ non sono fissi:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dr}{dt} \mathbf{u}_r + r \frac{d\theta}{dt} \mathbf{u}_\theta \right) = \\ &= \frac{d^2r}{dt^2} \mathbf{u}_r + \frac{dr}{dt} \frac{d\mathbf{u}_r}{dt} + \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \mathbf{u}_\theta + r \frac{d^2\theta}{dt^2} \mathbf{u}_\theta + r \frac{d\theta}{dt} \frac{d\mathbf{u}_\theta}{dt} . \end{aligned}$$

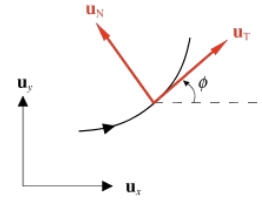


FIGURA 1.20

Considerando che $\frac{d}{dt} \mathbf{u}_r = \frac{d\theta}{dt} \mathbf{u}_\theta$ e che $\frac{d}{dt} \mathbf{u}_\theta = -\frac{d\theta}{dt} \mathbf{u}_r$ (infatti dalla figura 1.17 si vede che per una variazione positiva di θ $d\mathbf{u}_\theta$ è opposto a \mathbf{u}_r) si ha

$$\mathbf{a} = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] \mathbf{u}_r + \left[2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2\theta}{dt^2} \right] \mathbf{u}_\theta$$

da cui

$$\mathbf{a} = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] \mathbf{u}_r + \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) \right] \mathbf{u}_\theta . \quad (1.23)$$

Il primo termine rappresenta l'accelerazione radiale e il secondo

l'accelerazione trasversa. Anche a_r e a_θ si possono mettere in relazione con a_x e a_y o a_T e a_N .

In base al particolare problema fisico da affrontare si utilizzerà una delle rappresentazioni trovate. Comunque sia, l'effettiva presenza di una delle componenti dell'accelerazione implica l'esistenza di una forza, agente sul punto materiale, con componente non nulla parallela a quella dell'accelerazione.

Come già fatto in relazione a (1.17) e (1.20), da (1.21) si deduce in generale che, nota l'accelerazione e il valore della velocità all'istante t_0 , la velocità in un istante t è data da

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{a}(t) dt \quad (1.24)$$

e valgono le stesse considerazioni fatte in proposito di (1.20) per il calcolo effettivo dell'integrale.

Accelerazione radiale
Accelerazione
trasversa

1.11 Moto circolare

Si chiama *moto circolare* un moto piano la cui traiettoria è rappresentata da una circonferenza. Considerando che la velocità varia continuamente in direzione l'*accelerazione centripeta è sempre diversa da zero* (e quindi agisce una forza, detta centripeta, diretta verso il centro della circonferenza). Nel moto circolare uniforme la velocità è costante in modulo e l'accelerazione tangente è nulla per cui $\mathbf{a} = \mathbf{a}_N$; se invece il modulo della velocità cambia nel tempo il moto circolare non è uniforme e \mathbf{a}_T è diversa da zero; in questo caso la direzione dell'accelerazione non passa per il centro della circonferenza (oltre alla forza centripeta agisce anche una forza tangenziale).

Il moto circolare può essere descritto facendo riferimento allo spazio percorso sulla circonferenza $s(t)$ oppure utilizzando l'angolo $\theta(t)$ sotteso dall'arco $s(t)$, con $\theta(t) = s(t) / R$.

L'assumere come variabile l'angolo $\theta(t)$ significa in sostanza porsi in un sistema di coordinate polari di centro in O in cui il moto avviene con $r(t) = R =$ costante e $\theta(t)$ variabile. Anche la rappresentazione in coordinate cartesiane è legata come sappiamo a $\theta(t)$: $x(t) = R \cos \theta(t)$, $y(t) = R \sin \theta(t)$.

Siamo naturalmente interessati alle variazioni dell'angolo nel tempo e pertanto definiamo la *velocità angolare* come la derivata dell'angolo rispetto al tempo:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{R} \frac{ds}{dt} = \frac{v}{R} \quad (1.25)$$

Risulta che la velocità angolare è proporzionale alla velocità con cui è descritta la circonferenza; se v è variabile lo è anche ω .

Ricollegandoci a (1.19), nel moto circolare la velocità radiale è identicamente nulla perché il raggio vettore è costante in modulo e la velocità trasversa coincide con la velocità: da $v \theta = r \frac{d\theta}{dt}$ ritroviamo $v = R\omega$ (tutto ciò è vero se l'origine coincide col centro della circonferenza).

Il moto circolare più semplice è quello uniforme: v e ω sono costanti e le leggi orarie, con riferimento alle due variabili utilizzate, si scrivono

$$\begin{aligned} s(t) &= s_0 + vt & s &= s_0 \quad \text{per} \quad t = 0 \\ \theta(t) &= \theta_0 + \omega t & \theta &= \theta_0 \quad \text{per} \quad t = 0 \end{aligned} .$$

Ripetiamo che il termine uniforme significa esclusivamente costanza del modulo della velocità; *il moto circolare uniforme è un moto accelerato con accelerazione costante, ortogonale alla traiettoria,*

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_N = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R \quad (1.26)$$

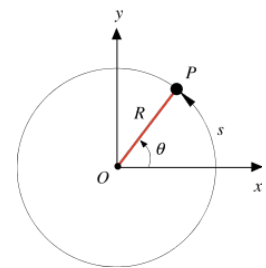


FIGURA 1.21

Velocità angolare

Si tratta inoltre di un moto periodico con periodo $T = 2\pi R v = 2\pi \omega$

MathType@MTEF@5@5@+=
feaagKart1ev2aaatCvAUfeBSjuyZL2yd9gzLbvyNv2CaerbuLwBLn
hiov2DGi1BTfMBaeXatLxBI9gBaerbd9wDYLwzYbItLDharqqtubsr
4rNCHbGeaGqiVu0Je9sqqrpepCoxbbL8F4rqqrFfpeea0xe9Lq=Jc9
vqaqpepmoxbba9pwe9Q8fs0=yqaqpepae9pg0FirpepeKkFroxfr=x
fr=xb9adbaqaeeGaciGaaiaabeqaamaabaabaaGcbaGaamivaiabg2
da9maalaabaGaaGOMaiabec8aWjaadkfaaeaacaWG2baaaiaabg2da
9maalaabaGaaGOMaiabec8aWbqaaiabeM8a3baaaaa@418C@ , corrispondente
al tempo necessario per compiere un giro completo. I moti proiettati sugli assi
cartesiani sono

$$x = R \cos \theta = R \cos (\omega t + \theta_0) \quad , \quad y = R \sin \theta = R \sin (\omega t + \theta_0) \quad ,$$

cioè due moti armonici di eguale ampiezza e fase iniziale, sfasati tra loro di $\pi/2$, e con periodo coincidente con quello del moto circolare uniforme. Numericamente la velocità angolare è eguale alla pulsazione, anche se il significato fisico delle due grandezze è diverso.

Nel caso del moto circolare non uniforme oltre all'accelerazione centripeta, che è variabile perché la velocità varia anche in modulo, dobbiamo considerare anche l'accelerazione tangenziale $a_T = dv/dt$. Siccome è variabile anche ω definiamo l'accelerazione angolare

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{1}{R} \frac{dv}{dt} = \frac{a_T}{R} \quad . \quad (1.27)$$

Accelerazione
angolare

Se è nota la legge oraria angolare $\theta(t)$ con le due derivazioni successive (1.25) e (1.27) determiniamo le variazioni dell'angolo e della velocità angolare. Viceversa, nota la funzione $\alpha(t)$, possiamo integrare ottenendo:

$$\omega(t) = \omega_0 + \int_{t_0}^t \alpha(t) dt \quad , \quad (1.28)$$

$$\theta(t) = \theta_0 + \int_{t_0}^t \omega(t) dt \quad . \quad (1.29)$$

Qualora in un particolare problema sia nota la funzione $\alpha(\theta)$, invece di $\alpha(t)$, possiamo calcolare l'incremento della velocità angolare in corrispondenza all'incremento angolare $\theta - \theta_0$. Infatti

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \omega \frac{d\omega}{d\theta} \Rightarrow \alpha d\theta = \omega d\omega \Rightarrow \int_{\theta_0}^{\theta} \alpha(\theta) d\theta = \frac{1}{2} \omega^2 - \frac{1}{2} \omega_0^2 \quad . \quad (1.30)$$

Si noti ancora una volta come siano importanti, quando si integra, le condizioni iniziali, cioè i valori di ω e θ nell'istante iniziale o di ω nella posizione

iniziale.

Un caso particolare di moto circolare non uniforme è costituito dal moto circolare uniformemente accelerato in cui $\alpha = \text{costante}$ ovvero $a_T = \text{costante}$. Da (1.28) e (1.29) abbiamo, posto $t_0 = 0$,

$$\omega = \omega_0 + \alpha t, \quad \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2.$$

L'accelerazione centripeta vale $a_N = \omega^2 R = (\omega_0 + \alpha t)^2 R$.

Si sarà certamente notata la completa analogia matematica tra la trattazione del moto rettilineo e quella del moto circolare fatta tramite $\theta(t)$: il significato fisico e la geometria sono diversi, ma le equazioni a cui si arriva hanno la stessa struttura. Ciò deriva dal fatto che con la scelta della descrizione angolare abbiamo ridotto un problema bidimensionale a un problema unidimensionale. Mentre però nel moto rettilineo la descrizione unidimensionale è ovviamente completa, nel moto circolare con $\omega(t)$ e $\alpha(t)$ descriviamo solo l'evoluzione temporale del moto, che è legato esclusivamente al modulo della velocità, e non rendiamo conto delle variazioni di direzione che portano all'accelerazione centripeta. E infatti $\mathbf{a}_N = \frac{v^2}{R} \mathbf{u}_N$ è stata calcolata con un ragionamento giustamente bidimensionale nel paragrafo 1.9.

Ad ogni modo, la comodità dell'uso di $\theta(t)$ è innegabile, perché si risolvono i problemi di moto circolare con formule analoghe a quelle del moto rettilineo; basta poi ricordare che istante per istante ad $\mathbf{a}_T = \alpha R \mathbf{u}_T$ bisogna sommare vettorialmente $\mathbf{a}_N = \omega^2 R \mathbf{u}_N$ per avere il corretto valore dell'accelerazione (e quindi il corretto legame con le forze agenti).

Esempio 1.9

Descrivere il moto circolare in cui $\alpha = -k\omega$, con k costante positiva.

Soluzione

È un moto circolare vario, con equazione differenziale

$$\frac{d\omega}{dt} = -k\omega \Rightarrow \frac{d\omega}{\omega} = -k dt \Rightarrow \omega = \omega_0 e^{-kt}.$$

Il moto è smorzato esponenzialmente (vedi paragrafo 1.7). Da (1.30) si ricava inoltre $\omega(\theta) = \omega_0 - k\theta$ e si calcola l'angolo di arresto $\theta = \omega_0/k$.

Visualizza soluzione

Esempio 1.10

Descrivere il moto circolare in cui $\alpha = -k^2\theta$.

Soluzione

È ancora un moto vario, che obbedisce all'equazione $d^2\theta/dt^2 + k^2\theta = 0$.
MathType@MTEF@5@5@+= feaagKart1ev2aaatCvAUfeBSjuyZL2yd9gzLbvyNv2CaerbuLwBLn
hiov2DG11BTfMBaeXatLxBI9gBaerbd9wDYLwzYbItLDharqqtubsr
4rNCHbGeaGqiVuoJe9sqqrpepCoxbbL8F4rqqrFfpeea0xe9Lq=Jc9
vqaqpepmoxbba9pwe9Q8fso=yqaqpepae9pg0FirpepeKkFroxfr=x
fr=xb9adbaqaeeGaciGaaiaabeqaamaabaabaaGcbaWaaSaaaeaaca
WGKbWaaWbaaSqabeaacaIYaaaaOGaeqiUdehabaGaamizaiadsha
daahaaWcbeqaaiiaaikdaaaaaOGaeq4kaSIaam4AamaaCaaaleqaba
GaaGOMaaaakiabeI7aXjabg2da9iaaicdaaaa@42A8@ la soluzione è $\theta = \theta_0 \sin(kt + \Phi)$. Il punto
descrive un arco di circonferenza di ampiezza angolare $2\theta_0$ con moto armonico semplice. La velocità
angolare di questo moto è $\omega = d\theta/dt = k\theta_0 \cos(kt + \Phi)$.
MathType@MTEF@5@5@+= feaagKart1ev2aaatCvAUfeBSjuyZL2yd9gzLbvyNv2CaerbuLwBLn
hiov2DG11BTfMBaeXatLxBI9gBaerbd9wDYLwzYbItLDharqqtubsr
4rNCHbGeaGqiVuoJe9sqqrpepCoxbbL8F4rqqrFfpeea0xe9Lq=Jc9
vqaqpepmoxbba9pwe9Q8fso=yqaqpepae9pg0FirpepeKkFroxfr=x
fr=xb9adbaqaeeGaciGaaiaabeqaamaabaabaaGcbaGaeqyYdCNaey
ypa0ZaaSaaaeaacaWGKbGaeqiUdehabaGaamizaiadshaaaGaeq4k
aSIaam4AaiabeI7aXnaaBaaaleaacaIWaaabeaakiGacogacaGGVb
GaaI4CamaabmaabaGaam4AaiaadshacqGHRaWkccqHvpGzaiaawIca caGLPaaaaaa@4AC1@ ,
variabile nel tempo; la pulsazione è , costante.

Visualizza soluzione

Esempio 1.11

Un punto materiale si muove lungo una circonferenza di raggio $R = 1.8$ m con accelerazione angolare $\alpha_1 = 2.39$ rad/s²; all'istante $t = 0$ $\theta = 0$ e $\omega = 0$. Dopo aver percorso mezzo giro il moto del punto diventa uniformemente decelerato ed esso si ferma dopo aver percorso un altro mezzo giro. Calcolare l'accelerazione angolare α_2 durante il secondo mezzo giro e il tempo totale impiegato a percorrere il giro completo. Se nello stesso intervallo di tempo il moto fosse uniforme, quale sarebbe l'accelerazione centripeta del punto?

Soluzione

Alla fine del primo mezzo giro ($\theta = \pi$), secondo (1.30) si ha

$$2\pi\alpha_1 = \omega_1^2 .$$

Nel secondo mezzo giro, da π a 2π , alla fine del quale il punto si ferma, analogamente si ha

$$2\pi\alpha_2 = -\omega_1^2$$

e quindi $\alpha_2 = -\alpha_1 = -2.39$ rad/s², com'era intuibile.

Il tempo impiegato a percorrere il primo mezzo giro si ricava da

$$\pi = \frac{1}{2} \alpha_1 t_1^2 \Rightarrow t_1 = 1.62 \text{ s} .$$

Il tempo totale è $2 t_1 = 3.24 \text{ s}$.

Se il moto fosse uniforme sarebbe $\omega = \pi / t_1 = 1.94 \text{ rad/s}$, $a_N = \omega^2 R = 6.77 \text{ m/s}^2$.

Visualizza soluzione

Notazione vettoriale

Ampliamo il concetto di velocità angolare del moto circolare mostrando come le si possono associare caratteristiche vettoriali. Si definisce velocità angolare il vettore $\boldsymbol{\omega}$ che ha queste proprietà: il modulo è $\omega = d\theta/dt$, la direzione è perpendicolare al piano in cui giace la circonferenza e il verso è tale che dall'estremo del vettore $\boldsymbol{\omega}$ il moto appaia antiorario (vedi figura 1.22). In base alla definizione risulta evidente che

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} . \quad (1.31)$$

Di norma $\boldsymbol{\omega}$ si pensa applicata nel centro della circonferenza, nel qual caso $r = R$. La (1.31) resta però valida se $\boldsymbol{\omega}$ è applicata in un qualsiasi altro punto dell'asse di rotazione (retta ortogonale al piano del moto e passante per il centro della circonferenza); infatti direzione e verso di \mathbf{v} restano eguali e il modulo vale ancora $v = \omega r \sin \Phi = \omega R$.

Se diamo $\boldsymbol{\omega}$, individuiamo pertanto l'asse di rotazione e il piano del moto circolare, con quale verso è percorsa la circonferenza e come varia l'angolo nel tempo. Da $\boldsymbol{\omega}$, per derivazione rispetto al tempo, si ottiene il vettore accelerazione angolare $\boldsymbol{\alpha}$ che risulta parallelo a $\boldsymbol{\omega}$, dato che questa ha direzione costante, e ha verso determinato dalla variazione del modulo di $\boldsymbol{\omega}$ e modulo $\alpha = d\omega/dt$.

Tramite $\boldsymbol{\alpha}$ e $\boldsymbol{\omega}$ si può esprimere l'accelerazione del moto circolare:

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \Rightarrow \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} . \quad (1.32)$$

Il primo termine $\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}$ è l'accelerazione tangenziale $\boldsymbol{\alpha}_T$ (modulo αR), il secondo $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$ è l'accelerazione centripeta $\boldsymbol{\alpha}_N$ (modulo $\omega^2 R$).

Nel moto circolare uniforme $\boldsymbol{\omega}$ è un vettore costante anche in modulo, $\boldsymbol{\alpha}$ è nulla e $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}_N = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$.

Osservando la figura 1.22 notiamo una proprietà importante: il vettore \mathbf{r} applicato in O' ha modulo costante e descrive un moto rotatorio attorno all'asse di rotazione, ovvero alla direzione di $\boldsymbol{\omega}$, formando un angolo Φ costante con l'asse stesso; la sua derivata $d\mathbf{r}/dt$ si può scrivere $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$. Anche il vettore \mathbf{v} , che nel moto circolare uniforme ha modulo costante, descrive una rotazione attorno ad $\boldsymbol{\omega}$, con cui forma l'angolo $\Phi = \pi / 2$, e la sua derivata $d\mathbf{v}/dt$ si può scrivere $\boldsymbol{\omega}$

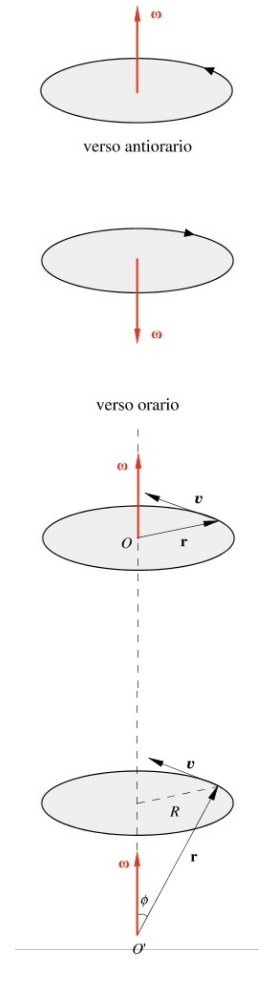


FIGURA 1.22

$\times \mathbf{v}$. A questo tipo di moto, rotazione di un asse rispetto ad un altro asse fisso, con cui forma un angolo costante e ha un punto in comune, si dà il nome di *moto di precessione*.

La proprietà importante è la seguente: dato un vettore di modulo costante \mathbf{A} , che descrive un moto di precessione con velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$, la sua derivata temporale può sempre essere scritta

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A} \quad (1.33)$$

Vediamo che $d\mathbf{A}/dt$ risulta ortogonale ad \mathbf{A} come deve essere per un vettore di dt modulo costante (vedi appendice C); inoltre, per quanto riguarda direzione e verso, la (1.33) si verifica subito guardando la figura 1.23; in modulo, $dA = A \sin\Phi \, d\theta$ e $dA/dt = A \sin\Phi \, d\theta/dt = \omega A \sin\Phi = |\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}|$.

Abbiamo considerato finora solo un moto circolare che si svolge sempre nello stesso piano; più in generale può avvenire che per un tempo dt la rotazione avvenga rispetto ad un certo asse e in un istante successivo rispetto ad un altro asse, cioè che $\boldsymbol{\omega}$ sia funzione del tempo anche in direzione; pure in tal caso (1.33) resta valida.

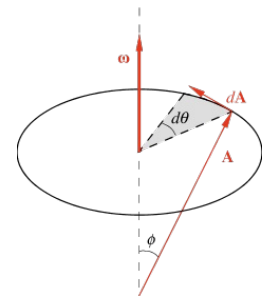


FIGURA 1.23

Unità di misura

velocità angolare $\text{rad/s} = \text{rad s}^{-1}$ accelerazione angolare $\text{rad/s}^2 = \text{rad s}^{-2}$

1.12 Moto parabolico dei corpi

Studiamo, come estensione di quanto trattato nel paragrafo 1.5, il moto (nel vuoto) di un punto P lanciato dall'origine O con velocità iniziale \mathbf{v}_0 formante un angolo θ con l'asse delle ascisse (asse orizzontale). In particolare vogliamo calcolare la traiettoria, la massima altezza raggiunta e la posizione G in cui il punto ricade sull'asse x ovvero la *gittata* OG . Il moto è caratterizzato da un'accelerazione costante $\mathbf{a} = \mathbf{g} = -g \mathbf{u}_y$ e le condizioni iniziali sono $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0$ al tempo $t = 0$, istante di lancio.

Secondo (1.24)

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \int_0^t \mathbf{a}(t) dt = \mathbf{v}_0 - g t \mathbf{u}_y \quad .$$

Vediamo innanzitutto che la velocità sta sempre nel piano individuato dai vettori costanti \mathbf{v}_0 e \mathbf{g} , che è il piano x, y della figura 1.24. Poiché $\mathbf{v}_0 = v_0 \cos\theta \mathbf{u}_x + v_0 \sin\theta \mathbf{u}_y$,

$$\mathbf{v}(t) = v_0 \cos\theta \mathbf{u}_x + (v_0 \sin\theta - g t) \mathbf{u}_y \quad .$$

Le velocità dei moti proiettati sugli assi sono $v_x = v_0 \cos\theta$, costante, e $v_y = v_0 \sin\theta - g t$. Quindi le leggi orarie dei moti proiettati sono

$$x = v_0 \cos\theta t \quad , \quad y = v_0 \sin\theta t - \frac{1}{2} g t^2 \quad ;$$

sull'asse x il moto è uniforme, sull'asse y uniformemente accelerato (eguale a quello del terzo caso del paragrafo 1.5). Si noti che abbiamo applicato (1.20) integrando direttamente sulle componenti della velocità per ottenere le componenti x e y di $\mathbf{r}(t)$.

La traiettoria viene ricavata eliminando il tempo tra $x(t)$ e $y(t)$ e ottenendo così la funzione $y(x)$; $t = x/v_0 \cos\theta$ e

$$y(x) = x \operatorname{tg}\theta - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2\theta} x^2 \quad ,$$

che è l'equazione di una *parabola*.

La direzione del moto, in funzione del tempo o della coordinata x , può essere caratterizzata dall'angolo Φ che il vettore velocità forma con l'asse orizzontale:

$$\operatorname{tg}\phi = \frac{v_y}{v_x} = \operatorname{tg}\theta - \frac{g}{v_0 \cos\theta} t = \operatorname{tg}\theta - \frac{g}{v_0^2 \cos^2\theta} x \quad .$$

Per calcolare la *gittata* OG imponiamo $y(x) = 0$ e otteniamo due soluzioni: $x = 0$ ovviamente e

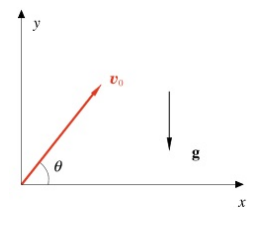


FIGURA 1.24

$$x_G = \frac{2 v_0^2 \cos^2 \theta \operatorname{tg} \theta}{g} = \frac{2 v_0^2 \cos \theta \operatorname{sen} \theta}{g} = 2 x_M$$

con $x_M = v_0^2 \cos \theta \operatorname{sen} \theta / g$ coordinata del punto di mezzo del segmento OG e quindi, per la simmetria della parabola, ascissa del punto di massima altezza. L'altezza massima raggiunta è pertanto

$$y(x_M) = y_M = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{2 g} .$$

L'angolo di lancio per cui si ha la gittata massima si ottiene con la condizione

$$\frac{d x_G}{d \theta} = 0, \text{ cioè } \frac{2 v_0^2}{g} (-\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta) = 0 : \text{ risulta } \theta = 45^\circ \text{ e } (x_G)_{\max} = v_0^2 / g .$$

L'altezza massima y_M può ottenersi anche in altri modi: per esempio si annulla dy/dx , cioè si impone $\operatorname{tg} \theta - (g/v_0^2 \cos^2 \theta) x = 0$, si ricava l'ascissa del massimo x_M e si calcola $y(x_M)$; oppure si sfrutta il fatto che nel punto di massima altezza la velocità è orizzontale e quindi $v_y = 0$, cioè $t = t_M = v_0 \operatorname{sen} \theta / g$: sostituendo in $x(t)$ e $y(t)$ si ritrovano x_M e y_M .

Il tempo totale di volo t_G è pari al tempo impiegato a percorrere OG con velocità costante $v_x = v_0 \cos \theta$:

$$t_G = 2 x_M / v_0 \cos \theta = 2 v_0 \operatorname{sen} \theta / g = 2 t_M ;$$

evidentemente t_G coincide con il tempo necessario per salire all'altezza y_M e ritornare al suolo. Notiamo infine che nella posizione G la velocità è la stessa in modulo che alla partenza, ma è posta simmetricamente rispetto all'asse x :

$$v_x(t_G) = v_0 \cos \theta \quad , \quad v_y(t_G) = -v_0 \operatorname{sen} \theta \quad , \quad \operatorname{tg} \phi = -\operatorname{tg} \theta .$$

Le caratteristiche geometriche del moto parabolico di un corpo vicino alla superficie terrestre si comprendono chiaramente nel sistema cartesiano adottato che è in definitiva il più naturale in questo problema in cui c'è una direzione di particolare importanza, quella di \mathbf{g} , a 90° con una direzione di uso pratico molto comune, quella orizzontale. Invece, per esempio, nella trattazione del moto circolare è certamente più semplice servirsi di un sistema di coordinate polari con centro nel centro di simmetria del sistema, mentre non hanno particolare significato gli assi x e y . È la situazione fisica a suggerire la scelta del sistema di riferimento più adatto; se non ci sono motivi di preferenza di un dato sistema, conviene scegliere un sistema cartesiano.

Altezza massima

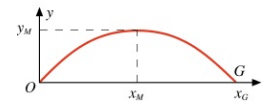


FIGURA 1.25

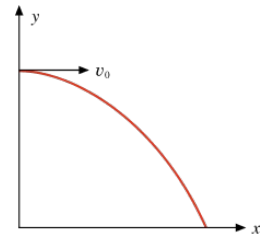


FIGURA 1.26
(Esempio 1.12)

Esempio 1.12

Un punto materiale viene fatto cadere da un'altezza h rispetto al suolo lanciandolo orizzontalmente con velocità iniziale v_0 (Fig. 1.26). Descrivere il moto e confrontare con la caduta verticale del paragrafo 1.5.

Soluzione

Poniamoci nel sistema di riferimento della figura 1.26 e adattiamo il calcolo appena visto. Le componenti iniziali della velocità sono $v_x = v_0$ e $v_y = 0$, l'accelerazione è $-g \mathbf{u}_y$. Pertanto le proiezioni del moto del punto sugli assi sono

$$x = v_0 t \quad , \quad y = h - \frac{1}{2} g t^2 \quad .$$

La traiettoria è un arco di parabola di equazione

$$y(x) = h - \frac{g}{2 v_0^2} x^2 \quad .$$

Il tempo di caduta e la gittata valgono rispettivamente

$$t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad , \quad x_G = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}} = v_0 t_c \quad .$$

Il modulo della velocità finale

$$v = \sqrt{v_0^2 + (g t_c)^2} = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$$

è ed essa forma con l'asse x l'angolo Φ il cui valore si ricava da $\text{tg}\Phi = v_y / v_x = 2gh / v_0$. Notiamo alcuni fatti. Il tempo di caduta è lo stesso che nel caso di caduta verticale con partenza da fermo; infatti il moto lungo l'asse y è lo stesso. Quindi, se contemporaneamente al nostro punto ne cadesse un altro verticalmente, le loro posizioni a intervalli di tempo eguali sarebbero quelle mostrate in figura 1.27. La velocità finale invece è diversa e la formula trovata coincide con quella della caduta verticale con velocità iniziale v_0 ; è chiaro che la presenza di una velocità iniziale è importante

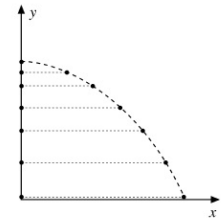


FIGURA 1.27
(Esempio 1.12)

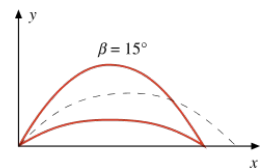


FIGURA 1.28
(Esempio 1.13)

indipendentemente dalla direzione di lancio. Capiremo questo punto quando studieremo il concetto di energia applicato alla caduta dei corpi.

Visualizza soluzione

Esempio 1.13

Un corpo viene lanciato nelle condizioni viste all'inizio del paragrafo e sappiamo che la gittata è massima se $\theta = 45^\circ$. Dimostrare che se l'angolo di lancio è $45^\circ + \beta$ o $45^\circ - \beta$ la gittata è la stessa ($\beta < 45^\circ$).

Soluzione

Applichiamo la formula della gittata ricorrendo all'identità $2 \sin\theta \cos\theta = \sin 2\theta$ e scriviamo:

$$x_{G,1} = \frac{v_0^2}{g} \sin 2(45^\circ + \beta) = \frac{v_0^2}{g} \sin (90^\circ + 2\beta) = \frac{v_0^2}{g} \cos 2\beta,$$
$$x_{G,2} = \frac{v_0^2}{g} \sin 2(45^\circ - \beta) = \frac{v_0^2}{g} \sin (90^\circ - 2\beta) = \frac{v_0^2}{g} \cos 2\beta = x_{G,1}.$$

Ricordiamo che la gittata a 45° è v_0^2 / g . Si verifichi che invece sono diversi per le due traiettorie l'altezza massima e il tempo di volo.

Visualizza soluzione

1.13 Moto nello spazio. Composizione di moti

Nel caso più generale il punto P descrive una traiettoria curva nello spazio; questo moto tridimensionale può essere rappresentato, in coordinate cartesiane, come la somma di tre moti rettilinei lungo gli assi di riferimento per cui scriviamo:

$$\mathbf{r}(t) = x(t) \mathbf{u}_x + y(t) \mathbf{u}_y + z(t) \mathbf{u}_z$$

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \mathbf{u}_x + \frac{dy}{dt} \mathbf{u}_y + \frac{dz}{dt} \mathbf{u}_z = v_x \mathbf{u}_x + v_y \mathbf{u}_y + v_z \mathbf{u}_z$$

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2} \mathbf{u}_x + \frac{d^2y}{dt^2} \mathbf{u}_y + \frac{d^2z}{dt^2} \mathbf{u}_z = a_x \mathbf{u}_x + a_y \mathbf{u}_y + a_z \mathbf{u}_z.$$

Secondo la procedura già nota da $\mathbf{a}(t)$ risaliamo a $\mathbf{r}(t)$ con due successive integrazioni, note le condizioni iniziali \mathbf{r}_0 e \mathbf{v}_0 . La velocità \mathbf{v} è sempre tangente alla traiettoria, indica il verso del moto e in modulo vale ds/dt , l'accelerazione \mathbf{a} non è parallela a \mathbf{v} e indica, fisicamente, la direzione e il verso della forza agente che incurva la traiettoria.

Non sviluppiamo ulteriormente la cinematica nello spazio perché non ne avremo bisogno nel seguito della trattazione. Ci occupiamo invece, con vari esempi, della composizione di moti. Richiamiamo i due casi già visti: nel paragrafo 1.11 abbiamo mostrato che un moto circolare uniforme si scompone in due moti armonici semplici su assi ortogonali, di eguale ampiezza e periodo, sfasati di $\pi/2$, nel paragrafo 1.12 che il moto di un punto lungo un arco di parabola ha come moti componenti un moto rettilineo lungo l'asse orizzontale e un moto uniformemente accelerato lungo l'asse verticale. Adesso impostiamo il problema inverso: prendiamo due moti lungo gli assi x , y e calcoliamo il moto risultante nel piano.

a) Se i due moti sono uniformi con velocità v_x e v_y , il moto risultante è un moto uniforme lungo una retta che forma un angolo Φ con l'asse delle x , tale che $\text{tg } \Phi = v_y / v_x$.

b) I due moti sono uniformemente accelerati con accelerazioni a_x e a_y : allora $\mathbf{a} = a_x \mathbf{u}_x + a_y \mathbf{u}_y$ è un vettore costante. La velocità si scrive $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a} t$: se \mathbf{v}_0 è nulla oppure parallela ad \mathbf{a} , \mathbf{v} risulta costante in direzione e verso in quanto parallela all'accelerazione. Il moto è quindi uniformemente accelerato lungo una retta che forma con l'asse x un angolo tale che $\text{tg } \Phi = a_y / a_x = v_y / v_x$. Si noti che il risultato dipende dalle condizioni iniziali; in effetti negli altri casi il moto risultante è più complesso.

c) Il moto lungo l'asse x è armonico semplice, $x = A \text{ sen } (\omega t + \Phi)$, lungo l'asse y è uniforme, $y = vt$. Eliminando il tempo tra $x(t)$ e $y(t)$ si ottiene l'equazione della traiettoria che è una sinusoidale, figura 1.29, avente come asse l'asse delle ordinate:

$$x(y) = A \operatorname{sen} \left(\frac{\omega}{v} y + \phi \right) .$$

d) Il moto lungo l'asse x ha l'espressione $x = R \operatorname{sen} \omega t + \omega R t$, somma di un moto armonico semplice e di un moto uniforme con velocità ωR ; lungo l'asse y abbiamo $y = R \cos \omega t + R$, moto armonico semplice con centro in $y = R$ (invece che in $y = 0$).

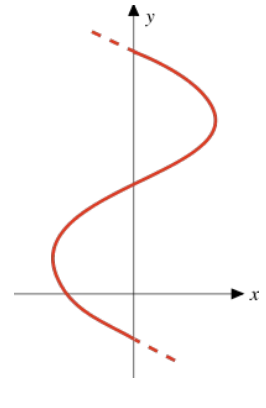


FIGURA 1.29

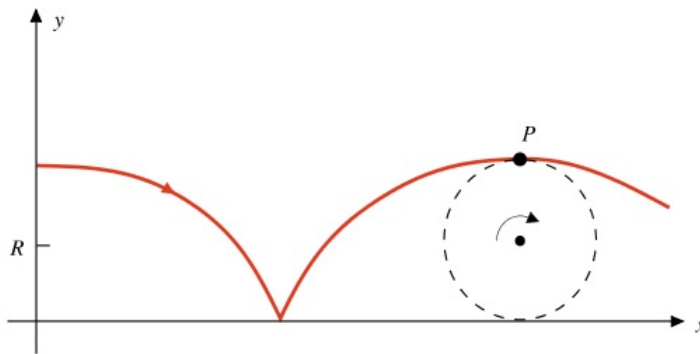


FIGURA 1.30

La traiettoria del punto che descrive il moto risultante è mostrata in figura 1.30: si tratta di una cicloide. Questo moto è descritto, ad esempio, da un punto posto sul bordo di una ruota di raggio R che rotola senza strisciare lungo l'asse x con velocità costante $v = \omega R$ (argomento che verrà ripreso nel capitolo 6). Si può anche dire sinteticamente che il moto risultante è la somma di un moto circolare e di un moto rettilineo uniforme del centro della circonferenza.

e) In coordinate polari le equazioni del moto sono $r = vt$, $\theta = \omega t$: un moto rettilineo uniforme lungo un asse che ruota rispetto all'origine con velocità angolare costante (disco che ruota rispetto al centro con una scanalatura radiale lungo cui si muove il punto). In coordinate cartesiane

$$x = r \cos \theta = vt \cos \omega t \quad , \quad y = r \operatorname{sen} \theta = vt \operatorname{sen} \omega t .$$

I due moti non sono armonici semplici perché l'ampiezza è funzione del tempo.

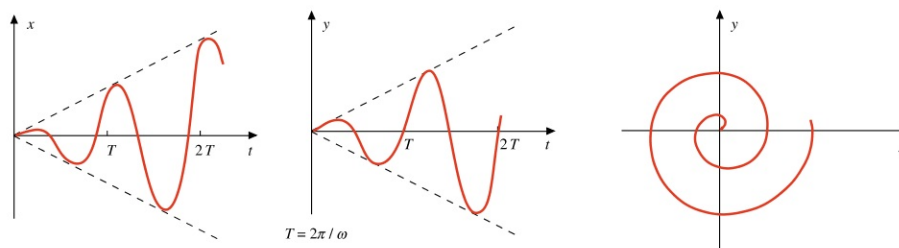


FIGURA 1.31

La traiettoria è la spirale mostrata in figura 1.31 insieme ai grafici di $x(t)$ e $y(t)$.

Dopo questi esempi nel piano trattiamo un solo caso in tre dimensioni, il moto di un punto somma di un moto armonico lungo l'asse x , $x = R \cos \omega t$, di un moto armonico lungo l'asse y con le caratteristiche del precedente, ma sfasato di $\pi / 2$, $y = R \sin \omega t$, e di un moto uniforme lungo l'asse z , $z = v_z t$. Abbiamo cioè la somma di un moto circolare uniforme nel piano x, y e di un moto rettilineo uniforme lungo l'asse z .

Il moto risultante è un *moto elicoidale* uniforme la cui traiettoria è costituita da un'elica cilindrica con passo costante, figura 1.32. Le componenti della velocità sono:

$$v_x = -\omega R \sin \omega t \quad , \quad v_y = \omega R \cos \omega t \quad , \quad v_z \text{ (costante)}.$$

Da esse si può determinare la direzione istantanea del moto e il modulo della velocità

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\omega^2 R^2 + v_z^2} \quad , \quad \text{costante} .$$

L'accelerazione ha solo le componenti a_x e a_y , vale in modulo $\omega^2 R$ e in qualsiasi istante del moto è diretta verso l'asse z .

Dall'esame degli esempi che abbiamo descritto risulta l'utilità del procedimento di composizione: infatti spesso è più semplice studiare le caratteristiche di un moto attraverso l'analisi delle componenti. Inoltre ci rendiamo conto che componendo opportunamente due o tre moti rettilinei lungo gli assi possiamo descrivere qualsiasi moto nel piano o nello spazio e ciò ha importanti conseguenze pratiche per la progettazione di particolari tipi di moto.

D'altra parte bisogna fare attenzione a non perdere di vista la situazione fisica e quindi ricordare sempre che il moto reale è quello che il punto descrive nel piano o nello spazio e non quello proiettato sugli assi.

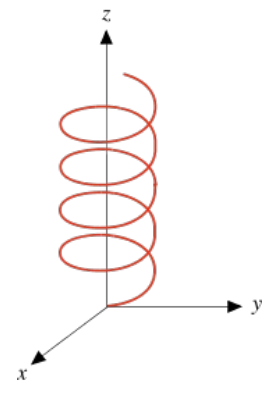


FIGURA 1.32

1.14 Riepilogo

Ripercorriamo gli argomenti presentati nel capitolo per mettere in evidenza i concetti più importanti e le procedure più significative.

Lo scopo iniziale del nostro studio della meccanica è di fissare il quadro della descrizione cinematica del moto di un punto precisando quali sono le grandezze fondamentali e come sono legate tra loro; per sviluppare questo programma risultano subito necessari strumenti forniti dall'analisi matematica e dal calcolo vettoriale. Elenchiamo in maniera schematica i punti salienti:

- La descrizione del moto consiste nel determinare *come varia la posizione del punto in funzione del tempo*; se conosciamo la posizione ad un certo istante possiamo sapere come si sviluppa il moto se abbiamo la direzione istantanea del moto e la rapidità con cui avviene lo spostamento: ciò porta al concetto di *velocità* e possiamo concepire il moto come una successione di spostamenti infinitesimi $d\mathbf{r} = \mathbf{v} dt$.
- La *velocità* a sua volta *può cambiare durante il moto e le sue variazioni sono espresse dall'accelerazione*: $d\mathbf{v} = \mathbf{a} dt$.
- La *traiettoria* è il luogo dei punti occupati in funzione del tempo dalla punta del vettore $\mathbf{r}(t)$: questo dà la posizione del punto, ma non la direzione del moto espressa, come detto sopra, da $d\mathbf{r}$ e quindi da \mathbf{v} .
- La *velocità* \mathbf{v} è *dunque sempre tangente alla traiettoria*; *l'accelerazione in generale non è parallela alla velocità*. La componente di \mathbf{a} ortogonale a \mathbf{v} descrive le variazioni della direzione del moto e non ha alcun legame con le variazioni del modulo di \mathbf{v} . Nel moto curvilineo c'è sempre una componente dell'accelerazione ortogonale alla traiettoria, nel moto rettilineo questa componente è sempre nulla.
- Da $\mathbf{r}(t)$ si passa a $\mathbf{v}(t)$ e ad $\mathbf{a}(t)$ derivando rispetto al tempo; se invece è data $\mathbf{a}(t)$ il passaggio inverso si fa integrando ed è essenziale la conoscenza delle condizioni iniziali.
- Le *grandezze cinematiche fondamentali* sono dunque *posizione, velocità, accelerazione* e sono legate tra loro da operazioni di derivazione e di integrazione, conseguenza del fatto che lo studio dell'evoluzione del moto comporta il concetto di variazione che è espresso matematicamente dall'operazione di derivazione.
- \mathbf{r} , \mathbf{v} , \mathbf{a} sono *grandezze vettoriali*: nella loro definizione oltre ad un numero bisogna dare una direzione e un verso; pertanto le variazioni di posizione e di velocità sono espresse completamente solo se si tiene conto sia della variazione del modulo che della variazione della direzione.
- È necessario specificare sempre in quale sistema di riferimento si descrive il moto: le coordinate del punto, le componenti di \mathbf{v} e \mathbf{a} , l'espressione analitica della traiettoria dipendono dal sistema di riferimento. Però le *relazioni più generali tra le grandezze cinematiche sono relazioni vettoriali* e in quanto

tali sono *invarianti rispetto alla scelta del sistema di riferimento*, cioè *valgono in qualsiasi sistema di riferimento*. Quindi, se $\mathbf{b} = \mathbf{c}$, questo comporta sempre $b_x = c_x$, $b_y = c_y$, $b_z = c_z$, ma i valori (b_x, b_y, b_z) e (c_x, c_y, c_z) cambiano col sistema di riferimento.

Questo è il quadro generale. Si vede così che parallelamente all'introduzione delle grandezze fisiche citate abbiamo dovuto richiamare i concetti matematici che ne permettono la spiegazione. Per non appesantire la trattazione i richiami matematici sono contenuti nelle appendici A e C che vanno lette e studiate adesso e saranno utilizzate per tutto il resto del volume.

Gli argomenti esposti sono stati chiariti con vari esempi; tra questi rivestono particolare importanza il *moto armonico semplice* e il *moto circolare* che ritroveremo rispettivamente nello studio dei fenomeni di oscillazione e di rotazione. Sempre a scopo di chiarezza e di semplicità abbiamo iniziato lo studio dal moto rettilineo che in realtà è un caso abbastanza particolare; però, a parte l'utilità didattica, vediamo che la sua conoscenza è essenziale nella composizione di moti.

Infine vogliamo attirare l'attenzione su un argomento di carattere diverso dai precedenti. Se da una parte la cinematica ha una struttura analitica che permette di calcolare le caratteristiche del moto, dall'altra alla base del calcolo devono esserci state delle *misure* che, tanto per fissare due estremi, o hanno permesso di determinare $\mathbf{r}(t)$ oppure hanno fornito $\mathbf{a}(t)$ e le condizioni iniziali. La procedura di misura produce dei valori numerici (con un certo errore) ai quali bisogna associare una *unità di misura*. Per questa ragione ogni qual volta introduciamo nuove grandezze diciamo subito in che unità di misura vanno espresse. Il quadro completo delle grandezze e delle relative unità si trova in appendice B.

2.1 Principio d'inerzia. Introduzione al concetto di forza

All'inizio del primo capitolo ci eravamo proposti di studiare il moto indipendentemente dalle cause che lo determinano. Adesso abbiamo imparato come avviene il moto e come lo si caratterizza. La questione fondamentale è perché avviene il moto, quali sono le cause fisiche per cui un corpo entra in movimento e descrive un certo tipo di moto invece che un altro.

La formulazione quantitativa della legge del moto per un punto materiale e le sue più importanti conseguenze sono sviluppate in questo capitolo. Tale parte della meccanica si chiama *dinamica del punto* e contiene in particolare anche il caso dell'equilibrio statico, cioè lo studio delle condizioni per cui un punto resta in quiete.

Un'osservazione fondamentale è che la variazione dello stato di moto di un punto è determinata dall'interazione del punto con l'ambiente circostante, espressa come abbiamo già anticipato dal concetto di forza. La prima prova è contenuta nel *principio d'inerzia*: *un corpo non soggetto a forze non subisce cambiamenti di velocità, ovvero resta in uno stato di quiete se era in quiete ($v = 0$) oppure si muove di moto rettilineo uniforme (v costante non nulla).* L'assenza di forza non implica che non ci sia moto, bensì comporta che la velocità non vari.

Questo risultato, notevolissimo se messo in relazione con i mezzi di indagine allora assai limitati, venne formulato da Galileo a seguito dei suoi esperimenti sul moto dei corpi. In esso è implicitamente contenuta l'idea che sarebbe stata esplicitata da Newton e posta sotto forma di legge quantitativa: la variazione di velocità, in modulo o in direzione o in entrambi, è dovuta all'azione di una forza.

Dato che il principio d'inerzia richiede, in caso di moto, che questo sia rettilineo uniforme, un moto accelerato segnala la presenza di una forza agente. Un esempio è costituito dal moto circolare uniforme, nel quale la velocità rimane costante in modulo, ma varia in direzione a ciascun istante per effetto dell'accelerazione centripeta, e quindi di una forza. Se improvvisamente si annullasse tale forza il punto cesserebbe il moto circolare uniforme e inizierebbe un moto rettilineo uniforme con direzione secondo la tangente alla circonferenza nella posizione ove è cessata l'azione della forza.

La nozione primordiale di forza era legata alla sensazione di sforzo muscolare e successivamente allo sforzo esercitato da sistemi meccanici semplici, come ad esempio per effetto di una molla compressa o estesa o di una leva. In seguito tale concetto si è affinato con la constatazione che non è

Principio d'inerzia

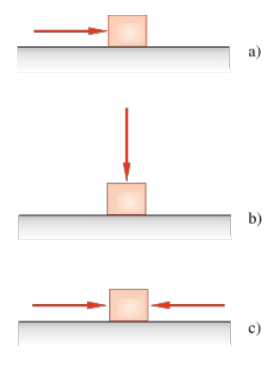


FIGURA 2.1

necessario un contatto per esercitare una forza, come avviene attraverso una interazione a distanza per le forze di attrazione gravitazionale o per quelle elettrostatiche, che si manifestano tra corpi carichi elettricamente.

La forza dunque è la grandezza che esprime e misura l'interazione tra sistemi fisici. Intuitivamente possiamo affermare che alla forza è associata la nozione di intensità e di direzionalità. L'effetto di una forza cambia con la direzione, come viene evidenziato in figura 2.1. Nel caso a) si ha in generale un moto, nella situazione b) non si ha moto, ma solamente una deformazione del corpo e del supporto, nel caso c) infine non si manifesta alcun moto.

Quest'ultimo caso introduce la nozione di eguaglianza di due forze e di equilibrio. Anche nel caso b) possiamo supporre che il piano orizzontale deformandosi produca una forza che fa equilibrio a quella applicata dall'esterno (tale reazione del supporto è indicata come *reazione vincolare*, vedi paragrafo 2.4).

La forza può essere misurata staticamente tramite un *dinamometro*. Una molla estesa esercita una forza di richiamo che entro certi limiti di allungamento (limiti di elasticità) è proporzionale all'allungamento stesso (vedi paragrafo 2.9). Se appendiamo ad una estremità della molla un corpo di massa m , che risente della forza di attrazione della terra mg (vedi paragrafo 2.7), in condizioni di equilibrio la forza F sviluppata dalla molla eguaglia quella esercitata dalla terra, che attira il corpo. Supponiamo ora di sospendere alla molla (dinamometro) un corpo campione e di misurare l'allungamento x_c della molla in condizioni di equilibrio. Indicata come forza campione F_c quella che produce l'allungamento x_c , per ogni altra forza, sia dovuta all'attrazione terrestre che ad un qualsiasi altro meccanismo applicabile al dinamometro col risultato di provocare l'allungamento x , si ha $F/F_c = x / x_c$. È possibile quindi misurare il modulo della forza F in termini della forza campione F_c e il dinamometro può essere tarato direttamente in unità di forza.

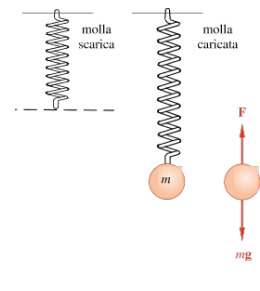


FIGURA 2.2

2.2 Leggi di Newton

La formulazione quantitativa del legame tra la forza e lo stato del moto è data dalla *legge di Newton*

$$\mathbf{F} = m \mathbf{a} \quad . \quad (2.1)$$

Seconda legge di
Newton

L'interazione del punto con l'ambiente circostante, espressa tramite la forza \mathbf{F} , determina l'accelerazione del punto ovvero la variazione della sua velocità nel tempo; m rappresenta la massa inerziale del punto.

Il termine *massa inerziale* è legato al fatto che la massa esprime l'inerzia del punto, cioè la sua resistenza a variare il proprio stato di moto, ossia a modificare la velocità (in modulo, direzione e verso). Fissata una determinata forza \mathbf{F} , l'effetto dinamico è tanto maggiore quanto minore è la massa del punto. Per un punto materiale che si muove con una determinata accelerazione \mathbf{a} , la forza necessaria a mantenere tale moto è tanto maggiore quanto maggiore è il valore di m .

Si giustifica così anche il nome *punto materiale*: per descrivere il comportamento dinamico del punto occorre conoscere la sua massa; si può cioè semplificare al massimo concependo un corpo privo di struttura, ma non si può rinunciare alla massa che è un concetto dinamico fondamentale per qualsiasi corpo.

In assenza di interazione con l'esterno la forza è nulla e quindi $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, $\mathbf{v} =$ costante: la legge di Newton contiene, come caso particolare, il principio d'inerzia. Spesso la (2.1) viene indicata come *seconda legge di Newton*, mentre ci si riferisce al principio d'inerzia come *prima legge di Newton*.

La legge (2.1), che si può anche scrivere

$$\mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \quad ,$$

esprime la legge fondamentale della dinamica del punto; da essa vengono ricavate tutte le proprietà relative al moto di un punto materiale e in particolare, attraverso (1.24) e (1.20), la legge oraria $\mathbf{r}(t)$, qualora naturalmente si conoscano la funzione $\mathbf{F}(t)$ e le condizioni iniziali del moto. In breve, dalle caratteristiche della forza si deducono quelle del moto: in (2.1) è noto il termine di sinistra e incognita \mathbf{a} . Si può però anche applicare la procedura inversa, cioè calcolare $\mathbf{a}(t)$ e quindi la forza agente, nota la massa del punto, a partire da misure sul moto che forniscono la traiettoria, ovvero $\mathbf{r}(t)$ e $\mathbf{v}(t)$; nella (2.1) è noto il termine di destra e incognita \mathbf{F} . Si realizza in tal modo una misura dinamica della forza. Concettualmente è stato con tale metodo che si sono ricavate le proprietà della forza di gravitazione universale (capitolo 5).

Avremo modo nel seguito di applicare la legge di Newton a svariate situazioni fisiche, arrivando così a capirne bene il significato. Vogliamo ora

completare la presentazione con alcune osservazioni.

La (2.1) è una legge sperimentale dedotta dall'analisi del moto di un punto soggetto ad una determinata forza. Bisogna dire che, a posteriori, la sua migliore verifica è costituita dalla correttezza di tutte le deduzioni fatte a partire da essa. Sempre l'esperienza conferma che (2.1) è una *legge vettoriale*, fatto che va in ogni caso tenuto presente. Nella pratica ciò vuol dire che essa equivale a tre equazioni relative ai tre moti proiettati sugli assi.

Sotto l'aspetto matematico (2.1) appare come una relazione algebrica tra forza e accelerazione; però l'accelerazione è legata a velocità e posizione da relazioni non algebriche e quindi (2.1) è in realtà un'equazione differenziale tra \mathbf{F} e \mathbf{v} o tra \mathbf{F} e \mathbf{r} . Ad esempio, in un caso unidimensionale (moto lungo l'asse x e forza lungo l'asse x), la seconda legge di Newton fissa la condizione $d^2x/dt^2 = F(t)/m$. A parte situazioni semplici, la soluzione può presentare notevoli difficoltà.

Oltre che come equazione la (2.1) va anche intesa come la vera definizione della grandezza forza. In sostanza, seguendo Newton, noi chiamiamo forza ciò che causa una variazione dello stato di moto di un corpo e la (2.1) ci dice come misurarla, una volta che abbiamo scelto (arbitrariamente) una massa campione. Pure in relazione alla massa la (2.1) è importante, in quanto ne fissa il significato fisico, rendendo quantitativo il concetto d'inerzia come detto all'inizio del paragrafo.

È naturale chiedersi di fronte a una relazione così fondamentale se ci siano limiti di validità. Innanzitutto anticipiamo un risultato del capitolo 3: la legge di Newton, nella forma (2.1) o in quella (2.2) che vedremo tra poco, è valida solo se il moto è studiato in una particolare classe di sistemi di riferimento, i cosiddetti sistemi di riferimento inerziali; altrimenti compaiono nelle formule termini correttivi. Inoltre, anche in un sistema di riferimento inerziale, la legge di Newton è applicabile solo se la velocità dei punti considerati è molto minore della velocità della luce. Anche su questo aspetto ritorneremo nel capitolo 3.

Infine un breve commento per imparare ad assegnare alle varie leggi la giusta importanza. La (2.1) è una legge di carattere generale che si applica ad un punto materiale di massa m qualunque sia il tipo di forza agente. In ogni caso particolare, in presenza di una certa forza ben definita, si avrà un corrispondente moto, con una sua legge oraria. Questa, che sia $x = vt$, $x = \frac{1}{2}gt^2$, $x = A \sin(\omega t + \Phi)$ o altro, si applica solo a quel moto e non ha validità generale. In altre parole, le leggi dei vari moti, pur importanti nel caso specifico, sono tutte il risultato particolare di un metodo di calcolo generale, che si basa su (2.1) e sulla definizione delle grandezze cinematiche. Per la comprensione della materia e per la soluzione dei problemi è essenziale cogliere queste differenze e quindi essere in grado di applicare correttamente le leggi appropriate.

Terza legge di Newton

La (2.1) è la legge dinamica in base alla quale spieghiamo perché un moto

avviene con certe caratteristiche. Newton scoprì anche una proprietà generale delle forze, che si può enunciare in questa forma: *se un corpo A esercita una forza $\mathbf{F}_{A,B}$ su un corpo B, il corpo B reagisce esercitando una forza $\mathbf{F}_{B,A}$ sul corpo A. Le due forze hanno la stessa direzione, lo stesso modulo e verso opposto, esse cioè sono eguali e contrarie,*

$$\mathbf{F}_{A,B} = -\mathbf{F}_{B,A} \quad ;$$

inoltre esse hanno la stessa retta d'azione, come mostrato nella figura 2.3 nei due casi possibili di forze attrattive e di forze repulsive. Tale legge è detta terza legge di Newton o, più spesso, principio di azione e reazione.

Il fatto che non esista una forza isolata, ma che le forze vadano considerate sempre in coppie, secondo il principio di azione e reazione, chiarisce che l'interazione tra due corpi è sempre un'azione mutua. Avremo modo di discutere più avanti aspetti concettuali e limiti della terza legge, nel capitolo 3 in relazione alla teoria della relatività ristretta, nel capitolo 4 che tratta la dinamica dei sistemi di punti materiali e anche nel secondo volume. In questo capitolo indicheremo con esempi dove sono applicate le reazioni di un punto alle forze cui è soggetto, per cominciare a capire nella pratica l'uso della terza legge.

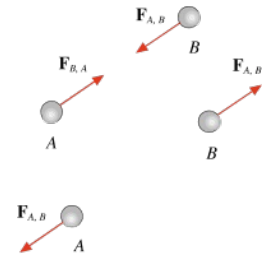


FIGURA 2.3

2.3 Quantità di moto. Impulso

Si definisce *quantità di moto* di un punto materiale il vettore

$$\mathbf{p} = m \mathbf{v} \quad ;$$

se la massa è costante la (2.1) si può allora scrivere

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad . \quad (2.2)$$

In realtà questa relazione è la forma più generale della legge di Newton, utilizzabile anche se la massa non è costante. Essa va intesa in questo senso: lo stato dinamico del punto è individuato dalla quantità di moto, in cui compaiono la massa e la velocità; l'azione di una forza determina la variazione nel tempo della quantità di moto ovvero di qualcuna o di tutte queste quantità, massa, direzione, verso, modulo della velocità.

Un punto materiale in senso stretto, cioè privo di struttura, ha massa costante, qualunque sia la sua velocità (argomento molto importante, che riprenderemo parlando della teoria della relatività nel capitolo 3). Invece quando con un punto approssimiamo un sistema materiale esteso, la massa può variare durante il moto: si pensi ad un veicolo a motore che brucia carburante o ad un nastro trasportatore. Noi non tratteremo esplicitamente questi problemi con massa variabile; vi faremo solo un cenno alla fine del capitolo 4, nel paragrafo 4.16. Pertanto nel seguito la massa sarà sempre considerata costante e (2.1) e (2.2) equivalenti.

Dalla (2.2) si ha $\mathbf{F} dt = d\mathbf{p}$: vediamo che l'azione di una forza durante un tempo dt provoca una variazione infinitesima della quantità di moto del punto. In termini finiti si ha

$$\mathbf{J} = \int_0^t \mathbf{F} dt = \int_{\mathbf{p}_0}^{\mathbf{p}} d\mathbf{p} = \mathbf{p} - \mathbf{p}_0 = \Delta\mathbf{p} \quad . \quad (2.3)$$

Teorema dell'impulso

Il termine vettoriale \mathbf{J} , integrale della forza nel tempo, è chiamato *impulso della forza* e la relazione (2.3) esprime il *teorema dell'impulso*: *l'impulso di una forza applicata ad un punto materiale provoca la variazione della sua quantità di moto; con m costante si ha ovviamente :*

$$\mathbf{J} = m (\mathbf{v} - \mathbf{v}_0) = m \Delta\mathbf{v} \quad .$$

La (2.3) è la *forma integrale della seconda legge di Newton*: mentre (2.1) o (2.2) valgono in ciascun istante in cui si considera l'applicazione della forza, (2.3) dice qual è l'effetto complessivo in un intervallo di tempo finito. Abbiamo così trovato in termini quantitativi la relazione tra forza e variazione di velocità (se la massa è costante). Il legame si esprime attraverso un integrale, a meno che la forza non sia costante nel qual caso è semplicemente

$$\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_0 = \frac{\mathbf{F}t}{m} \quad .$$

Il teorema dell'impulso è utilizzabile per calcolare effettivamente $\Delta \mathbf{p}$ solo se si conosce la funzione $\mathbf{F}(t)$, in particolare se \mathbf{F} è costante come appena detto. Se invece t misuriamo $\Delta \mathbf{p}$, applicando il teorema della media all'integrale $\int_0^t \mathbf{F} dt$, possiamo sempre calcolare il valore medio \mathbf{F}_m della forza agente nell'intervallo di tempo t : $\mathbf{F}_m = \Delta \mathbf{p}/t$.

Quando \mathbf{F} è nulla, $\Delta \mathbf{p} = 0$ e pertanto $\mathbf{p} = \text{costante}$: *in assenza di forza applicata la quantità di moto di un punto materiale rimane costante* o, come si dice utilizzando una terminologia propria della Fisica, *la quantità di moto si conserva*. Si tratta evidentemente di un'altra formulazione del principio di inerzia.

Conservazione della
quantità di moto

Unità di misura

Ricordiamo che la *massa* è assunta come *grandezza fondamentale* e che la relativa unità di misura è il chilogrammo kg (appendice B).

L'unità di forza secondo (2.1) è il kg m s^{-2} : questa unità, molto importante, si chiama newton e ha il simbolo N. Una forza di 1 N provoca su un punto di massa 1 kg un'accelerazione di 1 m s^{-2} .

Quantità di moto e impulso hanno la stessa unità di misura:

$$\text{kg m s}^{-1} = (\text{kg m s}^{-2}) \text{ s} = \text{N s} \quad .$$

Non c'è un nome particolare per il *newton per secondo*.

Esempio 2.1

Un punto materiale che si muove con velocità \mathbf{v} costante urta contro un muro, posto a 90° rispetto alla traiettoria, e rimbalza ripercorrendo l'iniziale traiettoria rettilinea con velocità $-\mathbf{v}$, cioè eguale ed opposta alla velocità prima dell'urto. Calcolare la variazione di quantità di moto e, se l'urto ha durata Δt , il valor medio della forza agente durante l'urto. Si ponga $v = 2 \text{ m/s}$, $m = 0.05 \text{ kg}$, $\Delta t = 10^{-3} \text{ s}$.

Soluzione

Nell'urto contro la parete la velocità cambia soltanto di verso e la variazione di quantità di moto è

$$\mathbf{p}_{\text{fin}} - \mathbf{p}_{\text{in}} = -m\mathbf{v} - m\mathbf{v} = -2m\mathbf{v} \quad .$$

Per il teorema dell'impulso

$$\mathbf{J} = \int \mathbf{F} dt = \mathbf{F}_m \Delta t = -2m\mathbf{v}$$

$$\mathbf{F}_m = -\frac{2m}{\Delta t} \mathbf{v} \quad .$$

La forza media, che agisce durante l'urto e causa la variazione del verso del moto, ha verso contrario a quello della velocità iniziale e concorde a quello della velocità finale.

Numericamente

$$J = \Delta p = 2 mv = 2 \cdot 5 \cdot 10^{-2} \cdot 2 = 0,2 \text{ Ns}$$

$$F_m = \frac{2 mv}{\Delta t} = \frac{0,2}{10^{-3}} = 200 \text{ N} \quad .$$

Secondo il principio di azione e reazione, il punto durante l'urto esercita una forza di 200 N sul muro. Questo però ha una massa così grande da non risentire in pratica di alcun effetto dinamico.

Visualizza Soluzione

2.4 Risultante delle forze. Equilibrio. Reazioni vincolari

Abbiamo già rilevato che la forza è una grandezza vettoriale e come tale l'abbiamo rappresentata nelle figure. Un'importante verifica di questa affermazione si ha quando su un punto materiale agiscono contemporaneamente più forze: si constata che il moto del punto ha luogo come se agisse una sola forza, la *risultante vettoriale delle forze* applicate al punto

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_n = \sum_i \mathbf{F}_i \quad ;$$

in effetti l'accelerazione del punto è pari alla somma vettoriale delle accelerazioni che il punto avrebbe se agisse ciascuna forza da sola:

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{R}}{m} = \sum_i \frac{\mathbf{F}_i}{m} = \sum_i \mathbf{a}_i \quad .$$

Questo fondamentale risultato sperimentale fa capire che in presenza di più forze ciascuna agisce indipendentemente dalle altre, comunicando sempre al punto l'accelerazione $\mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i / m$; si parla a tale proposito di *indipendenza delle azioni simultanee*. D'altra parte tutto ciò implica che dallo studio del moto di un punto materiale otteniamo informazioni solo sulla risultante delle forze agenti sul punto stesso, \mathbf{R} , e non sulle singole forze che concorrono a formare la forza risultante.

In particolare, affermare che la forza agente su un punto è nulla non significa necessariamente che sul punto non agiscono forze, ma spesso indica che la somma delle forze agenti su di esso, cioè la risultante, è nulla.

Se $\mathbf{R} = \mathbf{0}$ e il punto ha inizialmente velocità nulla, esso rimane in quiete: sono realizzate le condizioni di *equilibrio statico* del punto. Devono quindi essere nulle le componenti stesse della risultante ovvero, con riferimento ad un sistema di assi cartesiani,

$$\begin{aligned} \mathbf{R} = \sum_i \mathbf{F}_i = \mathbf{0} & \quad \Rightarrow \quad R_x = R_y = R_z = 0 \\ \Rightarrow \sum_i F_{ix} = 0 & \quad \sum_i F_{iy} = 0 \quad \sum_i F_{iz} = 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

essendo F_{ix}, F_{iy}, F_{iz} le componenti lungo gli assi della forza i-esima.

In figura 2.4 è mostrata la condizione di equilibrio statico con due forze, che devono essere necessariamente uguali ed opposte, e con tre forze, che devono essere complanari e disposte secondo i lati di un triangolo; ciascuna forza deve infatti essere opposta e, in modulo, eguale alla risultante delle altre due. Se le forze agenti sono in numero superiore a tre, esse devono poter essere disposte, in base alla regola di somma vettoriale, in modo tale da formare una poligonale chiusa.

Gli esempi mostrati, corrispondenti tutti a situazioni sperimentalmente

Risultante delle forze

Equilibrio statico

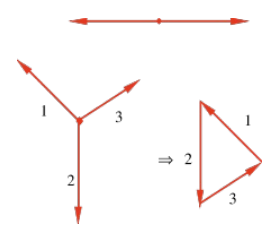


FIGURA 2.4

semplici da realizzare, confermano anche nel caso dell'equilibrio statico la natura vettoriale delle forze. In generale, dato un insieme di forze applicate ad un punto e aventi risultante \mathbf{R}' , l'equilibrio statico si ottiene applicando al punto una forza eguale ed opposta a \mathbf{R}' , così da realizzare appunto la condizione $\mathbf{R} = 0$.

Esempio 2.2

Un punto P è sottoposto ad una forza $F_1 = 34$ N lungo il verso negativo dell'asse y e ad una forza $F_2 = 25$ N che forma un angolo $\theta = 30^\circ$ con l'asse y (vedi figura 2.5). Calcolare modulo, direzione e verso della forza \mathbf{F}_3 che occorre applicare al punto P per mantenerlo in equilibrio statico.

Soluzione

In equilibrio deve valere la relazione

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 = 0 \quad ,$$

che equivale alle due equazioni

$$F_{2,x} + F_{3,x} = 0 \quad , \quad F_{1,y} + F_{2,y} + F_{3,y} = 0 \quad .$$

Infatti $F_{1,x} = 0$ e non ci sono componenti lungo l'asse z : \mathbf{F}_3 deve stare nel piano x, y individuato da \mathbf{F}_1 e \mathbf{F}_2 dato che sommata ad esse deve dare risultante nulla. Pertanto, detto ϕ l'angolo formato da \mathbf{F}_3 con l'asse y , si ha:

$$\begin{aligned} -F_2 \operatorname{sen}\theta + F_3 \operatorname{sen}\phi &= 0 \quad , \\ -F_1 + F_2 \operatorname{cos}\theta + F_3 \operatorname{cos}\phi &= 0 \quad . \end{aligned}$$

Risolvendo si trova:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\phi &= \frac{F_2 \operatorname{sen}\theta}{F_1 - F_2 \operatorname{cos}\theta} \quad , \quad \phi = 45.4^\circ \quad , \\ F_3 &= F_2 \frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\phi} = 17.6 \text{ N} \quad . \end{aligned}$$

La soluzione è mostrata in figura 2.6; qualitativamente era evidente che \mathbf{F}_3 doveva giacere nel primo quadrante.

Come verifica del risultato trovato per il modulo di \mathbf{F}_3 si provi a calcolare il modulo della risultante di \mathbf{F}_1 e \mathbf{F}_2 applicando il teorema del coseno (appendice C).

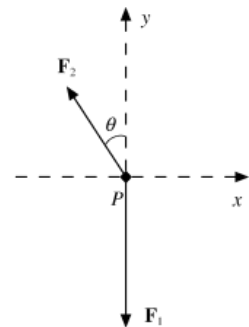


FIGURA 2.5
(Esempio 2.2)

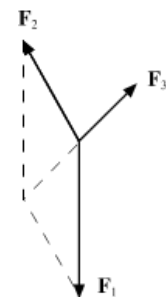
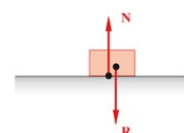


FIGURA 2.6
(Esempio 2.2)

Visualizza Soluzione

Reazioni vincolari

Se un corpo, soggetto all'azione di una forza o della risultante non nulla di un'insieme di forze, rimane fermo, dobbiamo dedurre da quanto detto sopra che



l'azione della forza provoca una reazione dell'ambiente circostante (*reazione vincolare*) che si esprime tramite una forza, eguale e contraria alla forza o alla risultante delle forze agenti, applicata al corpo stesso in modo tale che esso rimanga in quiete. Illustriamo questa circostanza con alcuni esempi.

Il caso del corpo posato su di un tavolo, con il piano di appoggio orizzontale, lo abbiamo già incontrato nel paragrafo 2.1, figura 2.1 caso b). Il corpo è soggetto all'azione di attrazione della terra, perpendicolarmente al piano; la reazione del corpo a tale forza è applicata alla terra e non ci interessa. Però, per effetto dell'attrazione terrestre, il corpo preme sulla superficie del tavolo deformandola. Il tavolo deve produrre, viste le condizioni di quiete del corpo, una forza uguale e contraria alla forza di attrazione terrestre che chiamiamo reazione vincolare \mathbf{N} . Se applichiamo ulteriori forze al corpo, normali al piano del tavolo, la reazione vincolare deve equilibrare la risultante \mathbf{R} di tali forze: $\mathbf{R} + \mathbf{N} = \mathbf{0}$.

Assumendo positivo il verso della forza verso l'alto, qualora per soddisfare la condizione di equilibrio \mathbf{N} risultasse negativa (cioè rivolta verso il basso) significherebbe che il tavolo per mantenere il corpo fermo dovrebbe esercitare una forza di attrazione sul corpo. Tale situazione si presenta quando altre forze applicate al corpo, con risultante diretta verso l'alto, hanno in modulo un valore superiore a quello della forza di attrazione terrestre. In queste condizioni il corpo non rimane appoggiato sul tavolo e non ha senso parlare di reazione vincolare del piano in quanto non esiste più una superficie di contatto tra corpo e piano di appoggio.

Un altro esempio di reazione vincolare è quello che si manifesta nella situazione fisica di un corpo appeso tramite un filo. Il corpo è in condizioni di equilibrio statico, soggetto all'attrazione terrestre e alla reazione del sistema filo-punto di aggancio (vedi più avanti paragrafo 2.14).

In generale la reazione vincolare non è determinabile a priori, utilizzando una data formula, ma deve essere calcolata caso per caso dall'esame delle condizioni fisiche.

Il concetto di reazione vincolare ossia, come detto, di reazioni dell'ambiente circostante (tavolo o sistema filo-punto di aggancio nei due esempi discussi) non è tipico soltanto dell'equilibrio statico, ma, come vedremo, si estende anche al caso di corpi in moto lungo una superficie. E se durante il moto risultasse che ad un certo istante la reazione vincolare si annulla per diventare poi una forza attrattiva, nel senso appena discusso, vorrebbe dire che in quell'istante avviene il distacco del corpo dalla superficie.

FIGURA 2.1 B

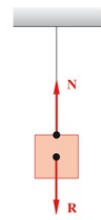


FIGURA 2.7

2.5 Classificazione delle forze

Se consideriamo le forze responsabili di gran parte dei fenomeni studiati nella fisica classica, o anche in altre discipline quali la biologia, la chimica, l'ingegneria, esse sono tutte riconducibili a poche interazioni fondamentali, l'*interazione gravitazionale* e l'*interazione elettromagnetica*.

A livello nucleare e subnucleare si presentano altri due tipi di interazione, l'*interazione forte* e l'*interazione debole*, ma tali argomenti esulano dai contenuti di questo testo.

La scoperta che l'apparente grande varietà di tipi di forze è il manifestarsi, in fenomeni anche molto differenti, di poche interazioni fondamentali assume una grande rilevanza concettuale ed è il risultato di una lunga indagine sperimentale e teorica rivolta all'unificazione delle interazioni. Già nel 1800 si arrivò a dimostrare che i fenomeni elettrici e magnetici, di cui ci occuperemo nel secondo volume, potevano essere unificati in un'unica teoria, che permetteva anche la spiegazione della propagazione della luce. Più recentemente si è compreso che è possibile operare un'ulteriore unificazione, a livello microscopico, tra interazione elettromagnetica e interazione debole (interazione elettrodebole).

Dell'altra *interazione fondamentale classica*, quella *gravitazionale*, daremo una descrizione in seguito, nel capitolo 5.

Il nostro studio però è ora rivolto ad individuare il tipo di moto di un punto o più in generale di un sistema di punti in interazione tra loro e col resto del mondo. L'interazione sarà esprimibile tramite una o più forze, la conoscenza della cui origine non rientra nei nostri scopi e non influenza per ora il nostro studio. Sarà invece essenziale poter esprimere queste forze con opportune espressioni analitiche da introdurre nella (2.1).

2.6 Azione dinamica delle forze

Nel capitolo 1, dedicato alla cinematica del punto, abbiamo esaminato alcuni tipi di moto. Vediamo ora di individuare quali forze possono produrre tali moti.

Nel caso del moto rettilineo uniforme ($\mathbf{v} = \text{costante}$, $\mathbf{a} = 0$) si ha ovviamente $\mathbf{F} = 0$; ripetiamo che questa situazione si può ottenere anche se agiscono varie forze purché la loro risultante sia nulla.

Se il moto è uniformemente accelerato ($\mathbf{a} = \text{costante}$) la forza agente è vettorialmente costante (quindi in direzione, verso e modulo). Più in generale, se agisce una forza $\mathbf{F} = \text{costante}$, la componente del moto nella direzione parallela alla forza è uniformemente accelerata con $a = F/m$. Lungo le altre due direzioni (ortogonali tra loro e alla forza) non c'è moto se le relative velocità iniziali sono nulle oppure si ha un moto rettilineo uniforme se le velocità iniziali lungo tali direzioni sono diverse da zero. Il moto risultante viene ottenuto componendo i moti sui tre assi ortogonali; un esempio particolare è il moto parabolico del paragrafo 1.12.

Quando \mathbf{F} è variabile si ha un moto vario. Come abbiamo visto nel caso specifico del moto piano curvilineo (paragrafo 1.10), l'accelerazione presenta due componenti \mathbf{a}_T e \mathbf{a}_N . Pertanto da (1.22)

$$\mathbf{F} = m \mathbf{a}_T + m \mathbf{a}_N = m \frac{dv}{dt} \mathbf{u}_T + m \frac{v^2}{R} \mathbf{u}_N .$$

La risultante delle forze agenti sul punto materiale deve avere una componente ortogonale alla traiettoria, \mathbf{F}_N , per provocare la variazione di direzione della velocità. La componente tangenziale \mathbf{F}_T della forza determina invece la variazione del modulo della velocità.

\mathbf{F}_N si chiama *forza centripeta* ed è sempre diversa da zero in un moto curvilineo. Si faccia attenzione al fatto che la *forza centripeta non è un tipo particolare di forza*, come lo sono la forza peso, la forza elastica, le forze di attrito (che studieremo nei prossimi paragrafi), ma è *semplicemente il nome che si dà alla componente ortogonale alla traiettoria della risultante delle varie forze agenti*.

Forza centripeta

Tratteremo alcuni esempi di forze centripete nel successivo paragrafo 2.12. Vediamo adesso qualche caso dinamico in presenza di forze costanti.

Esempio 2.3

Un punto di massa $m = 0.8$ kg, inizialmente in quiete, è sottoposto all'azione di una forza costante \mathbf{F}_1 , avente la direzione e il verso dell'asse x e modulo $F_1 = 16$ N. Dopo un tempo $t_1 = 3$ s cessa l'azione di \mathbf{F}_1 e si osserva che il punto rallenta uniformemente, fermandosi all'istante $t_2 = 9$ s. Calcolare la forza \mathbf{F}_2 parallela all'asse x che agisce durante la frenata e lo spazio totale percorso.

Soluzione

Sotto l'azione di \mathbf{F}_1 il punto accelera con $a_1 = F_1/m = 20 \text{ m/s}^2$ e all'istante t_1 ha velocità $v_1 = a_1 t_1 = 60 \text{ m/s}$ e ha percorso lo spazio $x_1 = \frac{1}{2} a_1 t_1^2 = 90 \text{ m}$. Nella fase di decelerazione, alla fine della quale $v = 0$, si ha

$$v = v_1 - a_2 (t - t_1) \Rightarrow a_2 = \frac{v_1}{t_2 - t_1} = 10 \text{ m/s}^2 \quad ,$$

e quindi la forza frenante vale $F_2 = m a_2 = 8 \text{ N}$, discorde all'asse x . Lo spazio percorso durante la frenata è

$$x_2 = v_1 (t_2 - t_1) - \frac{1}{2} a_2 (t_2 - t_1)^2 = 180 \text{ m}$$

o, alternativamente, da $v^2 = v_1^2 - 2 a_2 x$ con $v = 0$,

$$x_2 = \frac{v_1^2}{2 a_2} = 180 \text{ m} \quad .$$

In totale $x_1 + x_2 = 270 \text{ m}$.

Per il calcolo di F_2 si può anche usare il teorema dell'impulso, tenendo conto che le forze sono costanti. In modulo

$$F_1 t_1 = m v_1 \quad , \quad F_2 (t_2 - t_1) = m v_1 = F_1 t_1 \quad ,$$

$$F_2 = \frac{F_1 t_1}{t_2 - t_1} = 8 \text{ N} \quad .$$

Ovvero: l'impulso \mathbf{J}_1 di \mathbf{F}_1 porta il punto ad assumere la quantità di moto $m \mathbf{v}_1$ e l'impulso \mathbf{J}_2 di \mathbf{F}_2 riporta la quantità di moto a zero, per cui in modulo $J_1 = J_2$.

Si noti come nella fase iniziale abbiamo dedotto l'accelerazione dalla forza nota e invece nella fase finale dall'accelerazione misurata abbiamo calcolato la forza frenante; in ogni caso abbiamo utilizzato le relazioni cinematiche sviluppate nel primo capitolo. Si rivedano a questo proposito gli esempi del paragrafo 1.4, cercando di capire quali forze debbano agire nelle varie situazioni.

Visualizza Soluzione

Esempio 2.4

Un punto materiale di massa $m = 2 \text{ kg}$ parte dall'origine di un sistema di riferimento x, y con velocità $v_0 = 5 \text{ m/s}$ diretta lungo il verso positivo dell'asse y ; esso è sottoposto soltanto alla forza costante \mathbf{F} , parallela e concorde all'asse x e di modulo $F = 4 \text{ N}$. Determinare la traiettoria del punto.

Soluzione

Lungo x il moto è uniformemente accelerato, con $a = F/m$, lungo y è

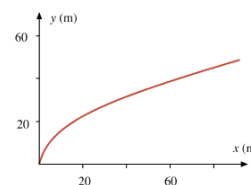


FIGURA 2.8
(Esempio 2.4)

uniforme ($F_y = 0$). Pertanto

$$x = \frac{1}{2} \frac{F}{m} t^2 \quad , \quad y = v_0 t \quad ,$$
$$y = \sqrt{\frac{2 m v_0^2}{F} x} = 5 \sqrt{x} \quad , \quad x = 4 \cdot 10^{-2} y^2 \text{ (in metri) .}$$

Asintoticamente la traiettoria tende a diventare parallela all'asse x (c'è qualche somiglianza con l'esempio 1.12?).

Visualizza Soluzione

2.7 Forza peso

Iniziamo l'esame dei tipi più comuni di forze che incontreremo nell'ambito del corso occupandoci della *forza peso*.

Sperimentalmente si osserva che in uno stesso luogo tutti i corpi, qualunque sia la massa inerziale, assumono se lasciati liberi la stessa *accelerazione*, detta di *gravità*, diretta verticalmente verso il suolo il cui modulo, che varia leggermente da posto a posto sulla terra, vale in media $g = 9.8 \text{ ms}^{-2}$. Tale accelerazione è conseguenza della forza di attrazione terrestre, cioè dell'interazione gravitazionale tra la terra e il corpo.

Accelerazione di gravità

Dalla (2.1) se agisce solo la forza peso \mathbf{P} abbiamo $\mathbf{P} = m \mathbf{a} = m \mathbf{g}$ visto che $\mathbf{a} = \mathbf{g}$. Pertanto *la forza peso risulta proporzionale alla massa* e si scrive sempre

$$\mathbf{P} = m \mathbf{g} .$$

Forza peso

Si tratta di una *forza costante* e in assenza di altre forze il moto ha una componente uniformemente accelerata nella direzione parallela a \mathbf{g} (vedi paragrafi 1.5 e 1.12).

Se invece agiscono anche altre forze in generale si ha $\mathbf{a} \neq \mathbf{g}$. In particolare un corpo che cade nell'aria presenta un'accelerazione minore di quella di gravità a causa dell'attrito con l'aria (si veda il paragrafo 2.10).

La proporzionalità tra forza peso e massa suggerisce che il confronto tra due masse possa essere effettuato confrontando le rispettive forze peso; è su questa idea che si basa il metodo di misura delle masse tramite la bilancia. Tale fatto, di grande importanza pratica, non deve però portare a confondere i due concetti di massa e di forza peso. La massa di un corpo ha il significato dinamico che si deduce da (2.1) e che è indipendente dalla particolare forza agente; inoltre vedremo nel capitolo 4 come si possano confrontare due masse anche in assenza di qualsiasi forza. La forza peso risulta dall'interazione di un corpo con la terra; sulla superficie di un altro pianeta essa sarebbe, a parità di massa, diversa a causa del diverso valore di g (un esperimento diretto è stato fatto sulla luna); non è cioè una caratteristica del corpo come lo è la massa.

La sensazione di peso

Un corpo di massa m , poggiato su un pavimento e in equilibrio statico, esercita una forza sul pavimento e risente di una reazione \mathbf{N} che in modulo vale mg (vedi paragrafo 2.4). È questa reazione applicata per esempio al nostro corpo che ci dà la sensazione di peso.

Consideriamo ora il corpo posato su una piattaforma che può muoversi verticalmente con una accelerazione \mathbf{a} . Finché il corpo resta sulla piattaforma la sua accelerazione è \mathbf{a} e l'equazione (2.1) si scrive

$$\mathbf{N} + \mathbf{P} = m\mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{N} + m\mathbf{g} = m\mathbf{a} ,$$

in quanto al corpo sono applicate sia la forza peso che la reazione dovuta al contatto con la piattaforma. Tale reazione è incognita; solo se fosse $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ sarebbe in modulo $N = P = mg$, come detto sopra (risulta peraltro che la reazione vincolare è eguale alla forza peso anche se la piattaforma si muove con velocità costante).

Risolvendo troviamo

$$\mathbf{N} = m(\mathbf{a} - \mathbf{g})$$

e abbiamo quattro casi da esaminare; come asse di riferimento prendiamo un asse z verticale orientato verso l'alto, per cui $\mathbf{g} = -g\mathbf{u}_z$.

1) \mathbf{a} discorde a \mathbf{g} , piattaforma che accelera verso l'alto (o perché sale accelerando o perché scende frenando):

$$\mathbf{N} = m[a\mathbf{u}_z - (-g\mathbf{u}_z)] = m(a + g)\mathbf{u}_z \Rightarrow N > mg \quad ;$$

si ha una sensazione di aumento di peso, una bilancia pesapersona darebbe una lettura maggiore di quando la piattaforma è ferma.

2) \mathbf{a} concorde a \mathbf{g} , ma minore in modulo:

$$\mathbf{N} = m[-a\mathbf{u}_z - (-g\mathbf{u}_z)] = m(g - a)\mathbf{u}_z \Rightarrow N < mg \quad ;$$

la sensazione è di diminuzione di peso, la bilancia dà una lettura minore di quando la piattaforma è ferma.

3) $\mathbf{a} = \mathbf{g} \Rightarrow \mathbf{N} = \mathbf{0}$: non c'è reazione e non c'è sensazione di peso (ciò si realizzerebbe con la piattaforma in caduta libera).

4) \mathbf{a} concorde a \mathbf{g} , ma maggiore in modulo: si ha il distacco del corpo dalla piattaforma; infatti la soluzione darebbe \mathbf{N} discorde all'asse z , la reazione dovrebbe attirare il corpo verso la piattaforma, il che è privo di senso.

Si noti che i casi 2, 3, 4 non richiedono necessariamente un moto della piattaforma verso il basso: questa potrebbe salire, ma frenando.

Nota. Il chilogrammo-forza

Il valore convenzionale dell'accelerazione di gravità sulla superficie terrestre è $g = 9.80665 \text{ ms}^{-2}$, per cui la forza peso applicata ad un corpo di massa 1 kg è 9.80665 N. In alcuni sistemi di unità di misura questo valore è stato assunto come unità di misura delle forze e chiamato chilogrammo-forza (kgf) o chilogrammo peso. Quindi:

$$1 \text{ kgf} = 9.80665 \text{ N} \quad , \quad 1 \text{ N} = 0.101972 \text{ kgf} \quad .$$

Numericamente, la forza peso di una massa di x kg è x kgf.

Abbiamo citato il chilogrammo-forza perché si sappia come convertire in newton il valore di forze espresse in tale unità; l'uso del kgf è però vietato per legge, così come quello delle altre unità non appartenenti al sistema internazionale, in base a una direttiva della Comunità Europea del 1971.

2.8 Forza di attrito radente

Applichiamo ad un corpo appoggiato su un tavolo, con il piano di appoggio orizzontale, una forza \mathbf{F} tale da presentare una componente \mathbf{F}_1 normale al piano di appoggio e una \mathbf{F}_2 parallela al piano stesso. Si osserva sperimentalmente che il corpo non entra in movimento, per effetto della componente \mathbf{F}_2 della forza applicata, fino a che il modulo di \mathbf{F}_2 non superi il valore $\mu_s N$, dove μ_s è il *coefficiente di attrito statico* ed N , come già indicato nel paragrafo 2.4, è il modulo della componente normale al piano di appoggio della reazione vincolare. La condizione perché il corpo possa essere messo in movimento per effetto della forza applicata è quindi data da $F_2 > \mu_s N$.

Supponiamo che la forza \mathbf{F} formi un angolo θ con il piano di appoggio (direzione orizzontale: si veda la figura 2.9, in cui \mathbf{P} è la forza peso del corpo). Pertanto $F_1 = F \sin\theta$, $F_2 = F \cos\theta$. La reazione \mathbf{R} del piano, in condizioni di equilibrio statico del corpo, è tale che

$$\mathbf{R} + \mathbf{P} + \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad (2.5)$$

Proiettiamo la (2.5) secondo le due direzioni ortogonali tra loro, quella normale al piano di appoggio assunta positiva verso l'alto e quella parallela al piano stesso (positiva nel verso di \mathbf{F}_2); chiamiamo N e F_{as} le corrispondenti componenti di \mathbf{R} . La (2.5) fornisce

$$\begin{aligned} N - P + F_1 &= 0 \Rightarrow N = P - F_1 = P - F \sin\theta \quad , \\ F_{as} + F_2 &= 0 \Rightarrow F_{as} = -F_2 = -F \cos\theta \quad . \end{aligned}$$

La condizione di appoggio del corpo è data da $N > 0$ cioè $P > F \sin\theta$; se questa è soddisfatta (cioè la forza non solleva il corpo) la componente parallela al piano di appoggio della reazione vincolare controbilancia, quando il corpo è in quiete, la componente orizzontale della forza applicata. Dovendo essere, come detto sopra, $F_2 \leq \mu_s N$, la condizione di quiete si scrive

$$F \cos\theta \leq \mu_s (P - F \sin\theta) \Rightarrow F \leq \frac{\mu_s mg}{\cos\theta + \mu_s \sin\theta} \quad .$$

In particolare, se $\theta = 0$ $F_1 = 0$, $F_2 = F$ e le componenti di \mathbf{R} sono:

$$N = P = mg \quad , \quad F_{as} = -F_2 = -F \quad .$$

La condizione di quiete si scrive

$$F \leq \mu_s N = \mu_s mg \quad .$$

Riassumendo, a causa della forza che preme il corpo contro il piano, si sviluppa una forza di attrito statico F_{as} che è capace di equilibrare la forza

Coefficiente di attrito statico

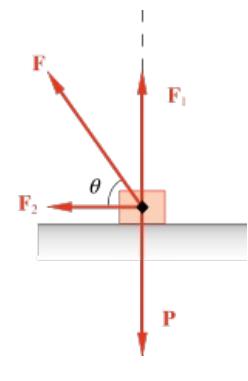


FIGURA 2.9

orizzontale applicata F_2 ; F_{as} non ha un valore prefissato, ma è eguale a F_2 per valori di questa compresi tra zero e $\mu_s N$.

Quando F_2 supera $\mu_s N$ il corpo entra in movimento lungo il piano e si osserva che si oppone al moto la *forza di attrito radente dinamico* $F_{ad} = \mu_d N$ dove μ_d rappresenta il *coefficiente di attrito dinamico*; risulta sempre $\mu_d < \mu_s$.

L'equazione del moto è pertanto

$$F \cos \theta - \mu_d N = ma$$

La componente normale della reazione N è sempre data da $P - F \sin \theta$ in quanto ortogonalmente al piano non c'è moto, non c'è accelerazione e la risultante delle forze è nulla.

La forza di attrito dinamico non dipende dalla velocità del corpo rispetto al piano di appoggio ed ha verso contrario alla direzione del moto e quindi al versore della velocità, \mathbf{u}_v . Vettorialmente

$$\mathbf{F}_{ad} = -\mu_d N \mathbf{u}_v \quad (2.6)$$

Le forze di attrito radente hanno origine dalle *forze di coesione* tra due materiali; il valore del coefficiente di attrito dipende dallo stato delle superficie a contatto e dalla loro composizione chimica. Una eccessiva levigatura fa aumentare la coesione e quindi l'attrito; se le superficie vengono invece bagnate come si realizza nel caso di organi meccanici in movimento mediante l'utilizzazione di lubrificanti, la forza di attrito diminuisce notevolmente. Un altro metodo per ridurre l'attrito radente consiste nel creare un sottile strato d'aria tra superficie che devono scorrere l'una rispetto all'altra.

Si consideri però che le forze di attrito radente sono sempre presenti, per quanto si possa tentare di ridurle. Quindi se vogliamo realizzare un moto uniforme dobbiamo applicare una forza eguale e contraria alla forza di attrito in modo che la risultante sia nulla. È questa la condizione pratica che deve essere realizzata in ogni moto uniforme al fine di ottenere una situazione di equilibrio dinamico. Soltanto per esaminare casi limite semplificati porremo eguale a zero la forza di attrito; diremo allora che la superficie di scorrimento è *liscia*.

Esempio 2.5

Un corpo di massa $m = 2$ kg è appoggiato su di un piano orizzontale. I coefficienti di attrito statico e dinamico relativi alle due superfici di contatto valgono rispettivamente 0.5 e 0.3. Si applica al corpo una forza \mathbf{F} di modulo pari a 20 N. Determinare le componenti della reazione vincolare e il modulo della stessa nei due casi mostrati nella figura 2.10, con $\theta = 60^\circ$.

Soluzione

Nel caso a) la componente della reazione vincolare normale al piano vale in modulo $N = m g + F \sin 60^\circ = 36.9$ N per cui $\mu_s N = 18.5$ N; la componente parallela al piano della forza applicata è $F \cos 60^\circ = 10$ N. Il corpo pertanto

Coefficiente di attrito
dinamico

Forze di coesione

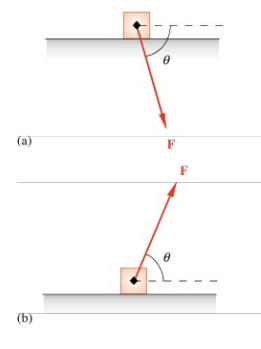


FIGURA 2.10

(Esempio 2.5)

rimane in quiete e la componente della reazione vincolare parallela al piano vale in modulo 10 N; abbiamo

$$R = \sqrt{36.9^2 + 10^2} = 38.2 \text{ N} .$$

Nel caso b) $N = m g - F \sin 60^\circ = 2.3 \text{ N}$ (c'è appoggio), valore minore del precedente in quanto ora la componente normale di \mathbf{F} è opposta al peso e si ha un alleggerimento del peso del corpo sul piano. Il corpo entra in moto perché $\mu_s N = 1.2 \text{ N}$ è minore di $F \cos 60^\circ = 10 \text{ N}$; l'accelerazione vale

$$a = \frac{F \cos 60^\circ - \mu_d N}{m} = 4.7 \text{ ms}^{-2}$$

con $\mu_d N = 0.7 \text{ N}$. Quindi il modulo della reazione vincolare è

$$R = \sqrt{2.3^2 + 0.7^2} = 2.4 \text{ N}.$$

Questo esempio insegna che se vogliamo spostare una cassa non conviene spingerla

Visualizza Soluzione

Esempio 2.6

Una forza \mathbf{F} è applicata ad un corpo di massa $m = 3 \text{ kg}$, come mostrato nella figura 2.9; in presenza di un coefficiente di attrito dinamico $\mu_d = 0.4$ essa deve imprimere al corpo l'accelerazione $a = 1.2 \text{ m/s}^2$. Determinare qual è l'angolo θ per cui \mathbf{F} è minima in modulo.

Soluzione

L'equazione del moto è

$$F \cos\theta - \mu_d (mg - F \sin\theta) = ma$$

$$\Rightarrow F = \frac{ma + \mu_d mg}{\cos\theta + \mu_d \sin\theta} = \frac{15.4}{\cos\theta + \mu_d \sin\theta} \text{ N} .$$

Il modulo di \mathbf{F} è funzione di θ ; per verificare l'eventuale esistenza di un minimo si calcola $dF/d\theta$ e la si pone eguale a zero. Si trova la condizione

$$\text{tg}\theta = \mu_d \Rightarrow \theta = 21.8^\circ .$$

Il valore della forza per $\theta = \arctg \mu$ è

$$F_{\min} = \frac{ma + \mu_d mg}{1 + \mu_d^2} = \frac{15.4}{1.08} = 14.3 \text{ N} ;$$

si verifica direttamente che si tratta di un minimo, senza dover eseguire il calcolo della derivata seconda.

Abbiamo così completato l'esercizio precedente. Non solo è conveniente

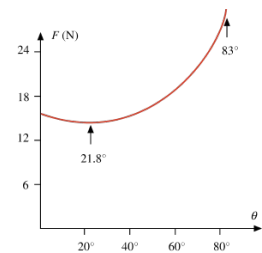


FIGURA 2.11
(Esempio 2.6)

che la forza tenda a sollevare il corpo, ma esiste un angolo particolare per il quale la forza è minima. Il valore minimo non si ha per $\theta = 0$: infatti, se è vero che aumentando l'angolo diminuisce la componente della forza parallela al piano, è anche vero che per $\theta \neq 0$ diminuisce la componente della reazione normale e quindi diminuisce la forza di attrito dinamico. I due effetti, uno tendente a far diminuire l'accelerazione e l'altro tendente a farla aumentare, si compensano e la condizione ottimale si raggiunge quando $\operatorname{tg}\theta = \mu_d$.

Al crescere dell'angolo θ bisogna però verificare che la forza non sollevi il corpo, facendo venir meno il contatto; bisogna verificare cioè se avviene, per $\theta < 90^\circ$, che

$$N = mg - F \operatorname{sen}\theta = 0$$

$$\Rightarrow \frac{ma + \mu_d mg}{\cos\theta + \mu_d \operatorname{sen}\theta} \operatorname{sen}\theta = mg \quad .$$

La soluzione è $\operatorname{tg}\theta = g/a$, nel nostro caso $\theta = 83.0^\circ$ (a tale angolo $F = 29.7$ N). Il valore di F , tale da dare alla massa m la voluta accelerazione a , è mostrato in funzione di θ nella figura 2.11. Si verifichi che se si mantiene costante il valore della forza al variare dell'angolo θ l'accelerazione del corpo è massima quando $\operatorname{tg}\theta = \mu_d$.

Visualizza Soluzione

Esempio 2.7

Due blocchetti, di massa $m_1 = 3$ kg e $m_2 = 2$ kg, si muovono su di un piano orizzontale liscio sotto l'azione della forza \mathbf{F} costante, di modulo $F = 12$ N, applicata come in figura 2.12. Calcolare le forze F_1 e F_2 che agiscono sui blocchetti. Supponiamo invece che ci sia attrito, con coefficienti dinamici $\mu_1 = 0.3$ e μ_2 rispettivamente per il blocchetto m_1 e m_2 , e che, a parità di forza applicata, il moto sia uniforme. Calcolare il valore di μ_2 .

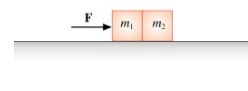


FIGURA 2.12
(Esempio 2.7)

Soluzione

Sotto l'azione di \mathbf{F} i due blocchetti si muovono come un unico corpo e l'accelerazione di ciascuno di essi è

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2} = 2.4 \text{ m/s}^2 \quad ;$$

Allora la forza applicata al blocchetto m_2 deve valere

$$F_2 = m_2 a = 4.8 \text{ N} \quad ,$$

parallela e concorde a \mathbf{F} , come lo è \mathbf{a} . Questa forza è dovuta al contatto con

il corpo m_1 che spinge m_2 : si noti pertanto che a m_2 non è applicata \mathbf{F} , ma una forza minore in modulo. Il corpo m_2 reagisce applicando a m_1 la forza $-\mathbf{F}_2$, per cui la seconda legge di Newton per m_1 è

$$F - F_2 = m_1 a$$

e si verifica subito che questa equazione è soddisfatta dal valore trovato prima per F_2 . La forza applicata a m_1 è quindi

$$F_1 = F - F_2 = 7.2 \text{ N}$$

Anche \mathbf{F}_1 è parallela e concorde a \mathbf{F} ed è minore in modulo; a differenza di m_2 , è vero che a m_1 è applicata \mathbf{F} , però non si tratta dell'unica forza, c'è anche $-\mathbf{F}_2$. Quando c'è attrito si ha, tenuto conto del dato che il moto risulta uniforme ($a = 0$):

$$\begin{aligned} \text{per } m_1 \quad F - F_2 - \mu_1 m_1 g &= m_1 a = 0 \quad , \\ \text{per } m_2 \quad F_2 - \mu_2 m_2 g &= m_2 a = 0 \quad . \end{aligned}$$

La risultante delle forze applicate a ciascun punto deve essere cioè nulla. Abbiamo scritto esplicitamente le equazioni lungo l'asse orizzontale, dando per scontato che lungo l'asse verticale si ha $N_1 - m_1 g = 0$, $N_2 - m_2 g = 0$.

Si somma membro a membro e si ottiene:

$$\begin{aligned} F - \mu_1 m_1 g - \mu_2 m_2 g &= 0 \\ \Rightarrow \mu_2 &= \frac{F - \mu_1 m_1 g}{m_2 g} = 0.16 \quad . \end{aligned}$$

Possiamo calcolare anche $F_2 = \mu_2 m_2 g = 3.1 \text{ N}$, diversa che nel caso precedente.

Visualizza Soluzione

2.9 Piano inclinato

Consideriamo un corpo, assimilabile ad un punto materiale di massa m , che possa muoversi sotto l'azione del suo peso e di eventuali altre forze, compresa la forza di attrito radente, su una superficie piana inclinata di un angolo θ rispetto ad un piano orizzontale.

Se agisce solo la forza peso \mathbf{P} , in assenza perciò di attrito tra corpo e piano inclinato, si ha secondo la legge di Newton

$$\mathbf{P} + \mathbf{R} = m \mathbf{a} \quad ,$$

dove \mathbf{R} è la reazione vincolare del piano di appoggio che ha un'unica componente normale al piano stesso (*vincolo liscio*). Scomponendo lungo le direzioni ortogonale e parallela al piano inclinato si ottiene

$$mg \cos\theta - N = 0 \quad , \quad mg \sin\theta = m a \quad ,$$

dato che il corpo è vincolato a muoversi lungo il piano inclinato. Dalla prima condizione si calcola il valore della reazione vincolare, $N = mg \cos\theta$, dalla seconda il valore dell'accelerazione, $a = g \sin\theta < g$: il corpo scende con moto uniformemente accelerato e l'accelerazione è minore di quella di gravità.

Se esiste un attrito radente tra il piano inclinato e il corpo, il moto lungo il piano non può iniziare se $mg \sin\theta \leq \mu_s N = \mu_s mg \cos\theta$; la componente normale di \mathbf{R} vale ancora $N = mg \cos\theta$, però c'è ora anche una componente parallela al piano inclinato che vale, in equilibrio statico, $-mg \sin\theta$. Pertanto la condizione per l'equilibrio statico è $\tan\theta \leq \mu_s$.

Per avere moto occorre aumentare l'angolo di inclinazione θ in modo da non soddisfare la condizione suddetta; vale allora l'equazione

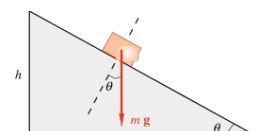
$$mg \sin\theta - \mu_d mg \cos\theta = ma$$

$$a = (\sin\theta - \mu_d \cos\theta) g .$$

Dovendo essere il termine tra parentesi positivo, si ha per il coefficiente di attrito dinamico $\mu_d < \tan\theta$; in particolare, se $\mu_d = \tan\theta$ $a = 0$: il moto è uniforme e si tratta di un esempio di equilibrio dinamico (vedi paragrafo 2.12).

Riassumendo, se il corpo è fermo sul piano inclinato esso resta fermo per tutti gli angoli di inclinazione compresi tra zero e θ_s tale che $\tan\theta_s = \mu_s$; per $\theta > \theta_s$ il corpo non può restare fermo e scende lungo il piano inclinato. Però, una volta che il corpo si è messo in movimento, poiché la forza di coesione in queste condizioni è minore di quella in quiete ($\mu_d < \mu_s$), si può avere moto anche per angoli minori di θ_s precisamente compresi tra θ_s e $\theta_d < \theta_s$ tale che $\tan\theta_d = \mu_d$.

Se invece il corpo all'istante iniziale sta scendendo lungo il piano con velocità v_0 , esso si ferma se $mg \sin\theta < \mu_d mg \cos\theta$, cioè se $\tan\theta < \mu_d$, si muove di moto uniformemente accelerato se $\tan\theta > \mu_d$ e prosegue con velocità v_0 se $\tan\theta = \mu_d$.



L'unica differenza rispetto alla partenza da fermo è che si può avere moto (uniformemente decelerato) anche se $\operatorname{tg}\theta < \mu_d$ proprio perché c'è una velocità iniziale (si veda l'esempio 2.8).

La misura degli angoli θ_s , a cui un corpo comincia a scivolare, e θ_d , per cui il moto è uniforme, è utile per determinare i coefficienti μ_s e μ_d .

Storicamente l'utilizzazione del piano inclinato è stata di grande aiuto per lo studio del moto uniformemente accelerato. La possibilità di sperimentare con accelerazioni inferiori a g e regolabili a piacere regolando θ , ha consentito di allungare la durata del moto e quindi di studiarne le caratteristiche in modo significativo pur disponendo di strumentazione imprecisa.

Esempio 2.8

Calcolare, per un piano inclinato di altezza h e angolo θ (figura 2.13), la velocità con cui arriva alla base un punto lanciato dal vertice con velocità iniziale v_0 . Si consideri il caso senza attrito e con attrito (coefficiente dinamico μ_d).

Soluzione

Nel caso di vincolo liscio l'accelerazione è $a = g \operatorname{sen}\theta$; per il calcolo della velocità utilizziamo (1.10):

$$v^2 = v_0^2 + 2 g \operatorname{sen}\theta d = v_0^2 + 2 gh \quad ;$$

d è la lunghezza del piano inclinato e si ha appunto $d \operatorname{sen}\theta = h$. Troviamo che la velocità finale non dipende dall'angolo di inclinazione: essa è la stessa che si avrebbe per la caduta verticale (paragrafo 1.5). In presenza di attrito l'accelerazione è $a = g \operatorname{sen}\theta - \mu_d g \operatorname{cos}\theta$ per cui

$$v^2 = v_0^2 + 2 g (\operatorname{sen}\theta - \mu_d \operatorname{cos}\theta) d \quad ;$$

$d \operatorname{sen}\theta$ vale h ed è costante, invece $d \operatorname{cos}\theta$ è la lunghezza della base e varia con θ , a parità di h . Pertanto la velocità finale dipende dall'angolo di inclinazione e precisamente diminuisce al diminuire di questo, cioè al crescere di d . Riprendendo la discussione svolta prima, vediamo che possiamo distinguere tre casi:

1. v è maggiore di v_0 (moto accelerato), quando $\operatorname{sen}\theta - \mu_d \operatorname{cos}\theta > 0$, cioè $\operatorname{tg}\theta > \mu_d$.
2. v è eguale a v_0 (moto uniforme) se $\operatorname{tg}\theta = \mu_d$.
3. v è minore di v_0 (moto decelerato) se $\operatorname{tg}\theta < \mu_d$. In questo caso il punto alla fine si ferma e, in effetti, potrebbe anche non arrivare fino in fondo. Fissato h , ciò dipende dai valori di v_0 , θ e μ_d . Indicando con x la generica distanza percorsa lungo il piano che consideriamo indefinito, scriviamo

$$v^2(x) = v_0^2 + 2 g (\operatorname{sen}\theta - \mu_d \operatorname{cos}\theta) x$$

e imponiamo $v(x) = 0$. Troviamo così il valore della distanza alla fine della quale il punto si ferma e

dal confronto con $d = h/\text{sen}\theta$ capiamo se il punto arriva in fondo o se si ferma prima.

Visualizza Soluzione

Esempio 2.9

Un punto materiale viene lanciato, con velocità iniziale v_0 nel punto A , lungo un piano inclinato ($\theta = 40^\circ$). Il coefficiente di attrito dinamico è $\mu_d = 0.4$. In B il punto si distacca dal piano e, nel vuoto, arriva in C , che è alla stessa quota di B . Si sa che $AB = BC = d = 1.43$ m. Calcolare il valore di v_0 .

Soluzione

Nella salita sia la forza peso che la forza di attrito si oppongono al moto e questo risulta uniformemente decelerato. La velocità in B è

$$v^2 = v_0^2 - 2 d g (\text{sen}\theta + \mu_d \cos\theta) \quad .$$

La traiettoria da B a C è parabolica e la gittata d è legata alla velocità in B e all'angolo θ dalla relazione del paragrafo 1.12:

$$d = \frac{2 v^2 \text{sen}\theta \cos\theta}{g} \quad .$$

Si ricava v^2 da questa (il valore di v è 3.77 m/s) e si sostituisce nella prima equazione ottenendo

$$v_0^2 = d g \left[\frac{1}{2 \text{sen}\theta \cos\theta} + 2 (\text{sen}\theta + \mu_d \cos\theta) \right] = 40.83 \text{ m}^2/\text{s}^2 \quad , \quad v_0 = 6.39 \text{ m/s} \quad .$$

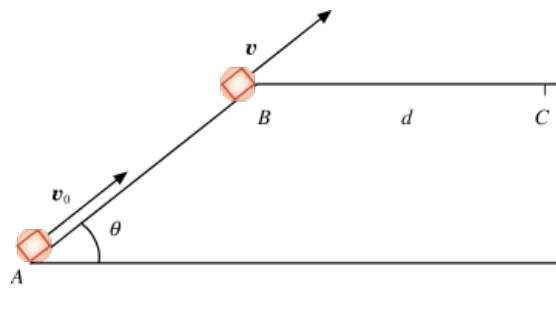


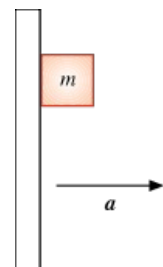
FIGURA 2.14

Visualizza Soluzione

Esempio 2.10

Un blocco di massa m è fermo rispetto ad una parete verticale che avanza con accelerazione $a = 11.4 \text{ m/s}^2$. Calcolare il coefficiente di attrito tra blocco e parete. Come cambia la risposta se invece il blocco scende lungo la parete con moto uniforme?

Soluzione



La parete spinge il blocco che quindi ha anch'esso accelerazione \mathbf{a} : la parete cioè esercita sul blocco la forza $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ (e il blocco reagisce applicando alla parete la forza $-\mathbf{F}$). In questo caso F ha il ruolo di componente normale della reazione vincolare. Se il blocco non si muove rispetto alla parete, vuol dire che la forza peso è equilibrata dalla forza di attrito statico:

$$mg = \mu_s F = \mu_s ma \Rightarrow \mu_s = \frac{g}{a} = 0.86 \quad .$$

Se invece il corpo scivola con moto uniforme lungo l'asse verticale scriviamo

$$mg - \mu_d ma = 0 \Rightarrow \mu_d = \frac{g}{a} = 0.86 \quad .$$

Tra i due risultati non c'è contraddizione, in quanto per una data coppia parete-corpo può verificarsi o la prima situazione (e allora $\mu_d < 0.86$) oppure la seconda (e allora $\mu_s > 0.86$), ma non entrambe.

Visualizza Soluzione

2.10 Forza elastica

Si definisce *forza elastica* (unidimensionale) una forza di direzione costante, con verso rivolto sempre ad un punto O , chiamato centro, e con modulo proporzionale alla distanza da O . Se assumiamo come asse x la direzione della forza e come origine il centro, possiamo scrivere

$$\mathbf{F} = -k x \mathbf{u}_x ,$$

dove k è una costante positiva, detta *costante elastica*, e \mathbf{u}_x è il versore dell'asse x .

Il moto risultante per effetto di una forza elastica è rettilineo, qualora la velocità iniziale sia nulla o diretta come \mathbf{u}_x . L'accelerazione vale

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m} = -\frac{k}{m} x = -\omega^2 x$$

e quindi, secondo quanto visto nel paragrafo 1.6, il moto è armonico semplice con pulsazione ω e periodo T determinati dal rapporto tra la costante elastica e la massa del punto materiale a cui è applicata la forza elastica:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} , \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} . \quad (2.7)$$

Una forza elastica viene praticamente applicata tramite una molla; questa presenta in genere una lunghezza a riposo, cioè quando non si trova in condizioni di compressione o di estensione, di valore finito l_0 (caso a della figura 2.16). Se la molla viene estesa (caso b), assumendo una lunghezza $l > l_0$, essa sviluppa una forza \mathbf{F} che tende a riportarla alla condizione di riposo

$$F = -k(l - l_0) = -k x ,$$

dove $x > 0$ rappresenta la deformazione. Se invece la molla viene compressa alla lunghezza $l < l_0$, la forza ha la stessa espressione, con $x < 0$. In ogni caso possiamo scrivere la forza, come già detto, $\mathbf{F} = -kx\mathbf{u}_x$.

Il modulo di questa *forza di richiamo* è proporzionale alla deformazione fino a che non si supera il limite di elasticità della molla. Se vogliamo mantenere la molla deformata con una determinata lunghezza l dobbiamo applicare alla molla una forza eguale ed opposta alla forza esercitata dalla molla. Discutiamo tale situazione di equilibrio con la molla deformata ($l - l_0 = x > 0$) osservando la figura 2.17, in cui la molla estesa è fissata nell'estremo Q ad una parete. I punti P e Q sono fermi e pertanto le forze applicate a ciascun punto devono essere eguali ed opposte. Nel punto P la forza elastica \mathbf{F}_2 dovuta alla deformazione della molla (in modulo kx) viene bilanciata da una forza esterna $\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2$. Nel punto Q la situazione è analoga, solo che la forza elastica \mathbf{F}_3 è bilanciata dalla reazione

Forza elastica

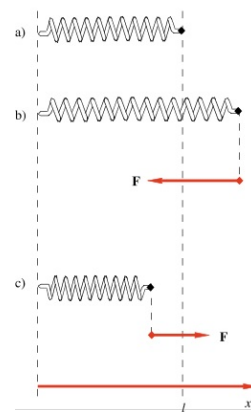


FIGURA 2.16

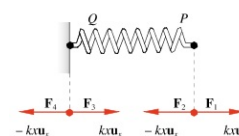


FIGURA 2.17

vincolare, che si sviluppa nel punto di aggancio, $F_4 = -F_3$ (le relazioni tra F_1 e F_2 , F_3 e F_4 soddisfano alla terza legge di Newton). Considerando che la molla, nel suo insieme, è ferma, deve essere nulla la risultante delle forze applicate alla molla, deve cioè essere $F_1 = -F_4$ da cui segue $F_2 = -F_3$; i valori espliciti sono mostrati in figura 2.17.

Da questo risultato deduciamo che se abbiamo una molla libera ad entrambi gli estremi e vogliamo deformarla di una quantità x , dobbiamo applicare ai due estremi due forze eguali e contrarie di modulo kx .

Supponiamo ora di avere la molla bloccata nell'estremo Q , deformata di x_0 , e che in P sia fissato alla molla un punto materiale di massa m (la massa della molla è trascurabile rispetto a m). Se all'istante $t = 0$ il punto viene lasciato libero con velocità nulla (condizioni iniziali $x = x_0$ e $v = 0$ per $t = 0$), esso si muove di moto armonico per effetto della forza elastica agente su di esso. La soluzione dell'equazione del moto

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

è quella nota, $x = A \sin(\omega t + \Phi)$ con ω dato da (2.7). I valori delle costanti A e Φ si calcolano dalle condizioni iniziali

$$x_0 = A \sin \phi, \quad 0 = \omega A \cos \phi,$$

dato che $v = \omega A \cos(\omega t + \Phi)$. Per Φ compreso tra 0 e 2π sono possibili le due soluzioni $A = x_0$, $\Phi = \pi/2$ e $A = -x_0$, $\Phi = 3\pi/2$; in ogni caso si hanno per la legge oraria e per la velocità le espressioni

$$x = x_0 \cos \omega t, \quad v = -\omega x_0 \sin \omega t.$$

Se le condizioni iniziali sono diverse si ottiene sempre un moto armonico con la medesima ω , però il valore dell'ampiezza è in generale diverso da x_0 . Per esempio, con $x = x_0$ e $v = v_0$ per $t = 0$, si ottiene

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}, \quad \text{tg } \phi = \omega \frac{x_0}{v_0}.$$

A è maggiore di x_0 a causa della velocità iniziale diversa da zero. Se poniamo $v_0 = 0$ ritroviamo il risultato precedente.

Nel caso dinamico la reazione vincolare in Q è variabile nel tempo con modulo sempre uguale a $kx(t)$.

Esempio 2.11

Un corpo di massa m , posato sopra un piano orizzontale, viene tirato da una forza F che estende una molla, come mostrato in figura 2.18, e si muove con accelerazione a , senza oscillare. Calcolare l'allungamento della molla se il piano è liscio e se tra corpo e piano c'è un coefficiente di attrito

dinamico μ_d . Si trascuri la massa della molla.

Soluzione

L'accelerazione a della massa m è dovuta alla forza esercitata dalla molla, che vale kx (a sua volta la massa esercita sulla molla la forza $-kx$). La molla, tirata dalla forza F , si muove anch'essa con accelerazione a , però la sua massa è trascurabile e quindi la forza totale applicata alla molla deve essere nulla; ne segue $F - kx = 0$, $F = kx$. Siccome è anche $kx = ma$, abbiamo:

$$x = \frac{F}{k} = \frac{ma}{k} .$$

In sostanza la molla, estendendosi, trasmette la forza F alla massa m . Se c'è attrito, l'equazione del moto della massa m è

$$kx - \mu_d mg = ma \Rightarrow x = \frac{ma + \mu_d mg}{k} > \frac{ma}{k} .$$

La molla si allunga di più, per vincere l'attrito; anche F deve essere corrispondentemente maggiore per comunicare la stessa accelerazione a : $F = ma + \mu_d mg$.

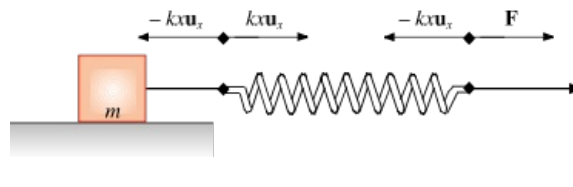


FIGURA 2.18

Visualizza Soluzione

Esempio 2.12

Un carrello sale lungo un piano inclinato ($\theta = 20^\circ$) con accelerazione costante $a_1 = 2 \text{ m/s}^2$. Sul carrello si trova un corpo di massa $m = 0.25 \text{ kg}$, fissato ad una parete del carrello da una molla di costante elastica $k = 12 \text{ N/m}$. Non ci sono attriti e il corpo non oscilla. Calcolare di quanto è deformata la molla rispetto alla posizione di riposo e in che verso. Ripetere il calcolo supponendo che lo stesso sistema scenda lungo il piano con accelerazione costante $a_2 = 5 \text{ m/s}^2$.

Soluzione

Al corpo sono applicate, lungo il piano inclinato, la forza elastica e la componente $mg \sin\theta$ della forza peso. Visto che il corpo accelera verso l'alto, la molla deve essere estesa così che

$$kx - mg \sin\theta = ma_1 \Rightarrow x = \frac{m}{k} (a_1 + g \sin\theta) = 0.111 \text{ m} .$$

Nel secondo caso rileviamo innanzitutto che $a_2 > g \sin\theta$, quindi la forza elastica concorre con la forza peso nell'accelerare la massa; la molla deve essere compressa così che

$$kx + mg \operatorname{sen}\theta = ma_2 \Rightarrow x = \frac{m}{k} (a_2 - g \operatorname{sen}\theta) = 0.034 \text{ m} .$$

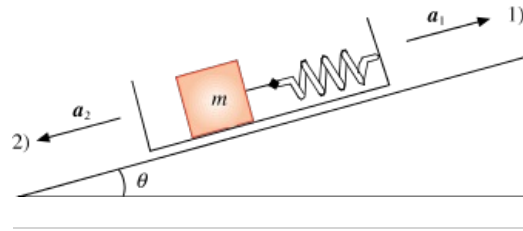


FIGURA 2.19

Visualizza Soluzione

Esempio 2.13

Un punto di massa m è collegato a due molle, di costanti elastiche k_1 e k_2 , ed è in equilibrio statico con le molle non deformate. Si sposta il punto dalla posizione di equilibrio, ad esempio verso destra, e lo si lascia oscillare. Qual è la pulsazione dell'oscillazione?

Soluzione

Spostando il punto verso destra di una quantità x , esso è sottoposto alle due forze elastiche $-k_1 x$, $-k_2 x$, aventi lo stesso verso, da destra verso sinistra. Pertanto

$$-k_1 x - k_2 x = ma = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k_1 + k_2}{m} x = 0 \quad , \quad \omega = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}} .$$

In particolare se le molle fossero eguali $\omega = \sqrt{2k/m}$.



FIGURA 2.20
(Esempio 2.13)

Visualizza Soluzione

2.11 Forza di attrito viscoso

La *forza di attrito viscoso* è una forza che si oppone al moto ed è proporzionale alla velocità del corpo soggetto a tale forza:

$$\mathbf{F} = -b \mathbf{v} \quad (2.8)$$

L'accelerazione risulta $\mathbf{a} = -b \mathbf{v}/m$; abbiamo studiato la cinematica di un moto con una accelerazione di questo tipo nel paragrafo 1.7, in cui \mathbf{v} aveva direzione costante e \mathbf{v}_0 era parallela a \mathbf{v} . Il risultato è analogo anche se il moto non è rettilineo e, in particolare, si ricava che il modulo della velocità presenta una decrescita esponenziale nel tempo.

In presenza di una forza di attrito viscoso non si può realizzare una condizione di equilibrio statico (come invece è possibile con l'attrito radente) poiché se $\mathbf{v} = 0$ la forza si annulla.

Forze di attrito viscoso sono esercitate, in certe condizioni, su un corpo che si muove in un fluido (liquido o gas).

Consideriamo allora, per esempio, un punto materiale di massa m lasciato cadere in un fluido e assumiamo che le uniche forze agenti siano la forza peso $\mathbf{F}_1 = m \mathbf{g}$ e la forza di attrito viscoso \mathbf{F}_2 che scriviamo $-m k \mathbf{v}$, evidenziando per comodità la massa cioè ponendo la costante b di (2.8) pari a $m k$. Le condizioni iniziali del moto sono $x = 0$ e $v = 0$ per $t = 0$.

Applicando la legge di Newton (2.1) si ha

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = m \mathbf{g} - m k \mathbf{v} = m \mathbf{a} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad .$$

Dato che la velocità iniziale è nulla il moto ha luogo soltanto lungo l'asse verticale z (che orientiamo verso il basso). Proiettiamo su z l'equazione del moto ottenendo

$$\frac{dv}{dt} = g - k v \Rightarrow \frac{dv}{g - kv} = dt$$

per separazione delle variabili (appendice A). Integriamo e risolviamo nella velocità:

$$\int_0^v \frac{dv}{g - kv} = \int_0^t dt \Rightarrow -\frac{1}{k} [\ln(g - kv)]_0^v = t$$

$$\Rightarrow \ln \frac{g - kv}{g} = -kt \Rightarrow v(t) = \frac{g}{k} (1 - e^{-kt}) .$$

Partendo da zero la velocità cresce, però sempre più lentamente: per $t \gg 1/k$, v assume praticamente il valore costante g/k ; $1/k$ è la costante di tempo τ , introdotta nel paragrafo 1.7. Il grafico della funzione $v(t)$ è mostrato in figura 2.22.

Forza di attrito viscoso

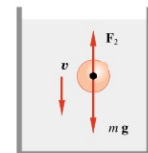


FIGURA 2.21

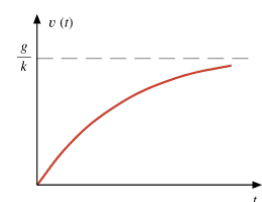


FIGURA 2.22

Sotto l'azione della sola forza peso il moto sarebbe uniformemente accelerato; la forza di attrito viscoso si oppone all'aumento della velocità, *rendendo al limite il moto uniforme*. In effetti si vede che per $v = g/k$ l'accelerazione $a = g - k v$ diventa nulla. Questo risultato asintotico si ottiene anche considerando come varia con la velocità il modulo delle forze agenti (figura 2.23): la forza peso è costante, mentre quella di attrito viscoso cresce linearmente con la velocità. Quando v assume il valore g/k si ha l'equilibrio dinamico tra le due forze e la loro risultante si annulla: di conseguenza la velocità non può più cambiare e si instaura un moto uniforme.

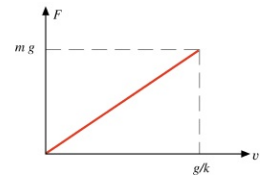


FIGURA 2.23

2.12 Forze centripete

Supponiamo che la risultante \mathbf{R} delle forze agenti su un punto materiale presenti una componente F_N ortogonale alla traiettoria, che risulta pertanto curvilinea (si riveda la parte finale del paragrafo 2.6). F_N determina l'accelerazione centripeta secondo la relazione $F_N = m a_N = m v^2/r$ essendo r il raggio di curvatura della traiettoria.

In generale \mathbf{R} ha anche una componente tangente alla traiettoria, F_T , responsabile della variazione del modulo della velocità. Se $F_T = 0$ il moto lungo la traiettoria è uniforme e l'unica accelerazione è a_N .

Forze centripete sono generalmente prodotte da rotaie, pneumatici, fili che collegano il corpo ad un punto fisso ovvero vincoli che consentono di incurvare la traiettoria oppure da azioni a distanza come quelle gravitazionali.

Esempio 2.14 Curve sopraelevate

Si vuole determinare quale condizione deve essere soddisfatta affinché un punto materiale, lanciato con velocità \mathbf{v} orizzontale lungo una curva sopraelevata, come quelle presenti in un velodromo, percorra a velocità costante un arco di circonferenza, in un piano orizzontale, con centro in O . La situazione è mostrata in figura 2.25a; la traiettoria è indicata dalla linea punteggiata nella vista in pianta.

Soluzione

Per ottenere un moto circolare uniforme la risultante delle forze applicate \mathbf{R} deve essere ortogonale alla traiettoria e diretta verso il centro. Le forze agenti sono il peso del punto materiale $m\mathbf{g}$ e la reazione vincolare della pista \mathbf{N} , normale alla superficie se il vincolo è liscio come supponiamo; esse devono essere disposte come nella figura 2.25b. La componente orizzontale di \mathbf{N} , $N \sin\theta$, rivolta verso il centro della traiettoria circolare seguita dal punto fornisce la forza centripeta: $N \sin\theta = m v^2/r$; d'altra parte per la condizione di equilibrio nella direzione verticale $N \cos\theta = mg$. Ricavando N da questa e sostituendo nella prima si ottiene

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{v^2}{g r} .$$

Per realizzare la condizione voluta devono soddisfare questa relazione la velocità con cui si affronta la curva, il raggio di curvatura e l'angolo di inclinazione della curva. Per esempio se $\theta = 30^\circ$ e $r = 30$ m il punto resta a quota fissa percorrendo la curva con $v \cong 13$ m/s = 46.8 Km/h. A velocità minori il punto scende verso il basso, a velocità maggiori sbanda verso

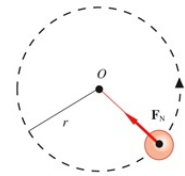


FIGURA 2.24

l'alto.

La reazione N ha il valore $mg/\cos\theta$, maggiore del valore $mg \cos\theta$ trovato nel piano inclinato. In effetti, oltre a dover reagire alla componente $mg \cos\theta$ del peso, il suolo deve fornire la forza centripeta necessaria perché il moto sia circolare: la quantità di moto del punto cambia continuamente in direzione per effetto dell'interazione col suolo.

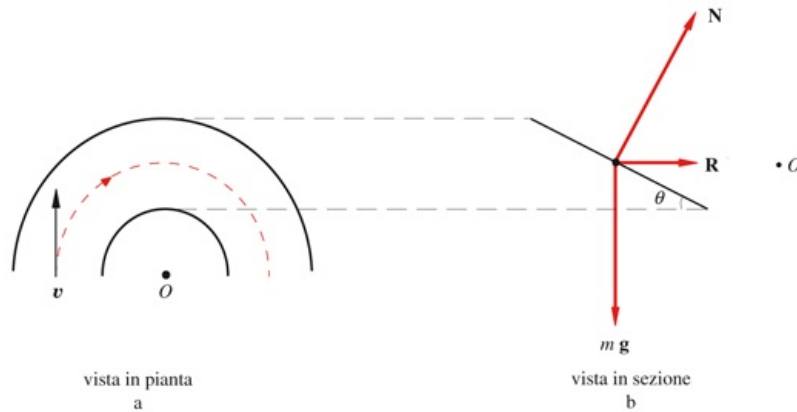


FIGURA 2.25

Visualizza Soluzione

Esempio 2.15 Curva su strada piana

Vogliamo adesso studiare la velocità massima con cui un'auto può affrontare in una strada piana una curva di raggio r .

Soluzione

La forza centripeta necessaria è fornita dall'attrito tra pneumatici e terreno; poiché la traiettoria è un arco di circonferenza di raggio r non c'è spostamento lungo r e il coefficiente di attrito rilevante per il problema è quello statico. Pertanto il caso limite si ha per il valore massimo della forza di attrito, cioè per $F_N = \mu_s N = \mu_s m g$, e deve essere $\mu_s m g = m v^2/r$. La velocità massima con cui può essere affrontata la curva è

$$v = \sqrt{\mu_s g r} \quad .$$

Con $\mu_s = 0.5$ e $r = 30$ m si trova $v = 12.1$ m/s = 43.6 Km/h. Se invece la curva è su rotaia, la forza centripeta è fornita dal sistema che tiene fisse le rotaie al suolo.

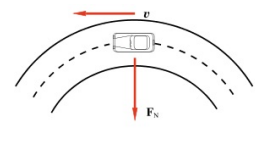


FIGURA 2.26
(Esempio 2.15)

Visualizza Soluzione

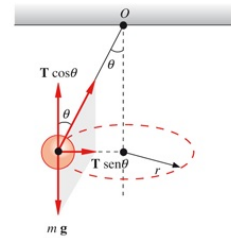


FIGURA 2.27
(Esempio 2.16)

Esempio 2.16 Pendolo conico

Si abbia un punto materiale di massa m appeso in O (vedi fig. 2.27) tramite un filo inestensibile di massa trascurabile lungo L . Vogliamo determinare le condizioni per cui P descriva un moto circolare uniforme.

Soluzione

Sul punto P agiscono la forza peso $m \mathbf{g}$ e la forza \mathbf{T} , dovuta al filo e diretta come questo (trascuriamo ogni attrito). Come nel primo esempio

$$T \sin \theta = m \frac{v^2}{r} \quad , \quad T \cos \theta = m g$$

da cui si ricava $\tan \theta = v^2 / g r$. Ponendo $r = L \sin \theta$ e $v = \omega r$ si ha

$$\cos \theta = g / \omega^2 L \quad ,$$

relazione che deve sussistere tra velocità angolare, lunghezza del filo e angolo rispetto alla verticale dello stesso affinché il punto P descriva un moto circolare uniforme. Al crescere di ω cresce il valore di θ ; in ogni caso deve sussistere la condizione $\omega^2 \geq g / L$. Il valore della forza dovuta al filo, detta tensione del filo, è

$$T = mg / \cos \theta = m \omega^2 L .$$

Visualizza Soluzione

Una caratteristica comune agli esempi trattati è l'indipendenza dalla massa del punto delle varie condizioni trovate, come $\tan \theta = v^2 / g r, v = \omega r, \cos \theta = g / \omega^2 L$. Questo perché in tutti gli esempi è presente soltanto la forza peso, che è proporzionale alla massa, e le reazioni vincolari, determinate dall'azione del peso e quindi anch'esse proporzionali alla massa del punto; eguagliando la risultante di tutte le forze a $m \mathbf{a}$ la massa viene semplificata e quindi il risultato *cinematico* è indipendente dalla massa (mentre, come detto, non lo sono le forze).

Dopo questi esempi possiamo anche chiarire cosa intendiamo per *equilibrio dinamico*; a differenza dell'equilibrio statico descritto nel paragrafo 2.4 (risultante delle forze applicate al punto eguale a zero, velocità nulla), ci

Equilibrio dinamico

riferiamo a quei particolari casi in cui *in presenza di forze il moto avviene con velocità costante in modulo*. Se si tratta di moto rettilineo ciò è possibile solo se la risultante delle forze è nulla e abbiamo visto appunto i casi di moto uniforme in presenza di forze di attrito radente o di attrito viscoso, che bilanciano l'effetto della forza peso (paragrafi 2.8, 2.9, 2.11). Se invece il moto è curvilineo basta che sia nulla \mathbf{F}_T , come deve essere se vogliamo che la velocità sia costante in modulo, ovvero che la risultante delle forze agenti sia puramente centripeta. Qualora \mathbf{F}_N sia anche costante in modulo il moto è circolare uniforme, come negli esempi appena considerati.

2.13 Pendolo semplice

Il *pendolo semplice* è costituito da un punto materiale appeso tramite un filo inestensibile e di massa trascurabile. La posizione di equilibrio statico è quella verticale, con il punto fermo ed il filo teso; la forza esercitata dal filo (tensione del filo) vale in modulo $T_F = mg$.

Se spostiamo il punto dalla verticale esso inizia ad oscillare attorno a questa, lungo un arco di circonferenza di raggio L , pari alla lunghezza del filo, in un piano verticale. Vogliamo studiare, in assenza di attrito, questo moto oscillatorio.

Le forze agenti sul punto P sono il peso $m \mathbf{g}$ e la tensione del filo \mathbf{T}_F per cui il moto è regolato da $m \mathbf{g} + \mathbf{T}_F = m \mathbf{a}$.

Consideriamo le componenti lungo la traiettoria, orientata come in figura 2.28, e ortogonalmente alla traiettoria (verso positivo da P a O):

$$R_T = -mg \operatorname{sen} \theta = m a_T, \quad R_N = T_F - mg \cos \theta = m a_N.$$

Il segno negativo della componente lungo la traiettoria è dovuto al fatto che la forza ha segno opposto rispetto a quello della coordinata s sulla traiettoria. Infatti per $s < 0$, posizioni sull'arco di circonferenza a sinistra della verticale, la forza è diretta secondo il verso assunto positivo, mentre per $s > 0$ la forza è diretta secondo il verso negativo (e il risultato non dipende dalla scelta del verso di s). Fisicamente R_T è una *forza di richiamo* che tende a riportare il punto sulla verticale, anche se non è di direzione costante come nel caso delle forze elastiche.

Secondo (1.27)

$$a_T = L \frac{d^2 \theta}{dt^2}, \quad a_N = \frac{v^2}{L}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{g}{L} \operatorname{sen} \theta, \quad m \frac{v^2}{L} = T_F - mg \cos \theta.$$

La prima è l'equazione differenziale del moto del pendolo, la cui soluzione ci fornisce la legge oraria del moto $\theta(t)$; però, per θ qualunque, la soluzione è analiticamente complicata.

Consideriamo allora piccoli valori di θ e sviluppiamo in serie $\operatorname{sen} \theta$:

$$\operatorname{sen} \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \dots$$

Quantitativamente, per $\theta \leq 0.122 \text{ rad} = 7^\circ$, $\operatorname{sen} \theta$ si può approssimare con θ commettendo un errore relativo che è sempre minore di 10^{-3} . Quindi per *piccole oscillazioni* l'equazione differenziale diventa

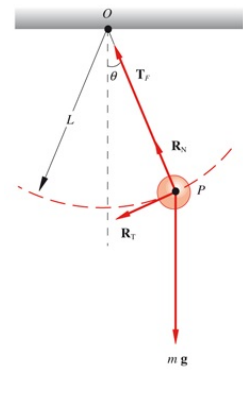


FIGURA 2.28

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \theta = 0 \quad (2.9)$$

e coincide con quella del moto armonico semplice (1.16), posto $\omega^2 = g/L$.

In conclusione il moto del pendolo è oscillatorio armonico quando l'ampiezza delle oscillazioni è piccola così che $\sin\theta \approx \theta$. La legge oraria del moto è

$$\theta = \theta_0 \sin(\omega t + \phi) ;$$

l'ampiezza θ_0 dell'oscillazione e la fase iniziale ϕ dipendono dalle condizioni iniziali del moto, come discusso nei paragrafi 1.6 e 2.9.

Il periodo del moto T è dato da

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \quad (2.10)$$

ed è *indipendente dall'ampiezza* (isocronismo delle piccole oscillazioni). La legge oraria dello spostamento lungo l'arco di circonferenza è dato da

$$s = L\theta = L\theta_0 \sin(\omega t + \phi)$$

mentre la velocità angolare e la velocità lineare hanno le espressioni

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega \theta_0 \cos(\omega t + \phi) ,$$

$$v = \frac{ds}{dt} = L \frac{d\theta}{dt} = L \omega \theta_0 \cos(\omega t + \phi) .$$

La velocità è massima quando il punto passa per la verticale ($\theta = 0$) e nulla agli estremi delle oscillazioni ($\theta = \theta_0$) dove il verso del moto si inverte. Notiamo che i risultati cinematici non dipendono dalla massa del pendolo, per le stesse ragioni esposte alla fine del paragrafo 2.12.

Quando l'ampiezza delle oscillazioni non è piccola il moto è ancora periodico, ma non armonico, e il periodo T' dipende dall'ampiezza; detta $\Delta T = T' - T$ la differenza tra il periodo vero e quello calcolato con (2.10), in figura 2.29 è riportata $\Delta T/T$ in funzione di θ_0 fino al valore $\theta_0 = 90^\circ$, dove $T' \approx 1.16 T$.

Risolto il problema del moto, e quindi note $\theta(t)$ e $v(t)$, possiamo ritornare all'equazione del moto proiettata sulla normale alla traiettoria e calcolare la *tensione del filo* che sostiene il punto:

$$T_F = m \left[g \cos\theta(t) + \frac{v^2(t)}{L} \right] . \quad (2.11)$$

La tensione è massima nella posizione verticale, dove sia $\cos\theta(t)$ che $v(t)$ assumono i valori massimi, ed è minima nei punti di inversione. Sia (2.11) che queste conclusioni valgono qualunque sia il valore dell'ampiezza; per piccole oscillazioni la tensione si calcola inserendo in (2.11) le espressioni analitiche

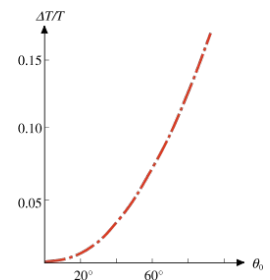


FIGURA 2.29

trovate per $\theta(t)$ e $v(t)$.

Il pendolo semplice che abbiamo descritto e il pendolo conico dell'esempio 2.16 sono eguali come composizione, punto materiale sospeso con un filo, però i tipi di moto sono completamente diversi. Il moto del pendolo conico si svolge in un piano orizzontale ed è circolare uniforme; le forze sono ortogonali alla traiettoria e costanti ed è necessario comunicare al punto una velocità iniziale appropriata, che poi resta costante in modulo. Il moto del pendolo semplice si svolge in un piano verticale e la risultante delle forze ha sia componente tangente che normale alla traiettoria, entrambe non costanti; il moto può avvenire anche con velocità iniziale nulla, purché sia $\theta \neq 0$, ed è armonico semplice lungo un arco di circonferenza (per piccole oscillazioni).

2.14 Tensione dei fili

Nel pendolo, semplice o conico, il filo di sostegno serve per applicare una certa forza al punto in movimento: il filo risulta teso e la forza, con direzione lungo il filo teso, che questo esercita sul punto viene chiamata *tensione del filo*. Il filo può essere fissato in un estremo ad un punto fisso e nell'altro ad un punto materiale oppure può collegare due punti materiali. Supporremo sempre che il filo sia *inestensibile*, cioè che la sua lunghezza sia costante, e di *massa trascurabile* rispetto alle altre masse.

Per chiarire il concetto di tensione consideriamo un filo teso in quiete e prendiamo in esame un elemento infinitesimo di esso. Tale elemento è *tirato* dalle due parti restanti di filo e l'equilibrio statico richiede che le due forze, agenti sull'elemento di filo, siano eguali in modulo e direzione e di verso opposto (figura 2.30a). Ciò vale per qualunque elemento di filo e il valore della tensione è lo stesso ovunque (altrimenti non ci sarebbe equilibrio). In particolare ad un estremo $\mathbf{T} = -\mathbf{F}$ (figura 2.30b). Per il filo AB nel suo insieme si ha la situazione della figura 2.3 c e deve essere in modulo $F_A = F_B = T$: per tendere il filo si applicano le forze \mathbf{F} e $-\mathbf{F}$ e la tensione, in modulo, è eguale al modulo di \mathbf{F} .

Consideriamo adesso un filo teso in movimento. L'ipotesi che il filo sia inestensibile comporta che tutti i punti del filo, compresi gli estremi, abbiano la stessa accelerazione; pertanto due corpi in movimento collegati da un filo teso, come nell'esempio 2.19, devono avere la stessa accelerazione. L'ipotesi che il filo abbia massa trascurabile fa sì che il prodotto ma risulti nullo per il filo (e per qualsiasi porzione di esso): di conseguenza il valore della tensione durante il moto è lo stesso in qualunque punto del filo, come nel caso statico. Lo stesso ovviamente succede se il moto è uniforme ($a = 0$). Vedremo nella nota alla fine del paragrafo cosa cambia se la massa del filo non è trascurabile.

Riassumendo, il filo teso esercita agli estremi la tensione \mathbf{T} , il cui valore dipende dalle forze applicate, e che deve essere pensata come la reazione del filo alla

forza che lo tende. Per un filo reale la tensione non può superare un valore massimo T_{\max} , oltre il quale il filo si spezza; T_{\max} dipende dalla sostanza con cui è fatto il filo e dalle dimensioni geometriche. Se ad un estremo è collegato un punto materiale, la tensione \mathbf{T} va inserita nella legge di Newton (2.1) come le altre forze agenti sul punto.

Non è necessario che il filo sia completamente rettilineo; esso può scorrere attorno ad un perno o essere parzialmente avvolto attorno ad un disco mobile (carrucola), allo scopo di cambiare la direzione della forza. Con riferimento alla figura 2.31, un tratto di filo curvo è sottoposto alle due tensioni \mathbf{T}_1 e \mathbf{T}_2 e alla forza \mathbf{F} reazione del perno, ortogonale al perno se questo è liscio (la carrucola è più conveniente proprio in vista della riduzione dell'attrito). In questa situazione le due tensioni, che per simmetria formano lo stesso angolo con la tangente alla

Tensione del filo

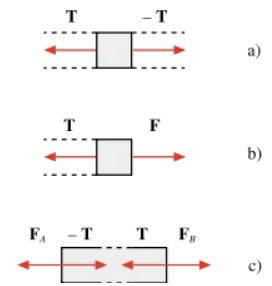


FIGURA 2.30

circonferenza, hanno componenti tangenti eguali ed opposte per soddisfare alla relazione $F_T = ma_T = 0$ (ricordiamo che $m = 0$). \mathbf{T}_1 e \mathbf{T}_2 sono dunque eguali in modulo ed eguali sono le componenti normali la cui somma vale F_N (modulo della risultante di \mathbf{T}_1 e \mathbf{T}_2). Ortogonalmente alla traiettoria si ha quindi $F_N - F = ma_N = 0$, ovvero in modulo la reazione normale è eguale alla risultante delle tensioni.

Oltre ai fili rettilinei si possono utilizzare, per lo stesso scopo, bacchette solide con queste differenze:

- a) mentre il filo funziona in *trazione*, la bacchetta può funzionare in *trazione* e in *compressione*; per esempio, con un filo si può solo tirare un corpo mentre con una bacchetta si può anche spingerlo;
- b) un filo può esercitare solo forze che hanno la direzione del filo stesso, cioè non può sopportare una sollecitazione ortogonale, una bacchetta non presenta questa limitazione.

Un modo semplice per mettere in evidenza la tensione di un filo e misurarne il valore consiste nel tagliare il filo e inserire una molla di costante elastica nota k . Quando si tende il filo ai capi della molla sono applicate le forze \mathbf{T} e $-\mathbf{T}$ e si misura la deformazione x (paragrafo 2.10); in modulo è $T = kx$.

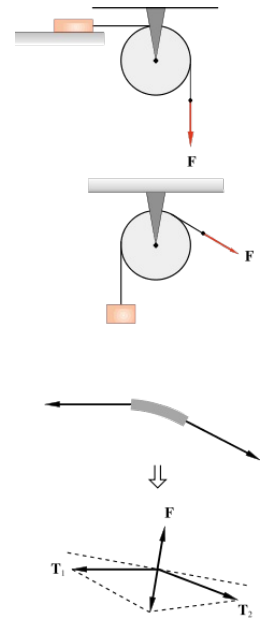


FIGURA 2.31

Esempio 2.17 Punto appeso in quiete

È un caso statico. Le forze applicate al filo sono la forza peso $m\mathbf{g}$ del corpo appeso e la reazione vincolare \mathbf{R} nel punto di aggancio O ; il filo teso sviluppa ai suoi estremi le forze \mathbf{T} e $-\mathbf{T}$. In P si ha $\mathbf{T} = -m\mathbf{g}$; la tensione del filo vale quindi in modulo mg . Nel punto O la tensione è $-\mathbf{T} = m\mathbf{g}$ e la reazione vincolare, opposta alla tensione, è $\mathbf{R} = -m\mathbf{g}$. Il filo trasmette integralmente al punto di aggancio la forza peso da bilanciare ovvero la reazione vincolare da O a P .

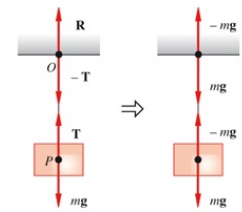


FIGURA 2.32

(Esempio 2.17)

Esempio 2.18 Moto circolare

Un punto materiale, collegato ad un centro O da un filo, si muove su un piano orizzontale senza attrito di moto circolare uniforme con velocità angolare ω ; la velocità lineare è $v = \omega r$. Il filo permette che abbia luogo il moto circolare uniforme applicando al punto P la forza centripeta $T = m v^2/r = m \omega^2 r$. Nel centro O la reazione vincolare bilancia in ogni istante la tensione ed è pari in modulo a $m v^2/r$; il filo trasmette da O a P la forza necessaria perché il moto sia circolare.

Analogamente, durante il moto di un pendolo semplice (paragrafo 2.13) la reazione nel punto di aggancio del filo è eguale in modulo alla tensione del

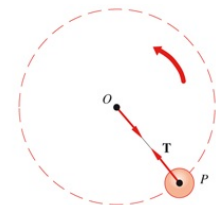


FIGURA 2.33

(Esempio 2.18)

filo.

Osserviamo che nelle figure 2.33 e 2.34 avviene un moto del filo ancora diverso da quelli considerati in precedenza, rettilineo o attorno ad un perno. Qui il filo resta rettilineo, ma il moto di ciascun elemento di filo è circolare attorno all'estremo fisso del filo. Le tensioni, parallele al filo, applicate ai capi di un elemento di filo sono eguali ed opposte, O cioè la loro risultante F_N è nulla in quanto $ma_N = 0$ nell'ipotesi di massa trascurabile. Quindi anche in questo caso la tensione ha un unico valore lungo tutto il filo.

È poi interessante rendersi conto perché il filo in figura 2.33 è teso. Il punto materiale P in assenza di filo proseguirebbe in linea retta e così facendo aumenterebbe la propria distanza dal centro O ; il filo, che è bloccato in O e non può allungarsi, si oppone ed esercita la forza \mathbf{T} sul punto P , il quale a sua volta reagisce sul filo. Agli estremi del filo sono dunque applicate la reazione del meccanismo che tiene fermo il punto O , $\mathbf{R}_O = (mv^2/r) \mathbf{u}_N$, e la reazione del punto P $\mathbf{R}_P = - (mv^2/r) \mathbf{u}_N$, non disegnate in figura 2.33. Il filo applica al punto P la tensione $\mathbf{T} = (mv^2/r) \mathbf{u}_N$ e al punto O la tensione $-\mathbf{T}$. Come risultato il punto O resta fermo, il filo è teso e il punto P si muove di moto circolare.

Notiamo infine ancora una volta che la reazione del filo, esplicitata dalla tensione, come le altre reazioni, non ha un valore prefissato, ma si adatta alle condizioni dinamiche, almeno finché $mv^2/r \leq T_{\max}$.

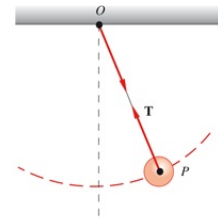


FIGURA 2.34
(Esempio 2.18)

Esempio 2.19 Filo che collega due punti in movimento

Si considerino due punti materiali P e Q , collegati tramite un filo, in movimento su un piano orizzontale liscio per effetto di una forza \mathbf{F} applicata nel punto P . Le equazioni del moto per i due punti sono:

$$\begin{array}{ll} \text{punto } P & F - T = m_P a_P \\ \text{punto } Q & T = m_Q a_Q \end{array}$$

Se il filo è teso le accelerazioni dei due punti, come le loro velocità, sono eguali: $a_P = a_Q = a$. Pertanto

$$a = \frac{F}{m_P + m_Q} \quad , \quad T = \frac{m_Q}{m_P + m_Q} F < F \quad .$$

La forza applicata a Q non è F , ma T che risulta minore di F . T assume un valore prossimo a F solo se $m_Q \gg m_P$, cioè quando, in pratica, è come se P non ci fosse. In presenza di attrito le equazioni del moto diventano

$$F - T - \mu_P m_P g = m_P a \quad , \quad T - \mu_Q m_Q g = m_Q a \quad ,$$

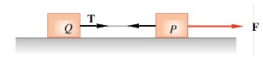


FIGURA 2.35
(Esempio 2.19)

dove i coefficienti di attrito sono quelli dinamici; si ricava

$$a = \frac{F - (\mu_P m_P + \mu_Q m_Q) g}{m_P + m_Q} ,$$

$$T = \frac{m_Q}{m_P + m_Q} [F + (\mu_Q - \mu_P) m_P g].$$

Notiamo che se, in assenza di attrito, annulliamo F ad un certo istante, il moto diviene uniforme, la distanza tra P e Q resta la stessa, ma la tensione si annulla. Invece se agiscono le forze di attrito il moto è uniforme quando sono soddisfatte le condizioni

$$F - T - \mu_P m_P g = 0 \quad , \quad T - \mu_Q m_Q g = 0 ;$$

pertanto la forza agente deve essere pari a $(\mu_P m_P + \mu_Q m_Q) g$. Il filo risulta teso e la tensione vale $\mu_Q m_Q g$.

I risultati sono indipendenti dalla velocità, purché questa sia diversa da zero; se $v = 0$ le formule sono le stesse, ma con i coefficienti statici al posto di quelli dinamici, e danno il valore massimo della forza che si può applicare senza avere movimento e il corrispondente valore massimo della tensione del filo.

Esempio 2.20 Esperienza di Varignon

Consideriamo il sistema costituito da tre masse disposte come in figura 2.36a. Il punto O risulta essere in equilibrio statico se le tre masse soddisfano alla relazione

$$m_3^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2 m_1 m_2 \cos\theta \quad . \quad (2.12)$$

Fissate per esempio le masse m_1 e m_2 si può trovare sperimentalmente il valore di m_3 per cui si ha equilibrio e misurare l'angolo corrispondente θ . In tal modo si verifica la (2.12), che ora dimostriamo.

Nel punto O sono applicate le tensioni dei tre fili di sostegno, che valgono rispettivamente in modulo $m_1 g$, $m_2 g$, $m_3 g$ con direzioni fissate dalla configurazione di equilibrio (Figura 2.36b). In equilibrio, lungo la direzione verticale deve essere

$$m_3 g = m_1 g \cos\alpha_1 + m_2 g \cos\alpha_2$$

con $\alpha_1 + \alpha_2 = \theta$, mentre lungo la direzione orizzontale

$$m_1 g \sin\alpha_1 = m_2 g \sin\alpha_2 .$$

Dalla somma dei quadrati delle due relazioni di equilibrio e tenendo conto dell'eguaglianza

$$\cos(\alpha_1 + \alpha_2) = \cos\theta = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 - \sin\alpha_1 \sin\alpha_2$$

si ottiene (2.12). La verifica sperimentale di questa conferma il carattere vettoriale delle forze.

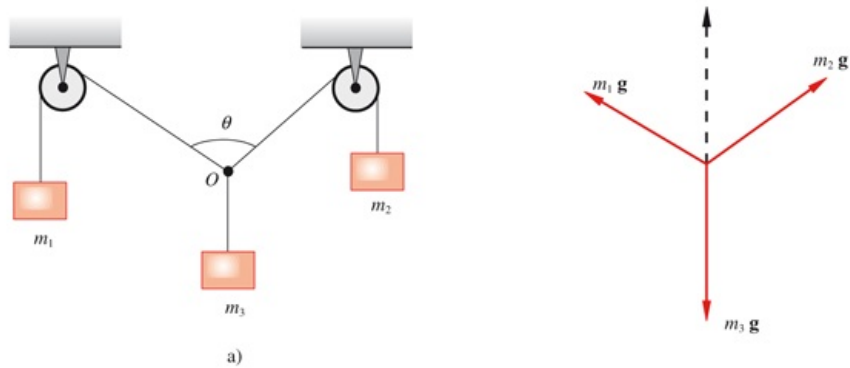


FIGURA 2.36

Esempio 2.21 Macchina di Atwood

Il dispositivo della figura 2.37, detto *macchina di Atwood*, consta di una carrucola e di due corpi di massa m_1 e m_2 , connessi da un filo. Qualitativamente, è evidente che il corpo di massa maggiore, ad esempio m_1 , scende e l'altro corpo sale; durante questo moto il filo non slitta rispetto alla carrucola, che gira accompagnando il filo, e in prima approssimazione assumiamo che non ci sia attrito che frena la rotazione della carrucola. Supponiamo inoltre che la massa della carrucola, come quella del filo, sia trascurabile così da non dover tener conto del suo moto (il caso completo è trattato in un problema relativo al capitolo 6). In pratica è come se il filo scivolasse su un perno circolare liscio, per cui la tensione lungo il filo è la stessa ovunque. Orientiamo l'asse z verso il basso e scriviamo le equazioni del moto:

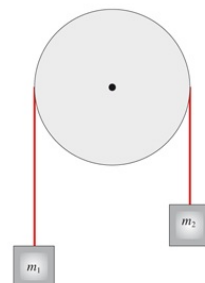


FIGURA 2.37
(Esempio 2.21)

$$\begin{array}{ll} \text{corpo } m_1 & m_1 g - T = m_1 a \quad , \\ \text{corpo } m_2 & m_2 g - T = -m_2 a \quad ; \end{array}$$

il modulo delle accelerazioni è eguale se il filo è inestensibile. Sottraiamo la seconda equazione dalla prima e risolviamo:

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g \quad , \quad T = \frac{2 m_1 m_2}{m_1 + m_2} g \quad .$$

La tensione si colloca tra i valori $m_1 g$ e $m_2 g$, l'accelerazione può assumere valori molto minori di g se $m_1 \approx m_2$ (se le masse sono eguali il moto è uniforme o non si ha moto).

Con questo sistema, che è alternativo rispetto al piano inclinato e consente di ridurre notevolmente gli effetti dell'attrito, Atwood poté agevolmente studiare, verso la fine del 1700, il moto uniformemente accelerato.

Nota. Fili inestensibili con massa non trascurabile

Quando si rilascia l'ipotesi di trascurabilità della massa, la tensione non può più essere la stessa lungo il filo. Preso un piccolo tratto di filo in movimento, abbiamo $\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2 = m\mathbf{a} \neq 0$, per cui $\mathbf{T}_1 \neq -\mathbf{T}_2$. Riprendiamo in esame l'esempio 2.19, supponendo che il filo abbia massa m_F . Le forze applicate ai corpi e al filo sono rappresentate in figura 2.38; le equazioni del moto sono **F**

$$F - T_P = m_P a \quad , \quad T_P - T_Q = m_F a \quad , \quad T_Q = m_Q a$$

e hanno la soluzione

$$a = \frac{F}{m_P + m_F + m_Q} \quad , \quad T_P = \frac{m_F + m_Q}{m_P + m_F + m_Q} F \quad , \quad T_Q = \frac{m_Q}{m_P + m_F + m_Q} F \quad .$$

Vediamo che la tensione varia lungo il filo, dal valore T_Q al valore $T_P > T_Q$. Se la massa è egualmente distribuita lungo il filo, cioè se la massa per unità di lunghezza è costante la tensione varia linearmente da T_Q a T_P : detta d la lunghezza del filo e x la distanza del generico punto del filo dall'estremo Q , si ha

$$T(x) = T_Q + \frac{m_F F}{m_P + m_F + m_Q} \frac{x}{d}$$

e si verifica subito che $T(d) = T_P$. Dimostreremo questo risultato nel capitolo 6, quando parleremo di densità lineare di massa.

Rivediamo anche l'esempio 2.17 nel caso che il filo abbia massa $m_F \neq 0$. Possiamo disegnare subito la figura 2.39: nel punto di aggancio corpo-filo deve essere bilanciata la forza peso del corpo, nel punto di aggancio al supporto deve essere bilanciata la forza peso totale del corpo e del filo. La tensione è massima nell'estremo superiore e minima nell'estremo inferiore. Anche in questo caso, se la massa per unità di lunghezza è costante, la tensione varia linearmente lungo il filo.

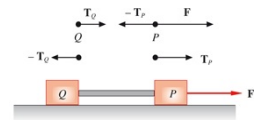


FIGURA 2.38 (Nota)

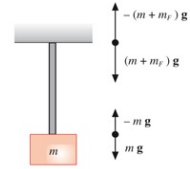


FIGURA 2.39 (Nota)

2.15 Lavoro. Potenza. Energia cinetica

Abbiamo visto come la legge di Newton (2.1) si esprime in termini integrali attraverso il teorema dell'impulso (2.3), rilevando che si arriva a determinare la *variazione finita di quantità di moto solo se si può calcolare esplicitamente l'integrale* $\int_0^t \mathbf{F}(t) dt$. Affrontiamo adesso il problema dell'integrazione della legge di \int o Newton quando si considera la forza come funzione della posizione occupata dal punto, ampliando il ragionamento già fatto nel paragrafo 1.4 a proposito di $a(x)$ e $a(t)$ nel moto rettilineo.

Consideriamo un punto materiale che si muove lungo una generica traiettoria curvilinea e sia \mathbf{F} la risultante delle forze agenti sul punto. Si definisce *lavoro della forza* \mathbf{F} , compiuto durante lo spostamento del punto dalla posizione A alla posizione B , la quantità scalare

$$W = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_A^B F \cos\theta ds = \int_A^B F_T ds \quad (2.13)$$

Il lavoro è l'integrale di linea della forza (appendice C), cioè è dato dalla somma di infiniti contributi infinitesimi $dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = F_T ds$. Si osservi che in generale lungo la traiettoria sia \mathbf{F} che θ sono variabili.

Si possono presentare tre casi. \mathbf{F} forma con $d\mathbf{s}$ un angolo minore di $\pi/2$, per cui l'accelerazione tangente è concorde con la velocità e la fa aumentare: dW risulta positivo e viene chiamato lavoro motore. Oppure \mathbf{F} forma con $d\mathbf{s}$ un angolo maggiore di $\pi/2$, il punto viene frenato e dW risulta negativo (lavoro resistente). Infine se \mathbf{F} è ortogonale alla traiettoria, $\theta = \pi/2$ e il lavoro è nullo: in questo caso \mathbf{F} ha azione puramente centripeta e non fa variare il modulo della velocità. Lungo un arco finito di traiettoria può presentarsi sempre la stessa situazione, così che la velocità finale è maggiore di quella iniziale se $\theta < \pi/2$, minore se $\theta > \pi/2$ e eguale se $\theta = 0$; oppure le varie situazioni possono alternarsi e il risultato dipende da quale situazione è predominante.

Quando \mathbf{F} è effettivamente la somma di n forze $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_n$, per ciascuna si può calcolare il corrispondente lavoro W_i e risulta $W = \sum_i W_i$:

$$W = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_A^B (\mathbf{F}_1 + \dots + \mathbf{F}_n) \cdot d\mathbf{s} = \int_A^B \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{s} + \dots + \int_A^B \mathbf{F}_n \cdot d\mathbf{s} = W_1 + \dots + W_n.$$

Il lavoro è pari alla somma dei lavori delle singole forze agenti, ciascuno dei quali può essere positivo, negativo o nullo.

Secondo quanto detto sopra il lavoro totale può essere nullo in quanto somma di lavoro motore lungo un arco di traiettoria e di lavoro resistente lungo un successivo arco. Certamente però possiamo affermare che $W = 0$ quando non agisce nessuna forza oppure agiscono forze la cui risultante o è nulla o è sempre ortogonale alla traiettoria (condizioni di equilibrio dinamico, paragrafo 2.12).

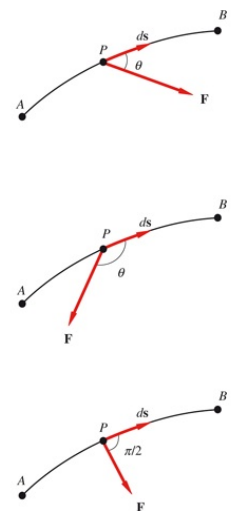


FIGURA 2.40

Un esempio di moto con risultante nulla delle forze è il moto rettilineo uniforme in presenza di attrito radente: occorre applicare una forza eguale e contraria alla forza di attrito e quindi fornire un lavoro motore eguale ed opposto al lavoro resistente dell'attrito. Invece un moto con risultante delle forze sempre ortogonale alla traiettoria è il moto curvilineo uniforme: se c'è attrito, oltre alla forza normale deve essere presente una forza tangente, che svolge un lavoro motore, per bilanciare l'effetto dell'attrito.

Potenza

La *potenza* corrisponde al *lavoro per unità di tempo*:

$$P = \frac{dW}{dt} = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = F_T v \quad . \quad (2.14)$$

Potenza

Questa è la *potenza istantanea*, in generale variabile durante il moto, e caratterizza la rapidità di erogazione del lavoro.

La *potenza media* è il rapporto W/t , cioè il lavoro totale diviso per il tempo durante cui il lavoro è stato svolto. Tale grandezza risulta particolarmente importante per qualificare le prestazioni di un dispositivo o macchina che fornisce lavoro. A parità di lavoro totale svolto, ha maggiore potenza quella macchina che lo eroga in minore tempo.

Energia cinetica

Riprendiamo la relazione relativa al lavoro infinitesimo associato ad uno spostamento ds :

$$dW = F_T ds = m a_T ds = m \frac{dv}{dt} ds = m \frac{ds}{dt} dv = m v dv \quad .$$

Abbiamo trovato così il legame esplicito tra il lavoro infinitesimo e la variazione infinitesima del modulo della velocità rendendo quantitativa la discussione fatta in precedenza. Per un percorso finito dalla posizione A a quella B abbiamo

$$W = \int_A^B m v dv = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = E_{k,B} - E_{k,A} = \Delta E_k \quad . \quad (2.15)$$

Energia cinetica

Il lavoro è eguale alla variazione della quantità $\frac{1}{2} m v^2$ che si chiama *energia cinetica* del punto materiale. Il simbolo Δ indica *valore finale meno valore iniziale*. La (2.15), nota come *teorema dell'energia cinetica*, è stata ricavata utilizzando la legge di Newton e pertanto ha validità generale, qualunque sia la forza che agisce.

Se $W > 0$, l'energia cinetica finale è maggiore di quella iniziale mentre se $W < 0$ l'energia cinetica finale è minore di quella iniziale. Questo è il caso del lavoro delle forze di attrito e pertanto, se agiscono solo tali forze, la velocità diminuisce. Infine, se $W = 0$, l'energia cinetica resta costante; ciò si verifica, per esempio, nel

moto circolare uniforme: il lavoro della forza centripeta, unica forza agente, è nullo e quindi la velocità rimane costante in modulo.

Sottolineiamo che W rappresenta il lavoro totale. Se è noto come varia la forza lungo la traiettoria, possiamo calcolare il lavoro e quindi il modulo della velocità in ciascun punto (se conosciamo quella iniziale). Viceversa, se misuriamo le velocità iniziale e finale, possiamo tramite (2.15) dedurre il lavoro compiuto dalle forze agenti.

Si faccia attenzione al fatto che la nozione di lavoro, e quindi di variazione di energia cinetica, è necessariamente legata a quella di spostamento, secondo la definizione (2.13). Se non c'è spostamento non può esserci lavoro, qualunque sia la forza applicata (mentre può esserci spostamento senza lavoro). Quando si spinge un corpo e questo non si sposta perché è presente un attrito statico, non c'è lavoro né motore né resistente, così come non si compie lavoro quando si spinge con una mano contro un muro. In questi casi la sensazione di fatica è legata allo stato di tensione dei muscoli che richiede un consumo di energia chimica, ma, ripetiamo, il lavoro meccanico è nullo.

Unità di misura

Il lavoro è il prodotto di una forza per uno spostamento e quindi l'unità di misura del lavoro, e dell'energia cinetica come di ogni altra forma di energia, è newton · metro. Si tratta di una unità molto importante che si chiama joule (pronuncia corretta *giul!*) ed è espressa dal simbolo $J = N \cdot m$.

L'unità di misura della potenza è il watt, simbolo W ; per definizione $W = J/s = N \cdot m \cdot s^{-1}$, $J = Ws$.

Multipli comunemente usati sono il kilojoule, $kJ = 10^3 J$, megajoule $MJ = 10^6 J$, chilowatt $kW = 10^3 W$, megawatt $MW = 10^6 W$.

Per il lavoro, soprattutto elettrico, è in uso anche l'unità chilowattora: $1 kWh = 10^3 W \cdot 3600 s = 3.6 \cdot 10^6 J$.

Storicamente, una unità di potenza assai usata in passato e ora proibita è il cavallo-vapore, esistente in due versioni, quello tecnico ($1 cv = 735.5 W$) e quello britannico ($1 hp = 745.7 W$).

Se riprendiamo le definizioni di energia cinetica e di quantità di moto,

$$E_k = \frac{1}{2} mv^2 \quad , \quad \mathbf{p} = m\mathbf{v} \quad ,$$

vediamo che tra energia cinetica e modulo della quantità di moto sussistono le relazioni

$$E_k = \frac{p^2}{2m} \quad , \quad p = \sqrt{2mE_k} \quad .$$

In questo paragrafo abbiamo introdotto per la prima volta il concetto di energia, nel caso particolare quella cinetica; in seguito troveremo altre forme di

energia (energia potenziale legata ai vari tipi di forze). Tutte le leggi con cui vengono definite le varie forme di energia contengono sempre la *variazione di energia* e pertanto tali quantità possono essere definite a meno di una costante. Per esempio l'energia cinetica di un punto potrebbe essere scritta come $\frac{1}{2} m v^2 + \text{costante}$, senza modificare la (2.15) in quanto nella differenza la costante scompare. Però si avrebbe che questa forma di energia, legata al movimento, sarebbe non nulla anche se $v = 0$, il che non ha molto senso. Poniamo dunque, in questo caso, la costante eguale a zero.

Il lavoro è la manifestazione dell'azione di una forza ed è quindi conseguenza dell'interazione con l'ambiente circostante. Si parla pertanto di lavoro *scambiato* e non si dice mai che un sistema possiede lavoro.

Si parla invece di *energia posseduta* dal sistema, che viene modificata dall'interazione con l'ambiente esterno. Un effetto misurabile dell'interazione è la variazione di energia.

2.16 Lavoro della forza peso

Calcoliamo il lavoro della forza peso $m\mathbf{g}$ per uno spostamento generico dalla posizione A a quella B (figura 2.41). L'asse z è orientato dal suolo verso l'alto ed ha quindi verso opposto a \mathbf{g} . Da (2.13)

$$W = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \mathbf{F} \cdot \int_A^B d\mathbf{s} = m\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}_{AB};$$

infatti \mathbf{F} è costante e l'integrale vale $\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A = \mathbf{r}_{AB}$.

Poiché il peso ha una sola componente diversa da zero, quella secondo l'asse z che vale $-mg$, e la componente di \mathbf{r}_{AB} lungo l'asse z è $z_B - z_A$, il prodotto scalare si scrive semplicemente $(m\mathbf{g})_z (\mathbf{r}_{AB})_z = -mg(z_B - z_A)$ e pertanto il lavoro della forza peso vale

$$W = -(mgz_B - mgz_A) = -(E_{p,B} - E_{p,A}) = -\Delta E_p.$$

Con $E_p = mgz$ indichiamo una funzione della coordinata z del punto (misurata lungo un asse parallelo e di verso opposto alla forza peso) che ha questa proprietà: *il lavoro è eguale all'opposto della variazione di questa funzione durante lo spostamento da A a B e pertanto non dipende dalla particolare traiettoria che collega A e B* . La funzione E_p si chiama *energia potenziale della forza peso*.

Se il punto B si trova in una posizione più bassa di A il lavoro della forza peso è positivo; andando da A a B , E_p diminuisce: possiamo osservare che questo è lo spostamento *naturale* di un punto P sottoposto alla sola forza peso. Se il punto B è invece in una posizione più alta di A , $W < 0$, E_p aumenta: per fare avvenire questo spostamento bisogna che il punto abbia una sufficiente velocità iniziale così che la diminuzione di energia cinetica eguagli il lavoro oppure bisogna applicare al punto un'altra forza il cui lavoro motore superi in modulo il lavoro resistente della forza peso.

La figura 2.42 illustra queste due situazioni con riferimento al problema di far salire un punto materiale lungo un piano inclinato.

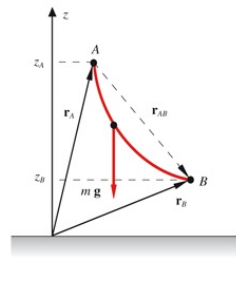


FIGURA 2.41

Lavoro della forza peso

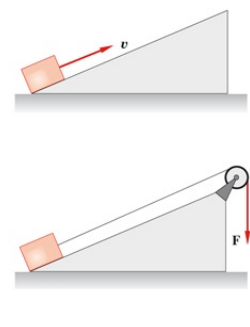


FIGURA 2.42

Esempio 2.22

Un punto di massa m si trova alla base di un piano inclinato liscio; se la velocità iniziale vale v_A ed è diretta come nella prima della figura 2.42, calcolare qual è l'altezza rispetto alla base della posizione in cui il punto si ferma.

Soluzione

Durante la salita la componente della forza peso parallela al piano inclinato si oppone al moto del punto, sviluppando il lavoro resistente

$$W = -(mgz_B - mgz_A) = -mgh_B \quad ,$$

con $h_B = z_B - z_A$ quota della posizione generica rispetto alla base (si provi a verificare il risultato utilizzando la definizione (2.13) e l'espressione della componente della forza peso). Per il teorema dell'energia cinetica

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} mv_B^2 - \frac{1}{2} mv_A^2 &= W = -mgh_B \\ \Rightarrow \frac{1}{2} mv_B^2 &= \frac{1}{2} mv_A^2 - mgh_B \quad . \end{aligned}$$

Il punto dunque riesce a salire alla quota h_B in quanto possiede un'energia cinetica iniziale: durante la salita l'energia cinetica diminuisce e la diminuzione è eguale al lavoro resistente della forza peso, ovvero all'aumento della funzione E_p da mgz_A a mgz_B . Il punto si ferma quando la sua energia cinetica è nulla, alla quota

$$h_B = \frac{v_A^2}{2g} \quad ,$$

indipendente dall'angolo di inclinazione del piano. Abbiamo già trovato questo risultato per via cinematica ($x = v_A t - \frac{1}{2} at^2$, $v = v_A - at$, con $a = g \sin\theta$ e $h_B = x \sin\theta$). Il metodo appena visto è certamente più semplice.

Visualizza Soluzione

Lavoro di una forza costante

La trattazione fatta per la forza peso si estende a qualsiasi altra forza costante \mathbf{F} . Prendendo come asse z un asse parallelo e discorde a \mathbf{F} , il lavoro di \mathbf{F} per uno spostamento tra due punti, le cui coordinate z sono z_A e z_B , vale

$$W = -(Fz_B - Fz_A) = -\Delta E_p \quad ,$$

dove ora $E_p = Fz$. Se invece si scegliesse l'asse z concorde a \mathbf{F} , sarebbe sempre $W = -\Delta E_p$, con $E_p = -Fz$ ($= -mgz$ nel caso del peso).

2.17 Lavoro di una forza elastica

Il lavoro della forza elastica $\mathbf{F} = -kx\mathbf{u}_x$ per uno spostamento lungo l'asse x vale

$$W = \int_A^B -kx \mathbf{u}_x \cdot dx \mathbf{u}_x = -k \int_A^B x dx = \frac{1}{2} k x_A^2 - \frac{1}{2} k x_B^2 = -\Delta E_p :$$

$E_p = \frac{1}{2} k x^2$, funzione solo della posizione, è l' *energia potenziale elastica*.

Se la coordinata iniziale è maggiore di quella finale, cioè se il punto si muove verso il centro della forza, il lavoro compiuto dalla forza elastica è positivo, E_p diminuisce (spostamento *naturale*). Nel caso contrario di allontanamento dal centro $W < 0$, E_p aumenta: per eseguire tale spostamento il punto deve possedere una velocità iniziale oppure si deve applicare una forza opportuna.

Esempio 2.23

Un punto materiale fissato ad una molla di costante elastica k è in quiete nell'origine (figura 2.43). Si applica al punto una forza $\mathbf{F} = F\mathbf{u}_x$, costante in modulo, direzione e verso, e il punto si porta nella posizione di coordinata $x > 0$. Calcolare la velocità del punto in funzione di x e la posizione in cui il punto si ferma.

Soluzione

Il lavoro motore compiuto dalla forza \mathbf{F} per uno spostamento x è semplicemente Fx , mentre il lavoro resistente della forza elastica vale

$$W_{el} = -\Delta E_p = \frac{1}{2} kx_A^2 - \frac{1}{2} kx_B^2 = -\frac{1}{2} kx^2 \quad ,$$

essendo $x_A = 0$ e $x_B = x$. Quindi, dato che la velocità iniziale è nulla,

$$Fx - \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} mv^2 \Rightarrow v(x) = \sqrt{\frac{x}{m} (2F - kx)} \quad .$$

Il punto si ferma quando la sua velocità è nulla, il che avviene nell'origine, secondo l'ipotesi, e nella posizione

$$x = \frac{2F}{k} \quad .$$

Questa è la massima deformazione della molla (purché x sia inferiore alla lunghezza a riposo della molla). Si osservi che non si tratta della posizione di equilibrio statico ($F = kx_s$, $x_s = F/k$): tale situazione si otterrebbe ad esempio comprimendo la molla con altri mezzi fino alla deformazione x_s ,

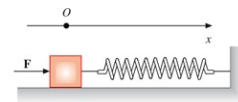


FIGURA 2.43
(Esempio 2.23)

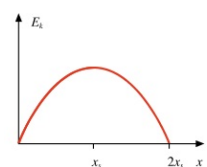
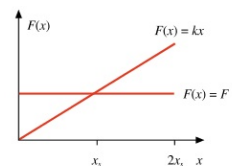


FIGURA 2.44
(Esempio 2.23)

mantenendola ferma e applicando poi la forza F . Invece, nel nostro caso, da $x = 0$ a $x = x_s$ F è maggiore del modulo della forza elastica e il punto acquista energia cinetica, che poi perde nel successivo tratto da $x = x_s$ a $x = 2x_s = 2F/k$, in cui F è minore del modulo della forza elastica. Nella figura 2.44 sono mostrati i moduli delle forze in funzione di x . L'area sotto ciascuna curva $F(x)$ è data dallo integrale $\int F(x)dx$ ed è quindi eguale al lavoro : si vede subito che da zero a x_s il lavoro motore è maggiore di quello resistente e che il contrario succede da x_s a $2x_s$; alla fine le due aree sono eguali, cioè i due lavori sono eguali, e dato che in realtà sono di segno opposto si annullano. Sotto il grafico delle forze è mostrata l'energia cinetica, pari alla somma algebrica dei lavori. Si verifichi che essa è massima in x_s con valore $F^2/2k$; si verifichi anche come la formula di $v(x)$ si ottenga applicando la (1.7).

Visualizza Soluzione

2.18 Lavoro di una forza di attrito radente

La forza di attrito radente è data da (2.6); ricordando che il vettore \mathbf{u}_v è parallelo e concorde allo spostamento $d\mathbf{s}$, il lavoro corrispondente si scrive

$$W = \int_A^B \mathbf{F}_{ad} \cdot d\mathbf{s} = \int_A^B -\mu_d N \mathbf{u}_v \cdot d\mathbf{s} = -\mu_d N \int_A^B ds ,$$

Lavoro della forza di attrito radente

dove l'integrale scalare $\int_A^B ds$ è la lunghezza del percorso da A a B , misurata lungo *la traiettoria effettiva del punto materiale*. Pertanto, a parità dei fattori μ_d e N , abbiamo un lavoro diverso a seconda della forma della traiettoria: il lavoro della forza di attrito radente dipende dal percorso e non è esprimibile come differenza dei valori di una funzione delle coordinate nei punti A e B , diversamente da quanto avviene per la forza peso e per la forza elastica. Il risultato resta vero in generale, anche se la reazione normale non è costante.

Il lavoro della forza di attrito radente è sempre negativo, cioè è lavoro resistente (si noti che se cambia il verso del moto, cambia anche quello della forza di attrito, sempre opposta alla velocità).

Perché possa verificarsi il moto o deve agire un'altra forza che produca un lavoro motore oppure, in assenza di questa, il punto deve possedere una certa velocità iniziale ovvero una certa energia cinetica $E_{k,A}$. L'energia cinetica diminuisce lungo il percorso e in B la velocità è minore che in A . In particolare, data $E_{k,A}$ e se N è costante, il punto si ferma dopo un percorso $s_{AB} = E_{k,A} / \mu_d N$.

Esempio 2.24

Un punto materiale di massa m passa nell'origine di un asse x orizzontale con velocità v_0 , concorde all'asse. Per $x > 0$ agisce una forza di attrito dinamico, con coefficiente μ_d . Calcolare dopo quanto tempo il punto si ferma e in quale posizione.

Soluzione

La forza agente è $-\mu_d mg \mathbf{u}_x$, costante nel tempo; dal teorema dell'impulso (2.3)

$$mv - mv_0 = -\mu_d mgt \Rightarrow \text{se } v = 0 \quad t = \frac{v_0}{\mu_d g} .$$

Dal teorema dell'energia cinetica (2.15)

$$\frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_0^2 = -\mu_d mgx$$

$$\Rightarrow \text{se } v = 0 \quad x = \frac{v_0^2}{2\mu_d g} = \frac{1}{2} \mu_d g t^2 .$$

Invece delle leggi integrali si possono naturalmente usare le leggi del moto,

$$a = -\mu_d g \quad , \quad v = v_0 + at \quad , \quad x = v_0 t + \frac{1}{2} at^2 .$$

Visualizza Soluzione

Esempio 2.25 Stima del tempo di durata di un urto

Un punto di massa m con velocità v urta contro un ostacolo fisso e vi penetra fermandosi in uno spazio Δx . Calcolare il tempo di arresto Δt .

Soluzione

Durante l'urto agisce una forza che frena il punto; indichiamo con F_m il valore medio della forza durante il tempo di arresto. Applichiamo (2.3) e (2.15), passando direttamente ai moduli:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} mv^2 &= F_m \Delta x \quad , \quad mv = F_m \Delta t \quad , \\ \Delta t &= \frac{mv}{F_m} = \frac{mv \Delta x}{F_m \Delta x} = \frac{mv \Delta x}{\frac{1}{2} mv^2} = \frac{2 \Delta x}{v} . \end{aligned}$$

Ad esempio, con $m = 0.02$ kg e $v = 100$ m/s, se si misura $\Delta x = 1$ cm si ha

$$\Delta t = \frac{2 \cdot 10^{-2}}{10^2} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ s}, \quad F_m = \frac{2 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 10^{-4}} = 10^4 \text{ N} .$$

Tipicamente il tempo di arresto è molto breve e, in questo intervallo, la forza frenante è molto intensa.

Visualizza Soluzione

2.19 Forze conservative. Energia potenziale

I tre esempi di calcolo di lavoro (paragrafi 2.16, 2.17, 2.18) presentano una differenza sostanziale: nei primi due (forza peso e forza elastica) il lavoro viene a dipendere solo dalle coordinate delle posizioni A e B e non dal particolare percorso che congiunge A a B , nel terzo (forza di attrito) invece il lavoro dipende dalla traiettoria.

Le forze del primo tipo, quelle per cui il lavoro non dipende dal percorso, si chiamano *forze conservative*. Per il calcolo del lavoro possiamo utilizzare qualsiasi percorso che colleghi A a B :

$$\int_A^B (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s})_I = \int_A^B (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s})_{II} = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \quad .$$

Il lavoro lungo il percorso I coincide con quello lungo il percorso II o lungo qualsiasi altro (e per eseguire il calcolo pratico possiamo così scegliere il percorso analiticamente più comodo).

Il lavoro è pertanto esprimibile come differenza dei valori che una funzione delle coordinate assume in A e in B (l'abbiamo visto negli esempi e ci ritorneremo più in generale nel paragrafo 2.21). Ciò comporta che se si inverte il senso di percorrenza, cioè si va da B a A , cambia solo il segno del lavoro:

$$\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = - \int_B^A \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \quad .$$

Per un percorso chiuso ABA lungo la traiettoria I e la traiettoria $-II$ (cioè la traiettoria II percorsa in senso inverso) si ha

$$\int_A^B (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s})_I + \int_B^A (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s})_{-II} = \int_A^B (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s})_I - \int_A^B (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s})_{II} = 0 \quad .$$

Di conseguenza *lungo un qualsiasi percorso chiuso il lavoro è nullo*:

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad .$$

Questa proprietà si può assumere come definizione di forza conservativa (perfettamente equivalente alla precedente definizione). Per chiarezza precisiamo che in tutti gli integrali scritti finora la forza in generale è diversa da punto a punto lungo ciascuna traiettoria e quindi è diversa da traiettoria a traiettoria; però l'integrale di linea non dipende dalla traiettoria.

La funzione delle coordinate di cui abbiamo parlato finora si chiama *energia potenziale* e per tutte le forze conservative vale la relazione

$$W = E_{p,A} - E_{p,B} = -\Delta E_p \quad . \quad (2.16)$$

Non esiste una formula generale per l'energia potenziale, ma l'espressione

Forze conservative

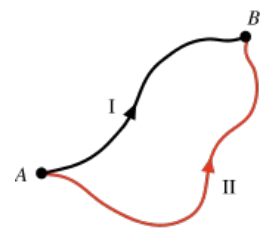


FIGURA 2.45

Energia potenziale

esplicita dipende dalla particolare forza conservativa cui essa si riferisce. Nei due casi che abbiamo discusso si è ottenuto per la forza peso $E_p = mgz$ e per la forza elastica $E_p = \frac{1}{2} k x^2$, come abbiamo già evidenziato.

Bisogna sottolineare che la (2.16), la quale in sostanza permette di esprimere il valore del lavoro direttamente tramite la variazione dell'energia potenziale, non ha il carattere generale di (2.15): quest'ultima è utilizzabile sempre, con qualsiasi tipo di forza agente. In altre parole, per il calcolo del lavoro vale (2.16) se le forze sono conservative, altrimenti bisogna usare la definizione (2.13); però, comunque si sia arrivati a W , vale sempre (2.15).

La (2.16) permette il calcolo esplicito dell'espressione dell'energia potenziale e ne precisa il significato fisico, legandolo alla capacità di fornire lavoro. Infatti quando durante il moto l'energia potenziale diminuisce ($\Delta E_p < 0$), il lavoro compiuto dalla forza è positivo e può essere utilizzato. Se invece l'energia potenziale aumenta ($\Delta E_p > 0$) il lavoro è negativo e ciò in pratica vuol dire che bisogna fornire lavoro dall'esterno per fare avvenire quel determinato processo. Per un percorso chiuso $E_{p,A} = E_{p,B}$ e $W = 0$, come si è detto: se si spende lavoro per fare aumentare E_p nel passaggio da A a B , quando si torna da B ad A si ricava esattamente quanto speso e, viceversa, se si ricava lavoro nel passaggio da A a B bisogna spenderne altrettanto per riportare il punto da B ad A . *Da una forza conservativa non si può ricavare lavoro se il percorso è chiuso ovvero, come si dice, se il processo è ciclico.*

L'energia potenziale viene definita a meno di una costante additiva, che è ininfluente nella valutazione del lavoro. Consideriamo infatti, nel caso dell'energia potenziale associata alla forza peso, di assumere il livello zero su un piano passante per l'origine dell'asse z e ortogonale a questo: $E_p = m g z$. Se scegliamo una diversa origine delle coordinate (nella figura 2.46 gli assi z e z' sono disegnati distinti per chiarezza), $E_p' = mgz' = mg(z + z_0)$ essendo appunto le coordinate di P rispetto a O' e a O legate dalla $z' = z + z_0$. Quindi

$$E_p' = E_p + m g z_0 = E_p + \text{costante.}$$

Nella (2.16) compare la variazione dell'energia potenziale e la costante viene eliminata: pur dipendendo il valore di E_p dalla scelta dell'origine, non ne dipende il lavoro della forza peso per gli spostamenti del punto materiale P .

Ritornando a quanto visto all'inizio del paragrafo, sappiamo che ci sono forze per le quali non vale la proprietà di invarianza del lavoro rispetto al percorso e non è quindi possibile esprimere il lavoro tramite le differenze dei valori di una funzione delle coordinate. Queste forze si chiamano *non conservative* e per esse non si può introdurre l'energia potenziale. Il lavoro di una forza non conservativa si calcola con (2.13) ed è sempre eguale, come per qualsiasi forza, alla variazione di energia cinetica.

Una classe particolare di forze non conservative sono le forze di attrito, dette

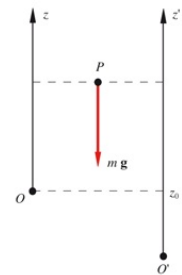


FIGURA 2.46

Forze non conservative

Forze dissipative

anche forze *dissipative*.

2.20 Conservazione dell'energia meccanica

Se agiscono solo forze conservative valgono sia (2.15) che (2.16):

$$W = \Delta E_k = E_{k,B} - E_{k,A} \quad , \quad W = -\Delta E_p = E_{p,A} - E_{p,B} \quad .$$

Eguagliando le due relazioni si ha

$$E_{k,A} + E_{p,A} = E_{k,B} + E_{p,B} \quad :$$

la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale di un punto materiale che si muove sotto l'azione di forze conservative resta costante durante il moto, ossia si conserva. Tale somma si chiama *energia meccanica* e vale pertanto, in presenza di forze conservative, il *principio di conservazione dell'energia meccanica*:

$$E_m = E_k + E_p = \text{costante} \quad . \quad (2.17)$$

Principio di
conservazione
dell'energia
meccanica

Possiamo adesso completare la discussione iniziata nel paragrafo precedente a proposito della (2.16). Il lavoro ottenuto a spese della diminuzione di energia potenziale causa un aumento dell'energia cinetica e viceversa, in accordo con (2.17), cioè col fatto che la somma delle energie sia costante. Durante il moto avviene una trasformazione da una forma di energia all'altra, per tramite di lavoro compiuto e assorbito, ma il contenuto energetico totale, dato dall'energia meccanica, non cambia.

Discuteremo alcune applicazioni del principio di conservazione dell'energia negli esempi successivi. Se però esaminiamo l'esempio 2.22, riconosciamo un'applicazione di (2.17): il punto possiede inizialmente una certa energia cinetica (pertanto su di esso era stato compiuto lavoro) e alla fine della salita si verifica che $\Delta E_k = -\Delta E_p$, il lavoro è andato in aumento dell'energia potenziale. Analogamente, si riveda sotto questo aspetto l'esempio 2.23: ci si accorgerà che la soluzione corrisponde alla condizione che l'energia meccanica sia la stessa all'inizio e alla fine (avendo posto $E_p = -Fx + \frac{1}{2}kx^2$).

Quando agiscono, come avviene in generale, sia forze conservative che non conservative, il lavoro complessivo è dato dalla somma del lavoro delle forze conservative W_c e di quello delle forze non conservative W_{nc} e, secondo (2.15),

$$W = W_c + W_{nc} = E_{k,B} - E_{k,A} \quad .$$

Esprimendo W_c tramite (2.16) si ha

$$\begin{aligned} E_{p,A} - E_{p,B} + W_{nc} &= E_{k,B} - E_{k,A} \\ \Rightarrow W_{nc} &= (E_{k,B} + E_{p,B}) - (E_{k,A} + E_{p,A}) = E_{m,B} - E_{m,A} \quad . \end{aligned} \quad (2.18)$$

Lavoro delle forze non
conservative

In presenza di forze non conservative l'energia meccanica non resta costante e la sua variazione è eguale al lavoro delle forze non conservative.

In qualunque processo meccanico si osserva sperimentalmente che è sempre presente una forza di attrito che si oppone al moto. Se tutte le altre forze sono conservative, nella (2.18) $W_{nc} = W_{diss} < 0$ e quindi l'energia meccanica diminuisce durante il processo. A questa situazione si può porre rimedio con l'intervento di altre forze non conservative e l'energia meccanica del punto può essere mantenuta costante o anche aumentare. Tali variazioni sono sempre regolate da (2.18). Se però si considera un sistema più vasto, costituito dal punto e dal meccanismo che ha fornito il lavoro non conservativo, si trova sempre che l'energia meccanica complessiva non si conserva, ma diminuisce a causa di effetti dissipativi. Nei fenomeni macroscopici questa appare una legge naturale; vedremo in termodinamica come si possa ristabilire una legge più generale di conservazione dell'energia.

Esempio 2.26 Conservazione dell'energia. Forza peso

Consideriamo un sistema meccanico formato da un punto materiale che può muoversi lungo il piano inclinato PB , il piano orizzontale BC e il piano inclinato CQ ; tutti i piani sono lisci. Abbandoniamo il punto in A con velocità iniziale nulla e determiniamo dove arriva.

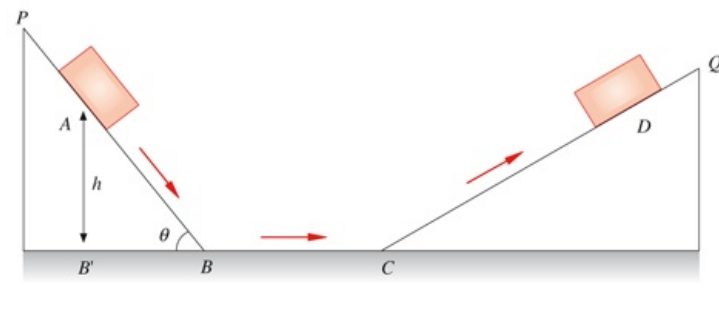


FIGURA 2.47

Soluzione

In assenza di attrito la reazione vincolare è sempre normale alla traiettoria. Pertanto la sola forza che determina il moto è la forza peso, forza conservativa. Applichiamo per risolvere il problema la conservazione dell'energia meccanica (2.17):

$$\text{in } A \quad E_{p,A} = m g h, \quad E_{k,A} = 0, \quad E_{m,A} = m g h$$

$$\text{in } B \quad E_{p,B} = 0, \quad E_{k,B} = \frac{1}{2} m v^2, \quad E_{m,B} = \frac{1}{2} m v^2 \quad ;$$

deve essere

$$E_{m,A} = E_{m,B} \Rightarrow m g h = \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow v = v_B = \sqrt{2 g h} \quad .$$

Nel tratto AB l'energia potenziale si è trasformata in energia cinetica. Osserviamo che si è ritrovato il risultato del paragrafo 1.5: è come se il punto cadesse lungo la verticale, infatti ai fini della variazione dell'energia potenziale conta solo la differenza di quota $h = z_A - z_B = z_A - z_{B'}$. La velocità di arrivo

sul piano orizzontale passante per B è la stessa sia per una caduta lungo la verticale AB' che lungo il piano inclinato AB o qualsiasi altro percorso simile. Quello che è diverso è il tempo impiegato; per AB' sappiamo dal paragrafo 1.5 che vale $t' = \sqrt{2h/g}$. Nel moto lungo il tratto AB , essendo l'accelerazione $g \sin \theta$ lo spazio percorso $h/\sin \theta$, si ha $h/\sin \theta = \frac{1}{2} g \sin \theta t^2$

$$t = \sqrt{2h/g \sin^2 \theta} = t' / \sin \theta > t'.$$

Da B a C il moto è rettilineo uniforme e quindi $v_C = v_B$. Il punto affronta il secondo piano inclinato avendo l'energia cinetica $\frac{1}{2} m v_B^2$ e si ferma nella posizione D in cui l'energia cinetica si è trasformata integralmente in energia potenziale: pertanto D si trova alla stessa quota di A , qualunque sia l'inclinazione del piano CD . Successivamente il punto tornerebbe indietro arrestandosi in A e così via: in assenza di attrito avremmo un'oscillazione perpetua. Se il punto ha una velocità iniziale $v_A > 0$ (diretta verso B), scriviamo per l'energia

$$\text{in } A \quad E_{m,A} = m g h + \frac{1}{2} m v_A^2$$

$$\text{in } B \quad E_{m,B} = \frac{1}{2} m v_B^2 \Rightarrow v_B = \sqrt{v_A^2 + 2 g h}$$

$$\text{in } C \quad E_{m,C} = E_{m,B} = \frac{1}{2} m v_B^2$$

$$\text{in } D' \quad E_{m,D'} = m g h'$$

e dall'eguaglianza $m g h + \frac{1}{2} m v_A^2 = m g h'$ si ricava

$$h' = h + \frac{v_A^2}{2g} :$$

il punto D' è ad una quota più alta rispetto ad A .

Visualizza Soluzione

Esempio 2.27

Conservazione dell'energia. Forza elastica

Abbiamo un punto materiale fermo all'estremità di una molla a riposo posta in un piano orizzontale

liscio e fissata all'altro estremo ad un vincolo fisso. Comunichiamo al punto, in un tempo estremamente breve, un impulso \mathbf{J} , parallelo e concorde all'asse x e determiniamo di quanto si comprime la molla.

Per effetto dell'impulso il punto materiale inizia a muoversi con velocità \mathbf{v}_0 , parallela e concorde all'asse x , pari a \mathbf{J}/m secondo (2.3). La reazione vincolare del piano è normale al piano stesso e l'unica forza che determina il moto è quella elastica della molla, conservativa, per cui possiamo applicare (2.17). Nella posizione iniziale la molla è a riposo, l'energia potenziale elastica è nulla e $E_{m,A} = \frac{1}{2} m v_0^2$ nella posizione finale il punto è fermo, la molla è deformata dalla quantità x_0 e $E_{m,B} = \frac{1}{2} k x_0^2$. Da $E_{m,A} = E_{m,B}$ segue $x_0 = v_0 m/k$.

Nel moto da A a B si ha una *trasformazione dell'energia cinetica in energia potenziale elastica*. Il punto non può restare fermo in B , dato che la molla si trova in uno stato di compressione, e quindi, per effetto della forza elastica diretta verso A , esso ritorna nella posizione iniziale dove passa con velocità

$$v_0 \left(\frac{1}{2} k x_0^2 \text{ si è trasformata in } \frac{1}{2} m v_0^2 \right).$$

Di qui il punto prosegue e, frenato dalla forza elastica, si ferma nel punto C di coordinata $-x_0$, dove l'energia cinetica si è trasformata integralmente in energia potenziale elastica. Da C il punto ritorna in A e inizia una nuova oscillazione identica alla precedente: si tratta di oscillazioni armoniche di ampiezza x_0 e pulsazione k/m , che continuerebbero indefinitamente in assenza di attrito.

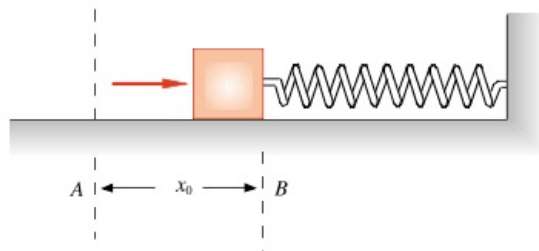


FIGURA 2.48

Esempio 2.28 Conservazione dell'energia. Pendolo semplice

Nello studio del moto di un pendolo semplice possiamo applicare la conservazione dell'energia dato che, in assenza di attrito, agiscono la forza peso, forza conservativa, e la tensione del filo, che non compie lavoro essendo sempre normale alla traiettoria. Assumiamo nulla l'energia potenziale nel punto più basso, dove il punto P passa per la verticale; dalla figura 2.49 si vede che l'altezza di P , rispetto al livello zero, è $L - L \cos\theta = L(1 - \cos\theta)$. Scriviamo le energie in tre posizioni diverse: a) nel punto di inversione (il più alto)

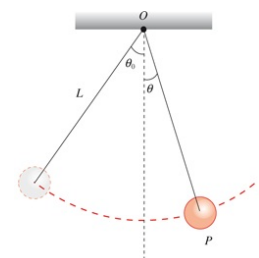


FIGURA 2.49 (Esempio 2.28)

$$E_p = m g L (1 - \cos\theta_0) \quad , \quad E_k = 0$$

b) in un punto generico

$$E_p = m g L (1 - \cos\theta) \quad , \quad E_k = \frac{1}{2} m v^2$$

2 c) nel punto più basso

$$E_p = 0 \quad , \quad E_k = \frac{1}{2} m v_0^2$$

Da a) e b), in base a (2.17),

$$m g L (1 - \cos\theta) + \frac{1}{2} m v^2 = m g L (1 - \cos\theta_0) \quad ,$$

da cui si ricava la velocità in funzione della posizione angolare

$$v = \sqrt{2 g L (\cos\theta - \cos\theta_0)} \quad ;$$

in particolare, nel punto più basso la velocità è massima e vale

$$v_0 = \sqrt{2 g L (1 - \cos\theta_0)} \quad .$$

Se $\theta_0 = \pi/2$, $v_0 = \sqrt{2gL}$: in ogni caso il risultato per v è quello che si otterrebbe se il punto cadesse liberamente.

Anche la tensione del filo può essere calcolata in funzione dell'angolo inserendo nella (2.11) l'espressione della velocità:

$$T = m g (3 \cos\theta - 2 \cos\theta_0) \quad .$$

Sottolineiamo che le relazioni ottenute valgono per qualsiasi valore di θ_0 e non solo per le piccole oscillazioni.

Esempio 2.29

Un punto si muove su un asse orizzontale liscio con velocità v_0 . Quando passa nella posizione A esso inizia a salire lungo una guida circolare liscia di raggio R , che giace in un piano verticale. Calcolare la velocità del punto e la reazione della guida in B e in C . Qual è il valore minimo di v_0 affinché il punto arrivi in C mantenendo il contatto con la guida?

Soluzione

La velocità nei vari punti della guida si ricava applicando il principio di conservazione dell'energia meccanica:

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v^2 + m g h \Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 - 2gh} \quad ,$$

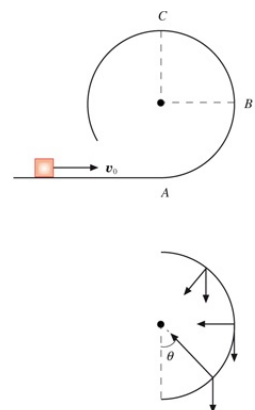


FIGURA 2.50
(Esempio 2.29)

essendo h la quota rispetto alla base A . Pertanto

$$\begin{aligned} \text{in } B \quad h &= R, \quad v_B = \sqrt{v_0^2 - 2gR} \quad , \\ \text{in } C \quad h &= 2R, \quad v_C = \sqrt{v_0^2 - 4gR} \quad . \end{aligned}$$

La reazione normale della guida si somma alla componente della forza peso normale alla guida per dare la necessaria forza centripeta:

$$N - mg \cos\theta = m \frac{v^2}{R} \quad .$$

In A la reazione è massima, per poi decrescere con continuità fino a C . Abbiamo:

$$\begin{aligned} \text{in } A \quad N - mg &= m \frac{v_0^2}{R} \quad \Rightarrow \quad N_A = m \frac{v_0^2}{R} + mg \quad , \\ \text{in } B \quad N &= m \frac{v_B^2}{R} \quad \Rightarrow \quad N_B = m \frac{v_0^2}{R} - 2mg \quad , \\ \text{in } C \quad N + mg &= m \frac{v_C^2}{R} \quad \Rightarrow \quad N_C = m \frac{v_0^2}{R} - 5mg \quad . \end{aligned}$$

In questo calcolo si suppone che il punto sia sempre a contatto con la guida; dato che N non può mai essere negativa, il valor minimo possibile in C è $N_C = 0$, da cui segue

$$m \frac{v_0^2}{R} = 5mg \quad \Rightarrow \quad v_0 = \sqrt{5gR} = v_{\min} \quad .$$

Se v_0 è inferiore a questo limite il punto si stacca dalla guida prima di arrivare in C e segue una traiettoria parabolica. Con $v_0 = v_{\min}$ si ha $v_B = 3gR$, $N_B = 3mg$, $v_C = gR$.

Visualizza Soluzione

Esempio 2.30 Non conservazione dell'energia

Un punto materiale si trova sopra un piano non liscio, ad una quota h e con velocità iniziale nulla. Supponiamo che sia $\tan\theta > \mu_s$ (paragrafo 2.9) e determiniamo con che velocità il punto arriva in fondo.

Soluzione

Il lavoro della forza di attrito lungo il tratto PO è

$$W_{\text{diss}} = -\mu_d N |PO| = -\mu_d m g \cos\theta \frac{h}{\sin\theta} ;$$

applicando (2.18)

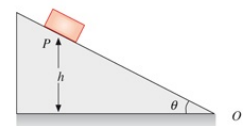


FIGURA 2.51
(Esempio 2.30)

$$-\mu_d m g \frac{h}{\operatorname{tg}\theta} = \frac{1}{2} m v_0^2 - m g h$$

da cui si ricava la velocità finale

$$v_0 = \sqrt{2 g h \left(1 - \frac{\mu_d}{\operatorname{tg}\theta}\right)} .$$

Vediamo che dell'energia potenziale iniziale mgh solo la frazione $1 - \mu_d / \operatorname{tg}\theta$ si è trasformata in energia cinetica, mentre la frazione $\mu_d / \operatorname{tg}\theta$ è stata dissipata a causa dell'attrito.

Altri casi di non conservazione dell'energia a causa di fenomeni dissipativi sono stati trattati negli esempi 2.24 e 2.25. Si rivedano sotto questo aspetto anche gli esempi 2.8 e 2.9.

Visualizza Soluzione

Esempio 2.31

Un corpo di massa $m = 8 \text{ kg}$ è fermo al suolo. Esso viene sollevato ad un'altezza $h = 2 \text{ m}$ e acquista una velocità $v = 5 \text{ m/s}$. Calcolare il lavoro che occorre spendere in questo processo. Si supponga poi che il moto avvenga lungo una guida verticale, contro cui il corpo è premuto da una forza $N = 100 \text{ N}$, in presenza di attrito radente con coefficiente $\mu_d = 0.4$. Determinare il lavoro necessario in questo secondo caso, a parità di condizioni finali.

Soluzione

L'energia meccanica del corpo passa dal valore $E_{m,A} = 0$ al valore

$$E_{m,B} = \frac{1}{2} m v^2 + m g h = 256.8 \text{ J} .$$

In assenza di attrito il lavoro che occorre fornire si ricava da (2.18):

$$W = E_{m,B} - E_{m,A} = 256.8 \text{ J} .$$

Nel caso con attrito

$$W_{\text{diss}} = -\mu_d N h = -80 \text{ J}$$

e quindi, sempre secondo (2.18),

$$W + W_{\text{diss}} = E_{m,B} - E_{m,A} \Rightarrow W = 336.8 \text{ J} .$$

Visualizza Soluzione

2.21 Relazione tra energia potenziale e forza

Riprendiamo in considerazione le relazioni (2.13) e (2.16), a livello infinitesimo:

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = F_x dx + F_y dy + F_z dz = -dE_p,$$

dove F_x , F_y , F_z sono le componenti della forza conservativa \mathbf{F} . Per un percorso chiuso si ha

$$\oint (F_x dx + F_y dy + F_z dz) = 0$$

Si dimostra che la validità di tale proprietà per qualsiasi linea chiusa è la condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di una funzione delle coordinate E_p tale che

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z}. \quad (2.19)$$

Le quantità $\partial E_p / \partial x$, $\partial E_p / \partial y$, $\partial E_p / \partial z$ sono le derivate parziali della funzione E_p rispetto alle variabili x , y , z (si vedano le appendici A e C per queste nozioni e quella successiva di gradiente). In modo compatto le (2.19) si scrivono

$$\mathbf{F} = -\mathbf{grad} E_p = -\nabla E_p \quad ; \quad (2.20)$$

la forza è l'opposto del gradiente dell'energia potenziale ed è perciò diretta secondo il verso di massima diminuzione di E_p .

Il luogo dei punti nello spazio nei quali l'energia potenziale assume lo stesso valore si chiama *superficie equipotenziale*. Per uno spostamento lungo una tale superficie il lavoro è nullo, secondo (2.16), e pertanto *la forza associata all'energia potenziale è normale, in ogni punto, alla superficie equipotenziale passante per quel punto e indica, con il suo verso, quello di diminuzione di E_p* .

L'energia potenziale associata alla forza peso è $E_p = m g z$, se l'asse z è orientato verso l'alto. Da (2.19) la forza peso è

$$\mathbf{F} = -\frac{dE_p}{dz} \mathbf{u}_z = -m g \mathbf{u}_z,$$

di verso opposto a quello dell'asse z . Nel caso della forza elastica, $E_p = \frac{1}{2} k x^2$ e la forza elastica vale

$$\mathbf{F} = -\frac{dE_p}{dx} \mathbf{u}_x = -k x \mathbf{u}_x,$$

con verso opposto a quello della crescita dell'energia potenziale. Entrambi gli esempi sono unidimensionali e non è necessario usare il simbolo di derivata

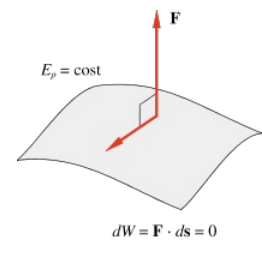


FIGURA 2.52

parziale.

Esempio 2.32

Determinare la forza che corrisponde all'energia potenziale $E_p = 1/2 k (x^2 + y^2)$.

Soluzione

Le componenti della forza si calcolano con (2.19):

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x} = -k x \quad , \quad F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y} = -k y \quad , \quad F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z} = 0$$

$$\Rightarrow \mathbf{F} = -\mathbf{grad} E_p = F_x \mathbf{u}_x + F_y \mathbf{u}_y = -k (x \mathbf{u}_x + y \mathbf{u}_y) = -k \mathbf{r}.$$

\mathbf{F} è pertanto una forza elastica nel piano x, y diretta verso l'origine con modulo proporzionale alla distanza dal centro:

$$F = k \sqrt{x^2 + y^2} = k r.$$

Si tratta dell'estensione bidimensionale del concetto di forza elastica unidimensionale $-kx \mathbf{u}_x$; il moto di un punto sotto l'azione di tale forza sarà trattato nel paragrafo 9.5.

Visualizza Soluzione

2.22 Momento angolare. Momento della forza

Nella trattazione dei vettori in appendice C è discusso il concetto di momento di un vettore rispetto ad un punto. Vediamone le due applicazioni più comuni in meccanica, riferite alla quantità di moto e alla forza.

Si definisce come *momento angolare il momento del vettore quantità di moto*

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times m \mathbf{v} \quad .$$

Nella figura 2.53 il punto O è il *polo* rispetto a cui è calcolato \mathbf{L} ; sappiamo dall'appendice C che se si cambia polo vale la relazione

$$\mathbf{L}_{O'} = \mathbf{L}_O + \mathbf{O'O} \times m \mathbf{v} \quad .$$

In generale il momento angolare è una funzione del tempo, $\mathbf{L}(t)$.

Nel moto curvilineo piano si può esprimere la velocità tramite le sue componenti radiale e trasversa, secondo (1.19), per cui

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m \mathbf{v} = \mathbf{r} \times m (\mathbf{v}_r + \mathbf{v}_\theta) = \mathbf{r} \times m \mathbf{v}_\theta$$

in quanto i vettori \mathbf{r} e \mathbf{v}_r sono paralleli e il loro prodotto vettoriale è nullo. Se il polo O sta nel piano del moto \mathbf{L} risulta ortogonale a tale piano e vale in modulo

$$L = m r v_\theta = m r^2 \frac{d\theta}{dt} \quad . \quad (2.21)$$

dt In particolare, se il moto è circolare $\mathbf{L} = m r^2 \boldsymbol{\omega}$, con riferimento al centro della circonferenza.

Il *momento della forza* è definito come $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$. Se si cambia polo

$$\mathbf{M}_{O'} = \mathbf{M}_O + \mathbf{O'O} \times \mathbf{F}.$$

Quando ad un punto sono applicate più forze con risultante $\mathbf{R} = \sum_i \mathbf{F}_i$ si ha

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_1 + \dots + \mathbf{r} \times \mathbf{F}_n = \mathbf{r} \times (\mathbf{F}_1 + \dots + \mathbf{F}_n) = \mathbf{r} \times \mathbf{R};$$

il momento complessivo è eguale al momento della forza risultante.

Pertanto un sistema di forze applicate nello stesso punto può sempre essere sostituito, nel calcolo dell'accelerazione, del lavoro e del momento complessivi, dalla forza risultante. Tale proprietà non può evidentemente essere utilizzata se le forze sono applicate in punti diversi.

Teorema del momento angolare

Se calcoliamo la variazione nel tempo del momento angolare di un punto materiale P in movimento abbiamo

Momento angolare

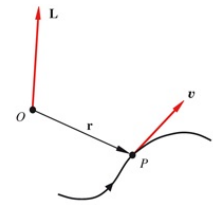


FIGURA 2.53

Momento della forza

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times m \frac{d\mathbf{v}}{dt} ,$$

dove \mathbf{r} è il raggio vettore che congiunge P al polo O . Supponiamo che il polo O sia fermo (nel sistema di riferimento da cui osserviamo il moto); allora $d\mathbf{r}/dt$ coincide con la velocità di P , che è la stessa sia rispetto all'origine che a qualsiasi altro punto fermo, e il primo prodotto vettoriale si annulla. Nel secondo termine, $dv/dt = m\alpha$ coincide con la forza \mathbf{F} applicata al punto P purché il sistema di riferimento sia inerziale (vedi capitolo 3) e quindi $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ è il momento della forza rispetto allo stesso polo O .

In conclusione

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M} , \quad (2.22)$$

Teorema del momento angolare

relazione che rappresenta *il teorema del momento angolare per un punto materiale*: la derivata temporale del momento angolare è eguale al momento della forza se entrambi i momenti sono riferiti allo stesso polo *fisso in un sistema di riferimento inerziale*.

Il momento della forza può essere nullo sia perché la forza è nulla sia quando \mathbf{r} e \mathbf{F} sono paralleli; in tal caso da (2.22)

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0 \quad \text{e quindi} \quad \mathbf{L} = \text{costante.}$$

Conservazione del momento angolare

Il momento angolare di un punto materiale rimane costante nel tempo (si conserva) se il momento delle forze è nullo.

Da (2.22) si ha $\mathbf{M} dt = d\mathbf{L}$ e integrando tra l'istante iniziale e l'istante t (finale)

$$\int_0^t \mathbf{M} dt = \Delta\mathbf{L} = \mathbf{L}_{\text{fin}} - \mathbf{L}_{\text{in}} . \quad (2.23)$$

Per produrre una variazione finita del momento angolare di un punto materiale occorre l'azione, per un certo tempo, del momento di una forza. Tale proprietà è analoga al teorema dell'impulso (2.3), con analoghe considerazioni per quanto riguarda il calcolo effettivo dell'integrale.

Se la forza viene applicata al punto per un tempo molto breve \mathbf{r} è praticamente costante e (2.23) diventa

$$\int_0^t \mathbf{M} dt = \int_0^t (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) dt = \mathbf{r} \times \int_0^t \mathbf{F} dt = \mathbf{r} \times \mathbf{J} = \Delta\mathbf{L} , \quad (2.24)$$

Teorema del momento dell'impulso

detto *teorema del momento dell'impulso*: la variazione di momento angolare è eguale al momento dell'impulso applicato al punto.

Osserviamo infine, con riferimento al moto circolare, che anche il lavoro può essere espresso tramite il modulo del momento della forza. Infatti

$$W = \int_A^B F_T ds = \int_{\theta_A}^{\theta_B} r F_T d\theta = \int_{\theta_A}^{\theta_B} M d\theta \quad (2.25)$$

Lavoro in un moto
circolare

avendo tenuto conto che $ds = r d\theta$ e che la componente normale della forza ha momento nullo rispetto al centro della circonferenza. Vedremo che (2.25) è di grande utilità nello studio del moto di rotazione di un corpo rigido (capitolo 6).

Il teorema del momento angolare è una diretta conseguenza della legge di Newton e l'utilizzazione del momento angolare e del momento della forza e delle loro proprietà, anche se rilevante in alcuni casi specifici, non fornisce nessuna informazione che non sia già ricavabile direttamente con la legge di Newton. Nei problemi di dinamica del punto l'unica legge fondamentale è la seconda legge (2.1). La situazione è diversa, come vedremo, per la dinamica dei sistemi di punti in cui è necessario servirsi, oltre che di forza e accelerazione, anche del momento della forza e del momento angolare. Ci sarà allora di aiuto il formalismo adesso sviluppato per un punto.

Unità di misura

L'unità di misura del momento angolare è m kg ms^{-1} cioè $\text{kg m}^2 \text{s}^{-1}$ ovvero Nms ; l'unità del momento della forza è Nm . Questa unità è formalmente identica al joule, però lavoro e momento della forza sono grandezze con significato fisico molto diverso e quindi si mantengono diverse come nome e simbolo le unità di misure.

2.23 Forze centrali

Si definisce *forza centrale* una forza agente in una certa regione dello spazio con le seguenti proprietà: in qualsiasi punto la sua direzione passa sempre per un punto fisso, detto centro della forza, e il modulo è funzione soltanto della distanza dal centro stesso.

Se \mathbf{u}_r è il vettore della direzione $\mathbf{OP} = \mathbf{r}$, $\mathbf{F} = F(r) \mathbf{u}_r$, con $F(r) > 0$ se la forza è repulsiva e $F(r) < 0$ per una forza attrattiva.

La presenza di una forza, funzione della posizione, che agisce in una certa regione dello spazio, costituisce una modifica dello spazio stesso e stabilisce quello che si chiama un *campo di forza*. Questo campo agisce su ogni particella che si trovi in esso. Il concetto di campo è indispensabile per capire, ad esempio, le forze elettrodinamiche che si esercitano tra cariche elettriche in movimento; in effetti esso fu sviluppato da Faraday per l'elettromagnetismo e applicato successivamente alla gravitazione.

In un campo di forze centrali il momento della forza rispetto al centro è ovunque nullo, dato che i vettori \mathbf{r} e \mathbf{F} sono paralleli. Pertanto da (2.22)

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0 \quad \text{e} \quad \mathbf{L} = \text{costante},$$

in direzione, verso e modulo.

Per definizione \mathbf{L} è sempre ortogonale al piano contenente \mathbf{r} e \mathbf{v} (e su cui stanno O e P). Se \mathbf{L} è costante in direzione tale piano è fisso, cioè \mathbf{r} e \mathbf{v} devono stare sempre nello stesso piano. Pertanto il moto di P è un moto (in generale curvilineo) che avviene in un piano fisso contenente O e determinato dai valori iniziali di \mathbf{r} e \mathbf{v} . La costanza del verso di \mathbf{L} fissa un verso di percorrenza sulla traiettoria.

Dato che il moto è piano il modulo di \mathbf{L} è dato da (2.21): esso rimane costante nel tempo; si noti però che è costante il prodotto $r^2 d\theta/dt$, ma non, in generale, r e $d\theta/dt$ separatamente. In un tempo dt il raggio vettore congiungente O e P spazza l'area infinitesima tratteggiata in figura 2.55, approssimabile a un triangolo di base $r d\theta$ e altezza r e quindi di area $dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta$ (a meno di infinitesimi di ordine superiore). La quantità

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt},$$

detta *velocità areale*, esprime la rapidità con cui viene spazzata l'area dal vettore \mathbf{r} . Da (2.21) risulta

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m} :$$

la costanza del modulo di \mathbf{L} comporta la costanza della velocità areale.

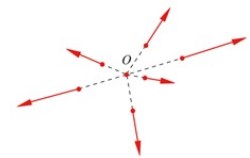


FIGURA 2.54

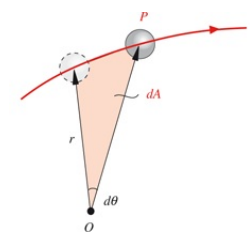


FIGURA 2.55

Velocità areale

Riassumendo, la traiettoria di un punto che si muove in un campo di forze centrali giace in un piano fisso passante per il centro ed è percorsa in modo tale che la velocità areale rimanga costante.

Keplero aveva stabilito sperimentalmente che i pianeti descrivono le loro orbite attorno al sole con velocità areale costante (seconda legge di Keplero). Da tale risultato, vedi capitolo 5, Newton dedusse che la forza gravitazionale è una forza centrale (altro esempio di forze centrali sono le forze elastiche).

Seconda legge di Keplero

Se la traiettoria è chiusa, come nel caso dei pianeti, la costanza della velocità areale, $dA/dt = C$, implica che la costante C sia eguale a A/T , dove A rappresenta l'area totale racchiusa dalla traiettoria e T il tempo totale impiegato a percorrerla, cioè il periodo; allora $A/T = L/2m$ e quindi

$$T = \frac{2m}{L} A \quad . \quad (2.26)$$

Formula di Binet

Esprimiamo l'accelerazione del punto P tramite le componenti polari (1.23). In un campo di forze centrali la componente trasversa deve essere nulla: e infatti

$$a_\theta = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) = 0$$

essendo $r^2 d\theta/dt$ costante. L'accelerazione è puramente radiale e in modulo vale

$$a = \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \quad .$$

Vediamo di trasformare questa espressione in funzione delle coordinate polari eliminando la dipendenza esplicita dal tempo. Ricordiamo che $r^2 d\theta/dt = L/m$ e calcoliamo dr/dt e $d^2 r/dt^2$:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{mr^2} \frac{dr}{d\theta} = -\frac{L}{m} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \right) \quad ,$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d}{d\theta} \left(\frac{dr}{dt} \right) \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{mr^2} \frac{d}{d\theta} \left[-\frac{L}{m} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \right) \right] = -\frac{L^2}{m^2 r^2} \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) \quad .$$

Sostituendo nell'espressione dell'accelerazione

$$a = -\frac{L^2}{m^2 r^2} \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) - r \left(\frac{L}{mr^2} \right)^2$$

e quindi, ritornando all'espressione vettoriale,

$$\mathbf{a} = -\frac{L^2}{m^2 r^2} \left[\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right] \mathbf{u}_r \quad . \quad (2.27)$$

Formula di Binet

Questa relazione si chiama *formula di Binet* ed è di particolare utilità nello studio del moto in un campo di forza gravitazionale, come vedremo nel capitolo

Concludiamo questo paragrafo sulle forze centrali dimostrando che tali forze sono *conservative*. Abbiamo detto che il modulo di una forza centrale dipende solo dalla distanza r dal centro, $\mathbf{F} = F(r) \mathbf{u}_r$. Il lavoro di questa forza si scrive

$$W = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_A^B F(r) \mathbf{u}_r \cdot d\mathbf{s} \quad .$$

Il prodotto scalare $\mathbf{u}_r \cdot d\mathbf{s}$ vale $ds \cos\theta$ e dalla figura 2.56 si vede che $ds \cos\theta$ è pari a dr , variazione del modulo di \mathbf{r} durante lo spostamento $d\mathbf{s}$. Quindi

$$W = \int_A^B F(r) dr = f(r_B) - f(r_A) \quad :$$

il lavoro è dato dalla variazione di una funzione delle coordinate di A e B , condizione perché la forza sia conservativa.

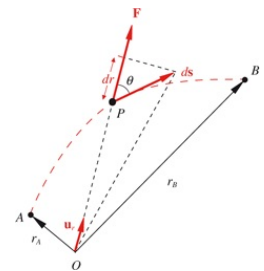


FIGURA 2.56

2.24 Riepilogo

Rivediamo le nozioni più importanti di dinamica del punto, con lo scopo di chiarirne ulteriormente il significato e di consigliarne il modo di applicazione nella soluzione di problemi.

La *legge fondamentale* da utilizzare per lo studio del moto di un punto materiale è $\mathbf{F} = m \mathbf{a} = m d\mathbf{v}/dt$. A tal fine *si devono identificare le forze che effettivamente agiscono sul punto, non dimenticando reazioni vincolari, tensioni di fili o eventuali attriti*. Si deve inoltre valutare lungo quali direzioni può essere più conveniente scomporre le forze, facendo particolare attenzione a non commettere errori di segno proiettando.

Negli esempi discussi si sono considerate forze costanti, come il peso, oppure di tipo elastico o viscoso. L'equazione differenziale che deriva dalla legge di Newton risulta facilmente risolvibile, con le cognizioni a nostra disposizione. Nei casi più generali, peraltro, dobbiamo conoscere la forma di $\mathbf{F}(t)$ se vogliamo calcolare la velocità e di qui lo spostamento, secondo le procedure viste nel primo capitolo.

Un argomento sul quale è opportuno riflettere bene per evitare errori è il seguente: la legge di Newton permette di calcolare l'accelerazione $\mathbf{a} = \mathbf{F}/m$ e quindi la velocità, secondo (1.24):

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \int_0^t \mathbf{a} dt \quad .$$

In generale velocità e accelerazione non sono parallele e *il moto avviene nella direzione e verso della velocità*, non dell'accelerazione e quindi della forza (qui giocano un ruolo essenziale le condizioni iniziali). Si consideri ad esempio il moto circolare uniforme dove \mathbf{a} e \mathbf{v} sono ortogonali. La forza è diretta verso il centro della circonferenza (forza centripeta), ma il moto avviene lungo la circonferenza. Un satellite è attratto dalla terra, ma, se ha un'opportuna velocità, può descrivere un'orbita circolare senza cadere sulla terra. Ancora, nello studio del moto di un corpo sottoposto alla forza peso abbiamo osservato che la traiettoria è parabolica mentre la forza è verticale.

Se nella (1.24) inseriamo la legge di Newton abbiamo

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \int_0^t \frac{\mathbf{F}}{m} dt$$

e ritroviamo il teorema dell'impulso (2.3), con un passaggio che porta dalla cinematica alla dinamica. Il teorema dell'impulso trova un'interessante e comune applicazione nello studio delle conseguenze dell'applicazione di una percossa a un punto fermo. Se \mathbf{F}_m è la forza media esercitata dalla percossa nel tempo Δt , di norma molto breve così che durante Δt si può assumere che il punto sia rimasto nella posizione iniziale, $\mathbf{F}_m \Delta t = m \mathbf{v}$ e si può calcolare la

velocità acquistata dal punto. Successivamente il punto si muoverà in dipendenza delle eventuali altre forze agenti, quali peso, attrito, ecc. ma non di F_m che è già cessata.

Discutendo il lavoro di una forza abbiamo dimostrato che, qualsiasi sia la forza agente, esso è eguale alla variazione dell'energia cinetica del punto su cui agisce la forza. Una categoria particolare di forze, a cui appartengono per esempio le forze costanti vettorialmente e le forze centrali, è costituita dalle forze conservative. Per tali forze il lavoro è esprimibile tramite la variazione di una funzione delle coordinate del punto, l'energia potenziale, e si ha la conservazione dell'energia meccanica.

Il significato dell'energia, sia cinetica che potenziale, è *la capacità di un sistema di scambiare lavoro* ovvero essa va intesa come *serbatoio di lavoro*. Il fatto che un punto materiale possieda una certa energia potenziale o cinetica implica che con opportuni processi si può ricavare lavoro, parzialmente o integralmente a seconda che ci siano o non ci siano attriti.

Un'applicazione molto comune del *principio di conservazione dell'energia meccanica* sfrutta il legame stabilito da (2.17) tra l'energia cinetica, funzione della velocità, e l'energia potenziale, funzione delle coordinate, per esprimere la velocità in funzione della posizione. Questa via normalmente è da preferire nei problemi in cui non è richiesta la dipendenza dal tempo (purché, naturalmente, sia lecito applicare la conservazione dell'energia). Se invece è richiesta esplicitamente la legge oraria conviene applicare la legge di Newton.

Però, anche da (2.17) si può arrivare alla legge oraria. Infatti, limitandoci al caso unidimensionale,

$$E_p(x) + \frac{1}{2} m v^2 = E_m \Rightarrow v(x) = \sqrt{\frac{2}{m} (E_m - E_p)} .$$

Da $\frac{dx}{dt} = v(x)$ scriviamo $dx = v dt$ e integriamo: $\int \frac{dx}{v(x)} = t$. Svolgendo l'integrale si ha $x(t)$ e derivando $v(t)$. È chiaro che il calcolo può presentarsi complicato.

Infine, vedremo che il *teorema del momento angolare*, opportunamente modificato, troverà applicazione nella dinamica dei sistemi di punti e che le proprietà delle forze centrali saranno utili nello studio della forza di gravitazione universale.

Riprendendo quanto detto nel paragrafo 1.1, dobbiamo sempre tener presente che le leggi viste valgono per il moto di un punto materiale che certamente è un'astrazione in quanto non esistono corpi macroscopici privi di

struttura geometrica. Tuttavia ripetiamo che, per questa sua estrema semplicità, il punto materiale ha una notevole importanza concettuale nel senso che lo studio del suo moto permette di comprendere le leggi dei fenomeni dinamici nel caso più elementare, senza le complicazioni dovute alla struttura del sistema in esame. Come vedremo, in pratica dobbiamo trattare con corpi estesi in moto, però se il moto è *traslatorio*, cioè il corpo non ruota e non si deforma, tutti i punti si muovono nello stesso modo, ciascuno come se fosse un punto materiale. Riprenderemo questi argomenti nei capitoli 4 e 6 introducendo il centro di massa e studiando il moto di un corpo rigido.

3.1 Sistemi di riferimento. Velocità e accelerazione relative

Sperimentalmente è provato con estrema accuratezza che *le leggi fisiche non dipendono dalla scelta del sistema di riferimento*. Fissato un sistema di riferimento e stabilita una certa proprietà, questa resta vera anche se cambiano l'origine e l'orientazione degli assi coordinati, ovvero se ci riferiamo ad un altro sistema ottenuto dal primo con una traslazione (spostamento dell'origine, conservando la stessa direzione degli assi) o con una rotazione (stessa origine, cambio della direzione degli assi) o con una operazione combinata. Non esiste pertanto un punto privilegiato dello spazio e nemmeno un'orientazione privilegiata: *lo spazio appare omogeneo e isotropo*.

La caratteristica sostanziale di invarianza acquista un aspetto formale se le leggi fisiche vengono espresse come relazioni tra entità che godono anch'esse delle suddette proprietà di invarianza, come le grandezze scalari o quelle vettoriali o altre più complesse, come ad esempio i tensori.

La situazione si presenta diversa quando un fenomeno viene osservato da due sistemi di riferimento in moto l'uno rispetto all'altro. Nel caso del moto di un corpo abbiamo già rilevato come il concetto stesso di moto sia relativo; un esempio semplice è quello di una persona seduta in un mezzo di trasporto in movimento: essa è in quiete rispetto al mezzo, ma è in movimento rispetto al suolo con la velocità che ha il mezzo. Più in generale, il moto viene descritto con leggi diverse in due sistemi di riferimento in moto relativo, a meno che questo moto non abbia certe caratteristiche che tra breve specificheremo. Non sussiste cioè invarianza delle leggi fisiche rispetto a due sistemi di riferimento in moto qualsiasi l'uno rispetto all'altro.

Teorema delle velocità relative

Nella figura 3.1 è rappresentato un punto P in movimento lungo una generica traiettoria. Il suo moto viene osservato da una terna cartesiana con centro in O che,

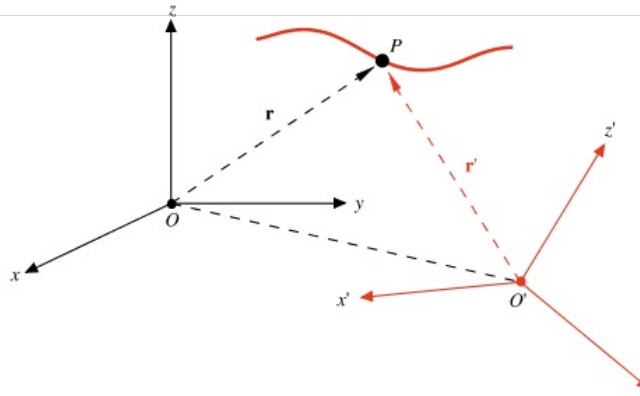


FIGURA 3.1

per convenzione, chiamiamo *sistema fisso* e da una terna cartesiana con centro O' che, sempre per convenzione, chiamiamo *sistema mobile*.

Vogliamo ricavare una relazione tra la posizione, la velocità e l'accelerazione del punto P , misurate da un osservatore solidale con il sistema fisso, e le corrispondenti grandezze misurate da un osservatore solidale con il sistema mobile. Cercheremo poi di stabilire come la nozione di invarianza possa eventualmente estendersi appunto al caso in cui i sistemi di riferimento siano in moto l'uno rispetto all'altro. Ripetiamo che la dizione sistema fisso e sistema mobile è solo una questione di convenzioni. Vedremo in seguito che esiste una maniera più fisica per distinguere i sistemi di riferimento in due classi ben diverse.

La relazione tra le posizioni del punto P , misurate rispetto ai due sistemi di riferimento, è la seguente:

$$\mathbf{r} = \mathbf{OO}' + \mathbf{r}' \quad , \quad (3.1)$$

con

$$\mathbf{r} = x\mathbf{u}_x + y\mathbf{u}_y + z\mathbf{u}_z \quad , \quad \mathbf{r}' = x'\mathbf{u}_{x'} + y'\mathbf{u}_{y'} + z'\mathbf{u}_{z'} \quad , \quad \mathbf{OO}' = x_{O'}\mathbf{u}_x + y_{O'}\mathbf{u}_y + z_{O'}\mathbf{u}_z \quad .$$

Assumiamo, in accordo con la convenzione che il primo sistema sia fisso, che i versori \mathbf{u}_x , \mathbf{u}_y , \mathbf{u}_z siano indipendenti dal tempo; tali non sono invece i versori degli assi del sistema mobile.

La velocità del punto P rispetto al sistema fisso, che chiamiamo *velocità assoluta*, è data da

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \mathbf{u}_x + \frac{dy}{dt} \mathbf{u}_y + \frac{dz}{dt} \mathbf{u}_z \quad ,$$

Velocità assoluta

mentre quella misurata da un osservatore solidale al sistema mobile, che indichiamo come *velocità relativa*, è

$$\mathbf{v}' = \frac{dx'}{dt} \mathbf{u}_{x'} + \frac{dy'}{dt} \mathbf{u}_{y'} + \frac{dz'}{dt} \mathbf{u}_{z'} \quad .$$

Velocità relativa

La velocità dell'origine O' del sistema di riferimento mobile misurata da un

osservatore nel sistema fisso è data da

$$\mathbf{v}_{O'} = \frac{d\mathbf{OO}'}{dt} = \frac{dx_{O'}}{dt} \mathbf{u}_x + \frac{dy_{O'}}{dt} \mathbf{u}_y + \frac{dz_{O'}}{dt} \mathbf{u}_z \quad .$$

La derivata rispetto al tempo della (3.1) fornisce

$$\begin{aligned} \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \frac{d\mathbf{OO}'}{dt} + \frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \frac{dx_{O'}}{dt} \mathbf{u}_x + \frac{dy_{O'}}{dt} \mathbf{u}_y + \frac{dz_{O'}}{dt} \mathbf{u}_z + \\ &+ \frac{dx'}{dt} \mathbf{u}_{x'} + \frac{dy'}{dt} \mathbf{u}_{y'} + \frac{dz'}{dt} \mathbf{u}_{z'} + x' \frac{d\mathbf{u}_{x'}}{dt} + y' \frac{d\mathbf{u}_{y'}}{dt} + z' \frac{d\mathbf{u}_{z'}}{dt} \end{aligned}$$

ovvero

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{O'} + \mathbf{v}' + x' \frac{d\mathbf{u}_{x'}}{dt} + y' \frac{d\mathbf{u}_{y'}}{dt} + z' \frac{d\mathbf{u}_{z'}}{dt} \quad . \quad (3.2)$$

Osserviamo che $d\mathbf{r}'/dt$ non coincide con \mathbf{v}' in quanto nella variazione di \mathbf{r}' compaiono non solo le derivate delle coordinate, ma anche quelle dei versori degli assi del sistema mobile, che forniscono gli ultimi tre termini della (3.2).

Da (1.33) abbiamo che la derivata di un versore \mathbf{u} , in quanto vettore con modulo costante, si può scrivere $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}$; pertanto per le derivate dei tre versori $\mathbf{u}_{x'}$, $\mathbf{u}_{y'}$, $\mathbf{u}_{z'}$, si hanno le seguenti *formule*, dette *di Poisson*:

$$\frac{d\mathbf{u}_{x'}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}_{x'} \quad , \quad \frac{d\mathbf{u}_{y'}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}_{y'} \quad , \quad \frac{d\mathbf{u}_{z'}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}_{z'} \quad .$$

Formule di Poisson

I tre versori $\mathbf{u}_{x'}$, $\mathbf{u}_{y'}$, $\mathbf{u}_{z'}$, che individuano la terna mobile, sono rigidamente legati l'uno all'altro, nel senso che le loro mutue orientazioni non possono cambiare. Alla rotazione di uno, con velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$, corrisponde la rotazione degli altri due con la stessa velocità angolare, come se essi fossero parte di un unico corpo indeformabile (questo risultato sarà più chiaro dopo lo studio del corpo rigido, nel capitolo 6; ad ogni modo le formule di Poisson sono dimostrate per esteso nel paragrafo 3.7).

Possiamo adesso riscrivere gli ultimi tre termini di (3.2) come

$$x'(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}_{x'}) + y'(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}_{y'}) + z'(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}_{z'}) = \boldsymbol{\omega} \times (x'\mathbf{u}_{x'} + y'\mathbf{u}_{y'} + z'\mathbf{u}_{z'}) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \quad ; \quad (3.3)$$

dato che x' , y' , z' sono numeri, li abbiamo trasportati a secondo membro in ciascun prodotto vettoriale. Sostituendo (3.3) in (3.2) otteniamo

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{O'} + \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \quad . \quad (3.4)$$

Teorema delle velocità relative

In particolare

$$\frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \quad . \quad (3.5)$$

La (3.4) esprime il *teorema delle velocità relative*; le misure di velocità compiute nei due sistemi sono diverse, ma non sono scorrelate, in quanto legate

appunto dalla (3.4).

La differenza \mathbf{v}_t tra le velocità misurate nei due sistemi di riferimento è chiamata *velocità di trascinamento*:

$$\mathbf{v}_t = \mathbf{v} - \mathbf{v}' = \mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \quad . \quad (3.6)$$

Velocità di trascinamento

Essa è pari alla velocità rispetto al sistema fisso di quel punto P^* , solidale con il sistema mobile, che coincide nell'istante considerato con punto P ; per tale punto P^* infatti $\mathbf{v}' = 0$, proprio in quanto esso è solidale con il sistema mobile. In altre parole, se P fosse fermo rispetto al sistema mobile, la sua velocità misurata dal sistema fisso coinciderebbe con la velocità di trascinamento. Se invece P si muove rispetto al sistema mobile, la (3.4) afferma che la velocità assoluta è la somma della velocità relativa e di quella di trascinamento.

Il moto di trascinamento, legato in pratica al moto del sistema mobile, può essere considerato in ogni istante come la somma di un termine traslatorio con velocità istantanea $\mathbf{v}_{O'}$ e di un termine rotatorio con velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$, variabile in generale sia in modulo che in direzione.

Teorema delle accelerazioni relative

Consideriamo ora la relazione tra le accelerazioni del punto P misurate rispetto ai due sistemi di riferimento. Rispetto al sistema fisso l'*accelerazione assoluta* è data da

$$\mathbf{a} = \frac{d^2x}{dt^2} \mathbf{u}_x + \frac{d^2y}{dt^2} \mathbf{u}_y + \frac{d^2z}{dt^2} \mathbf{u}_z \quad ,$$

Accelerazione assoluta

mentre rispetto al sistema mobile l'*accelerazione relativa* è

$$\mathbf{a}' = \frac{d^2x'}{dt^2} \mathbf{u}_{x'} + \frac{d^2y'}{dt^2} \mathbf{u}_{y'} + \frac{d^2z'}{dt^2} \mathbf{u}_{z'} \quad .$$

L'accelerazione dell'origine del sistema mobile O' rispetto a O è data da $\mathbf{a}_{O'}$, = $d\mathbf{v}_{O'}/dt$. Derivando (3.4) rispetto al tempo otteniamo:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_{O'}}{dt} + \frac{d\mathbf{v}'}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}'}{dt} \quad .$$

Calcoliamo $d\mathbf{v}'/dt$:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}'}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{dx'}{dt} \mathbf{u}_{x'} + \frac{dy'}{dt} \mathbf{u}_{y'} + \frac{dz'}{dt} \mathbf{u}_{z'} \right) = \frac{d^2x'}{dt^2} \mathbf{u}_{x'} + \frac{d^2y'}{dt^2} \mathbf{u}_{y'} + \\ &+ \frac{d^2z'}{dt^2} \mathbf{u}_{z'} + \frac{dx'}{dt} \frac{d\mathbf{u}_{x'}}{dt} + \frac{dy'}{dt} \frac{d\mathbf{u}_{y'}}{dt} + \frac{dz'}{dt} \frac{d\mathbf{u}_{z'}}{dt} = \mathbf{a}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' \quad . \end{aligned}$$

Abbiamo di nuovo utilizzato le formule di Poisson per il calcolo delle derivate dei vettori degli assi mobili. Da (3.5) si ha inoltre

$$\boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')$$

e pertanto

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \mathbf{a}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}' + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' \quad . \quad (3.7)$$

Teorema delle
accelerazioni relative

Le accelerazioni del punto P misurate nei due sistemi non coincidono, ma sono messe in relazione tramite la (3.7), detta *teorema delle accelerazioni relative*.

Per valutare l'*accelerazione di trascinamento* \mathbf{a}_t riprendiamo la discussione fatta per la velocità di trascinamento. L'accelerazione di trascinamento è quella del punto P^* , solidale col sistema mobile, che coincide nell'istante considerato col punto P . Per P^* \mathbf{a}' e \mathbf{v}' sono nulle e da (3.7)

$$\mathbf{a}_t = \mathbf{a}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}' \quad . \quad (3.8)$$

Accelerazione di
trascinamento

Possiamo pertanto riscrivere (3.7) come

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_c \quad ;$$

l'ultimo termine

$$\mathbf{a}_c = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' \quad (3.9)$$

Accelerazione di
Coriolis

è chiamato *accelerazione complementare o di Coriolis*; esso dipende dal moto di P rispetto al sistema mobile tramite la velocità relativa \mathbf{v}' .

La complessa struttura della (3.7) fa comprendere quanto possa essere diversa la descrizione del moto di uno stesso punto visto da due sistemi diversi. Conseguentemente saranno diverse le forze che vengono *ipotizzate* per spiegare il determinato tipo di moto da parte degli osservatori solidali a differenti sistemi di riferimento. Passeremo quindi ad esaminare, dopo le relazioni cinematiche, gli aspetti dinamici del moto relativo. Prima trattiamo però un particolare caso cinematico di moto relativo.

Velocità e accelerazione di un punto rispetto ad un altro

Oltre al moto di un punto visto da due diversi sistemi di riferimento, è necessario talvolta considerare il moto di un punto rispetto ad un altro punto. Per discutere questo argomento ci serviamo dei risultati appena trovati, anche se si potrebbe arrivare alla soluzione in modo più diretto.

Abbiamo due punti che si muovono in un sistema O , con posizione, velocità e accelerazione date da:

$$\text{punto } P_1 \quad \mathbf{r}_1 = \mathbf{OP}_1 \quad , \quad \mathbf{v}_1 = \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} \quad , \quad \mathbf{a}_1 = \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} \quad ,$$

$$\text{punto } P_2 \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{OP}_2 \quad , \quad \mathbf{v}_2 = \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} \quad , \quad \mathbf{a}_2 = \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} \quad .$$

La posizione relativa di P_2 rispetto a P_1 è individuata dal raggio vettore che va da P_1 a P_2 ,

$$\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_{1,2} \quad .$$

Per calcolare la velocità di P_2 relativa a P_1 immaginiamo un secondo sistema di riferimento O' , con origine in P_1 e assi che non ruotano rispetto a quelli di O ($\boldsymbol{\omega} = 0$): la velocità di P_2 vista da O' è appunto la velocità di P_2 rispetto a P_1 , che indichiamo con $\mathbf{v}_{2,1}$. Con riferimento a (3.4), la velocità assoluta \mathbf{v} è \mathbf{v}_2 , la velocità relativa \mathbf{v}' è $\mathbf{v}_{2,1}$ e la velocità di trascinamento $\mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$ è solo $\mathbf{v}_{O'} = \mathbf{v}_1$ in quanto $\boldsymbol{\omega} = 0$. Pertanto

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_{2,1} + \mathbf{v}_1 \Rightarrow \mathbf{v}_{2,1} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 \quad .$$

Allo stesso modo si dimostra che l'accelerazione di P_2 rispetto a P_1 è

$$\mathbf{a}_{2,1} = \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1 \quad .$$

In conclusione, posizione, velocità e accelerazione di un punto in moto rispetto ad un altro punto in moto sono date dalla differenza tra le posizioni, le velocità e le accelerazioni dei due punti, in un dato sistema di riferimento.

Il risultato può essere enunciato in modo diverso. Il vettore $\mathbf{r}_{1,2}$ può essere pensato come un segmento in movimento, di cui variano nel tempo modulo e direzione. La derivata rispetto al tempo di tale segmento mobile è data da

$$\frac{d\mathbf{r}_{1,2}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} - \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_{2,1} \quad ,$$

cioè dalla differenza delle velocità dei due estremi. Analogamente

$$\frac{d\mathbf{v}_{1,2}}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} - \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} = \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_{2,1} \quad .$$

Ci serviremo di queste formule nella dimostrazione del teorema del momento angolare (paragrafo 4.4). Esse vanno sempre tenute presenti nei problemi in cui si considerano moti relativi tra due corpi (ad esempio, un corpo che scivola sopra un altro, a sua volta in movimento). Implicitamente le abbiamo già usate in alcuni esempi e problemi relativi al capitolo 2.

3.2 Sistemi di riferimento inerziali. Relatività galileiana

Definiamo come *sistema di riferimento inerziale* un sistema in cui valga rigorosamente la legge di inerzia, in cui cioè un punto *non soggetto a forze* lanciato con velocità arbitraria in qualunque direzione si muova con moto rettilineo uniforme o, se è in quiete, resti in quiete.

Sistema di riferimento
inerziale

È evidente che la definizione di sistema di riferimento inerziale ha significato solo se siamo in grado di verificare in modo diverso che il punto non è soggetto a forze. È ragionevole supporre che questa situazione si verifichi sia quando il punto è sufficientemente lontano da ogni altro corpo in modo da poter trascurare ogni interazione, sia quando è possibile bilanciare le forze agenti in modo che la risultante sia nulla. Assumiamo pertanto di poter disporre di un punto materiale non soggetto a forze e quindi di poter verificare se il sistema di riferimento in cui si osserva il moto sia inerziale o no (una simile ammissione è stata implicitamente fatta quando abbiamo introdotto il principio di inerzia).

In un sistema di riferimento inerziale la legge di Newton (2.1) ha l'espressione più semplice: le forze che compaiono a primo membro sono le *forze vere* cioè quelle che sappiamo derivare dalle interazioni fondamentali, classificate nel paragrafo 2.5, e la risultante è proporzionale all'accelerazione misurata in quel sistema di riferimento.

Consideriamo ora un altro sistema di riferimento che si muove di moto traslatorio rettilineo uniforme rispetto ad un certo sistema inerziale. Pertanto si ha

$$\mathbf{v}_{O'} = \text{costante} \quad , \quad \mathbf{a}_{O'} = 0 \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\omega} = 0 \quad .$$

Da (3.7) ricaviamo $\mathbf{a} = \mathbf{a}'$: le accelerazioni di un punto misurate nei due sistemi di riferimento sono eguali. Se $\mathbf{a} = 0$ anche $\mathbf{a}' = 0$ e quindi pure il secondo sistema è inerziale.

Abbiamo così ottenuto questo risultato fondamentale: *definito un sistema di riferimento inerziale, tutti gli altri sistemi in moto rettilineo uniforme rispetto a questo sono anch'essi inerziali*. Per tali sistemi la legge di Newton si scrive allo stesso modo, ossia con gli stessi valori di \mathbf{F} e di \mathbf{a} : se cioè nel sistema inerziale O si misura \mathbf{a} e si deduce che la forza agente è $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, nel sistema inerziale O' si misura la stessa \mathbf{a} e si ricava la stessa forza $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$.

Conseguenza importante è che, essendo la dinamica la stessa, non è possibile stabilire, tramite misure effettuate in questi diversi sistemi di riferimento, se uno di essi è in quiete o in moto. Non ha cioè senso il concetto di moto assoluto. Tale situazione fisica viene descritta anche con il termine di *relatività galileiana*.

Se il moto del secondo sistema è accelerato rispetto al sistema inerziale, sia perché $\mathbf{a}_{O'} \neq 0$ oppure $\boldsymbol{\omega} \neq 0$ o per entrambe le ragioni, si osserva che la legge di

Newton non è più valida, la *forza vera* che agisce sul punto considerato non è proporzionale all'accelerazione del punto, misurata nel sistema accelerato.

Tale risultato appare chiaro da (3.7): infatti, se $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ nel sistema inerziale, nel sistema mobile in moto accelerato non può sussistere la relazione $\mathbf{F} = m\mathbf{a}'$ poiché $\mathbf{a}' \neq \mathbf{a}$. D'altra parte, se moltiplichiamo i termini di (3.7) per la massa del punto e teniamo conto che $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, abbiamo:

$$\mathbf{F} - m\mathbf{a}_t - m\mathbf{a}_c = m\mathbf{a}' \quad , \quad (3.10)$$

dove \mathbf{a}_t e \mathbf{a}_c sono le accelerazioni di trascinamento e di Coriolis come definite rispettivamente da (3.8) e (3.9).

La (3.10) rappresenta una forma modificata dalla legge di Newton: in un sistema non inerziale il prodotto della massa del punto materiale per l'accelerazione misurata in quel sistema è eguale alla *forza vera* agente sul punto più le *forze apparenti*. Queste ultime forze, che sono sempre proporzionali alla massa del punto e vengono pertanto chiamate anche *forze di inerzia*, appaiono agenti solo nel sistema non inerziale, dove costituiscono il termine correttivo che permette di ritornare ad una espressione $\mathbf{F}' = m\mathbf{a}'$. È chiaro che *le forze apparenti non derivano dalle interazioni fondamentali e non esistono in un sistema di riferimento inerziale*.

Forze apparenti o forze di inerzia

Riteniamo che ora sia evidente l'importanza di riferire le misure ad un sistema inerziale. In tale sistema infatti la descrizione di un fenomeno dinamico è più semplice e più aderente a quelli che supponiamo siano i meccanismi fisici di base. Se osserviamo in un sistema inerziale un punto materiale che descrive una traiettoria curva possiamo affermare che su di esso agisce una forza (vera); se $\mathbf{F} = 0$ sappiamo che il moto è rettilineo uniforme e viceversa.

In un sistema accelerato vediamo da (3.10) che $\mathbf{F} = 0$ non comporta $\mathbf{a}' = 0$ e quindi l'osservazione di un moto rettilineo uniforme. Questo risultato giustifica il nome di sistema *non inerziale* per un sistema accelerato. Analogamente, una traiettoria curva non presuppone necessariamente l'azione di una forza (vera), ma può essere un effetto *apparente*, conseguenza del moto accelerato del sistema in cui si trova l'osservatore, e così via.

Sistema non inerziale

Sottolineamo che tutto ciò non significa che la descrizione nel sistema inerziale è corretta, mentre quella nel sistema non inerziale è sbagliata. In entrambi i sistemi, note le condizioni iniziali del moto e le forze agenti, facciamo previsioni corrette per il moto di un punto tramite (2.1) o (3.10). Però nel sistema non inerziale la descrizione è più complicata, dovendosi introdurre termini correttivi non provenienti dalle interazioni fondamentali. Un osservatore che visse sempre in un sistema non inerziale potrebbe avere difficoltà a comprendere che agiscono delle forze con una struttura complessa come quella nella (3.10) e non soltanto un'unica forza \mathbf{F}' .

Nei prossimi paragrafi presenteremo vari esempi di moti osservati da due sistemi di riferimento diversi, di cui almeno uno inerziale. Utilizzeremo le reazioni (3.1), (3.4), (3.7) e (3.10) valide per qualsiasi coppia di sistemi.

Assumeremo come inerziale il sistema con origine O , mentre l'altro avrà origine in O' e metteremo in evidenza cosa misurano due osservatori, detti per brevità O e O' , solidali con i due sistemi.

Questi due osservatori, che possono comunicare tra loro, sono esperti nella Fisica e cercano di cogliere il significato delle loro misure. Dall'esame di queste comprenderemo la diversità della cinematica e la differente interpretazione dinamica che si possono avere per uno stesso fenomeno visto da due sistemi in moto relativo tra loro.

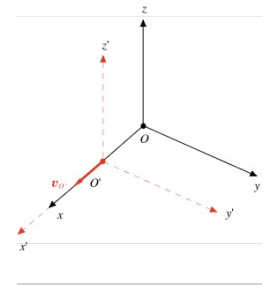


FIGURA 3.2

3.3 Moto di trascinamento rettilineo uniforme

Consideriamo due sistemi inerziali in moto rettilineo uniforme l'uno rispetto all'altro e mettiamoci nel caso semplice, che non è però limitativo, rappresentato in figura 3.2. Gli assi dei due sistemi sono paralleli ed il sistema di origine O' si sposta con velocità costante $\mathbf{v}_{O'}$ parallela all'asse x . Inoltre all'istante $t = 0$ le origini coincidono così che $\mathbf{OO}' = \mathbf{v}_{O'} t$.

Proiettando sugli assi la relazione $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{OO}'$, che lega le posizioni di un punto P nei due sistemi di riferimento otteniamo

$$x' = x - v_{O'} t \quad , \quad y' = y \quad , \quad z' = z \quad . \quad (3.11)$$

Analogamente per le velocità, utilizzando (3.4), si ha $\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{v}_{O'}$ e quindi

$$v'_x = v_x - v_{O'} \quad , \quad v'_y = v_y \quad , \quad v'_z = v_z \quad . \quad (3.12)$$

Infine per le accelerazioni è $\mathbf{a}' = \mathbf{a}$, dato che ambedue i sistemi sono inerziali.

Le relazioni (3.11), che permettono di calcolare le coordinate del punto in un sistema inerziale note quelle nell'altro sistema inerziale, esprimono una *trasformazione galileiana* tra i due sistemi; analogamente (3.12) è la trasformazione galileiana delle velocità.

Negli esempi seguenti esaminiamo alcuni casi particolari di moto del punto P . La figura di riferimento per il moto relativo dei due sistemi è sempre la 3.2, con $\mathbf{v}_{O'}$ costante.

ESEMPIO 3.1

Un punto P descrive nel piano x, y un moto rettilineo uniforme con velocità \mathbf{v} , di componenti v_x e v_y , partendo all'istante $t = 0$ dalla posizione di coordinate x_0, y_0 . Determinare il moto visto dal sistema O' .

Soluzione

Scriviamo le equazioni dei moti proiettati sugli assi servendoci di (3.11):

$$\begin{aligned} x &= x_0 + v_x t \quad , & x' &= x - v_{O'} t = x_0 + (v_x - v_{O'}) t \quad , \\ y &= y_0 + v_y t \quad , & y' &= y = y_0 + v_y t \quad , \\ z &= 0 \quad , & z' &= z = 0 \quad . \end{aligned}$$

Anche nel sistema O' le componenti della velocità del punto sono costanti e quindi il moto è rettilineo uniforme (come ci aspettiamo essendo i due sistemi inerziali: se $\mathbf{a} = 0$ anche $\mathbf{a}' = 0$). Però l'inclinazione della traiettoria rispetto all'asse $x \equiv x'$ è diversa nei due sistemi, così come è diverso il modulo della velocità:

Trasformazione galileiana

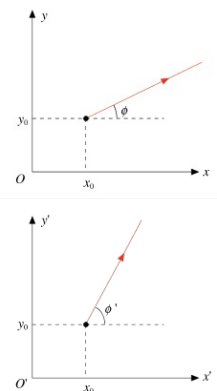


FIGURA 3.3 (Esempio 3.1)

$$\operatorname{tg}\phi = \frac{v_y}{v_x} \quad , \quad \operatorname{tg}\phi' = \frac{v_y'}{v_x'} = \frac{v_y}{v_x - v_{O'}} \quad ,$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad , \quad v' = \sqrt{(v_x - v_{O'})^2 + v_y^2} \quad .$$

Nella figura 3.3 è mostrato un caso particolare in cui $v_{O'}$ è positiva e minore di v_x (si ricordi che nell'istante iniziale le origini dei due sistemi coincidono).

Se fosse $v_{O'} = v_x$, cioè se il sistema O' si muovesse con velocità eguale alla componente v_x della velocità del punto, sarebbe $v_x' = 0$ e il moto visto da O' risulterebbe parallelo all'asse $y \equiv y'$. Solo quando il moto in O è parallelo all'asse x , cioè all'asse della traslazione tra i due sistemi, anche in O' si osserva un moto parallelo all'asse x' .

Riassumendo, entrambi gli osservatori vedono un moto rettilineo uniforme e concordano sul fatto che l'accelerazione è nulla e che quindi non ci sono forze agenti; le traiettorie appaiono diverse, e percorse con velocità diverse, perché nei due sistemi sono diverse le condizioni iniziali ($v_x \neq v_x'$).

Visualizza soluzione

ESEMPIO 3.2

Un punto P compie nel piano x, y un moto rettilineo uniformemente accelerato con accelerazione \mathbf{a} , di componenti a_x e a_y , partendo con velocità iniziale nulla dall'origine. Determinare il moto visto nel sistema O' .

Soluzione

Ricorriamo di nuovo a (3.11) e anche a (3.12):

$$x = \frac{1}{2} a_x t^2 \quad , \quad x' = x - v_{O'} t = \frac{1}{2} a_x t^2 - v_{O'} t \quad ,$$

$$y = \frac{1}{2} a_y t^2 \quad , \quad y' = y = \frac{1}{2} a_y t^2 \quad ,$$

$$v_x = a_x t \quad , \quad v_x' = v_x - v_{O'} = a_x t - v_{O'} \quad ,$$

$$v_y = a_y t \quad , \quad v_y' = v_y = a_y t \quad .$$

O vede una traiettoria rettilinea con pendenza $v_y / v_x = a_y / a_x$. Invece O' vede una traiettoria curva: infatti la pendenza

$$\frac{v_y'}{v_x'} = \frac{a_y t}{a_x t - v_{O'}}$$

dipende dal tempo; la velocità iniziale è negativa, pari a $-v_{O'}$. In figura 3.4 è mostrato un caso particolare.

Per entrambi gli osservatori l'accelerazione è la stessa e quindi la forza è la

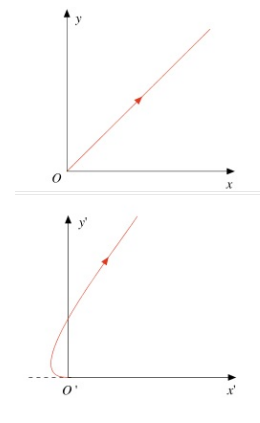


FIGURA 3.4
(Esempio 3.2)

stessa, parallela e concorde alla traiettoria vista da O ; O' vede una traiettoria curva in quanto la forza e la velocità iniziale non sono parallele. Solo se $a_y = 0$, cioè se in O la traiettoria coincide con l'asse x , anche O' vede un moto rettilineo uniformemente accelerato.

Visualizza soluzione

ESEMPIO 3.3

Nel sistema O un punto viene lasciato cadere lungo l'asse z , da un'altezza h . Cosa vede O' ?

Soluzione

Le equazioni del moto nel sistema O sono:

$$\begin{aligned} x &= 0 & , & & y &= 0 & , & & z &= h - \frac{1}{2}gt^2 & , \\ v_x &= 0 & , & & v_y &= 0 & , & & v_z &= -gt & . \end{aligned}$$

Invece in O' abbiamo:

$$\begin{aligned} x' &= -v_{O'}t & , & & y' &= 0 & , & & z' &= h - \frac{1}{2}gt^2 & , \\ v_x' &= -v_{O'} & , & & v_y' &= 0 & , & & v_z' &= -gt & . \end{aligned}$$

Quindi in O' il moto è composto da un moto rettilineo uniforme lungo l'asse x' con velocità $-v_{O'}$ e da un moto uniformemente accelerato lungo l'asse z : la traiettoria è un arco di parabola, e si verifica facilmente che il punto cade a distanza $-v_{O'} \sqrt{2h/g}$ dall'origine O' . Come nell'esempio 3.2, entrambi gli osservatori misurano la stessa accelerazione, ma vedono traiettorie diverse perché sono diverse le condizioni iniziali.

Se invece il punto inizialmente è in quiete rispetto ad O' (e si muove quindi con velocità $v_{O'}$ rispetto ad O), durante la caduta esso continua a muoversi orizzontalmente con la stessa velocità di O' e pertanto in O' cade verticalmente. Per O il punto ha la velocità iniziale $v_{O'}$ e cadendo descrive un arco di parabola, con uno spostamento dall'origine eguale a quello prima calcolato (figure 3.5 e 3.6). La caduta appare verticale nel sistema in cui il punto è in quiete e appare parabolica nell'altro sistema. Dalla forma della traiettoria l'osservatore non può dedurre se è in quiete o in moto rettilineo uniforme.

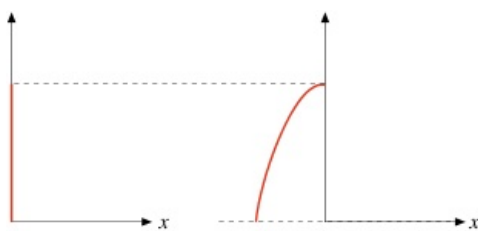


FIGURA 3.5

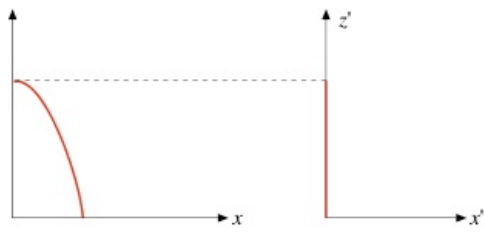


FIGURA 3.6

Visualizza soluzione

3.4 Moto di trascinamento rettilineo accelerato

Assumendo la stessa condizione geometrica del sistema O' rispetto al sistema O vista nel precedente paragrafo, supponiamo ora che O' abbia una accelerazione costante $\mathbf{a}_{O'} = \mathbf{a}_t$ e una velocità iniziale \mathbf{v}_{in} , ambedue parallele e concordi all'asse $x \equiv x'$. La posizione e la velocità di O' sono quindi espresse da

$$x_{O'} = v_{in} t + \frac{1}{2} a_t t^2 \quad , \quad v_{O'} = v_{in} + a_t t \quad .$$

Le formule di trasformazione (3.11) e (3.12) diventano

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= \mathbf{r} - \mathbf{OO}' & x' &= x - v_{in} t - \frac{1}{2} a_t t^2 \quad , & y' &= y \quad , & z' &= z \quad , \\ \mathbf{v}' &= \mathbf{v} - \mathbf{v}_{O'} & v'_x &= v_x - v_{in} - a_t t \quad , & v'_y &= v_y \quad , & v'_z &= v_z \quad , \\ \mathbf{a}' &= \mathbf{a} - \mathbf{a}_{O'} & a'_x &= a_x - a_t \quad , & a'_y &= a_y \quad , & a'_z &= a_z \quad . \end{aligned}$$

Come nel caso del moto di trascinamento rettilineo uniforme, anche ora illustriamo con esempi alcune semplici situazioni. Caratteristica distintiva è la diversità delle accelerazioni nei due sistemi, O inerziale e O' non inerziale, e quindi la diversità delle forze agenti, con conseguente comparsa delle forze d'inerzia secondo (3.10).

ESEMPIO 3.4

Il sistema O' è solidale ad un carrello che si muove con accelerazione a_t positiva rispetto al sistema O (nella situazione geometrica della figura 3.2). All'istante $t = 0$, quando O e O' coincidono, un punto materiale viene lasciato cadere da una piattaforma alta h solidale al carrello. Descrivere il moto di caduta visto da O e da O' , calcolando in particolare dove cade il punto.

Soluzione

Consideriamo prima cosa vede l'osservatore inerziale. All'istante $t = 0$ il punto materiale è ad altezza h e possiede la velocità iniziale del carrello, cioè v_{in} , parallela all'asse x ; negli istanti successivi esso è sottoposto soltanto alla forza di gravità. La traiettoria osservata è parabolica e valgono le seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} x &= v_{in} t \quad , & y &= 0 \quad , & z &= h - \frac{1}{2} g t^2 \quad , \\ v_x &= v_{in} \quad , & v_y &= 0 \quad , & v_z &= -g t \quad , \\ a_x &= 0 \quad , & a_y &= 0 \quad , & a_z &= -g \quad . \end{aligned}$$

Il tempo di caduta è $t_c = 2h/g$ e lo spazio percorso lungo l'asse x è $x_c = v_{in} t_c$. Nello stesso tempo il carrello è avanzato di $x_{O'} = v_{in} t_c + \frac{1}{2} a_t t_c^2$. Pertanto il punto materiale tocca il pavimento del carrello più indietro rispetto a O' della quantità

$$d = x_{O'} - x_c = \frac{1}{2} a_t t_c^2 = \frac{a_t h}{g} .$$

Nella figura 3.7 è rappresentata la distanza tra il punto e O' nell'istante in cui il punto tocca il pavimento; la linea punteggiata è la traiettoria vista da O , mentre gli assi tratteggiati danno la posizione iniziale del sistema O' (coincidente con O).

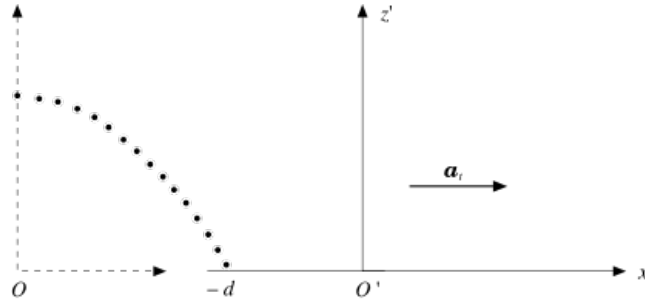


FIGURA 3.7

Se fosse $v_{in} = 0$, l'osservatore O vedrebbe una caduta rettilinea, ma la distanza d sarebbe la stessa, essendo questa indipendente da v_{in} .

Applicando le formule di trasformazione scritte all'inizio del paragrafo possiamo dedurre cosa vede O' :

$$\begin{aligned} x' &= -\frac{1}{2} a_t t^2 & , & & y' &= 0 & , & & z' &= h - \frac{1}{2} g t^2 & , \\ v_x' &= -a_t t & , & & v_y' &= 0 & , & & v_z' &= -g t & , \\ a_x' &= -a_t & , & & a_y' &= 0 & , & & a_z' &= -g & . \end{aligned}$$

Il risultato, indipendente da v_{in} , mostra come anche in O' l'accelerazione sia costante, ma diversa da \mathbf{g} . Essa vale

$$\mathbf{a}' = -a_t \mathbf{u}_{x'} - g \mathbf{u}_{z'} = \mathbf{g} - \mathbf{a}_t .$$

La velocità è proporzionale all'accelerazione, $\mathbf{v}' = \mathbf{a}' t$. Pertanto O' osserva un moto di caduta rettilineo uniformemente accelerato nel piano x', z' lungo la retta di equazione

$$z' = h + \frac{g}{a_t} x' .$$

Il punto materiale tocca il pavimento del carrello ($z' = 0$) nella posizione

$$x' = -\frac{a_t h}{g} ,$$

cioè all'indietro rispetto a O' della stessa quantità calcolata in O . L'angolo formato dalla linea di caduta con l'asse z' è

$$\theta = \text{arctg} \frac{a_t}{g} ,$$

come mostrato nella figura 3.8.

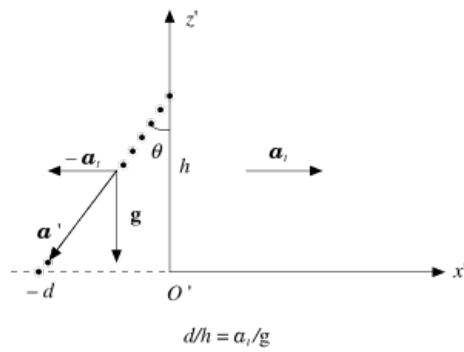


FIGURA 3.8

Secondo O l'osservazione di O' si spiega semplicemente col fatto che O' si muove di moto accelerato. Invece O' per spiegare il moto deve aggiungere alla forza peso $m\mathbf{g}$ la forza apparente $-m\mathbf{a}_t$; la somma delle due forze è eguale a $m\mathbf{a}'$. Se identifichiamo con la verticale la linea di caduta libera dei corpi, nel sistema O' c'è una verticale apparente che forma l'angolo θ con la verticale inerziale; un filo a piombo sul carrello si disporrebbe ad angolo θ rispetto all'asse z' . Dalla misura di θ si può dedurre il valore di a_t e determinare che il moto di trascinamento è accelerato; se fosse $a_t = 0$, sarebbe anche $\theta = 0$ e $d = 0$, il punto cadrebbe lungo l'asse z' , come nella figura 3.6 dell'esempio 3.3.

Visualizza soluzione

ESEMPIO 3.5

Un punto materiale di massa m è posto sul pavimento liscio di un carrello che avanza con accelerazione \mathbf{a}_t rispetto al sistema inerziale O (figura 3.9). Ad un estremo del carrello è fissata una molla di costante elastica k . Descrivere le osservazioni di O e O' .

Soluzione

Nel sistema inerziale si osserva la seguente successione di eventi. Il punto resta fermo mentre il carrello gli scorre sotto (non c'è attrito) fino a quando l'estremo libero della molla lo raggiunge. La molla inizia allora a comprimersi e il punto a muoversi; a regime il punto è fermo rispetto al carrello e si muove con accelerazione a_t rispetto a O , la molla è compressa della quantità $x_c = ma_t/k$: infatti è la forza elastica della molla che applicata al punto gli comunica l'accelerazione a_t ($kx_c = ma_t$).

Per l'osservatore O' , solidale al carrello, inizialmente il punto è in moto con accelerazione $-\mathbf{a}_t$ (in effetti $\mathbf{a}' = \mathbf{a} - \mathbf{a}_t = -\mathbf{a}_t$ dato che $\mathbf{a} = 0$). Ad un certo istante il punto raggiunge la molla che inizia a comprimersi e alla fine il punto è fermo, con la molla compressa della quantità x_c . O' conclude che sul punto, apparentemente libero, agisce invece la forza $-m\mathbf{a}_t$ che viene bilanciata, raggiunto l'equilibrio statico, dalla forza elastica della molla: $kx_c = ma_t$.

Notiamo che dalla misura di x_c si può dedurre il valore di a_t . La molla di questo esempio, come il filo a piombo del precedente, costituisce in sostanza un *accelerometro*, che misura l'accelerazione del sistema non inerziale.

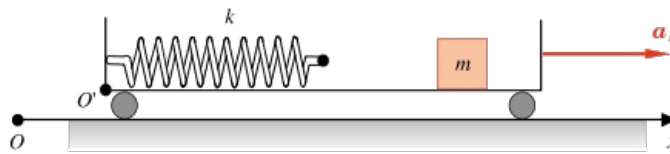


FIGURA 3.9

Visualizza soluzione

ESEMPIO 3.6

Un sistema con origine O' e asse z' verticale è solidale ad un ascensore che si muove lungo l'asse $z \equiv z'$ di un sistema inerziale con origine in O . L'ascensore inizia a salire con accelerazione \mathbf{a}_t , parallela e concorde all'asse z' , descrive poi un moto uniforme e infine decelera con accelerazione $-\mathbf{a}_t$ fino a fermarsi. Se nell'ascensore si compiono esperimenti di caduta libera dei corpi, che accelerazioni \mathbf{a}' si misurano nelle tre fasi del moto?

Soluzione

Nel sistema inerziale $\mathbf{a} = \mathbf{g}$ e quindi la relazione tra le accelerazioni è

$$\mathbf{g} = \mathbf{a}' + \mathbf{a}_t \Rightarrow \mathbf{a}' = \mathbf{g} - \mathbf{a}_t \quad .$$

Proiettando sull'asse z' abbiamo:

$$a_t > 0 \quad a' = -g - a_t = -(g + a_t) \quad ,$$

$$a_t = 0 \quad a' = -g \quad ,$$

$$a_t < 0 \quad a' = -g - (-a_t) = -(g - a_t) \quad .$$

Nella fase di accelerazione O' constata che i corpi cadono con un'accelerazione maggiore di quella di gravità (aumento apparente di peso), nella fase uniforme anche O' misura g , nella fase di decelerazione i corpi cadono con un'accelerazione minore di g (diminuzione apparente di peso). Si riveda a questo proposito la discussione sulla sensazione di peso nel paragrafo 2.7.

Se fosse $\mathbf{a}_t = \mathbf{g}$, come potrebbe accadere nella fase di decelerazione, oppure se l'ascensore scendesse in caduta libera, si troverebbe $\mathbf{a}' = \mathbf{0}$: un corpo abbandonato nell'ascensore con velocità iniziale nulla resta fermo rispetto ad O' . È la cosiddetta assenza di peso, avvertita da chi sta dentro l'ascensore e dovuta ovviamente non a una scomparsa reale dell'attrazione terrestre, ma al fatto che se tutto il sistema sta scendendo con la stessa accelerazione dei corpi che ad esso si riferiscono non c'è più accelerazione relativa e, tra l'altro, vengono a mancare le sensazioni ad essa connesse. Un effetto analogo, come è ben noto, si manifesta nei satelliti artificiali che ruotano intorno alla terra.

La spiegazione dell'assenza di accelerazione di gravità è quella data da O che misura in ogni caso g e ragiona in base a (3.10), attribuendo le variazioni all'accelerazione di trascinarsi di O' . Ma O' , se non ha a priori questo tipo di informazioni, ragiona in modo diverso. Egli vede che in certe situazioni l'accelerazione di un corpo che cade è g , in accordo con quanto gli può essere comunicato

dall'esterno, ma sperimenta anche situazioni diverse. Se si costruisce un accelerometro e lo tara opportunamente, constata che la misura fornitagli dallo strumento è proprio la correzione da apportare a g . O' postula pertanto che in certe situazioni, che è capace di mettere in evidenza, ha origine un'accelerazione supplementare che si compone con \mathbf{g} per dare i risultati osservati ovvero che alla forza peso va aggiunto il termine $-m \mathbf{a}_{\text{suppl}}$; sulle cause del fenomeno non è però in grado di fare alcuna ipotesi. Notiamo che dall'esame delle misure di a' e a_{suppl} egli sarebbe in grado di accorgersi da solo che c'è un valore speciale, appunto g , che si ottiene sempre sommando o sottraendo i valori di a' e a_{suppl} ; solo in seguito a un'informazione esterna potrebbe però accorgersi che a_{suppl} non è altro che a_t e che quindi egli ha un modo per mettere in evidenza cosa sta succedendo al suo sistema (se il moto di O' fosse sempre uniforme egli misurerebbe sempre g e non avrebbe alcun modo per mettere in evidenza che è in movimento).

Visualizza soluzione

3.5 Moto di trascinamento rotatorio uniforme

Supponiamo ora che il moto di trascinamento sia soltanto rotatorio uniforme e per comodità prendiamo coincidenti le origini dei due sistemi ($\mathbf{r} = \mathbf{r}'$). Abbiamo $\mathbf{v}_{O'} = 0$, $\mathbf{a}_{O'} = 0$, $\boldsymbol{\omega} = \text{costante}$, e le relazioni (3.4) e (3.7) diventano

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (3.13)$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' \quad (3.14)$$

Riscriviamo così (3.10):

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_{\text{centr}} + \mathbf{F}_{\text{Cor}} = m \mathbf{a}' ;$$

la *forza centrifuga*, $\mathbf{F}_{\text{centr}} = -m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$, e la *forza di Coriolis*, $\mathbf{F}_{\text{Cor}} = -2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'$, hanno lo stesso ruolo della forza $-m\mathbf{a}_t$ vista nel paragrafo precedente.

Il sistema inerziale O è una coppia di assi cartesiani x, y posti in un piano orizzontale e il sistema non inerziale O' un'altra coppia di assi x', y' con la stessa origine e nello stesso piano, ruotanti con velocità angolare costante $\boldsymbol{\omega}$. Si può ad esempio assumere gli assi x' e y' solidali ad un disco posto nel piano x, y che ruota rispetto ad un asse passante per il suo centro e ortogonale al piano x, y .

Se poniamo un punto materiale sul disco, con attrito nullo tra il punto e il piano del disco, il punto rimane fermo mentre il disco gira sotto il punto. Se il punto lasciasse una traccia, osserveremmo una circonferenza di raggio r , con centro nell'origine comune dei due sistemi.

Per l'osservatore O il punto è in quiete, mentre per quello ruotante O' il punto descrive un moto circolare uniforme, in base a (3.13) e (3.14). Infatti nei due sistemi il moto del punto ha queste caratteristiche:

$$\text{sistema } O \quad \mathbf{v} = 0 \quad , \quad \mathbf{a} = 0$$

$$\text{sistema } O' \quad \mathbf{v}' = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad , \quad \mathbf{a}' = -\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) - 2\boldsymbol{\omega} \times (-\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}).$$

Pertanto nel sistema O' accelerato il punto descrive una circonferenza in verso contrario al moto del disco, con velocità costante in modulo e pari a ωr e con accelerazione, puramente centripeta, di valore $\omega^2 r$ (in figura 3.10 è mostrata la traiettoria che è percorsa in senso orario in quanto il disco ruota in senso antiorario). Però O' deve ipotizzare che sul punto agiscono due forze (centrifuga e di Coriolis) le quali, combinandosi, comunicano al punto l'accelerazione \mathbf{a}' ; resta per O' il problema dell'origine di queste forze.

Leghiamo ora il punto con un filo all'asse di rotazione e diamogli una velocità di modulo ωr in modo tale che ruoti con la stessa velocità del punto del disco su cui si trova. La situazione è opposta a quella precedente: per O il punto descrive un moto circolare uniforme sotto l'azione della tensione del filo, mentre O' vede il punto fermo, $\mathbf{v}' = 0$ e $\mathbf{a}' = 0$; tutto ciò è in accordo con (3.13) e (3.14).

Forza centrifuga
Forza di Coriolis

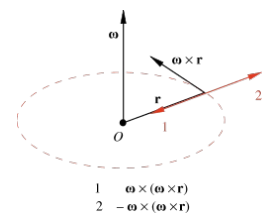


FIGURA 3.10

Però O' osserva pure che il filo è teso malgrado il punto sia fermo e quindi è costretto a supporre che sul punto agisca una forza diretta verso l'esterno, che chiama forza centrifuga, bilanciata dalla tensione del filo.

Per verificare la sua ipotesi O' traccia un segno radiale sul disco e recide il legame tra il punto e l'origine degli assi, immaginando di vedere il punto allontanarsi radialmente sotto l'azione della forza centrifuga, in quanto è stata annullata la forza esercitata dal filo. In effetti O' osserva ora un moto del punto materiale, però lungo una traiettoria curvilinea, e deve quindi ammettere, come già fatto per il primo esempio, che sui punti in moto nel suo sistema di riferimento ($\mathbf{v}' \neq 0$) agisca un'altra forza che non si manifesta quando sono in quiete; si tratta precisamente della forza di Coriolis. È chiaro che O dà un'altra interpretazione dell'ultima fase dell'esperimento, cioè dopo il taglio del filo. Infatti nel sistema inerziale il punto materiale all'istante in cui viene lasciato libero inizia a muoversi di moto rettilineo uniforme con direzione tangente alla circonferenza nella posizione in cui avviene il distacco dal vincolo (filo). Le accelerazioni nei due sistemi sono:

$$\mathbf{a} = 0 \quad , \quad \mathbf{a}' = -\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) - 2 \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' \quad .$$

Il problema che si presenta ad O' è sempre la comprensione dell'origine della forza centrifuga e di quella di Coriolis.

La figura 3.11 mostra le posizioni del punto libero viste dai due osservatori negli istanti zero, $T/12$, $T/6$, $T/4$ se T è il periodo di rotazione del disco, ovvero del sistema non inerziale.

Riprendiamo ora in esame il problema del *pendolo conico*, discusso nel terzo esempio del paragrafo 2.13, considerando un sistema con origine sull'asse verticale e ruotante con la stessa velocità angolare del pendolo. In questo sistema, non inerziale, il pendolo è immobile e forma con la verticale l'angolo θ tale che $\text{tg } \theta = \omega^2 r/g$. Siamo in una situazione di equilibrio statico, che necessita l'introduzione di una forza che bilanci la risultante della tensione del filo e del peso. Tale forza è la forza centrifuga, che esiste solo in questo sistema, e vale $\mathbf{F}_{\text{centr}} = -m g \text{tg} \theta \mathbf{u}_N = -m \omega^2 r \mathbf{u}_N$; \mathbf{u}_N è un versore orizzontale diretto verso l'asse attorno a cui ruota il pendolo.

Notiamo che se il moto di trascinamento è rotatorio, uniforme o vario, è sempre $\mathbf{a}_t \neq 0$ e quindi non può mai sussistere l'eguaglianza $\mathbf{a} = \mathbf{a}'$. Non esiste cioè l'analogo rotatorio della relatività galileiana: in un sistema rotante è sempre possibile mettere in evidenza la rotazione (e più in generale in un sistema non inerziale l'accelerazione a_t), cioè accorgersi di essere in movimento.

A conclusione della serie di esempi di questo paragrafo e dei precedenti, vogliamo brevemente riprendere l'argomento delle forze d'inerzia. Da una parte dobbiamo ripetere che esse non hanno esistenza reale in quanto non derivano dalle interazioni fondamentali e non compaiono nella descrizione del moto effettuata in un sistema di riferimento inerziale. Per altro in un sistema non

inerziale esse rappresentano effetti genuini e sono necessarie per spiegare le osservazioni sperimentali. Ad esempio, in un sistema rotante è corretto attribuire alla forza centrifuga la tendenza allo spostamento radiale verso l'esterno e alla forza di Coriolis l'incurvamento della traiettoria osservata, in un veicolo che accelera o rallenta lo spostamento all'indietro o in avanti è reale e si spiega solo con la forza $-m\mathbf{a}_t$. La cosa importante è avere ben chiara l'origine di tali forze apparenti, utilizzarle correttamente dove appropriato e non estendere la loro esistenza ai sistemi inerziali.

ESEMPIO 3.7

Un cilindro cavo, di raggio $R = 2$ m, ruota rispetto al proprio asse verticale con velocità angolare ω . Un corpo poggiato contro la parete interna del cilindro ruota insieme ad esso, ma non cade. Se il coefficiente di attrito statico tra corpo e parete del cilindro è $\mu_s = 0.7$, calcolare il valore minimo che deve avere ω .

Soluzione

Risolviamo prima il problema in un sistema inerziale fisso al suolo (si veda l'esempio 2.10). La reazione N della parete, dovuta al fatto che il corpo tendendo a proseguire in linea retta preme sulla parete, è la forza centripeta che permette la rotazione del corpo, $N = m\omega^2 R$. Dato che il corpo non cade deve essere

$$mg \leq \mu_s N = \mu_s m\omega^2 R$$

$$\Rightarrow \omega^2 \geq \frac{g}{\mu_s R}, \quad \omega \geq 2.6 \text{ rad/s.}$$

Nel sistema rotante solidale al cilindro il corpo è in equilibrio statico, sia orizzontale che verticale. Orizzontalmente esso è sottoposto alla reazione N e alla forza centrifuga $m\omega^2 R$, che devono essere eguali in modulo (e sono opposte in verso); verticalmente la condizione è quella già scritta nel sistema inerziale (non c'è accelerazione di trascinamento verticale). Si trova ovviamente lo stesso risultato, ma bisogna introdurre la forza centrifuga, che non esiste nel sistema inerziale.

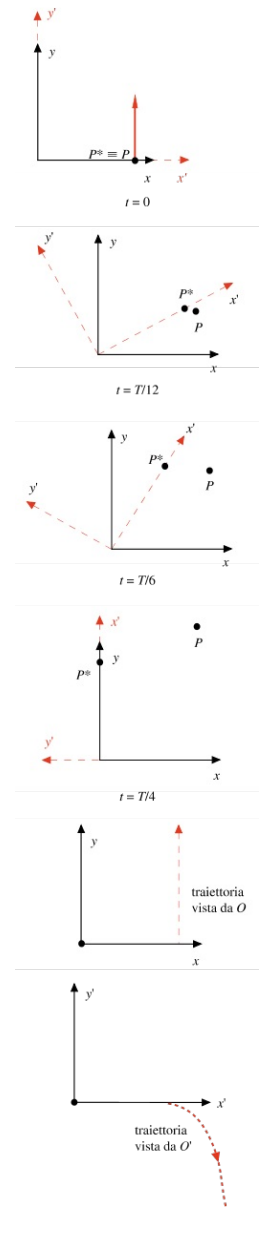


FIGURA 3.11

[Visualizza soluzione](#)

3.6 Il moto rispetto alla terra

Nei paragrafi precedenti abbiamo introdotto la nozione di sistema inerziale senza però darne un esempio: lo facciamo adesso, dicendo che un sistema di riferimento con l'origine nel centro di massa del sistema solare e gli assi diretti verso determinate *stelle fisse* è con ottima approssimazione un sistema inerziale, come lo sono tutti gli altri sistemi in moto rettilineo uniforme rispetto ad esso. La verifica è data dal fatto che, entro gli errori sperimentali, in tali sistemi vale la legge di Newton (2.1) con tutte le sue conseguenze; in particolare risultano accuratissime le previsioni sul moto dei vari corpi celesti e dei satelliti artificiali.

Di norma le misure vengono fatte in un riferimento terrestre: ora, qualsiasi riferimento solidale alla terra, per esempio con un asse diretto come l'asse terrestre e gli altri due nel piano dell'equatore, ruota insieme alla terra e non è inerziale; anche un sistema con origine nel centro della terra e assi sempre paralleli a quelli dei sistemi inerziali di cui sopra non è inerziale in quanto si muove di moto traslatorio accelerato (la traiettoria dell'origine è curvilinea).

Quindi nelle misure terrestri compaiono termini correttivi dovuti alle forze apparenti ed è conveniente riferire tali misure, attraverso note formule di trasformazione, a un sistema inerziale (si sa, per esempio, che il moto dei pianeti visto dalla terra è molto complicato). Le correzioni hanno un'importanza che è in relazione con le misure e con la precisione voluta: nel caso di misure astronomiche sono fondamentali, come pure nei moti terrestri su notevoli distanze; per tempi e percorsi brevi possono essere trascurabili in assoluto o rispetto ad altri effetti più importanti, come l'attrito dell'aria.

Dato che intendiamo descrivere e valutare quantitativamente gli effetti dovuti al moto della terra, cominciamo col fornire alcuni dati numerici. Approssimiamo la terra ad una sfera che compie un moto di rivoluzione attorno al sole lungo un'orbita ellittica, che praticamente coincide con una circonferenza, ed un moto di rotazione su se stessa. I dati caratteristici delle proprietà fisiche della terra e dei due moti, rivoluzione e rotazione, sono riportati nella tabella che segue.

La velocità e l'accelerazione di un punto P alla superficie della terra (si veda figura 3.12) sono

$$v(P) = \omega r = \omega R \cos\theta = 4.64 \cdot 10^2 \cos\theta \text{ m/s} ,$$

$$a(P) = \omega^2 r = \omega^2 R \cos\theta = 3.38 \cdot 10^{-2} \cos\theta \text{ m/s}^2 .$$

In particolare, per un punto all'equatore

$$v = 4.64 \cdot 10^2 \text{ m/s} = 1671 \text{ km/h} ,$$

$$a = 3.38 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}^2 .$$

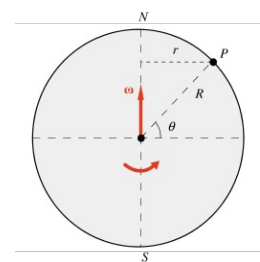


FIGURA 3.12

Tabella 3.1 Dati sul moto della terra

massa della terra	m_T	$5.98 \cdot 10^{24}$ kg
raggio della terra	R	$6.37 \cdot 10^6$ m
raggio dell'orbita	R_0	$1.49 \cdot 10^{11}$ m
periodo di rivoluzione	T_0	$3.16 \cdot 10^7$ s
velocità di rivoluzione	$v_0 = \frac{2\pi R_0}{T_0}$	$2.96 \cdot 10^4$ m/s = 106655 km/h
velocità angolare di rivoluzione	$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$	$1.99 \cdot 10^{-7}$ rad/s
accelerazione centripeta di rivoluzione	$a_0 = \omega_0^2 R_0$	$5.88 \cdot 10^{-3}$ m/s ²
periodo di rotazione	T	$8.64 \cdot 10^4$ s
velocità angolare di rotazione	$\omega = \frac{2\pi}{T}$	$7.29 \cdot 10^{-5}$ rad/s

Un sistema di riferimento solidale alla terra, con asse z orientato da sud a nord e assi x, y nel piano equatoriale, ruota con velocità angolare $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{u}_z$, essendo \mathbf{u}_z il versore dell'asse z e $\omega = 7.29 \cdot 10^{-5}$ rad/s.

Un punto in moto vicino alla superficie terrestre è sottoposto alla forza peso $m \mathbf{g}_0$ e in base a (3.7)

$$\mathbf{g}_0 = \mathbf{g} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$$

dove \mathbf{g} e \mathbf{v} sono rispettivamente l'accelerazione e la velocità misurate nel sistema solidale alla terra. Abbiamo trascurato l'accelerazione centripeta del centro della terra, dovuta al moto di rivoluzione. Pertanto l'accelerazione di gravità misurata dal sistema terrestre è data da

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}_0 - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$$

Il termine centrifugo è ortogonale all'asse z di rotazione e diretto verso l'esterno, in entrambi gli emisferi. Esso vale in modulo, come già calcolato, $3.38 \cdot 10^{-2} \cos\theta$ m/s². Le due componenti, radiale (parallela e concorde a \mathbf{R}) e trasversa (diretta sempre verso l'equatore) valgono rispettivamente

$$a_R = 3.38 \cdot 10^{-2} \cos^2\theta \quad , \quad a_\theta = 3.38 \cdot 10^{-2} \cos\theta \sin\theta \text{ m/s}^2 \quad .$$

La correzione centrifuga all'accelerazione di gravità è nulla al polo, dove \mathbf{R} e $\boldsymbol{\omega}$ sono paralleli, e massima all'equatore, dove sono ortogonali. Gli effetti sono la diminuzione (piccola) del valore di \mathbf{g}_0 con dipendenza dalla latitudine θ e l'alterazione della verticale determinata con il filo a piombo; ad esempio per $\theta = 45^\circ$ la deviazione è dell'ordine di 0.1° .

L'effetto del termine di Coriolis è più complicato in quanto dipende dalla velocità \mathbf{v} del punto rispetto al sistema solidale con la terra.

Se per esempio consideriamo un punto che cade da un'altezza h , con velocità iniziale nulla, l'azione della forza centrifuga comporta uno spostamento verso

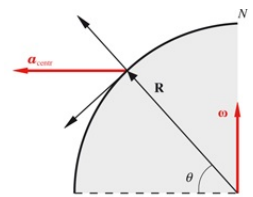


FIGURA 3.13

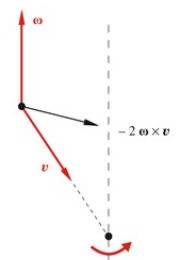


FIGURA 3.14

l'equatore lungo un meridiano; invece la forza di Coriolis, tangente a un parallelo e rivolta come in figura 3.14, provoca uno spostamento verso *oriente* in entrambi gli emisferi. L'effetto complessivo è la combinazione dei due.

Si trova che le due deviazioni rispetto al piede della verticale *vera* sono

$$x_{\text{centr}} = 3.45 \cdot 10^{-3} h \cos\theta \sin\theta \text{ m} ,$$

$$x_{\text{Cor}} = 2.2 \cdot 10^{-5} h^{3/2} \cos\theta \text{ m} .$$

$$\text{Con } h = 100 \text{ m e } \theta = 45^\circ , \quad x_{\text{centr}} \cong 17.3 \text{ cm} , \quad x_{\text{Cor}} \cong 1.6 \text{ cm} .$$

Qual è la *spiegazione inerziale* degli effetti misurati? Il punto P che cade dall'altezza h ($= PQ$) ha velocità iniziale $\mathbf{v}_{P,0}$, in quanto all'istante $t = 0$ sta ruotando insieme alla terra, e accelerazione \mathbf{g}_0 . Il moto avviene nel piano individuato da $\mathbf{v}_{P,0}$ e \mathbf{g}_0 , la cui intersezione con la superficie terrestre è indicata in figura 3.15 dalla linea punteggiata; PP rappresenta la traiettoria del punto. La velocità iniziale è tangente a un parallelo, però durante la caduta non c'è nessun vincolo che tenga il punto su una traiettoria circolare e perciò esso si sposta verso l'equatore, come è chiaro dalla figura. Inoltre poiché P è inizialmente a una distanza dall'asse di rotazione maggiore di quella di Q , esso ha velocità maggiore di Q e quindi cade più a est di Q . Correttamente interpretati, questi effetti mettono in evidenza la rotazione terrestre.

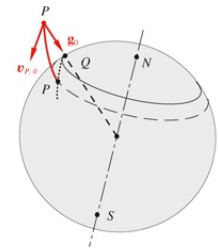


FIGURA 3.15

Un effetto più vistoso a prova della rotazione terrestre è quello mostrato dal *pendolo di Foucault*. Immaginiamo di fare oscillare un pendolo semplice al polo: il moto è contenuto nel piano \mathbf{g}_0, \mathbf{v} , fisso in un sistema inerziale; però dalla terra, sistema non inerziale, si vede ruotare il piano di oscillazione del pendolo, a causa della forza di Coriolis. Un giro completo dura 24 ore. Se il pendolo lasciasse una traccia sul suolo si vedrebbero le linee disegnate in figura 3.16. Naturalmente l'esperimento è stato eseguito alle nostre latitudini, ma l'effetto è lo stesso anche se un giro completo viene compiuto in un tempo che dipende dalla latitudine.

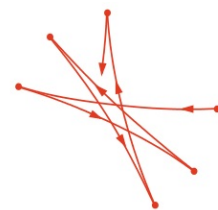


FIGURA 3.16

È interessante osservare che i primati di lancio del giavellotto o del disco, a parità di condizioni atmosferiche e di attrito dell'aria, sono influenzati in modo non trascurabile dalla forza centrifuga e di Coriolis.

3.7 Commenti e note

Raccogliamo in questo paragrafo alcuni commenti e delle note che altrimenti avrebbero appesantito il testo.

Una caratteristica importante di (3.1), (3.4), (3.7) è di essere relazioni vettoriali e quindi valere intrinsecamente. Però ciascuna si può tradurre in tre relazioni tra le componenti dei vari vettori in un determinato sistema di riferimento, che deve essere lo stesso per tutti i termini. Se per esempio si sceglie il sistema O tutte le componenti dei termini con l'apice (\mathbf{r}' , \mathbf{v}' , \mathbf{a}') vanno riferite al sistema O e quindi è necessario stabilire le relazioni di trasformazione che permettono di passare dalle coordinate valide in O' a quelle valide in O .

La semplicità della geometria della figura 3.2, scelta per il moto relativo traslatorio, rende le formule di trasformazione praticamente immediate e di facile uso. In particolare, il fatto che gli assi dei sistemi siano paralleli tra loro ha come conseguenza che le componenti di un vettore siano le stesse nei due sistemi; ad esempio la componente v_x' del vettore velocità \mathbf{v}' è eguale alla componente v_x (si veda il paragrafo C.2 dell'appendice C). Se il sistema O' avesse gli assi ruotati rispetto a quelli di O , con l'angolo tra assi omologhi costante durante il moto, le formule di trasformazione sarebbero più complicate, pur restando le conclusioni generali le stesse. Sempre con riferimento a \mathbf{v}' e alla relazione $\mathbf{v} = v_{O'} + \mathbf{v}'$, nota la componente v_x' si dovrebbe trasformarla in v_x e solo allora scrivere $v_x = v_{O'} + v_x'$, proiezione della relazione vettoriale sull'asse x del sistema O .

Facciamo un esempio esplicito non per un moto relativo traslatorio, ma per il moto rotatorio dei due sistemi del paragrafo 3.5: gli assi di O' ruotano a rispetto a quelli di O con velocità angolare costante ω e l'angolo tra x' e x è $\theta = \omega t$: la (3.1) si riduce a $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$. Ciò non vuol dire che valgono le relazioni $x = x'$, $y = y'$, manifestamente false e concettualmente sbagliate perché eguagliano le componenti viste da due diversi sistemi. Le relazioni corrette sono $r_x = r'_x \cos \theta - r'_y \sin \theta$, $r_y = r'_x \sin \theta + r'_y \cos \theta$, cioè

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \omega t - y' \sin \omega t \quad , \\ y &= x' \sin \omega t + y' \cos \omega t \quad , \end{aligned}$$

con il che l'eguaglianza è espressa nel sistema O , oppure passando nel sistema O' $r'_x = r_x \cos \theta + r_y \sin \theta$, $r'_y = r_y \cos \theta - r_x \sin \theta$, cioè

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \omega t + y \sin \omega t \quad , \\ y' &= -x \sin \omega t + y \cos \omega t \quad . \end{aligned}$$

Queste formule di trasformazione esprimono il legame tra le coordinate di uno stesso punto nei due sistemi (ottenuti uno dall'altro tramite una rotazione nel piano x, y). Esse valgono anche per le componenti di un qualsiasi altro

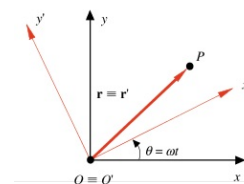


FIGURA 3.17

vettore. Notiamo esplicitamente, e lo si verifica subito, che una rotazione lascia invariato il modulo di un vettore.

Si è già rivelato nella dimostrazione del teorema delle velocità relative (3.4) che $d\mathbf{r}'/dt$ non è \mathbf{v}' ; analogamente $d\mathbf{v}'/dt$ non è \mathbf{a}' . Questo perché i versori \mathbf{u}_x' , \mathbf{u}_y' , \mathbf{u}_z' sono variabili nel tempo, rispetto a O . L'osservatore O' trova però l'usuale cinematica: nel suo sistema

$$\mathbf{a}' = d\mathbf{v}'/dt \text{ e } \mathbf{v}' = d\mathbf{r}'/dt \quad ;$$

non gli torna invece che $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$ e $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$.

La quarta relazione fondamentale, oltre alle tre citate sopra, è (3.10), che permette di estendere la legge di Newton ai sistemi non inerziali. Questa però è l'unica estensione che ci limitiamo a fare; cioè non cercheremo di sviluppare in un generico sistema lo studio della dinamica del punto, come già fatto in un sistema inerziale partendo da (2.1). La procedura da seguire piuttosto è di trasformare le misure eseguite in un sistema non inerziale riferendole a un sistema inerziale e, a questo punto, interpretarle con le leggi note.

Anche tutti i successivi sviluppi della teoria (sistemi di punti e corpi rigidi) verranno ambientati naturalmente in sistemi di riferimento inerziali, con una sola importante eccezione: troveremo significativo in qualche caso riferire il moto anche al cosiddetto sistema di riferimento del centro di massa, che in generale non è un sistema inerziale. Avremo allora modo di applicare il formalismo sviluppato in questo capitolo.

Nota sulla composizione di moti

Le operazioni essenzialmente formali di scomposizione del moto di un punto in tre moti rettilinei lungo gli assi e viceversa, che abbiamo visto nel primo capitolo, trovano applicazione nell'ambito del moto relativo, anche se il contesto fisico è diverso. Il moto rispetto a O può sempre essere pensato come composizione del moto relativo rispetto a O' e del moto di trascinamento di O' rispetto a O .

Un esempio tipico è quello di una barca che attraversa un fiume e viene trasportata dalla corrente. Supponiamo che il fiume sia rettilineo e largo d , che la velocità della corrente sia \mathbf{v}_F (velocità del moto di trascinamento, costante), che la barca si muova sempre ortogonalmente a \mathbf{v}_F con velocità \mathbf{v}_B costante (relativa al sistema O' che si sposta con la corrente).

Se la barca parte dal punto A , quanto a valle si trova il punto B di arrivo? Il tempo di attraversamento si calcola più facilmente nel sistema O' e vale d / v_B ; in questo tempo la corrente percorre il tratto $b = (d/v_B)v_F$ e ciò risponde alla domanda. La traiettoria della barca rispetto a O , solidale alle rive, è un segmento lungo $\sqrt{d^2+b^2}$ che forma con la corrente l'angolo $\theta = \arctg (v_B/v_F)$; la velocità rispetto a O è $\sqrt{v_B^2+v_F^2}$

Note sulle formule di Poisson

Scriviamo le componenti cartesiane del vettore $d\mathbf{u}_x / dt$ come proiezioni del vettore stesso sugli assi:

$$\frac{d\mathbf{u}_x}{dt} = \left(\frac{d\mathbf{u}_x}{dt} \cdot \mathbf{u}_x \right) \mathbf{u}_x + \left(\frac{d\mathbf{u}_x}{dt} \cdot \mathbf{u}_y \right) \mathbf{u}_y + \left(\frac{d\mathbf{u}_x}{dt} \cdot \mathbf{u}_z \right) \mathbf{u}_z \quad .$$

Il primo termine però è nullo perché, come abbiamo già ricavato più volte, $d\mathbf{u}_x/dt$ è ortogonale a \mathbf{u}_x . Ragionando allo stesso modo per $d\mathbf{u}_y/dt$ e $d\mathbf{u}_z/dt$ abbiamo:

$$\frac{d\mathbf{u}_x}{dt} = \left(\frac{d\mathbf{u}_x}{dt} \cdot \mathbf{u}_y \right) \mathbf{u}_y + \left(\frac{d\mathbf{u}_x}{dt} \cdot \mathbf{u}_z \right) \mathbf{u}_z \quad ,$$

$$\frac{d\mathbf{u}_y}{dt} = \left(\frac{d\mathbf{u}_y}{dt} \cdot \mathbf{u}_x \right) \mathbf{u}_x + \left(\frac{d\mathbf{u}_y}{dt} \cdot \mathbf{u}_z \right) \mathbf{u}_z \quad ,$$

$$\frac{d\mathbf{u}_z}{dt} = \left(\frac{d\mathbf{u}_z}{dt} \cdot \mathbf{u}_x \right) \mathbf{u}_x + \left(\frac{d\mathbf{u}_z}{dt} \cdot \mathbf{u}_y \right) \mathbf{u}_y \quad .$$

Le sei componenti non sono indipendenti, ma eguali in modulo a due a due; infatti derivando la $\mathbf{u}_x \cdot \mathbf{u}_y = 0$ si ricava

$$\frac{d\mathbf{u}_x}{dt} \cdot \mathbf{u}_y = - \frac{d\mathbf{u}_y}{dt} \cdot \mathbf{u}_x \quad ;$$

analogamente

$$\frac{d\mathbf{u}_x}{dt} \cdot \mathbf{u}_z = - \frac{d\mathbf{u}_z}{dt} \cdot \mathbf{u}_x \quad , \quad \frac{d\mathbf{u}_y}{dt} \cdot \mathbf{u}_z = - \frac{d\mathbf{u}_z}{dt} \cdot \mathbf{u}_y \quad .$$

Definiamo il vettore $\boldsymbol{\omega}$ che ha come componenti i tre termini indipendenti:

$$\omega_x = \frac{d\mathbf{u}_y}{dt} \cdot \mathbf{u}_z \quad , \quad \omega_y = \frac{d\mathbf{u}_z}{dt} \cdot \mathbf{u}_x \quad , \quad \omega_z = \frac{d\mathbf{u}_x}{dt} \cdot \mathbf{u}_y \quad .$$

Dalle proprietà del prodotto vettoriale (appendice C) ricaviamo infine

$$\frac{d\mathbf{u}_x}{dt} = \omega_z \mathbf{u}_y - \omega_y \mathbf{u}_z = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}_x \quad ,$$

$$\frac{d\mathbf{u}_y}{dt} = -\omega_z \mathbf{u}_x + \omega_x \mathbf{u}_z = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}_y \quad ,$$

$$\frac{d\mathbf{u}_z}{dt} = \omega_y \mathbf{u}_x - \omega_x \mathbf{u}_y = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}_z \quad .$$

Vediamo così che esiste un vettore $\boldsymbol{\omega}$ tramite il quale si possono scrivere

tutte e tre le derivate. La dimostrazione è valida per qualsiasi terna cartesiana trirettangola e quindi in particolare per il sistema O' .

Nota sui sistemi di riferimento in coordinate polari

Nella descrizione del moto piano in coordinate polari il punto P è individuato dalla distanza r dal polo O e dall'angolo θ formato da \mathbf{r} con un asse di riferimento. Chiamiamo fisso il sistema x, y e mobile il sistema definito dai versori \mathbf{u}_r e \mathbf{u}_θ , che rispetto al sistema fisso ruota con velocità angolare $\omega = d\theta/dt$. Una caratteristica di questo sistema mobile è che il punto P si trova sempre sull'asse x' , per cui il moto relativo è rettilineo con

$$\mathbf{v}' = \frac{dr}{dt} \mathbf{u}_r, \quad \mathbf{a}' = \frac{d^2r}{dt^2} \mathbf{u}_r.$$

Confrontando le espressioni in notazione polare per la velocità (1.19) e l'accelerazione (1.23), introdotte nel primo capitolo, e le relazioni (3.4) e (3.7), ci accorgiamo che sono identiche. Infatti

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \frac{dr}{dt} \mathbf{u}_r + r \frac{d\theta}{dt} \mathbf{u}_\theta = \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \\ \mathbf{a} &= \frac{d^2r}{dt^2} \mathbf{u}_r - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \mathbf{u}_r + r \frac{d^2\theta}{dt^2} \mathbf{u}_\theta + 2 \frac{d\theta}{dt} \frac{dr}{dt} \mathbf{u}_\theta = \\ &= \mathbf{a}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' \end{aligned}$$

In effetti il moto piano in coordinate polari è riferito ad un particolare sistema mobile e quindi, per essere riferito al sistema fisso x, y , deve obbedire ai teoremi del moto relativo.

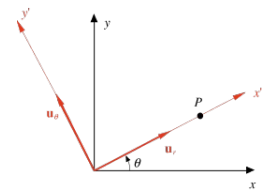


FIGURA 3.18

3.8 Teoria della relatività. Trasformazioni di Lorentz

La proprietà più notevole che abbiamo trovato studiando il moto relativo è la relatività galileiana, che ora riformuliamo così: le leggi della meccanica sono invarianti rispetto alle trasformazioni tipo (3.11), che legano le coordinate di due sistemi di riferimento in moto rettilineo uniforme l'uno rispetto all'altro. Un fenomeno osservato e spiegato in un sistema ha la stessa spiegazione dinamica nell'altro: la cinematica è diversa perché diverse sono le condizioni iniziali, ma la legge fisica è la stessa, nella sostanza e nella struttura. Da ciò segue tra l'altro che con esperimenti di meccanica compiuti in sistemi inerziali non è possibile mettere in evidenza se il sistema di riferimento è in moto o è in quiete, fatto rilevato già da Galileo.

Nella seconda metà dell'ottocento diverse circostanze portarono a una crisi del principio di relatività galileiano. I fenomeni elettrici e magnetici vennero inquadrati nella teoria dell'elettromagnetismo di Maxwell, che incluse in questo contesto anche i fenomeni luminosi; le equazioni di Maxwell risultarono però non invarianti rispetto alle trasformazioni galileiane. Inoltre nel 1887 venne provato sperimentalmente da Michelson e Morley che la velocità c della luce nel vuoto ha lo stesso valore in qualsiasi sistema di riferimento inerziale, cioè non si compone con la velocità di trascinamento dando per esempio $c + v$ o $c - v$, come vorrebbero le trasformazioni galileiane delle velocità.

La soluzione venne proposta da Einstein nel 1905; egli estese il principio di relatività, assumendo che tutte le leggi della Fisica siano invarianti quando considerate in diversi sistemi di riferimento inerziali e che quindi con nessun esperimento sia possibile mettere in evidenza il moto del sistema di riferimento. In particolare devono essere invarianti le equazioni di Maxwell e la legge sperimentale secondo cui la velocità della luce nel vuoto vale sempre c , indipendentemente dal moto della sorgente e dell'osservatore. La trasformazione di coordinate tra due sistemi inerziali che permette di soddisfare tali richieste non può essere del tipo (3.11), ma risulta, nel caso semplice della figura 3.2 e indicando con v_0 la velocità costante di trascinamento,

$$\begin{aligned} x' &= \gamma_0 (x - v_0 t) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \gamma_0 \left(t - \frac{v_0}{c^2} x \right) \end{aligned} \quad \gamma_0 = \frac{1}{1 - \frac{v_0^2}{c^2}} \quad (3.15)$$

Il valore di c , velocità della luce nel vuoto, è con ottima approssimazione $3 \cdot 10^8$ m/s.

Un fenomeno che avviene nel sistema O in un punto di coordinate x, y, z al

tempo t , ovvero, come si suol dire, un *evento* caratterizzato da x, y, z, t , viene osservato dal sistema O' , in moto con velocità v_0 , nel punto di coordinate x', y', z' al tempo t' . Il fatto più notevole sta nella quarta relazione: nelle (3.11) si assumeva implicitamente $t = t'$, cioè che il tempo fosse assoluto, ora invece *anche il tempo ha un valore relativo al sistema di riferimento*.

Le (3.15) costituiscono una *trasformazione di Lorentz* e furono scritte da Lorentz molto prima del 1905, quando egli si pose il problema matematico di trovare quali fossero le trasformazioni di coordinate tra due sistemi inerziali che rendessero invarianti le equazioni di Maxwell. Einstein ne comprese il significato profondo e le pose alla base della teoria della relatività (detta ristretta o speciale).

La trasformazione di Lorentz è dunque la trasformazione di coordinate spaziali e temporali più generale che lega le osservazioni fatte in due diversi sistemi inerziali; l'invarianza rispetto ad una trasformazione di Lorentz è un requisito fondamentale che, in base al principio di relatività, deve possedere qualsiasi legge fisica. Come si è detto, le equazioni di Maxwell possiedono questo requisito e vedremo tra breve che anche il valore c della velocità della luce nel vuoto è preservato da una trasformazione di Lorentz.

Invece la seconda legge di Newton, che abbiamo utilizzato per la descrizione della dinamica del punto materiale, non è invariante rispetto ad una trasformazione di Lorentz. Questo fatto però non le toglie validità, ne limita soltanto il campo di applicabilità. In effetti la meccanica newtoniana, sia quella studiata finora che quella contenuta nei prossimi capitoli, e le trasformazioni galileiane rispetto alle quali essa è invariante, sono perfettamente adeguate alla descrizione dei fenomeni meccanici ordinari, che coinvolgono corpi macroscopici aventi velocità molto inferiori a quelle della luce; del resto, è proprio dalla sperimentazione compiuta sul moto di questi corpi che le leggi della meccanica sono state ricavate. Non è però lecita l'estensione a fenomeni che comportino velocità prossime o eguali a quella della luce, come risultò verso la fine dell'ottocento e come si verifica facilmente operando con particelle microscopiche a livello atomico e nucleare. In queste situazioni occorre ridefinire la quantità di moto e l'energia e utilizzare la legge del moto $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$; accenneremo brevemente a questa meccanica relativistica nel successivo paragrafo. Caratteristica saliente della nuova formulazione è che essa riproduce, quando trattiamo i fenomeni ordinari, la formulazione newtoniana: infatti, se v_0 è molto minore di c , γ_0 vale a tutti gli effetti 1, v_0/c^2 vale zero e le (3.15) diventano le (3.11); analogamente le grandezze relativistiche, definite per qualsiasi velocità, si riconducono alle usuali grandezze meccaniche per piccole velocità.

Vediamo adesso alcune prime conseguenze delle (3.15).

Trasformazione delle velocità

Nel sistema di origine O la velocità di un punto materiale ha le componenti $dx/dt, dy/dt, dz/dt$; nel sistema O' si hanno le componenti $dx'/dt', dy'/dt', dz'/dt'$. Dalla prima e dalla quarta delle (3.15) ricaviamo

$$dx' = \gamma_0 (dx - v_0 dt) = \gamma_0 dt \left(\frac{dx}{dt} - v_0 \right) = \gamma_0 dt (v_x - v_0) \quad ,$$

$$dt' = \gamma_0 \left(dt - \frac{v_0}{c^2} dx \right) = \gamma_0 dt \left(1 - \frac{v_0}{c^2} v_x \right) \quad ,$$

$$\frac{dx'}{dt'} = v_x' = \frac{v_x - v_0}{1 - \frac{v_0}{c^2} v_x} \quad .$$

Per le altre due componenti si procede allo stesso modo e il risultato per le relazioni tra le componenti della velocità di un punto misurate nei due diversi sistemi è

$$v_x' = \frac{v_x - v_0}{1 - \frac{v_0}{c^2} v_x}$$

$$v_y' = \frac{v_y}{\gamma_0 \left(1 - \frac{v_0}{c^2} v_x \right)} \quad (3.16)$$

$$v_z' = \frac{v_z}{\gamma_0 \left(1 - \frac{v_0}{c^2} v_x \right)} \quad .$$

Notiamo subito che se $v_0 \ll c$ le (3.16) danno le (3.12).

Applichiamo le (3.16) al caso limite di un segnale luminoso che si propaga lungo l'asse x con velocità c ($v_x = c, v_y = v_z = 0$); risulta

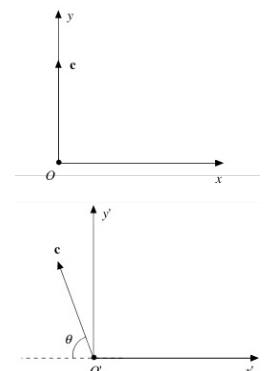
$$v_x' = \frac{c - v_0}{1 - \frac{v_0}{c}} = c \quad , \quad v_y' = v_z' = 0 \quad ,$$

e quindi nel sistema O' , in moto con velocità v_0 rispetto a O , si misura la stessa velocità c , qualunque sia il valore di v_0 .

ESEMPIO 3.8

Nel sistema O si osserva un raggio luminoso che si propaga lungo l'asse y con velocità c ; determinare cosa si osserva nel sistema O' che si sposta rispetto ad O con velocità v_0 .

Soluzione



Applichiamo le relazioni (3.16) con $v_x = v_z = 0$, $v_y = c$:

$$v'_x = -v_0 \quad , \quad v'_y = \frac{c}{\gamma_0} \quad , \quad v'_z = 0 \quad .$$

Pertanto nel sistema O' la luce ha velocità

$$\sqrt{v'^2_x + v'^2_y} = \frac{c}{\gamma_0} \sqrt{1 + \frac{v_0^2}{c^2}} = c$$

e la sua traiettoria forma con l'asse $x' \equiv x$ un angolo θ tale che

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{v'_y}{v'_x} = -\frac{c}{\gamma_0 v_0} \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = -\frac{1}{\gamma_0} \quad , \quad \operatorname{cos}\theta = \frac{v_0}{c} \quad .$$

Più in generale, ponendo $v_x = c \cos\Phi$, $v_y = c \operatorname{sen}\Phi$, $v_z = 0$, cioè considerando una traiettoria della luce nel piano x, y , si trova facilmente che $v'^2_x + v'^2_y = c^2$ ed eguale risultato si ottiene nel caso tridimensionale.

FIGURA 3.19
(Esempio 3.8)

Visualizza soluzione

Abbiamo così verificato che *le trasformazioni di Lorentz garantiscono la costanza del valore c in qualsiasi sistema inerziale*. È solo la direzione del raggio luminoso che appare diversa in ciascun sistema.

Come secondo esempio consideriamo il moto di punti materiali con velocità prossima a quella della luce.

ESEMPIO 3.9

Due elettroni si muovono nel sistema O , uno con velocità $0.7c$ concorde all'asse x e l'altro con velocità $0.5c$ discorde all'asse x . Qual è la velocità relativa?

Soluzione

Prendiamo come sistema O' quello in cui è in quiete l'elettrone avente velocità $0.7c$; in questo sistema la velocità del secondo elettrone è appunto la velocità relativa al primo. Abbiamo $v_0 = 0.7c$, $v_x = 0.5c$ (e $v_y = v_z = 0$). Pertanto

$$v'_x = \frac{-0.5c - 0.7c}{1 + \frac{0.7c \cdot 0.5c}{c^2}} = -\frac{1.2c}{1.35} = -0.89c \quad .$$

La trasformazione classica (3.12) ci avrebbe dato $-1.2c$, invece la trasformazione relativistica dà un risultato che in modulo è minore di c (se invece O' fosse il sistema in cui è in quiete l'elettrone avente velocità $-0.5c$, troveremmo $v'_x = 0.89c$, cioè lo stesso risultato). È facile verificare che v'_x resta in modulo sempre minore di c se v_x e v_0 sono entrambe minori di c .

Visualizza soluzione

La conclusione raggiunta nell'esempio 3.9 può essere estesa nel modo seguente: quando si compone la velocità di un punto materiale con quella di un sistema di riferimento, ovvero si osserva il moto da un diverso sistema di riferimento, non si ottiene mai un valore maggiore o eguale a c se le velocità del punto e del sistema sono entrambi minori di c .

Questo fatto va visto insieme ad un'altra circostanza fondamentale: dall'espressione di $\gamma_0 = (1 - v_0^2/c^2)^{-1/2}$, che partendo dal valore unitario assunto per $v_0 = 0$ cresce all'aumentare di v_0 e tende all'infinito per v_0 tendente a c (con $v_0 > c$ γ_0 assumerebbe un valore immaginario), si capisce che *la velocità della luce appare come un valore limite non raggiungibile*. Per valori di v_0 maggiori di c le (3.15) perderebbero significato e lo stesso succederebbe, come vedremo nel prossimo paragrafo, anche per la quantità di moto e l'energia di un punto materiale.

Siccome noi possiamo sempre pensare che il sistema O' sia quello in cui è in quiete un punto materiale che ha velocità v_0 rispetto al sistema O , deduciamo in definitiva che *la velocità di un punto materiale è sempre inferiore a c , in qualsiasi sistema di riferimento inerziale* (essa può però essere molto vicina a c : la velocità raggiunta dagli elettroni accelerati nella macchina LEP del CERN è inferiore a c di circa $3 \cdot 10^{-10}$ m/s).

Un caso speciale è costituito dalla luce stessa, che ha velocità c in qualsiasi sistema inerziale, come abbiamo verificato; pertanto *non esiste un sistema inerziale in cui la velocità della luce è eguale a zero*.

Accanto alle trasformazioni da O a O' vanno considerate le trasformazioni inverse da O' a O ; si tratta di ricavare x, y, z, t in funzione di x', y', z', t' nelle (3.15) e di procedere in modo analogo nelle (3.16). Si trova

$$\begin{aligned} x &= \gamma_0 (x' + v_0 t') & v_x &= \frac{u'_x + v_0}{1 + \frac{v_0}{c^2} u'_x} \\ y &= y' & v_y &= \frac{u'_y}{\gamma_0 \left(1 + \frac{v_0}{c^2} u'_x\right)} \\ z &= z' & v_z &= \frac{u'_z}{\gamma_0 \left(1 + \frac{v_0}{c^2} u'_x\right)} \\ t &= \gamma_0 \left(t' + \frac{v_0}{c^2} x'\right) \end{aligned} \tag{3.17}$$

e si nota che le trasformazioni inverse hanno la stessa struttura, semplicemente v_0 è diventata $-v_0$, come era prevedibile a priori.

Trasformazione delle accelerazioni

Per trovare le formule secondo cui si trasforma l'accelerazione cominciamo dalle componenti $a_x = dv_x/dt$ e $a_x' = dv_x'/dt'$. Abbiamo già visto che $dt' = \gamma_0 dt (1 - v_0 v_x/c^2)$; dalla prima delle (3.16) ricaviamo

$$dv_x' = \frac{dv_x}{1 - \frac{v_0}{c^2} v_x} + \frac{(v_x - v_0) v_0 dv_x}{c^2 \left(1 - \frac{v_0}{c^2} v_x\right)^2} = \frac{1}{\gamma_0^2} \frac{dv_x}{\left(1 - \frac{v_0}{c^2} v_x\right)^2}$$

$$\Rightarrow a_x' = \frac{a_x}{\gamma_0^3 \left(1 - \frac{v_0}{c^2} v_x\right)^3} . \quad (3.18a)$$

Passando alla seconda delle (3.16) si ha

$$dv_y' = \frac{dv_y}{\gamma_0 \left(1 - \frac{v_0}{c^2} v_x\right)} + \frac{v_y v_0 dv_x}{\gamma_0 \left(1 - \frac{v_0}{c^2} v_x\right)^2 c^2} = \frac{1}{\gamma_0 \left(1 - \frac{v_0}{c^2} v_x\right)} \left(dv_y + \frac{\frac{v_0 v_y}{c^2}}{1 - \frac{v_0}{c^2} v_x} dv_x \right)$$

$$\Rightarrow a_y' = \frac{1}{\gamma_0^2 \left(1 - \frac{v_0}{c^2} v_x\right)^2} \left(a_y + a_x \frac{\frac{v_0 v_y}{c^2}}{1 - \frac{v_0}{c^2} v_x} \right) . \quad (3.18b)$$

Analogamente

$$a_z' = \frac{1}{\gamma_0^2 \left(1 - \frac{v_0}{c^2} v_x\right)^2} \left(a_z + a_x \frac{\frac{v_0 v_z}{c^2}}{1 - \frac{v_0}{c^2} v_x} \right) . \quad (3.18c)$$

Se nel sistema O l'accelerazione è nulla ($a_x = a_y = a_z = 0$), lo stesso avviene nel sistema O' ($a_x' = a_y' = a_z' = 0$). Ciò è coerente con l'affermazione iniziale secondo cui, dato un sistema inerziale, con una trasformazione di Lorentz si passa ad un altro sistema inerziale (e ci ricorda che di sistemi inerziali ne esiste un numero infinito). Invece, se in un sistema inerziale si misura un'accelerazione non nulla, in un altro sistema inerziale si trova un valore non nullo diverso, secondo (3.18); non è più valido il risultato $\mathbf{a} = \mathbf{a}'$, garantito dalle trasformazioni galileiane (ad esso si ritorna solo nel caso di piccole velocità, come è facile verificare). Si comprende così perché la legge di Newton $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ non è invariante rispetto ad una trasformazione di Lorentz.

Contrazione delle lunghezze e dilatazione dei tempi

Nella meccanica newtoniana si ammette implicitamente che le misure di spazio e di tempo siano invarianti rispetto al sistema di riferimento ovvero che esse abbiano un significato assoluto: se un oggetto misurato in O ha lunghezza L anche O' trova L e un intervallo di tempo Δt misurato in O vale ancora Δt se

misurato in O' . Invece un'impostazione corretta del problema, che tenga conto di tutti i fenomeni conosciuti (tra i quali la costanza del valore c della velocità della luce in qualsiasi sistema inerziale), porta alla conclusione che le misure di lunghezza e tempo dipendono dal sistema di riferimento; numericamente l'effetto si può trascurare solo per velocità molto minori di c .

Cominciamo col considerare una sbarretta lunga L' , la quale è in quiete sull'asse x' del sistema O' ; x'_1 e x'_2 sono le coordinate dei suoi estremi. Supponiamo che O' si muova con velocità v_0 rispetto a O e che un osservatore nel sistema O

misuri, nello stesso istante di tempo t , le coordinate x_1 e x_2 degli estremi della sbarretta. Secondo (3.15)

$$x'_1 = \gamma_0 (x_1 - v_0 t) \quad , \quad x'_2 = \gamma_0 (x_2 - v_0 t) \quad ,$$

$$L' = x'_2 - x'_1 = \gamma_0 (x_2 - x_1) = \gamma_0 L \quad , \quad L = \frac{L'}{\gamma_0} = \sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}} L' \quad :$$

la lunghezza L misurata da O della sbarretta in movimento rispetto ad O' risulta minore della lunghezza L' misurata da O' , rispetto a cui la sbarretta è in quiete. La sbarretta appare contratta lungo la direzione del moto e l'effetto si chiama *contrazione delle lunghezze*.

Notiamo che se la sbarretta è in quiete in O e in moto rispetto a O' abbiamo dalle (3.17)

$$x_1 = \gamma_0 (x'_1 + v_0 t') \quad , \quad x_2 = \gamma_0 (x'_2 + v_0 t') \quad ,$$

$$x_2 - x_1 = \gamma_0 (x'_2 - x'_1) \quad , \quad L' = \frac{L}{\gamma_0} = \sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}} L \quad :$$

l'effetto è lo stesso, *la misura fatta nel sistema rispetto a cui la sbarretta è in moto è minore della misura fatta nel sistema in cui la sbarretta è in quiete*. Quest'ultima misura si chiama *lunghezza propria* della sbarretta.

La contrazione relativistica non si ha se la sbarretta è disposta lungo l'asse y o l'asse z , ortogonali alla direzione del moto (dato che $y = y'$ e $z = z'$).

Consideriamo adesso un fenomeno che nel sistema O' avviene nella posizione di coordinata x' e dura un tempo $\Delta t' = t'_2 - t'_1$; nel sistema O si ha

$$t_1 = \gamma_0 \left(t'_1 + \frac{v_0}{c^2} x' \right) \quad , \quad t_2 = \gamma_0 \left(t'_2 + \frac{v_0}{c^2} x' \right) \quad ,$$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \gamma_0 \Delta t' = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} \quad :$$

l'intervallo di tempo in O , rispetto a cui O' si muove, appare più lungo, il fenomeno per O dura di più. Di nuovo l'effetto è lo stesso se il fenomeno avviene

in O , dove dura Δt , e si calcola cosa misura O' : si trova $\Delta t' = \gamma_0 \Delta t$. Nella situazione descritta *il tempo misurato da un sistema in movimento è sempre maggiore del tempo proprio, misurato in quiete*. Si parla in questo caso di *dilatazione dei tempi*.

La dilatazione dei tempi segue in modo naturale dalla trasformazione di Lorentz. Vogliamo far vedere come la si possa ricavare direttamente dal fatto che la velocità della luce ha lo stesso valore c in sistemi inerziali diversi. Il fenomeno che si considera è l'emissione di un segnale luminoso dall'origine del sistema O ; tale segnale si propaga lungo l'asse y fino a distanza d , qui viene riflesso da uno specchio e torna in O : il tempo di andata è d/c e il tempo totale per tornare in O è $2d/c$. Osserviamo il fenomeno dal sistema O' in moto con velocità v_0 ; ricordando quanto calcolato nell'esempio 3.8, si ha la situazione mostrata nella figura 3.20 (supponendo che nell'istante in cui viene emesso il segnale O e O' coincidano). La distanza d' misurata in O' e la distanza d misurata in O sono legate dalla relazione $d = d' \sin\theta = d'/\gamma_0$, dove abbiamo usato (in modulo) la relazione ricavata nell'esempio 3.8. La velocità della luce è c in entrambi i sistemi e il tempo impiegato dalla

luce, secondo O' , per raggiungere lo specchio e tornare indietro è

$$t' = \frac{2d'}{c} = 2\gamma_0 \frac{d}{c} = \gamma_0 t \quad ;$$

la distanza è maggiore, la velocità è la stessa, il tempo deve essere maggiore. Ritroviamo che la durata di un fenomeno, visto da un sistema in moto, è maggiore della durata propria.

Classicamente, cioè componendo la velocità della luce c con la velocità di trascinamento v_0 secondo la regola galileiana, la velocità della luce in O' sarebbe $c+v_0$, l'angolo θ sarebbe tale che $\tan\theta = v_0/c$ ovvero $\sin\theta = \frac{v_0}{\sqrt{c^2+v_0^2}}$, la distanza $d' = d/\sin\theta$ risulterebbe $d \sqrt{c^2+v_0^2}/c$ e per il tempo si avrebbe

$$t' = \frac{2d'}{c} = \frac{2d}{c} \frac{\sqrt{c^2+v_0^2}}{c} = t \quad ,$$

eguale al tempo misurato in O .

Anche nel caso della contrazione delle lunghezze si può costruire un esempio analogo in cui si vede esplicitamente che il risultato è conseguenza diretta della costanza del valore c in diversi sistemi inerziali.

Accanto a questi esempi essenzialmente concettuali c'è una classe di fenomeni in cui la dilatazione dei tempi si misura correntemente, *i decadimenti delle particelle subnucleari instabili*. Nel decadimento la particella primaria cessa di esistere e al suo posto compaiono altre particelle; il processo ha un suo tempo caratteristico τ , detto *vita media* della particella che decade, avente questo significato: se ad un certo istante c'è un dato numero N di particelle primarie, dopo τ secondi questo numero si è ridotto a N/e (con $e = 2.71828\dots$),

dopo 2τ secondi a N/e^2 e così via. Ovvero, se una particella instabile viene considerata al tempo $t = 0$, la probabilità P che essa sia ancora esistente al tempo t è $P(t) = e^{-t/\tau}$. Tutto ciò è corretto in un sistema di riferimento in cui la particella è in quiete. Con un acceleratore di particelle e attraverso opportune reazioni è possibile produrre artificialmente particelle instabili di un dato tipo con ben determinate velocità, anche assai prossime alla velocità c . Si osserva che esse percorrono spazi che sembrano incompatibili con la loro vita media τ , cioè queste particelle arrivano a distanza notevole dalla sorgente di produzione dopo un tempo tale che la probabilità di sopravvivenza dovrebbe essere praticamente zero; come ordine di grandezza potremmo aspettarci che esse arrivino a distanze di valore $\sim c\tau$, invece le distanze sono molto maggiori. La spiegazione sta nella dilatazione relativistica del tempo. Immaginiamo un sistema O' solidale alla particella: in O' essa è a riposo e la sua vita media vale τ , cioè il fenomeno osservato in un punto x' di O' è il decadimento in quiete della particella, caratterizzato dal tempo τ . Il sistema O' si muove però con velocità vicina a c rispetto al sistema O , per esempio solidale all'acceleratore (il cosiddetto sistema del laboratorio) e nei due sistemi gli intervalli di tempo non sono gli stessi: come abbiamo visto $\Delta t = \gamma_0 \Delta t'$ e quindi nel sistema O la vita media è $\gamma_0 \tau$; la particella in moto vive più a lungo ed è pertanto in grado di coprire distanze di valore $\sim c\gamma_0 \tau$. Qualunque sia la velocità di O' (cioè della particella) rispetto ad O , O' misura sempre τ ; invece O misura una vita media $\gamma_0 \tau$ che è tanto maggiore quanto più la particella è veloce: al crescere della velocità relativa ad O sembra che i fenomeni in O' si svolgano sempre più lentamente.

In effetti è nel campo della cinematica e della dinamica (vedi paragrafo 3.9) delle particelle nucleari e subnucleari, stabili e instabili, che la meccanica relativistica ha trovato solide verifiche, soprattutto attraverso l'uso degli acceleratori di particelle, nei quali queste raggiungono facilmente velocità prossime a c , con notevolissimi effetti relativistici.

ESEMPIO 3.10

Il leptone μ è una particella subnucleare avente vita media $\tau = 2.2 \cdot 10^{-6}$ s. Calcolare la vita media nel laboratorio e la quantità $c\gamma\tau$ per velocità del v pari a $0.5c$, $0.7c$, $0.9c$, $0.99c$, $0.999c$.

Soluzione

Per le varie velocità calcoliamo $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ e compiliamo la seguente tabella.

Teniamo presente che nel sistema in cui il μ è a riposo $c\tau = 660 \text{ m} = 0.66 \text{ km}$.

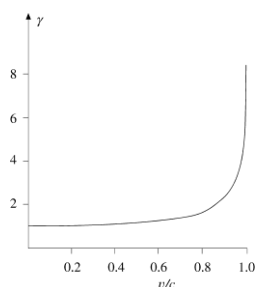


FIGURA 3.21
(Esempio 3.10)

$v = 0.5c$	$\gamma = 1.16$	$\gamma\tau = 2.55 \cdot 10^{-6} \text{ s}$	$c\gamma\tau = 0.77 \text{ km}$
$0.7c$	1.40	$3.08 \cdot 10^{-6} \text{ s}$	0.92 km
$0.9c$	2.29	$5.04 \cdot 10^{-6} \text{ s}$	1.51 km
$0.99c$	7.09	$15.60 \cdot 10^{-6} \text{ s}$	4.68 km
$0.999c$	22.37	$49.21 \cdot 10^{-6} \text{ s}$	14.76 km

Vediamo che si tratta di variazioni importanti. L'ultima colonna in particolare ci dà il riscontro quantitativo del fatto che un μ prodotto con notevole velocità può coprire prima di decadere distanze molto maggiori di $c\tau$.

Storicamente i leptoni μ vennero scoperti nel 1937 nella radiazione cosmica; si trovò, rallentandoli fino a portarli alla quiete, che erano particelle instabili con la vita media $\tau = 2.2 \cdot 10^{-6} \text{ s}$ sopra citata. D'altra parte la loro origine è dovuta al decadimento di altre particelle instabili prodotte nell'urto di protoni cosmici contro i nuclei degli atomi presenti negli strati alti dell'atmosfera (distanti ben più di $c\tau = 660 \text{ m}$ dalla superficie terrestre). I leptoni μ così prodotti hanno notevole velocità; nel sistema del laboratorio la loro vita è più lunga e così essi possono raggiungere la superficie terrestre ed essere rivelati.

Visualizza soluzione

Simultaneità

La nozione che il tempo dipende dal sistema di riferimento, espressa dalla quarta delle (3.15), comporta anche la revisione del concetto di simultaneità. Ad esempio, due eventi che nel sistema O' sono localizzati nei punti di coordinate x'_1 e x'_2 sono definiti simultanei se avvengono nello stesso istante di tempo t' : i punti sono in quiete nel sistema O' e non ci sono problemi nella misura del tempo. Però O assegna ai due eventi i tempi

$$t_1 = \gamma_0 \left(t' + \frac{v_0}{c^2} x'_1 \right) \quad , \quad t_2 = \gamma_0 \left(t' + \frac{v_0}{c^2} x'_2 \right) \quad ,$$

che non sono eguali essendo $x'_1 \neq x'_2$. La differenza vale

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \gamma_0 \frac{v_0}{c^2} (x'_2 - x'_1)$$

e concludiamo che due eventi localizzati in punti diversi e simultanei nel sistema O' non sono simultanei nel sistema O .

Anche per questo caso possiamo legare il risultato all'invarianza di c , come mostriamo nell'esempio seguente. Nel sistema O' consideriamo un punto P da cui nello stesso istante vengono inviati due segnali luminosi verso i rivelatori R_1 e R_2 , distanti d da P ; l'arrivo dei segnali ai rivelatori è simultaneo e avviene all'istante $t'_1 = t'_2 = d/c$. Tutto questo apparato si sposta con velocità v_0 rispetto

al sistema O , nel quale la luce si propaga sempre con velocità c ; però R_1 va incontro al segnale luminoso emesso da P e R_2 se ne allontana, cioè nel sistema O la luce che va da P a R_1 percorre uno spazio minore di quella che va da P a R_2 e quindi i tempi non possono essere gli stessi, proprio perché c non cambia. In formule

$$PR_1 \quad ct_1 = d - v_0 t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{d}{c + v_0}$$

$$PR_2 \quad ct_2 = d + v_0 t_2 \Rightarrow t_2 = \frac{d}{c - v_0} > t_1 \quad .$$

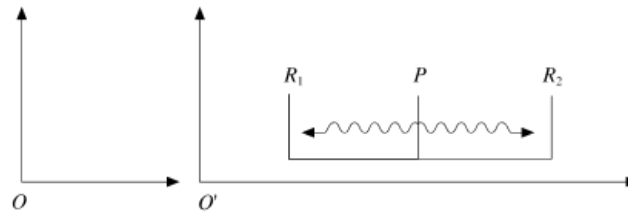


FIGURA 3.22

Nella visuale galileiana la velocità della luce si compone con la velocità di trascinamento v_0 : in O la luce che va da P a R_1 ha velocità $c - v_0$ e quella che va da P a R_2 ha velocità $c + v_0$, per cui dobbiamo scrivere

$$PR_1 \quad (c - v_0) t_1 = d - v_0 t_1 \Rightarrow t_1 = d/c$$

$$PR_2 \quad (c + v_0) t_2 = d + v_0 t_2 \Rightarrow t_2 = d/c$$

e la simultaneità viene preservata; però questo procedimento è contrario al risultato sperimentale dell'invarianza di c .

3.9 Quantità di moto ed energia relativistiche

La quantità di moto di un punto materiale di massa m e velocità v si scrive relativisticamente come

$$\mathbf{p} = m\gamma \mathbf{v} = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \mathbf{v} . \quad (3.19)$$

Non si ha più la dipendenza diretta dalla velocità della definizione newtoniana $m\mathbf{v}$ ma compare anche γ come fattore moltiplicativo. Si nota di nuovo che la definizione relativistica tende a quella newtoniana per piccole velocità.

La legge del moto si scrive nella forma (2.2)

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} , \quad (3.20)$$

cioè conserva formalmente la struttura newtoniana, purché la quantità di moto sia data da (3.19). Ne vedremo più avanti l'applicazione in alcune situazioni che abbiamo già trattato per piccole velocità. Vogliamo però notare subito come l'applicazione di una forza, quando la velocità ha già assunto valori vicini a c , porta sì ad un aumento di p , ma questo aumento non si traduce in un aumento corrispondente di velocità, bensì soprattutto in un aumento del fattore γ .

L'effetto si vede chiaramente mettendo in relazione la crescita di p con quella di v , nel modo seguente. Si differenzia la (3.19) e si divide per $p = m\gamma v$:

$$\begin{aligned} dp &= m d(\gamma v) = m \gamma dv + m v d\gamma , \\ \frac{dp}{p} &= \frac{dv}{v} + \frac{d\gamma}{\gamma} = \frac{dv}{v} \left(1 + \frac{d\gamma/\gamma}{dv/v} \right) . \end{aligned}$$

Si differenzia poi l'espressione di γ e si divide per γ :

$$d\gamma = d\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} = \frac{1}{2} \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} d\left(\frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{v}{c^2} \gamma^3 dv = \frac{v^2}{c^2} \gamma^3 \frac{dv}{v} ,$$

$$\frac{d\gamma}{\gamma} = \frac{v^2}{c^2} \gamma^2 \frac{dv}{v} .$$

Mettendo insieme i risultati

$$\begin{aligned} \frac{dp}{p} &= \left(1 + \frac{v^2}{c^2} \gamma^2 \right) \frac{dv}{v} = \gamma^2 \frac{dv}{v} , \\ \frac{dv}{v} &= \frac{1}{\gamma^2} \frac{dp}{p} . \end{aligned} \quad (3.21)$$

L'aumento relativo di velocità è $1/\gamma^2$ volte l'aumento relativo di quantità di moto (causato dall'applicazione di una forza). Dato che γ cresce notevolmente al tendere di v a c , l'aumento relativo di velocità è in effetti molto piccolo. Tutto ciò è in accordo col fatto che la velocità di un punto materiale non possa crescere indefinitamente, bensì tenda alla velocità c .

Calcoliamo adesso l'energia cinetica partendo dalla definizione di lavoro e da (3.20):

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot d\mathbf{s} = d\mathbf{p} \cdot \mathbf{v} \quad .$$

Per la variazione infinitesima della quantità di moto relativistica ci serviamo di (3.21) nella forma $d\mathbf{p} = p\gamma^2 d\mathbf{v}/v$:

$$dW = p\gamma^2 \frac{d\mathbf{v}}{v} \cdot \mathbf{v} = m\gamma^3 \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = \frac{1}{2} m\gamma^3 d(v^2) \quad ,$$

dove abbiamo utilizzato il fatto che $d(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = d(v^2) = 2 \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v}$. Quindi $dW = m\gamma^3 v dv$ e confrontando con l'espressione $d\gamma = \gamma^3 dv/c^2$ trovata sopra concludiamo che

$$dW = mc^2 d\gamma = d(mc^2 \gamma) \quad .$$

Il lavoro per portare una particella dalla quiete ($v = 0, \gamma = 1$) alla velocità v è

$$W = mc^2 \int_1^\gamma d\gamma = mc^2 (\gamma - 1)$$

ed è naturale interpretare questo lavoro come energia cinetica della particella che ha velocità v :

$$E_k = m (\gamma - 1) c^2 \quad . \quad (3.22)$$

Energia cinetica

Per prima cosa verifichiamo che questa espressione, così diversa da $1/2 mv^2$, tenda a tale forma per $v \ll c$. Allo scopo osserviamo che, arrestando lo sviluppo al prim'ordine, si ha

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{x}{2} \quad (x \ll 1)$$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 1 + \frac{v^2}{2c^2} \quad (v^2 \ll c^2)$$

e quindi

$$E_k (v \ll c) = m \left(1 + \frac{v^2}{2c^2} - 1 \right) c^2 = \frac{1}{2} mv^2 \quad .$$

In secondo luogo notiamo la particolare struttura di (3.22): l'energia cinetica, cioè la forma di energia legata esclusivamente al moto del punto, appare come differenza tra i valori $m\gamma c^2$ e mc^2 , il primo variabile con la velocità e il secondo costante, proporzionale alla massa del punto. Ponendo

$$E = m\gamma c^2 \quad , \quad E_0 = mc^2 \quad , \quad (3.23)$$

Energia totale

la (3.22) si scrive

$$E = E_k + E_0 \quad . \quad (3.24)$$

Il termine E viene chiamato *energia totale* del punto materiale alla velocità v e il termine E_0 *energia a riposo* (in quanto eguale ad E quando $E_k = 0$) ovvero energia di massa del punto materiale, proprio perché proporzionale a m . Queste modifiche al concetto di energia, con l'introduzione dell'energia legata all'esistenza della massa e dell'energia totale, somma di energia cinetica e di energia di massa, sono tra i risultati più importanti della meccanica relativistica.

Notiamo che dal rapporto tra le due formule (3.23) si ha

$$\gamma = \frac{E}{E_0} \quad . \quad (3.25)$$

Rispetto alla definizione cinematica $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$, la (3.25) mostra il ruolo dinamico di γ , rapporto tra energia totale ed energia di massa.

Per mezzo della (3.19) possiamo collegare quantità di moto ed energia totale:

$$E = m\gamma c^2 = m\gamma v \frac{c^2}{v} = p \frac{c^2}{v} \quad .$$

In forma vettoriale

$$\mathbf{p} = \frac{E}{c^2} \mathbf{v} \quad . \quad (3.26)$$

Infine, sempre sfruttando le stesse relazioni si ottiene

$$\begin{aligned} E^2 - p^2 c^2 &= m^2 \gamma^2 c^4 - m^2 \gamma^2 v^2 c^2 = m^2 c^4 \gamma^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = m^2 c^4 \\ \Rightarrow E^2 &= p^2 c^2 + m^2 c^4 = p^2 c^2 + E_0^2 \quad , \\ E &= \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} = \sqrt{p^2 c^2 + E_0^2} \quad , \end{aligned} \quad (3.27)$$

relazione fondamentale tra energia totale, quantità di moto ed energia a riposo.

Nota Particelle di massa nulla

Se consideriamo una particella con massa eguale a zero, la relazione (3.27) tra energia totale e quantità di moto diventa

$$E = pc \quad .$$

Sostituendo nella (3.26) si vede che l'eguaglianza comporta $v = c$ e deduciamo questo risultato importante: *una particella con massa nulla si muove con la velocità della luce c* ; di conseguenza non esiste un sistema inerziale in cui essa sia a riposo. Sono particelle di massa nulla i *fotoni*, cioè i quanti di energia elettromagnetica (discussi nel volume secondo).

Trasformazione di Lorentz per quantità di moto e energia

Le varie relazioni trovate tra energia e quantità di moto riguardano il moto di un punto materiale osservato in un certo sistema di riferimento inerziale; in questo il punto di massa m ha velocità v (dalla quale si può calcolare γ), quantità di moto p ed energia totale E , legate appunto da (3.26) e (3.27). In un diverso sistema inerziale tutte queste grandezze hanno i valori v' , γ' , p' , E' e siamo interessati a trovare quale relazione ci sia tra p , E e p' , E' . Ammettiamo che, in base al principio di relatività, E' e p' siano definiti e legati tra loro come E e p .

Indichiamo schematicamente uno dei possibili procedimenti:

- si scrive $p'_x = m \gamma' v'_x$, $p'_y = m \gamma' v'_y$, $p'_z = m \gamma' v'_z$;
- per v'_x , v'_y , v'_z si utilizzano le (3.17);
- si scrive $v_x = p_x / m\gamma$, $v_y = p_y / m\gamma$, $v_z = p_z / m\gamma$;
- si sostituiscono γ e γ' con E / mc^2 e E' / mc^2 .

Arriviamo così, con un calcolo un po' laborioso, ma facile, alle tre relazioni

$$\frac{p'_x}{E'} = \frac{p_x - \frac{v_0}{c^2} E}{E - v_0 p_x} \quad , \quad \frac{p'_y}{E'} = \frac{p_y}{\gamma_0 (E - v_0 p_x)} \quad \frac{p'_z}{E'} = \frac{p_z}{\gamma_0 (E - v_0 p_x)} \quad .$$

Successivamente nella $E' = m\gamma'c^2$, e precisamente in γ' , si sostituisce a v'^2 l'espressione ricavata usando sempre le (3.17), di nuovo si scrive $v_x = p_x / m\gamma$ e si ricava $E' = \gamma_0 (E - v_0 p_x)$, per cui il risultato finale è

$$\begin{aligned} p'_x &= \gamma_0 \left(p_x - \frac{v_0}{c^2} E \right) \\ p'_y &= p_y \\ p'_z &= p_z \\ E' &= \gamma_0 (E - v_0 p_x) \quad . \end{aligned} \tag{3.28}$$

Si nota subito che le (3.28) sono eguali alle (3.15), con $p_x, p_y, p_z, E/c$ al posto di x, y, z, t : *le componenti della quantità di moto e l'energia si trasformano allo stesso modo delle coordinate spaziali e del tempo, cioè secondo una trasformazione di Lorentz*, cosa che non succede a velocità e accelerazione. Anche la trasformazione inversa di (3.28), che fa passare da O' a O , si ottiene

come visto per (3.17).

Abbiamo già detto che in ciascun sistema inerziale le leggi fisiche hanno la stessa struttura; in particolare sia in O che in O' vale la (3.27):

$$E^2 - c^2 p^2 = E_0^2 \quad , \quad E'^2 - c^2 p'^2 = E_0'^2 \quad .$$

Un semplice calcolo sulle (3.28) mostra che

$$E'^2 - c^2 p'^2 = E'^2 - c^2 (p_x'^2 + p_y'^2 + p_z'^2) = E'^2 - c^2 (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) = E^2 - c^2 p^2$$

ovvero l'energia a riposo, e quindi la massa, hanno lo stesso valore nei due sistemi O e O' . In realtà così abbiamo solo verificato la consistenza del formalismo, perché nella nostra dimostrazione si è assunto in partenza che la massa fosse la stessa nei due sistemi (ad esempio quando abbiamo scritto $p'_x = my' v_x'$ o $E' = my' c^2$). D'altra parte è anche vero che le (3.28) possono essere provate indipendentemente e che da esse discende la costanza del valore della massa in qualsiasi sistema inerziale.

Una verifica analoga sulle (3.15) fa vedere che

$$c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \quad .$$

Incontriamo, con questa e con la precedente eguaglianza, una proprietà fondamentale delle trasformazioni di Lorentz. Con le quattro variabili oggetto della trasformazione è possibile costruire una quantità, somigliante al quadrato del modulo di un vettore, che non cambia operando la trasformazione, cioè passando da O ad O' e viceversa. In un caso tale quantità è $c^2 t^2 - r^2$, nell'altro $E^2 - c^2 p^2$. Su questa proprietà ci accontentiamo di richiamare l'attenzione; formalmente essa discende dal fatto che le coordinate spaziali e il tempo possono essere pensate come le coordinate di uno speciale spazio quadridimensionale (lo spazio di Minkowski), in cui le trasformazioni di Lorentz hanno lo stesso ruolo delle rotazioni nello spazio ordinario tridimensionale (sappiamo che le rotazioni conservano la lunghezza dei segmenti, vedi paragrafo 3.7). L'argomento esula dagli scopi di questo libro; esso costituisce la base per la costruzione formale della teoria della relatività ristretta, di cui noi diamo solo qualche nozione.

Esempio 3.11

Nel sistema O' un punto è in quiete. Quanto valgono la sua quantità di moto e la sua energia viste da O ?

Soluzione

In O' $p_x' = p_y' = p_z' = 0$ ed $E' = E_0 = mc^2$. Dato che O' si muove con velocità v_0 rispetto ad O , secondo la solita geometria, usiamo la trasformazione inversa di (3.28):

$$\begin{aligned}
p_x &= \gamma_0 \left(p'_x + \frac{v_0}{c^2} E' \right) = \gamma_0 \frac{v_0}{c^2} mc^2 = m\gamma v_0 \\
p_y &= p'_y = 0 \\
p_z &= p'_z = 0 \\
E &= \gamma_0 (E' + v_0 p'_x) = m\gamma_0 c^2 \quad .
\end{aligned}$$

Giustamente, il punto rispetto ad O si muove con velocità v_0 parallela all'asse x e quindi quantità di moto ed energia hanno le espressioni (3.19) e (3.23). Abbiamo in sostanza verificato nel caso in esame la consistenza della teoria.

Visualizza soluzione

Esempio 3.12

Un fotone avente energia E si muove lungo una linea retta che forma l'angolo θ con l'asse x del sistema O . Calcolare nel sistema O' le espressioni di E' e θ' .

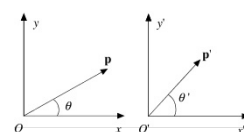


FIGURA 3.23
(Esempio 3.12)

Soluzione

Abbiamo visto nella nota di questo paragrafo che il fotone, considerato come particella di massa nulla, ha quantità di moto $p = E/c$. Tale relazione è vera in qualsiasi sistema inerziale in quanto il fotone ha sempre velocità c e quindi massa nulla. Pertanto nel sistema O possiamo scrivere

$$p_x = p \cos\theta = \frac{E}{c} \cos\theta \quad , \quad p_y = p \sin\theta = \frac{E}{c} \sin\theta \quad , \quad p_z = 0$$

e analogamente nel sistema O'

$$p'_x = \frac{E'}{c} \cos\theta' \quad , \quad p'_y = \frac{E'}{c} \sin\theta' \quad , \quad p'_z = 0 \quad .$$

Dalle (3.28)

$$\frac{E'}{c} \cos\theta' = \gamma_0 \left(\frac{E}{c} \cos\theta - \frac{v_0}{c^2} E \right) = \gamma_0 \frac{E}{c} \left(\cos\theta - \frac{v_0}{c} \right)$$

$$\frac{E'}{c} \sin\theta' = \frac{E}{c} \sin\theta$$

$$E' = \gamma_0 \left(E - v_0 \frac{E}{c} \cos\theta \right) = \gamma_0 E \left(1 - \frac{v_0}{c} \cos\theta \right) \quad .$$

Dividendo la seconda relazione per la prima si ottiene

$$\text{tg}\theta' = \frac{\sin\theta}{\gamma_0 \left(\cos\theta - \frac{v_0}{c} \right)} \quad ,$$

da cui possiamo calcolare l'angolo θ' in funzione di θ e della velocità relativa dei due sistemi; si noti che non c'è dipendenza dall'energia del

fotone. In particolare, se $\theta = \pi/2$, $\text{tg}\theta' = -c/\gamma_0 v_0$ in accordo con quanto trovato nell'esempio 3.8.

La relazione tra le energie mostra che l'energia dipende dal sistema di riferimento, pur avendo il fotone la stessa velocità in qualsiasi sistema. Ponendo per semplicità $\theta = 0$, abbiamo

$$E' = \gamma_0 E \left(1 - \frac{v_0}{c}\right) = E \frac{1 - \frac{v_0}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} = E \frac{\sqrt{1 - \frac{v_0}{c}}}{\sqrt{1 + \frac{v_0}{c}}} < E.$$

Se, ad esempio, O è il sistema in cui viene emesso il fotone di energia E , nel sistema O' che si allontana da O si misura un'energia E' inferiore e dalla differenza delle energie si può calcolare la velocità relativa tra i due sistemi (se O' si avvicinasse ad O , esso misurerebbe un'energia superiore; in ogni caso si ha un'informazione sul moto relativo, non su chi si muove e chi è fermo).

Resta il problema di capire da cosa dipenda l'energia di un fotone. Tratteremo questo argomento nel secondo volume e vedremo che un fotone di energia E è associato alla propagazione di un'onda elettromagnetica di frequenza ν (la nozione di propagazione ondulatoria verrà introdotta nel capitolo 9 di questo volume); l'energia del fotone è legata alla frequenza dell'onda dalla relazione $E = h\nu$, dove h è una costante fondamentale, la *costante di Planck*. Da questo punto di vista la relazione precedente si scrive

$$\nu' = \nu \frac{1 - \frac{v_0}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}}$$

e mostra come varia la frequenza con la velocità relativa dei due sistemi. Il fenomeno si chiama *effetto Doppler* (paragrafo 13.11 del secondo volume). Un'applicazione notissima è la seguente. Supponiamo di misurare sulla terra le frequenze di un tipo di luce e di essere in grado di riconoscere quel tipo di luce quando ci giunge da una galassia; troviamo però che le frequenze sono sistematicamente diverse da quelle misurate sulla terra e dalla differenza determiniamo la velocità della galassia rispetto alla terra. Misure di questo tipo hanno messo in evidenza una diminuzione di frequenza (il cosiddetto spostamento verso il rosso), segno che le galassie si allontanano da noi, e accreditano l'ipotesi dell'universo in espansione.

Visualizza soluzione

Forza

La legge del moto nella meccanica relativistica, come nella meccanica newtoniana, è la (3.20), $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$. Questa espressione è valida in qualsiasi sistema inerziale, nel senso che in O e in O' la legge del moto è, rispettivamente

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad , \quad \mathbf{F}' = \frac{d\mathbf{p}'}{dt'} \quad .$$

In generale $d\mathbf{p}/dt$ e $d\mathbf{p}'/dt'$ sono diverse e quindi *due osservatori inerziali misurano forze diverse*: questa è una differenza sostanziale rispetto alla relatività galileiana.

Dalle leggi di trasformazione già ricavate potremmo risalire a quella valida per le componenti della forza e troveremmo espressioni che non sono trasformazioni di Lorentz, come è successo per la velocità e l'accelerazione. Non esplicitiamo però questo calcolo perché non ci servirà per il seguito dell'esposizione.

Vogliamo invece dimostrare come da $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ non si possa dedurre $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Allo scopo sviluppiamo (3.20), inserendo l'espressione relativistica (3.19) della quantità di moto; in questa la massa è costante, però γ varia al variare del modulo della velocità e pertanto la forza è eguale alla somma di due termini,

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = m\gamma \frac{d\mathbf{v}}{dt} + m\mathbf{v} \frac{d\gamma}{dt} \quad , \quad (3.29)$$

il primo parallelo all'accelerazione $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$ e il secondo parallelo a \mathbf{v} ; poiché \mathbf{v} e \mathbf{a} non sono di norma parallele, non sussiste più il parallelismo tra \mathbf{F} e \mathbf{a} .

Questo è il caso più generale. Limitiamoci ora a due casi particolari, in cui per costruzione \mathbf{F} e \mathbf{a} sono parallele e verifichiamo che non si ha comunque $F = ma$.

Per primo consideriamo un moto circolare uniforme. La velocità cambia solo di direzione, $d\gamma/dt = 0$ anche se γ può avere un valore elevato (se v è vicina a c), e la (3.29) si riduce a

$$\mathbf{F} = m\gamma\mathbf{a} \quad , \quad F = m\gamma a_N = m\gamma \frac{v^2}{R} = \frac{p v}{R} \quad ,$$

essendo R il raggio della circonferenza. La dipendenza della forza centripeta F da γv^2 invece che solo da v^2 come vorrebbe la meccanica newtoniana è stata verificata sin dagli inizi di questo secolo, confermando la correttezza della formulazione relativistica.

Negli acceleratori circolari, in cui le particelle descrivono orbite composte da archi di circonferenza, la forza centripeta è ottenuta per mezzo di un opportuno campo magnetico (forza di Lorentz, capitolo 7 del secondo volume) e il calcolo del suo valore si fa appunto servendosi della formula relativistica. Un altro fatto interessante verificato è che la dilatazione $\gamma\tau$ della vita media di una particella instabile in moto con velocità v si ha pure se il moto avviene lungo una

circonferenza.

Passiamo adesso ad un moto rettilineo, con forza, velocità, accelerazione parallele alla direzione del moto. Supponiamo che la forza agente sia costante e che inizialmente il punto sia in quiete. Per calcolare dy/dt nella (3.29) utilizziamo l'espressione di dy che abbiamo ricavato per arrivare alla (3.21), ovvero

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{v}{c^2} \gamma^3 \frac{dv}{dt} \quad ;$$

l'equazione del moto è quindi

$$F = m\gamma \frac{dv}{dt} + m \frac{v^2}{c^2} \gamma^3 \frac{dv}{dt} = m\gamma \frac{dv}{dt} \left(1 + \frac{v^2}{c^2} \gamma^2 \right) = m\gamma^3 \frac{dv}{dt} = m\gamma^3 a \quad .$$

Notiamo subito che il moto non è uniformemente accelerato: γ varia nel tempo e a non può essere costante, dato che $m\gamma^3 a$ è costante. Calcoliamo la velocità in questo modo:

$$\frac{F}{m} dt = \gamma^3 dv = d(\gamma v) \quad ,$$

dove l'ultimo passaggio segue da

$$d(\gamma v) = \gamma dv + v d\gamma = \gamma dv + \frac{v^2}{c^2} \gamma^3 dv = \gamma^3 dv \quad .$$

Si integra e si ottiene

$$\gamma v = \frac{F}{m} t \quad , \quad \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{F}{m} t \quad , \quad v = \frac{c}{\sqrt{1 + \frac{m^2 c^2}{F^2 t^2}}} \quad .$$

La velocità non cresce linearmente col tempo e tende asintoticamente a c . Solo fino a quando è soddisfatta la condizione

$$\frac{m^2 c^2}{F^2 t^2} \gg 1 \quad \Rightarrow \quad t^2 \ll \frac{m^2 c^2}{F^2}$$

si può descrivere $v = Ft/m$, come nella meccanica newtoniana. All'opposto, per velocità prossima a c , cioè quando

$$\frac{m^2 c^2}{F^2 t^2} \ll 1 \quad \Rightarrow \quad t^2 \gg \frac{m^2 c^2}{F^2} \quad ,$$

ci possiamo servire dell'approssimazione $1/\sqrt{1+x} = 1-x$ e abbiamo

$$v = c \sqrt{1 - \frac{m^2 c^2}{F^2 t^2}} \quad ,$$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{Ft}{mc} \quad , \quad p = m\gamma v = Ft \sqrt{1 - \frac{m^2 c^2}{F^2 t^2}} \quad .$$

La verifica sperimentale di queste formule si effettua accelerando linearmente particelle come gli elettroni e i protoni.

Confrontando i due esempi emerge che il rapporto F/a vale in un caso $m\gamma$ e nell'altro $m\gamma^3$: questo rapporto, che nella meccanica newtoniana vale m e indica l'inerzia del punto materiale, nella meccanica relativistica dipende dal tipo di moto; la nozione di inerzia cioè non è più legata soltanto alla massa.

Un'ultima avvertenza sulle forze riguarda il principio di azione e reazione. La formulazione data nel paragrafo 2.2 presuppone un'interazione istantanea tra i due corpi, ma ciò è in contrasto con uno dei fondamenti della teoria della relatività, secondo cui qualsiasi segnale fisico ha velocità finita, che non può superare quella della luce. Non approfondiamo l'argomento; notiamo però ancora una volta che la teoria della relatività comporta una revisione concettuale di tutte le basi della meccanica newtoniana. Nel caso specifico è vera la solita approssimazione, e cioè che nei problemi meccanici ordinari ci si può correttamente servire del principio di azione e reazione, però già passando a fenomeni elettromagnetici macroscopici con emissione e assorbimento di onde elettromagnetiche (che si propagano con la velocità della luce) è necessario abbandonare il semplice meccanismo dell'azione e reazione.

Energia e massa

Abbiamo visto che solo per il fatto di avere la massa m una particella possiede l'energia $E_0 = mc^2$, detta energia di massa o energia a riposo. Il nuovo concetto, introdotto da Einstein, ha validità generale; tuttavia esso non ha interesse pratico nella meccanica dei corpi macroscopici, mentre gioca un ruolo fondamentale nelle interazioni tra particelle nucleari o subnucleari.

Anticipando una situazione che discuteremo nel capitolo quarto, consideriamo due tali particelle che interagiscono; nel caso più generale lo stato finale è diverso dallo stato iniziale, nel senso che come risultato della reazione si possono avere particelle diverse da quelle iniziali. Si è verificato con estrema precisione che in questi fenomeni *l'energia totale resta costante*:

$$E_{\text{in}} = (\sum E_k)_{\text{in}} + (\sum E_0)_{\text{in}} = E_{\text{fin}} = (\sum E_k)_{\text{fin}} + (\sum E_0)_{\text{fin}} \quad ,$$

dove le sommatorie sono estese alle particelle che partecipano all'interazione. Definendo

$$\Delta E_k = (\sum E_k)_{\text{fin}} - (\sum E_k)_{\text{in}} \quad , \quad \Delta E_0 = (\sum E_0)_{\text{fin}} - (\sum E_0)_{\text{in}} \quad ,$$

deve essere

$$\Delta E = \Delta E_k + \Delta E_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta E_k = -\Delta E_0 = -(\Delta m) c^2 \quad .$$

In queste reazioni può avvenire che la somma delle masse delle particelle che compongono lo stato finale sia diversa dalla somma delle masse delle particelle presenti all'inizio, cioè *la massa totale non si conserva*, ma varia di Δm . Questa variazione, moltiplicata per c^2 , compare nel bilancio dell'energia e deve essere compensata da una variazione opposta di energia cinetica. Abbiamo pertanto due casi possibili:

a) $\Delta m > 0$, massa finale maggiore di quella iniziale $\Rightarrow \Delta E_k < 0$, nello stato finale c'è meno energia cinetica, una parte dell'energia cinetica iniziale si è trasformata in energia di massa;

b) $\Delta m < 0$, massa finale minore di quella iniziale $\Rightarrow \Delta E_k > 0$, nello stato finale c'è più energia cinetica, una parte dell'energia di massa iniziale si è trasformata in energia cinetica.

Questa nozione della non immutabilità della massa e della possibilità di *conversione tra massa ed energia* è una delle più importanti introdotte dalla teoria della relatività.

Dalle trasformazioni di massa in energia nelle reazioni di fusione tra nuclei degli isotopi dell'idrogeno si spera di ottenere una fonte di energia praticamente inesauribile. L'esempio più semplice è costituito dalla fusione di due nuclei di deuterio, detti deutoni, ciascuno formato da un protone e da un neutrone, che danno luogo a un *nucleo di elio 3* e ad un neutrone; l'elio 3 è un isotopo dell'elio con nucleo composto da due protoni e da un neutrone. La somma delle masse della particelle finali è minore di quella dei due nuclei di deuterio e la differenza si ritrova sotto forma di energia cinetica dell'elio 3 e del neutrone; è proprio l'energia cinetica del neutrone che verrebbe successivamente assorbita e trasformata in altre forme di energia utilizzabile. Si osservi che la reazione non avviene spontaneamente perché i due deutoni sono entrambi carichi positivamente e si respingono; essi devono perciò possedere una certa energia che permetta di vincere la repulsione elettrica. La via sperimentale attualmente più seguita è di portare deuterio gassoso a temperature molto elevate, il che corrisponde a energie cinetiche elevate come vedremo nel capitolo sulle proprietà dei gas, con lo scopo di favorire il processo di fusione. Si parla di *fusione termonucleare controllata* e al momento attuale alcuni dei reattori sperimentali operanti nel mondo non sono lontani dalla parità nel bilancio energetico, cioè dall'eguaglianza tra energia spesa complessivamente per realizzare le fusioni e energia ricavata dalle fusioni. Però la via da percorrere per realizzare un'operazione continua e affidabile sembra ancora molto lunga.

Sempre a reazioni di fusione si attribuisce la fonte di energia di alcune categorie di stelle, tra cui il Sole.

Un altro esempio interessante è la formazione di uno stato legato a partire da due particelle singole, per esempio un protone e un neutrone che danno un deutone (nucleo del deuterio). La massa del deutone è inferiore alla somma delle masse del protone e del neutrone, però il sistema è legato con una certa energia.

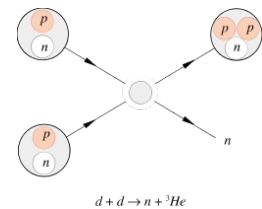


FIGURA 3.24

Si misura che l'energia di legame vale proprio $(\Delta m) c^2$: la massa scomparsa si è tramutata in energia. Rompendo il sistema si deve spendere energia e si recupera massa.

Infine vogliamo ricordare un processo che ha un'applicazione in campo medico. Alcune sostanze radioattive emettono positroni, particelle aventi la stessa massa dell'elettrone e carica opposta. Quando un positrone così prodotto attraversa la materia avviene un processo di annichilazione: il positrone interagisce con un elettrone, entrambi scompaiono e vengono emessi due fotoni, aventi energia pari all'energia di massa delle particelle scomparse. In prima approssimazione possiamo supporre che l'energia cinetica iniziale sia trascurabile rispetto all'energia di massa e fare questa schematizzazione:

– in un punto si ha l'annichilazione, con le particelle praticamente in quiete, e viene resa disponibile l'energia $2mc^2$; da quel punto escono due fotoni, aventi la stessa direzione di moto e verso opposto, ciascuno di energia mc^2 .

– Si ha trasformazione integrale di massa in energia (ricordiamo che i fotoni hanno massa nulla).

È noto in medicina che, iniettando nel corpo umano alcuni particolari composti chimici, questi si accumulano in organi o tessuti specifici, come il muscolo cardiaco o tessuti con cellule tumorali. Sostituendo in una piccola percentuale di molecole di tali composti certi atomi con loro isotopi radioattivi emettitori di positroni (ad esempio C^{11} al posto di C^{12}), con il che non si alterano le proprietà di assorbimento da parte dell'organismo, si ottiene una concentrazione di emissione nelle zone interessate; i positroni annichilano subito e si produce una coppia di fotoni. Siccome l'emissione non ha una direzione preferenziale e gli eventi di annichilazione sono tanti, nel complesso si ha una distribuzione isotropa di fotoni, che ha origine nella zona da studiare. Si rivelano con opportuni strumenti la direzione e l'energia di ciascun fotone e si riesce a costruire un'immagine della zona di emissione, mettendone in evidenza la forma. Questo mezzo diagnostico si chiama PET (positron emission tomography ovvero tomografia ad emissione di positroni) e trova applicazione principalmente in neurologia, cardiologia e oncologia.

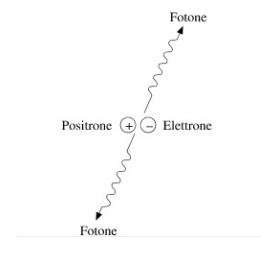


FIGURA 3.25

Commento conclusivo

Ripercorriamo rapidamente gli argomenti di teoria della relatività ristretta che abbiamo esposto per trarne alcune conclusioni riassuntive.

La formulazione relativistica fornisce la legge del moto e la definizione di grandezze fondamentali come quantità di moto ed energia per un punto materiale in moto con velocità qualsiasi, però sempre inferiore alla velocità c della luce nel vuoto, limite asintotico non raggiungibile per particelle dotate di massa.

Tutte le leggi fisiche devono avere la stessa struttura in qualsiasi sistema inerziale (principio di relatività); il collegamento tra le misure di spazio e tempo

effettuate in due sistemi diversi è dato dalla trasformazione di Lorentz. In particolare gli intervalli spaziali e temporali dipendono dal sistema di riferimento.

Pur avendo concettualmente validità generale, le nuove formule trovano applicazione pratica solo nel moto di particelle a livello atomico, nucleare e subnucleare, le uniche che possano raggiungere velocità prossime a quelle della luce in fenomeni naturali o procurati in laboratorio e per le quali sono misurabili gli effetti di trasformazioni tra energia e massa. È per questa ragione che i risultati trovati appaiono così lontani dalla nostra esperienza comune: noi non siamo circondati da corpi che si muovono con velocità vicine a c e non siamo in grado di comunicare tali velocità ad oggetti macroscopici, non abbiamo cioè sensibilità per questo tipo di fenomeni.

In questo contesto, come abbiamo già detto all'inizio del paragrafo 3.8, la meccanica newtoniana è una teoria approssimata, a cui si riduce la meccanica relativistica quando v è trascurabile rispetto a c e γ vale 1 a tutti gli effetti. Delimitandone così il campo di azione, in esso la meccanica newtoniana è estremamente accurata e resta la teoria fondamentale, nella quale trovano spiegazione i fenomeni meccanici che coinvolgono corpi macroscopici.

Nella parte restante di questo volume avremo ancora due richiami specifici di relatività: nel capitolo quarto quando parleremo di urti tra punti e nel capitolo quinto dove trattiamo la legge di gravitazione.

4.1 Sistemi di punti. Forze interne e forze esterne

Nel capitolo 2 abbiamo studiato la dinamica di un punto materiale, come conseguenza dell'interazione con il resto dell'universo, cioè dell'azione di una forza o di un sistema di forze agenti su di esso.

Consideriamo ora un sistema di n punti materiali, con n maggiore di 1, interagenti tra di loro e con il resto dell'universo.

La forza \mathbf{F}_i agente sull' i -esimo punto si può pensare come risultante delle *forze esterne* agenti sul punto, $\mathbf{F}_i^{(E)}$, e delle forze esercitate dagli altri $n - 1$ punti, *forze interne* al sistema, $\mathbf{F}_i^{(I)}$:

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{(E)} + \mathbf{F}_i^{(I)} \quad (4.1)$$

Questa scomposizione è molto utile concettualmente, come si vedrà, ma non possiamo evidenziare dal moto del punto P_i separatamente i due tipi di forze: infatti il moto di P_i è determinato dalla risultante \mathbf{F}_i .

La distinzione tra forze interne ed esterne dipende da come viene definito il sistema di punti. Se, per esempio, inglobiamo nel sistema una parte del resto dell'universo, alcune forze, precedentemente considerate esterne, diventano interne. Nel sistema formato dai pianeti che ruotano attorno al sole il moto della terra è determinato dall'interazione della stessa con i singoli pianeti (forze interne) e con il sole e il resto dell'universo (forze esterne). Se invece definissimo come sistema tutti i pianeti eccettuati Marte e Giove, l'interazione della terra con questi due pianeti diventerebbe una forza esterna.

Alle forze interne si applica la *terza legge di Newton*, o *principio di azione e reazione*, che abbiamo introdotto nel paragrafo 2.2 e ora richiamiamo: se il punto i -esimo esercita sul punto j -esimo la forza $\mathbf{F}_{i,j}$, il punto j -esimo reagisce esercitando sul punto i -esimo la forza $\mathbf{F}_{j,i}$ e tali forze hanno la stessa retta di azione, stesso modulo e verso opposto; esse possono essere attrattive o repulsive (nella figura 4.1 è mostrato il caso di forze repulsive).

La natura delle forze interne in un sistema di punti materiali può essere qualsiasi; ad esempio, se i punti sono legati tra loro da fili e molle abbiamo le tensioni dei fili (attrattive) e le forze elastiche (attrattive o repulsive a seconda che le molle siano estese o compresse), se i punti sono a contatto le forze interne possono essere dovute a deformazioni (elastiche o non elastiche) e a fenomeni di attrito. Ancora, se i punti hanno carica elettrica, vanno considerate forze elettriche e magnetiche, che possono essere attrattive o repulsive. Infine, tra punti dotati di massa si esercita la forza gravitazionale, che studieremo nel

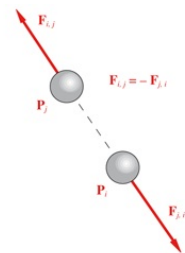


FIGURA 4.1

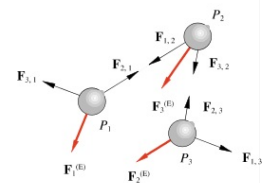


FIGURA 4.2

capitolo 5; essa è trascurabile per i normali sistemi di punti, in quanto le masse sono piccole, ma è invece la forza fondamentale nei problemi di meccanica celeste (moto di pianeti e satelliti). Osserviamo inoltre che le forze interne possono essere conservative o non conservative.

Una possibile configurazione di forze interne ed esterne per un generico sistema di tre punti è schematizzata in figura 4.2.

In generale la risultante $\mathbf{F}_i^{(1)}$ delle forze interne agenti sull'*i*-esimo punto è diversa da zero, però la risultante di tutte le forze interne del sistema è nulla perché, in base al principio di azione e reazione, esse sono a due a due eguali ed opposte:

$$\mathbf{R}^{(1)} = \sum_i \mathbf{F}_i^{(1)} = \sum_{i,j} \mathbf{F}_{i,j} = 0 \quad (4.2)$$

con $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, n$, $i \neq j$.

Si osservi che il principio di azione e reazione si applica a qualunque interazione e quindi anche alle forze esterne: la reazione in tal caso è applicata al resto dell'universo e non al sistema, il cui moto intendiamo studiare.

In vari esempi e problemi che si incontrano durante lo studio della dinamica del punto materiale si considerano corpi in interazioni tra loro: nella determinazione del moto ogni corpo viene esaminato separatamente e per esso si scrive l'equazione del moto. Si veda a questo scopo l'esempio 2.19. Come ulteriore esempio prendiamo due corpi m_1 e m_2 in moto, l'uno rispetto all'altro, con una forza di attrito radente alla superficie di contatto. Il moto complessivo, verso destra, è dovuto alla forza esterna \mathbf{F} e le due equazioni del moto sono:

$$F - \mu_d N = m_1 a_1 \quad , \quad \mu_d N = m_2 a_2 \quad .$$

Il termine di attrito compare per un corpo come forza resistente e per l'altro come forza motrice, eguale in modulo, ma di verso opposto alla precedente: e infatti l'attrito è opposto al verso del moto relativo (rispetto a m_1 , m_2 si sposta verso sinistra). Oltre a questa coppia di forze interne, essenziali per studiare il moto orizzontale dei due corpi (che supponiamo avvenire su un piano senza attrito), ci sono le forze normali. La terra attira m_2 con una forza m_2g , la cui reazione è applicata al centro della terra, e per questa ragione m_2 preme su m_1 , deformandolo; la reazione di m_1 è $F_{1,2} = m_2g$. Analogamente si tratta l'interazione m_1 -piano; nella figura 4.4 sono indicate tutte le forze verticali interne al sistema piano- m_1 - m_2 (sfalsate per comodità di disegno).

Per ciascun punto P_i di massa m_i sottoposto alla forza \mathbf{F}_i consideriamo le grandezze, misurate in un sistema di riferimento inerziale:

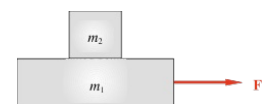


FIGURA 4.3

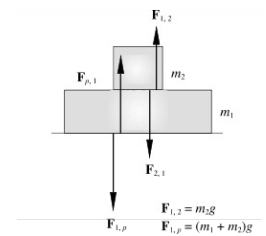


FIGURA 4.4

<i>posizione</i>	\mathbf{r}_i	<i>velocità</i>	\mathbf{v}_i
<i>accelerazione</i>	$\mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i / m_i$	<i>quantità di moto</i>	$\mathbf{p}_i = m_i \mathbf{v}_i$,
<i>momento angolare</i>	$\mathbf{L}_i = \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i$	<i>energia cinetica</i>	$E_{k,i} = \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^2$.

Per il sistema complessivo di punti possiamo inoltre definire le grandezze:

$$\text{quantità di moto totale} \quad \mathbf{P} = \sum_i \mathbf{P}_i = \sum_i m_i \mathbf{v}_i ,$$

$$\text{momento angolare totale} \quad \mathbf{L} = \sum_i \mathbf{L}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i ,$$

$$\text{energia cinetica totale} \quad E_k = \sum_i E_{k,i} = \sum_i \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^2 .$$

I momenti angolari vanno riferiti a un polo, che nelle formule è stato preso coincidente con l'origine, ma che può essere un qualsiasi altro punto, fermo o in movimento, nel sistema di riferimento inerziale.

4.2 Centro di massa di un sistema di punti.

Teorema del moto del centro di massa

Si definisce come *centro di massa di un sistema* di punti materiali il punto geometrico la cui posizione è individuata, nel sistema di riferimento considerato, dal raggio vettore

$$\mathbf{r}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 + \dots + m_n \mathbf{r}_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} ; \quad (4.3)$$

le componenti di \mathbf{r}_{CM} , ovvero le coordinate del centro di massa in un sistema di coordinate cartesiane con l'origine in O , sono

$$x_{CM} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i} , \quad y_{CM} = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i} , \quad z_{CM} = \frac{\sum_i m_i z_i}{\sum_i m_i} .$$

Si noti che *la posizione* del centro di massa rispetto agli n punti materiali *non dipende dal sistema di riferimento*, mentre le sue coordinate invece variano a seconda del sistema prescelto. In figura 4.6 sono mostrati un sistema di n punti e i centri di due sistemi di riferimento O e O' : le posizioni dei punti P_i sono individuate rispettivamente dai raggi \mathbf{r}_i e \mathbf{r}'_i con

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}'_i + \mathbf{OO}' \quad \text{ovvero} \quad \mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i + \mathbf{O}'\mathbf{O} .$$

La posizione del centro di massa rispetto ad O è data da (4.3) e rispetto ad O' da

$$\mathbf{r}'_{CM} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}'_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i (\mathbf{r}_i + \mathbf{O}'\mathbf{O})}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{\sum_i m_i} + \mathbf{O}'\mathbf{O} = \mathbf{r}_{CM} + \mathbf{O}'\mathbf{O} .$$

Se gli n punti sono in movimento, di norma la posizione del centro di massa varia; sulla base della definizione calcoliamo la velocità del centro di massa:

$$\mathbf{v}_{CM} = \frac{d\mathbf{r}_{CM}}{dt} = \frac{\sum_i m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt}}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{v}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\mathbf{P}}{m} . \quad (4.4)$$

Abbiamo utilizzato la definizione di quantità di moto totale del sistema data nel paragrafo 4.1 e chiamato $m = \sum_i m_i$ la massa totale del sistema. Vediamo quindi che \mathbf{P} coincide con la quantità di moto $m\mathbf{v}_{CM}$ del centro di massa, considerato come un punto materiale che abbia la posizione \mathbf{r}_{CM} , la velocità \mathbf{v}_{CM} e massa pari alla massa totale m del sistema.

Analogamente possiamo ricavare l'accelerazione del centro di massa, derivando (4.4):

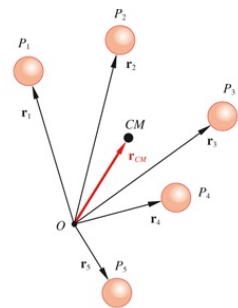


FIGURA 4.5

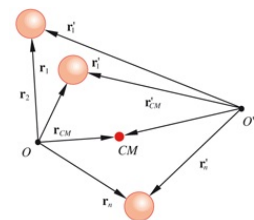


FIGURA 4.6

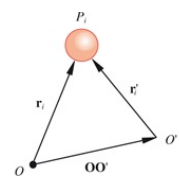


FIGURA 4.7

$$\mathbf{a}_{CM} = \frac{d\mathbf{r}_{CM}}{dt} = \frac{\sum_i m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt}}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{a}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{a}_i}{m} . \quad (4.5)$$

Se il sistema di riferimento è inerziale

$$m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{(E)} + \mathbf{F}_i^{(I)}$$

secondo (4.1). Sostituendo in (4.5)

$$m \mathbf{a}_{CM} = \sum_i m_i \mathbf{a}_i = \sum_i (\mathbf{F}_i^{(E)} + \mathbf{F}_i^{(I)}) = \mathbf{R}^{(E)} + \mathbf{R}^{(I)} = \mathbf{R}^{(E)} ,$$

dato che la risultante (4.2) delle forze interne è nulla. La relazione

$$\mathbf{R}^{(E)} = m \mathbf{a}_{CM} \quad (4.6)$$

Teorema del moto del
centro di massa

esprime il *teorema del moto del centro di massa*. Il centro di massa si muove come un punto materiale in cui sia concentrata tutta la massa del sistema e a cui sia applicata la risultante delle forze esterne.

Utilizzando le (4.4) e (4.6) si ha inoltre

$$\mathbf{R}^{(E)} = m \mathbf{a}_{CM} = m \frac{d\mathbf{v}_{CM}}{dt} = \frac{d}{dt} (m \mathbf{v}_{CM}) = \frac{d\mathbf{P}}{dt} . \quad (4.7)$$

La risultante delle forze esterne è eguale alla derivata rispetto al tempo della quantità di moto totale del sistema.

Il moto del centro di massa è determinato dunque solo dalle forze esterne. L'azione delle forze interne non può modificare lo stato di moto del centro di massa; invece il moto di ciascun punto dipende dall'azione delle forze esterne ed interne agenti su di esso.

Osservazioni ed esempi sulle proprietà del centro di massa

La definizione introdotta di centro di massa è matematica, nel senso che non esiste il punto materiale centro di massa, ma la massa è distribuita nei singoli punti che si muovono sotto l'azione delle forze interne ed esterne. Tuttavia questo punto matematico gode di notevoli proprietà, che in parte vedremo in seguito.

Per ora è stato dimostrato che considerando il centro di massa alla stregua di un punto materiale di massa m , eguale alla massa totale del sistema,

- a) la sua velocità è eguale alla quantità di moto totale divisa per la massa totale, ovvero la sua quantità di moto $m\mathbf{v}_{CM}$ è eguale alla quantità di moto totale \mathbf{P} ;
- b) la sua accelerazione è determinata dalla risultante delle forze esterne agenti sul sistema.

In questo senso, facendo riferimento a \mathbf{P} e $\mathbf{R}^{(E)}$, possiamo dire che il *centro di massa rappresenta il moto globale o di insieme dei punti materiali*.

Il fatto che ad un certo istante \mathbf{v}_{CM} abbia un determinato valore significa solamente che il sistema *in media* si sta spostando in quella data direzione,

anche se nessuna delle singole \mathbf{v}_i coincide con \mathbf{v}_{CM} . Analogamente, il fatto che \mathbf{a}_{CM} abbia un certo valore a causa dell'azione di $\mathbf{R}^{(E)}$ indica che *nel suo complesso* il sistema sta accelerando in quella data direzione.

In effetti \mathbf{r}_{CM} , \mathbf{v}_{CM} e \mathbf{a}_{CM} sono le *medie pesate* sulle masse dei raggi vettori, velocità, accelerazioni dei singoli punti e pertanto forniscono *informazioni di proprietà medie* e non sul moto dei singoli punti.

Notiamo infine che la legge del moto (4.6) e la quantità di moto (4.4) del centro di massa coincidono con quelle del punto materiale ideale, di cui il centro di massa costituisce l'esempio migliore, senza approssimazioni sulle dimensioni o sul tipo di moto.

ESEMPIO 4.1

Determinare la posizione del centro di massa di un sistema di due punti materiali, posti a distanza d tra loro, di massa m_1 e m_2 .

Soluzione

Soluzione

Il problema è unidimensionale e in base a (4.3) si ha

$$(m_1 + m_2) x_{CM} = m_1 x_1 + m_2 x_2.$$

Dato che $x_2 - x_1 = d$, si ricava

$$x_{CM} = x_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} d$$

ovvero la posizione del centro di massa rispetto alla posizione di m_1 è

$$x_{CM} - x_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} d.$$

Indicando con a e b la distanza del centro di massa dai due punti, con $a + b = d$, si ha:

$$a = \frac{m_2}{m_1 + m_2} d, \quad b = \frac{m_1}{m_1 + m_2} d, \quad \frac{a}{b} = \frac{m_2}{m_1}.$$

Il centro di massa sta in una posizione intermedia tra i due punti ed è più vicino al punto di massa maggiore.

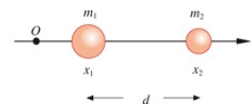


FIGURA 4.8

(Esempio 4.1)

Visualizza soluzione

ESEMPIO 4.2

Determinare la posizione del centro di massa di un sistema di tre punti di eguale massa m , posti ai vertici di un triangolo equilatero di lato a .

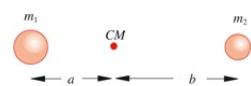


FIGURA 4.9

Soluzione

Soluzione Assumiamo gli assi di riferimento come in figura 4.10. Il centro di massa sta nel piano x, y individuato dai tre punti ($z_1 = z_2 = z_3 = 0$, quindi $z_{CM} = 0$). Le sue coordinate sono

$$x_{CM} = \frac{m \cdot 0 + m x_2 + m x_3}{3 m} = \frac{m \frac{a}{2} + m a}{3 m} = \frac{a}{2}$$
$$y_{CM} = \frac{m \cdot 0 + m y_2 + m \cdot 0}{3 m} = \frac{y_2}{3} = \frac{h}{3} = \frac{a}{2\sqrt{3}} .$$

Il centro di massa sta pertanto sull'altezza del triangolo, a distanza $h / 3$ dalla base. Il risultato non dipende dalla scelta degli assi.

Si poteva procedere diversamente, determinando prima la posizione del centro di massa dei punti P_1 e P_3 , che cade nel punto di mezzo della base $P_1 P_3$; in tale punto si assume esservi la massa $2m$. Successivamente si calcola la posizione del centro di massa di P_2 e del centro di massa di P_1 e P_3 , utilizzando il risultato dell'esempio 4.1.

Questa procedura è permessa dalla definizione (4.3) di \mathbf{r}_{CM} come sommatoria: il calcolo di \mathbf{r}_{CM} si può effettuare associando gruppi di punti a piacere, determinando i relativi centri di massa, considerando questi come punti materiali e calcolando infine il centro di massa di tali centri di massa parziali.

(Esempio 4.1)

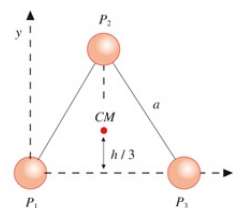


FIGURA 4.10
(Esempio 4.2)

Visualizza soluzione

ESEMPIO 4.3

Calcolare la posizione e la velocità del centro di massa di due punti di eguale massa m , in moto con la stessa velocità \mathbf{v} lungo l'asse x .

Soluzione

$$x_{CM} = \frac{m x_1 + m x_2}{2 m} = \frac{x_1 + x_2}{2} ,$$
$$v_{CM} = \frac{m v + m v}{2 m} = v .$$

Il centro di massa si trova sempre nella posizione di mezzo tra i due punti in moto e si muove con la stessa velocità \mathbf{v} .

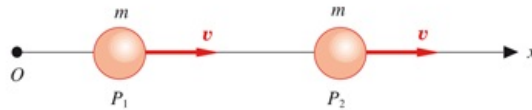


FIGURA 4.11

Se invece P_2 fosse fermo, la posizione del centro di massa sarebbe sempre a metà del segmento $P_1 P_2$, ma la velocità sarebbe $\mathbf{v}/2$.

Infine, se P_2 avesse velocità $-\mathbf{v}$, il centro di massa sarebbe fermo al centro del segmento $P_1 P_2$.

Visualizza soluzione

ESEMPIO 4.4

Si determini il moto del centro di massa di un insieme di punti sottoposti solo alla forza peso.

Soluzione

Dato che $\mathbf{a}_i = \mathbf{g}$, abbiamo

$$m \mathbf{a}_{CM} = \sum_i m_i \mathbf{a}_i = m \mathbf{g} \quad ,$$

oppure

$$m \mathbf{a}_{CM} = \mathbf{R}^{(E)} = \sum_i m_i \mathbf{g} = m \mathbf{g} \quad .$$

Risulta dunque $\mathbf{a}_{CM} = \mathbf{g}$: il centro di massa si muove con accelerazione \mathbf{g} . Se tra i punti esistono anche forze interne (ad esempio i punti materiali sono elettricamente carichi), per i singoli punti $\mathbf{a}_i \neq \mathbf{g}$, dato che essi risentono dell'azione delle forze interne. Il centro di massa si muove però sempre con accelerazione \mathbf{g} , descrivendo in generale una traiettoria parabolica, dato che risente solo dell'azione della risultante delle forze esterne $\mathbf{R}^{(E)} = m \mathbf{g}$.

Un'altra situazione che rientra in questo caso è quella relativa a due punti materiali connessi da una molla compressa. Si lascia il sistema libero di cadere, con una certa velocità iniziale, permettendo contemporaneamente alla molla di estendersi. La traiettoria dei singoli punti è assai complicata, a causa dell'oscillazione dovuta alla molla, ma il centro di massa descrive semplicemente una parabola, con accelerazione \mathbf{g} , dato che le forze elastiche sono forze interne.

Visualizza soluzione

4.3 Conservazione della quantità di moto

Se il sistema di punti considerato è isolato, cioè non soggetto a forze esterne, oppure l'azione delle forze esterne è tale che la loro risultante $\mathbf{R}^{(E)}$ sia nulla, da (4.6) e (4.4) si ha:

$$\mathbf{a}_{CM} = 0 \quad , \quad \mathbf{v}_{CM} = \text{costante} \quad , \quad \mathbf{P} = \text{costante} \quad (4.8)$$

Quando la risultante delle forze esterne è nulla, la quantità di moto totale del sistema rimane costante nel tempo e il centro di massa si muove di moto rettilineo uniforme o resta in quiete. Tale risultato esprime il principio della conservazione della quantità di moto per un sistema di punti materiali.

La legge (4.8) è una legge vettoriale e si può scomporre in tre relazioni valide per i moti proiettati sugli assi, scritte sinteticamente $P_x = \text{costante}$, $P_y = \text{costante}$, $P_z = \text{costante}$. Osserviamo inoltre che la conservazione della quantità di moto può avvenire anche parzialmente, cioè essere riferita a una o due delle componenti. Per esempio se $R_x^{(E)} = 0$, allora $P_x = \text{costante}$. Notiamo poi che, pur verificandosi $\mathbf{R}^{(E)} = 0$, le quantità di moto dei vari punti $m_i \mathbf{v}_i$ in generale variano nel tempo; resta costante solo la loro somma $\Sigma_i m_i \mathbf{v}_i$.

Consideriamo ora due punti isolati, che possono quindi interagire solo tra loro:

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = m \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = \text{costante} \quad . \quad (4.9)$$

Derivando rispetto al tempo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2) &= m_1 \mathbf{a}_1 + m_2 \mathbf{a}_2 = 0 \\ \Rightarrow \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 &= 0 \quad , \quad \mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2. \end{aligned}$$

Il principio di conservazione della quantità di moto per un sistema isolato di due punti ha come conseguenza che le forze che si esercitano tra i due punti sono eguali in modulo e di verso opposto. Tale risultato non è completamente equivalente al principio di azione e reazione in quanto $\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2$ non implica che le due forze abbiano la stessa retta di azione. Del resto anche la dimostrazione diretta (4.7) che segue da (4.2) e (4.6) non sfrutta il fatto che $\mathbf{F}_{i,j}$ e $\mathbf{F}_{j,i}$ hanno la stessa retta di azione.

Riprenderemo l'argomento parlando della conservazione del momento angolare di un sistema isolato di punti materiali nel paragrafo 4.6. Fatta questa precisazione, potremmo dire che *c'è equivalenza tra conservazione della quantità di moto e principio di azione e reazione, generalizzabile a sistemi più complessi.*

In realtà la conservazione della quantità di moto per un sistema isolato è un

principio di portata più generale: si dimostra che esso discende dalla omogeneità dello spazio, cioè dal fatto che non esiste una origine privilegiata per i sistemi di riferimento.

Il principio di conservazione della quantità di moto permette anche di definire dinamicamente la massa, indipendentemente dalla forza peso. Consideriamo infatti due punti materiali fermi agli estremi di una molla compressa. Dato che il centro di massa è in quiete, la quantità di moto del sistema dei due punti è nulla, $\mathbf{P} = 0$. Si lascia espandere la molla: i due punti si muovono in versi opposti e poiché vengono ad agire, durante il moto, solo forze interne al sistema, resta sempre vero che $\mathbf{P} = 0$. Da (4.9)

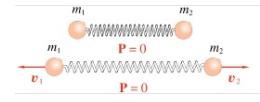


FIGURA 4.12

$$m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = 0 \Rightarrow \text{in modulo} \quad m_2 = m_1 \frac{v_1}{v_2} .$$

È possibile misurare il valore di una qualsiasi massa, rispetto ad una massa campione, attraverso misure di velocità. Riprenderemo questo caso, per valutarne gli aspetti energetici, nel paragrafo 4.8.

ESEMPIO 4.5

Due punti materiali sono sottoposti soltanto alla loro mutua interazione, che è attrattiva. Se essi sono inizialmente in quiete e vengono lasciati liberi, in quale posizione si incontrano?

Soluzione

Viste le condizioni iniziali, i punti si muovono lungo la linea retta che li congiunge. D'altra parte nell'istante in cui si incontrano i punti coincidono con il loro centro di massa. Quindi il punto di incontro, qualunque sia la forza attrattiva e la legge del moto di avvicinamento, è nella posizione occupata dal centro di massa, calcolabile subito a partire dalle posizioni iniziali dei punti (vedi esempio 4.1). Infatti il centro di massa, inizialmente in quiete come i punti, successivamente non si muove non essendoci forze esterne.

Visualizza soluzione

ESEMPIO 4.6

Un punto materiale A di massa m_1 è posto sull'estremità di sinistra di una lastra B lunga d e di massa m_2 ; il tutto poggia su di un piano orizzontale senza attrito. Sotto l'azione di forze interne A entra in movimento e arriva all'estremità di destra della lastra B . Dato un asse x , con origine nella posizione iniziale di A e orientato lungo la lastra da sinistra a destra, determinare la coordinata di A quando si trova nell'estremità di destra di B .

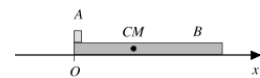


FIGURA 4.13

(Esempio 4.6)

Soluzione

Anche in questo esempio, come nell'esempio 4.5, il centro di massa resta

fermo (conservazione della quantità di moto totale che, nulla all'inizio, resta nulla). Esso ha la coordinata

$$x_{CM} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{d}{2} ,$$

calcolata utilizzando il risultato dell'esempio 4.1 e supponendo che il centro di massa della lastra sia nel suo centro geometrico, come si intuisce e come vedremo analiticamente nel capitolo 6. In figura 4.13 è mostrata la situazione iniziale. Quando il punto A è giunto all'altra estremità della lastra, abbiamo la situazione simmetrica rispetto alla posizione del centro di massa, come mostrato in figura 4.14. Cioè, mentre il punto A avanza la lastra retrocede, per azione delle forze interne, con la condizione che il centro di massa resti fermo. Pertanto alla fine $x_A = 2 x_{CM}$.

Visualizza soluzione

ESEMPIO 4.7

Nella stessa situazione iniziale dell'esempio 4.6 al punto A viene comunicata una velocità iniziale v_0 , concorde all'asse x ; tra A e B esiste un coefficiente di attrito dinamico μ_d . Dopo un certo tempo A si ferma rispetto a B , ed entrambi proseguono verso destra. Calcolare la velocità finale, di quanto A si sposta rispetto a B , il lavoro svolto dalla forza di attrito. Descrivere il moto del centro di massa.

Soluzione

Soluzione Il valore della velocità finale si calcola applicando la conservazione della quantità di moto (non agiscono forze esterne); si impone cioè l'eguaglianza tra la quantità di moto iniziale e la quantità di moto finale:

$$P_{in} = m_1 v_0 = P_{fin} = (m_1 + m_2) v = P$$

$$\Rightarrow v = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_0 .$$

Questa è anche la velocità del centro di massa durante il processo:

$$v_{CM} = \frac{P}{m_1 + m_2} = v .$$

Dall'istante iniziale, in cui $v(A) = v_0$ e $v(B) = 0$, all'istante finale in cui $v(A) = v(B) = v$, il centro di massa si muove con velocità costante v .

Scriviamo adesso le equazioni del moto, indicando con 1 le grandezze relative ad A e con 2 quelle relative a B . Su A agisce la forza interna di attrito $-\mu_d m_1 g$ e su B la forza $\mu_d m_1 g$. Pertanto:

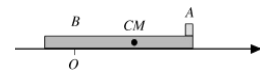


FIGURA 4.14
(Esempio 4.6)

$$\begin{aligned}
m_1 a_1 &= -\mu_d m_1 g \\
v_1 &= v_0 + a_1 t = v_0 - \mu_d g t \\
x_1 &= v_0 t - \frac{1}{2} \mu_d g t^2 \\
m_2 a_2 &= \mu_d m_1 g \\
v_2 &= a_2 t = \frac{m_1}{m_2} \mu_d g t \\
x_2 &= \frac{1}{2} \frac{m_1}{m_2} \mu_d g t^2
\end{aligned}$$

(x_2 è la coordinata dell'estremità di sinistra della lastra). La velocità di A decresce, quella di B aumenta e A si ferma rispetto a B quando $v_1 = v_2$, cioè nell'istante

$$t^* = \frac{m_2 v_0}{(m_1 + m_2) \mu_d g} .$$

Per $t = t^*$ B non frena più A e A non spinge più B ; cessa il moto relativo e i corpi continuano con la stessa velocità. La distanza percorsa da A rispetto a B è

$$\Delta x = x_1(t^*) - x_2(t^*) = \frac{m_2 v_0^2}{2 (m_1 + m_2) \mu_d g} .$$

Si verifica subito che, inserendo t^* nelle espressioni di v_1 e v_2 , queste assumono il valore v , calcolato precedentemente.

Il lavoro svolto dall'attrito, unica forza agente, deve essere eguale alla variazione di energia cinetica (nel paragrafo 4.8 lo dimostreremo in generale):

$$W = E_{k, \text{fin}} - E_{k, \text{in}} = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 - \frac{1}{2} m_1 v_0^2 = -\frac{m_1 m_2}{2 (m_1 + m_2)} v_0^2 ,$$

indipendente da μ_d , come lo è la velocità finale v (mentre dipende da μ_d la durata del processo, cioè t^*). Se dividiamo il modulo di W per il valore $\mu_d m_1 g$ della forza di attrito troviamo la distanza lungo cui la forza ha agito; sviluppando il calcolo abbiamo che il risultato coincide con Δx , cioè con lo spostamento di A relativo a B .

Un'ultima verifica da effettuare avendo dati numerici è che Δx sia inferiore o eguale a d , lunghezza della lastra B .

Visualizza soluzione

4.4 Teorema del momento angolare

Determiniamo ora a cosa siano dovute le variazioni del momento angolare totale di un sistema di punti materiali, ricordando quanto già studiato relativamente al momento angolare di un punto materiale nel paragrafo 2.22.

Consideriamo dunque il momento angolare totale di un sistema di punti materiali rispetto ad un polo O ; detto \mathbf{r}_i il raggio vettore \mathbf{OP}_i si ha

$$\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i \quad .$$

Teniamo presente che in generale il polo O non coincide con l'origine e può non essere fisso (possibilità che per semplicità abbiamo escluso nel paragrafo 2.22) e che quindi il raggio vettore \mathbf{r}_i può avere entrambi gli estremi in movimento, con velocità \mathbf{v}_i e \mathbf{v}_O nel sistema di riferimento inerziale da cui osserviamo il sistema di punti.

La derivata di \mathbf{L} rispetto al tempo è

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \times m_i \mathbf{v}_i + \sum_i \mathbf{r}_i \times m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} \quad .$$

Per $\frac{d\mathbf{r}_i}{dt}$ usiamo il risultato del paragrafo 3.1, cioè $\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_O$; inoltre, essendo il sistema di riferimento inerziale,

$$m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{(E)} + \mathbf{F}_i^{(I)} \quad .$$

Ne segue

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{L}}{dt} &= \sum_i (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_O) \times m_i \mathbf{v}_i + \sum_i \mathbf{r}_i \times (\mathbf{F}_i^{(E)} + \mathbf{F}_i^{(I)}) \\ &= \sum_i \mathbf{v}_i \times m_i \mathbf{v}_i - \sum_i \mathbf{v}_O \times m_i \mathbf{v}_i + \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{(E)} + \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{(I)} \\ &= -\mathbf{v}_O \times m \mathbf{v}_{CM} + \mathbf{M}^{(E)} + \mathbf{M}^{(I)} \quad . \end{aligned}$$

Infatti $\sum_i \mathbf{v}_i \times m_i \mathbf{v}_i$ è nulla perché ogni addendo è un prodotto vettoriale di vettori paralleli; \mathbf{v}_O è stato portato fuori dalla sommatoria perché indipendente dall'indice i ; infine si è usata (4.4). Il vettore

$$\mathbf{M}^{(E)} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{(E)}$$

rappresenta il momento totale delle forze esterne rispetto al polo O e

$$\mathbf{M}^{(I)} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{(I)}$$

quello delle forze interne rispetto allo stesso polo. Con riferimento alla figura 4.16 dimostriamo che $\mathbf{M}^{(I)} = \mathbf{0}$. La somma dei momenti delle due forze interne $\mathbf{F}_{i,j}$ e $\mathbf{F}_{j,i}$ rispetto al polo O è

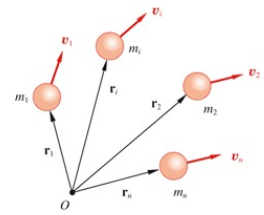


FIGURA 4.15

$$\mathbf{M}^{(I)}_{i,j} = \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{i,j} + \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{j,i} = (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) \times \mathbf{F}_{i,j} = \mathbf{r}_{i,j} \times \mathbf{F}_{i,j} \quad .$$

Il vettore $\mathbf{r}_{i,j} = \mathbf{P}_i \mathbf{P}_j$ è parallelo a $\mathbf{F}_{i,j}$ e quindi $\mathbf{M}^{(I)}_{i,j} = 0$. $\mathbf{M}^{(I)}$ è costituito dalla somma di tutti i possibili termini $\mathbf{M}^{(I)}_{i,j}$ e perciò risulta identicamente nullo (qualunque sia la scelta del polo).

In conclusione

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}^{(E)} - \mathbf{v}_O \times M \mathbf{v}_{CM} \quad (4.10)$$

e se il termine $-\mathbf{v}_O \times M \mathbf{v}_{CM}$ risulta nullo si ha

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}^{(E)} \quad . \quad (4.11)$$

Il termine $-\mathbf{v}_O \times M \mathbf{v}_{CM}$ è nullo in questi casi:

- a) il polo O è fisso nel sistema di riferimento inerziale, $\mathbf{v}_O = 0$;
- b) il centro di massa è in quiete nel sistema di riferimento inerziale, $\mathbf{v}_{CM} = 0$;
- c) il polo O coincide con il centro di massa, per cui $\mathbf{v}_O = \mathbf{v}_{CM}$ e $\mathbf{v}_O \times \mathbf{v}_{CM} = 0$;
- d) \mathbf{v}_O è parallelo a \mathbf{v}_{CM} .

Il teorema del momento angolare (4.11) indica dunque che, se il polo O è fisso nel sistema di riferimento inerziale o coincide con il centro di massa (anche se quest'ultimo non è in generale un punto fisso), l'evoluzione nel tempo del momento angolare del sistema di punti è determinata dal momento delle forze esterne rispetto ad O , mentre le forze interne non portano contributi.

Sottolineiamo che in (4.11) le quantità di moto sono misurate nel sistema di riferimento inerziale (\mathbf{v}_i è la velocità del punto P_i vista dall'origine), i raggi vettori partono dal polo scelto e le forze sono quelle vere.

Si noti infine che il risultato $\mathbf{M}^{(I)} = 0$ si ottiene solo perché si assume che le forze interne siano un insieme di coppie di forze eguali in modulo e di verso opposto, con la stessa retta di azione, ossia coppie di forze con braccio nullo (vedi paragrafo 4.15). Vedremo nel paragrafo seguente che questa assunzione ha una giustificazione sperimentale.

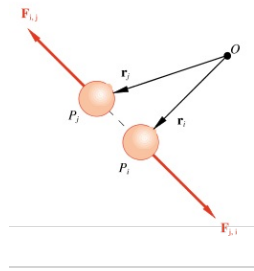


FIGURA 4.16

Teorema del momento angolare

4.5 Conservazione del momento angolare

In una situazione in cui valga (4.11), cioè sia $\mathbf{v}_O \times M \mathbf{v}_{CM} = \mathbf{0}$, se il momento delle forze esterne è nullo il momento angolare resta costante. La condizione $\mathbf{M}^{(E)} = \mathbf{0}$ si può verificare in due casi: a) non agiscono forze esterne, il sistema è isolato: allora \mathbf{L} si conserva rispetto a qualsiasi polo per il quale $\mathbf{v}_O \times M \mathbf{v}_{CM} = \mathbf{0}$; in questa situazione, in cui è anche $\mathbf{R}^{(E)} = \mathbf{0}$, si ha pure la conservazione della quantità di moto, $\mathbf{P} = \text{costante}$ (si osservi che $\mathbf{R}^{(E)} = \mathbf{0}$ non ha come conseguenza, in generale, $\mathbf{M}^{(E)} = \mathbf{0}$); b) il momento delle forze esterne è nullo rispetto ad un determinato polo, ma non rispetto a qualsiasi polo, pure in presenza di forze esterne; pertanto si ha conservazione del momento angolare solo se calcolato rispetto a quel polo (mentre, in generale, non si conserva in tali casi la quantità di moto).

Questa seconda situazione fisica sottolinea l'importanza della scelta del polo per poter risolvere determinati problemi.

L'osservazione sperimentale che, per un sistema isolato, si conserva il momento angolare (rispetto a un polo per cui $\mathbf{v}_O \times M \mathbf{v}_{CM} = \mathbf{0}$) conferma la validità di (4.11) e quindi che sia $\mathbf{M}^{(I)} = \mathbf{0}$. Infatti se fosse $\mathbf{M}^{(I)} \neq \mathbf{0}$, anche in un sistema isolato il momento angolare potrebbe non conservarsi. Di conseguenza, è corretto assumere che le forze interne a due a due abbiano la stessa retta di azione, costituiscono cioè coppie di forze con braccio nullo.

La conservazione del momento angolare di un sistema di punti materiali isolato è una proprietà molto generale: si dimostra che discende dalla caratteristica dello spazio di essere *isotropo*, cioè dal fatto che non esiste una direzione privilegiata.

ESEMPIO 4.8

Due punti materiali di eguale massa m sono legati tra loro da una sbarretta di massa trascurabile e ruotano senza attrito in un piano orizzontale rispetto al centro della sbarretta; nella situazione iniziale la sbarretta è lunga $2r_1$ e la velocità angolare ha il valore costante ω_1 . Supponiamo che la sbarretta sia telescopica e che, durante il moto, la lunghezza venga portata al valore $2r_2$, con $r_2 > r_1$. Calcolare il valore finale ω_2 della velocità angolare.

Soluzione

Le forze esterne al sistema, che sono le forze peso e le reazioni normali del piano, hanno momento risultante nullo rispetto al centro O del sistema, che assumiamo come polo (nel caso specifico anche $\mathbf{R}^{(E)} = \mathbf{0}$). La tensione della

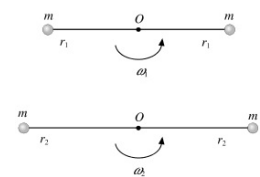


FIGURA 4.17
(Esempio 4.8)

sbarretta fornisce a ciascun punto la forza centripeta necessaria al moto circolare, ma si tratta di forze interne, con momento nullo. Possiamo dunque applicare la conservazione del momento angolare rispetto al centro O . Il momento angolare iniziale \mathbf{L}_{in} è ortogonale al piano del moto, rivolto verso il lettore, e vale in modulo $2r_1 m v_1$; dato che $v_1 = \omega_1 r_1$,

$$L_{in} = 2 m r_1^2 \omega_1 \quad .$$

Dopo l'allungamento $L_{fin} = 2 m r_2^2 \omega_2$ e dall'eguaglianza $L_{in} = L_{fin}$ si ricava

$$\omega_2 = \frac{r_1^2}{r_2^2} \omega_1 \quad .$$

A seguito dell'allungamento il sistema rallenta. Anche per questo esempio, come per il caso della definizione dinamica della massa (paragrafo 4.3), tratteremo l'aspetto energetico nel paragrafo 4.8.

Visualizza soluzione

4.6 Sistema di riferimento del centro di massa

Nello studio della dinamica dei sistemi di punti materiali è molto utile considerare il *sistema di riferimento del centro di massa*. Esso ha le seguenti caratteristiche:

- l'origine è nel centro di massa;
- gli assi mantengono sempre la stessa direzione rispetto agli assi del sistema inerziale e, in particolare, possono essere assunti paralleli a questi;
- si tratta in generale di un sistema non inerziale: in base a b il moto del sistema del centro di massa è traslatorio, ma non necessariamente rettilineo e uniforme; ciò avviene solo se $\mathbf{R}^{(E)} = \mathbf{0}$ così che $\mathbf{a}_{CM} = \mathbf{0}$.

Indichiamo con un apice le grandezze relative al sistema del centro di massa; dalla figura 4.18 si vede che, per il punto P_i ,

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}'_i + \mathbf{r}_{CM} \quad (4.12)$$

Dal teorema delle velocità relative (3.4) con $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ (moto di trascinamento traslatorio) si ha:

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}'_i + \mathbf{v}_{CM} \quad (4.13)$$

Avendo assunto il centro di massa come riferimento, evidentemente la posizione e la velocità del centro di massa rispetto a se stesso sono nulle:

$$\mathbf{r}'_{CM} = \mathbf{0} \quad , \quad \mathbf{v}'_{CM} = \mathbf{0} \quad .$$

Da (4.3) e (4.4), valide in qualsiasi sistema, segue

$$\sum_i m_i \mathbf{r}'_i = \mathbf{0} \quad , \quad \sum_i m_i \mathbf{v}'_i = \mathbf{0} \quad . \quad (4.14)$$

Pertanto la *quantità di moto totale del sistema*, $\mathbf{P}' = \sum_i m_i \mathbf{v}'_i$, risulta nulla se misurata nel sistema di riferimento del centro di massa (i singoli termini $m_i \mathbf{v}'_i$ sono però in generale diversi da zero).

Essendo il sistema del centro di massa non inerziale, sui singoli punti sembra agire anche la forza di inerzia $-m_i \mathbf{a}_t = -m_i \mathbf{a}_{CM}$, in quanto l'accelerazione di trascinamento è pari a quella dell'origine, cioè del centro di massa. Per ogni punto abbiamo quindi da (3.10)

$$\mathbf{F}_i^{(E)} + \mathbf{F}_i^{(1)} - m_i \mathbf{a}_{CM} = m_i \mathbf{a}'_i$$

e sommando su tutti i punti

$$\mathbf{R}^{(E)} - \sum_i m_i \mathbf{a}_{CM} = \mathbf{R}^{(E)} - m \mathbf{a}_{CM} = \sum_i m_i \mathbf{a}'_i = \mathbf{0} \quad ,$$

in base a (4.6). Quindi alle (4.14) va aggiunta la proprietà $\sum_i m_i \mathbf{a}'_i = \mathbf{0}$, che d'altra parte si può ricavare direttamente da (4.5) essendo per definizione $\mathbf{a}'_{CM} = \mathbf{0}$.

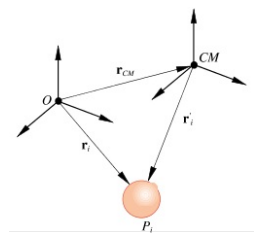


FIGURA 4.18

Quantità di moto totale rispetto al centro di massa

Il momento risultante delle forze applicate nei singoli punti, calcolato rispetto al centro di massa, vale

$$\sum_i \mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i^{(E)} + \sum_i \mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i^{(I)} - \sum_i \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{a}_{CM} = \mathbf{M}^{(E)} - (\sum_i m_i \mathbf{r}'_i) \times \mathbf{a}_{CM} = \mathbf{M}^{(E)},$$

Momento risultante
rispetto al centro di
massa

avendo utilizzato (4.14). *Il momento risultante rispetto al centro di massa è eguale al solo momento delle forze esterne vere, senza contributi dalle forze di inerzia.*

Sappiamo che (4.11) è vera anche se si assume, in un sistema di riferimento inerziale, il centro di massa come polo (caso c del paragrafo 4.4). Il momento delle forze esterne è

$$\mathbf{M}^{(E)} = \sum_i \mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i^{(E)} = \mathbf{M}^{(E)} .$$

Il momento angolare rispetto al centro di massa, calcolato nel sistema di riferimento inerziale, è

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \sum_i \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}_i = \sum_i \mathbf{r}'_i \times m_i (\mathbf{v}'_i + \mathbf{v}_{CM}) = \\ &= \sum_i \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i + \sum_i \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}_{CM} = \\ &= \mathbf{L}' + (\sum_i m_i \mathbf{r}'_i) \times \mathbf{v}_{CM} = \mathbf{L}' , \end{aligned}$$

dove abbiamo sfruttato (4.13) e (4.14). Pertanto il momento angolare rispetto al centro di massa ha lo stesso valore sia nel sistema di riferimento inerziale che nel sistema di riferimento del centro di massa. Di conseguenza

$$\frac{d\mathbf{L}'}{dt} = \mathbf{M}^{(E)} : \quad (4.15)$$

il teorema del momento angolare vale anche nel sistema (non inerziale) del centro di massa purché come polo si assuma l'origine, cioè il centro di massa; al calcolo del momento contribuiscono solo le forze vere (esterne).

4.7 Teoremi di König

I *teoremi di König* stabiliscono le relazioni tra i momenti angolari e le energie cinetiche di un sistema di punti materiali, valutati in un sistema di riferimento inerziale (\mathbf{L}, E_k) e nel sistema di riferimento del centro di massa (\mathbf{L}', E'_k).

Teorema di König per il momento angolare

Assumiamo per semplicità come polo l'origine del sistema inerziale: il momento angolare è dato da

$$\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i \quad .$$

Riscriviamo questa relazione utilizzando (4.12) e (4.13):

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \sum_i (\mathbf{r}'_i + \mathbf{r}_{CM}) \times m_i (\mathbf{v}'_i + \mathbf{v}_{CM}) = \\ &= \sum_i \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i + \sum_i \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}_{CM} + \sum_i \mathbf{r}_{CM} \times m_i \mathbf{v}'_i + \sum_i \mathbf{r}_{CM} \times m_i \mathbf{v}_{CM} \quad . \end{aligned}$$

Esaminiamo in dettaglio le quattro sommatorie, ricordando le (4.14).

Il primo termine, $\mathbf{L}' = \sum_i \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i$, rappresenta, come già evidenziato, il momento angolare rispetto al centro di massa.

Il secondo e terzo termine, pari a $(\sum_i m_i \mathbf{r}'_i) \times \mathbf{v}_{CM}$ e $\mathbf{r}_{CM} \times (\sum_i m_i \mathbf{v}'_i)$ sono entrambi nulli.

L'ultimo termine, $\mathbf{r}_{CM} \times m \mathbf{v}_{CM} = \mathbf{r}_{CM} \times \mathbf{P}$, rappresenta il momento angolare, rispetto all'origine del sistema inerziale, di un punto materiale che ha una massa pari a quella totale del sistema, coincide con il centro di massa e ha la velocità dello stesso. Pertanto esso viene chiamato momento angolare del centro di massa.

In conclusione abbiamo il *primo teorema di König*:

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}' + \mathbf{r}_{CM} \times m \mathbf{v}_{CM} = \mathbf{L}' + \mathbf{L}_{CM} \quad . \quad (4.16)$$

Primo teorema di König

Il *momento angolare del sistema si può scrivere, nel sistema di riferimento inerziale, come somma del momento angolare dovuto al moto del centro di massa, \mathbf{L}_{CM} , e di quello del sistema rispetto al centro di massa.*

Se assumiamo come polo il centro di massa, con il che $\mathbf{r}_{CM} = \mathbf{0}$, ritroviamo $\mathbf{L} = \mathbf{L}'$ (paragrafo 4.6).

Teorema di König per l'energia cinetica

L'energia cinetica calcolata nel sistema di riferimento inerziale è

$$E_k = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \quad .$$

Utilizzando (4.13) otteniamo

$$E_k = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\mathbf{v}'_i + \mathbf{v}_{CM})^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{CM}^2 + \sum_i m_i \mathbf{v}'_i \cdot \mathbf{v}_{CM} .$$

Il primo termine rappresenta l'energia cinetica calcolata nel sistema di riferimento del centro di massa, ossia l'energia cinetica rispetto al centro di massa, E'_k . Il secondo termine è pari a $\frac{1}{2} m v_{CM}^2$, energia cinetica di un punto materiale che possiede tutta la massa del sistema e si muove con la velocità del centro di massa, detta brevemente energia del centro di massa. L'ultimo termine è nullo in base a (4.14) perché è eguale a $(\sum_i m_i \mathbf{v}'_i) \cdot \mathbf{v}_{CM} = \mathbf{P}' \cdot \mathbf{v}_{CM}$. Pertanto

$$E_k = E'_k + \frac{1}{2} m v_{CM}^2 = E'_k + E_{k,CM} , \quad (4.17)$$

relazione nota come *secondo teorema di König*. *L'energia cinetica del sistema di punti si può scrivere, nel sistema di riferimento inerziale, come la somma dell'energia cinetica dovuta al moto del centro di massa e di quella del sistema rispetto al centro di massa.*

Secondo teorema di König

Commento sui teoremi di König

È chiara l'analogia strutturale e di significato tra i due teoremi di König. Servendosi della definizione e delle proprietà del centro di massa, essi mettono in evidenza una scomposizione semplice e significativa del momento angolare e dell'energia cinetica in termini del moto medio del sistema, rappresentato dal moto del centro di massa, e del moto del sistema rispetto al centro di massa, che potremmo chiamare moto interno. Una proprietà analoga non sussiste per la quantità di moto: infatti la quantità di moto totale di un sistema è eguale alla quantità di moto del centro di massa, mentre la quantità di moto rispetto al centro di massa è nulla, $\mathbf{P} = m\mathbf{v}_{CM}$ e $\mathbf{P}' = 0$ (paragrafi 4.2 e 4.6).

Possiamo dunque affermare che per quanto riguarda il momento angolare e l'energia cinetica il centro di massa non riassume le proprietà del sistema, a differenza di quanto discusso riguardo a \mathbf{P} e $\mathbf{R}^{(E)}$. Non è sufficiente conoscere il moto del centro di massa, cioè appunto \mathbf{P} e $\mathbf{R}^{(E)}$, per ricavare \mathbf{L} e E_k , ma bisogna tener conto anche del moto rispetto al centro di massa. Ovvero, il moto globale e il moto medio coincidono solo per quanto riguarda la quantità di moto, che è nulla nel moto interno, mentre per quanto riguarda \mathbf{L} e E_k abbiamo contributi sia dal moto medio che dal moto interno.

Dopo queste precisazioni generali riprendiamo le formule di König per esaminare i casi di nullità delle varie grandezze e ricominciamo dal momento angolare. Per un singolo punto materiale $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ così che la nullità di \mathbf{p} comporta sempre quella di \mathbf{L} . Invece per un sistema $\mathbf{L} = \mathbf{L}' + \mathbf{r}_{CM} \times \mathbf{P}$ e quindi la nullità di \mathbf{P} non comporta la nullità di \mathbf{L} : il sistema può essere mediamente fermo ($\mathbf{v}_{CM} = 0$), però i singoli punti possono essere in moto e può

risultare $\mathbf{L} \neq 0$ come conseguenza di un momento angolare rispetto al centro di massa. Viceversa, $\mathbf{L} = 0$ non comporta $\mathbf{P} = 0$, ma soltanto $\mathbf{L}_{CM} = -\mathbf{L}'$.

Passando all'energia cinetica, di nuovo sappiamo che per un singolo punto essa è nulla se il punto è fermo; invece per un sistema anche se $\mathbf{v}_{CM} = 0$ l'energia cinetica non è necessariamente nulla: il movimento dei singoli punti può rendere $E'_k \neq 0$. Se però $E_k = 0$, allora devono essere necessariamente nulle sia E'_k che E dato che l'energia cinetica non può essere negativa.

ESEMPIO 4.9

Si determinino i valori di \mathbf{L} , \mathbf{L}' , \mathbf{L}_{CM} e di E_k , E'_k , $E_{k,CM}$

MathType@MTEF@5@5@+=

feaagKart1ev2aaatCvAUfeBSjuyZL2yd9gzLbvyNv2CaerbuLwBLn

hiov2DGi1BTfMBaeXatLxBI9gBaerbd9wDYLwzYbItLDharqqTubsr

4rNCHbGeaGqiVuoJe9sqrrpepCoxbbL8F4rqqrFfpeeaOxe9Lq=Jc9

vqaqpepmoxbba9pwe9Q8fso=yqaqpepae9pgOFirpepeKkFroxfr=x

fr=xb9adbaqaaeGaciGaaiaabeqaamaabaabaaGcbaGaamyramaaBa

aaleaacaWGRbaabeaakiaacYcacaMc8UaamyramaaDaaaleaacaWG

RbaabaGaii4jaaaakiaacYcacaMc8UaamyramaaBaaaleaacaWGRb

GaiilaiaadoeacaWGNbaabeaaaaa@4328@ nei quattro casi rappresentati

nelle figure. O indica l'origine del sistema di riferimento inerziale e coincide con il polo di riferimento di \mathbf{L} e \mathbf{L}_{CM} .

Soluzione

Caso A Il centro di massa coincide col polo, la sua velocità è nulla; si ha

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}' = \mathbf{L}_{CM} = 0.$$

Per l'energia cinetica $E_{k,CM} = 0$, mentre $E_k, E'_k = 2 \cdot \frac{1}{2} m v^2 = m v^2$.

Notiamo un fatto, che è generale: $\mathbf{L}' = 0$ non implica $E'_k = 0$;

MathType@MTEF@5@5@+=

feaagKart1ev2aaatCvAUfeBSjuyZL2yd9gzLbvyNv2CaerbuLwBLn

hiov2DGi1BTfMBaeXatLxBI9gBaerbd9wDYLwzYbItLDharqqTubsr

4rNCHbGeaGqiVuoJe9sqrrpepCoxbbL8F4rqqrFfpeeaOxe9Lq=Jc9

vqaqpepmoxbba9pwe9Q8fso=yqaqpepae9pgOFirpepeKkFroxfr=x

fr=xb9adbaqaaeGaciGaaiaabeqaamaabaabaaGcbaGaamyramaaDa

aaleaacaWGRbaabaGaii4jaaaakiabg2da9iaaicdacaGG7aaaaa@3B11@

infatti il primo dipende da \mathbf{v}'_i , la seconda da $v_i'^2$. In altre parole, nel

moto relativo al centro di massa non c'è relazione tra \mathbf{L}' e E'_k ,

MathType@MTEF@5@5@+=

feaagKart1ev2aaatCvAUfeBSjuyZL2yd9gzLbvyNv2CaerbuLwBLn

hiov2DGi1BTfMBaeXatLxBI9gBaerbd9wDYLwzYbItLDharqqTubsr

4rNCHbGeaGqiVuoJe9sqrrpepCoxbbL8F4rqqrFfpeeaOxe9Lq=Jc9

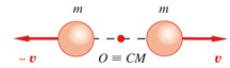


FIGURA 4.19A

(Esempio 4.9)

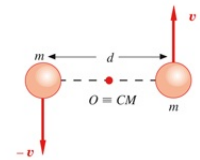


FIGURA 4.19B

(Esempio 4.9)

vqaqpepmoxbba9pwe9Q8fso=yqaqpepae9pgoFirpepeKkFroxfr=x
 fr=xb9adbaqaeeGaciGaaiaabeqaamaabaabaaGcbaGaamyramaaDa
 aaleaacaWGRbaabaGai4jaaaakiaacYcaaaa@3942@ a meno che il sistema
 non sia un corpo rigido, come vedremo.

Caso B Di nuovo il centro di massa coincide con il polo e $\mathbf{v}_{CM} = \mathbf{0}$. Si ha:

$$\mathbf{L}_{CM} = \mathbf{0} \quad , \quad \mathbf{L} = \mathbf{L}' = 2m \mathbf{r} \times \mathbf{v}.$$

In modulo $L = m d v$, se d è la distanza tra le traiettorie rettilinee dei due punti. Per le energie cinetiche si hanno gli stessi risultati del caso A (e si vede così la differenza di comportamento tra grandezze vettoriali e grandezze scalari).

Caso C

Posizione e velocità del centro di massa sono date da

$$2m \mathbf{r}_{CM} = m \mathbf{r}_1 + m \mathbf{r}_2 \Rightarrow \mathbf{r}_{CM} = \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2}$$

$$2m \mathbf{v}_{CM} = m \mathbf{v} + m \mathbf{v} \Rightarrow \mathbf{v}_{CM} = \mathbf{v} \Rightarrow \mathbf{P} = 2m \mathbf{v}_{CM}$$

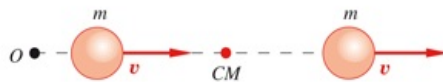


FIGURA 4.19C

Si ha $\mathbf{L}_{CM} = \mathbf{0}$, dato che \mathbf{r}_{CM} e \mathbf{v}_{CM} sono paralleli, $\mathbf{L} = \mathbf{0}$ perché \mathbf{r}_i è parallelo a \mathbf{v}_i , $\mathbf{L}' = \mathbf{0}$ dato che $\mathbf{v}'_i = \mathbf{0}$. Invece $E_k = E_k, CM = m v^2$ mentre $E' k = \mathbf{0}$.

Caso D È identico al caso C, solo la posizione del polo è diversa. La velocità del centro di massa è ancora \mathbf{v} e la sua posizione, relativamente ai due punti, è la stessa. $\mathbf{L}' = \mathbf{0}$ perché $\mathbf{v}'_i = \mathbf{0}$, invece $\mathbf{L} = \mathbf{L}_{CM} = \mathbf{r}_{CM} \times 2m \mathbf{v}_{CM}$; in modulo $L = 2m h v$. Per le energie cinetiche si hanno gli stessi risultati del caso C. Dal confronto tra i casi C e D si nota la dipendenza di \mathbf{L} dalla scelta del polo.

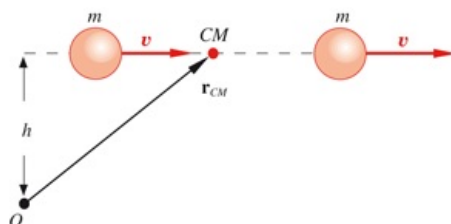


FIGURA 4.19D

Visualizza soluzione

4.8 Il teorema dell'energia cinetica

Calcoliamo il lavoro associato al moto di un sistema di punti materiali. Come già visto nel caso di un solo punto, il lavoro per uno spostamento $d\mathbf{r}_i$, del punto P_i è

$$dW_i = \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i = \mathbf{F}_i^{(E)} \cdot d\mathbf{r}_i + \mathbf{F}_i^{(I)} \cdot d\mathbf{r}_i = dW_i^{(E)} + dW_i^{(I)} .$$

Sommando su tutti i punti e integrando lungo le traiettorie Γ_i percorse si ottiene il lavoro totale

$$W = W^{(E)} + W^{(I)} ,$$

somma del lavoro delle forze esterne e delle forze interne. Questa volta il contributo delle forze interne non scompare: infatti $dW^{(I)}$ è formato da tanti termini del tipo

$$\mathbf{F}_{i,j} \cdot d\mathbf{r}_j + \mathbf{F}_{j,i} \cdot d\mathbf{r}_i = \mathbf{F}_{i,j} \cdot (d\mathbf{r}_j - d\mathbf{r}_i) = \mathbf{F}_{i,j} \cdot d(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) = \mathbf{F}_{i,j} \cdot d\mathbf{r}_{i,j}$$

in generale non nulli e con somma diversa da zero. La struttura di $dW^{(I)}$ implica che *al lavoro delle forze interne è legato un cambiamento delle distanze mutue tra i vari punti*. Se queste non potessero variare, come avviene per esempio se il corpo è rigido (capitolo 6), sarebbe $W^{(I)} = 0$.

Ritornando all'espressione $dW_i = \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i$, sappiamo dal paragrafo 2.15 che essa è eguale a $m_i v_i dv_i$; sommando su tutti i punti e integrando

$$W = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{i,B}^2 - \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{i,A}^2 = E_{k,B} - E_{k,A}$$

dove $v_{i,A}$ e $v_{i,B}$ sono i moduli delle velocità dell' i -esimo punto nella configurazione iniziale A e nella configurazione finale B, $E_{k,A}$ e $E_{k,B}$ l'energia cinetica del sistema rispettivamente nella configurazione iniziale A e nella finale B.

Mettendo insieme i risultati ottenuti,

$$W^{(E)} + W^{(I)} = E_{k,B} - E_{k,A} = \Delta E_k , \quad (4.18)$$

che esprime il *teorema dell'energia cinetica per i sistemi di punti materiali*.

Se le forze interne sono conservative, $W^{(I)} = -\Delta E_p^{(I)}$; analogamente, se lo sono quelle esterne, $W^{(E)} = -\Delta E_p^{(E)}$. Quando tutte le forze agenti, sia interne che esterne, sono conservative, abbiamo la *conservazione dell'energia meccanica del sistema*:

$$W = \Delta E_k = -\Delta E_p = E_{p,A} - E_{p,B} \Rightarrow (E_k + E_p)_A = (E_k + E_p)_B = \text{costante} . \quad (4.19)$$

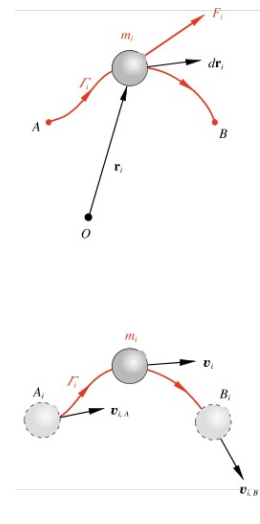


FIGURA 4.20

Teoria dell'energia cinetica

Conservazione dell'energia meccanica

L'energia E_p è la somma di tutte le energie potenziali in gioco, associate alle forze interne ed esterne agenti sul sistema.

Se non tutte le forze sono conservative abbiamo invece

$$(E_k + E_p)_B - (E_k + E_p)_A = W_{nc} ; \quad (4.20)$$

in questa formula il lavoro delle forze conservative è espresso da $E_{p,A} - E_{p,B}$ e quello delle forze non conservative da W_{nc} .

È essenziale osservare che anche in assenza di forze esterne (sistema isolato) non è detto che l'energia meccanica si conservi: ciò dipende dalle caratteristiche delle forze interne.

Riprendiamo qui la discussione del paragrafo 2.20. La presenza di forze non conservative che svolgono lavoro comporta una variazione dell'energia meccanica, che può aumentare o diminuire; quando sono presenti soltanto forze di attrito, l'energia meccanica certamente diminuisce. Se si considera tutto ciò che partecipa allo svolgimento di un fenomeno meccanico macroscopico, in generale non si verifica mai che l'energia meccanica si conservi; però nel processo intervengono scambi di energia di altro tipo e, prendendo in esame ogni possibile forma di energia, si trova che l'energia complessiva si conserva. Ritourneremo su questo argomento trattando del primo principio della termodinamica (capitolo 10).

Nei fenomeni microscopici la situazione è relativamente più semplice: tutte le interazioni fondamentali sono conservative e questo fatto si manifesta con la conservazione dell'energia senza eccezioni; si tratta di una legge fondamentale e, come si può dimostrare, essa discende dal fatto che *non esiste un'origine privilegiata per la misura del tempo*.

ESEMPIO 4.10

Calcolare l'energia potenziale della forza peso per un sistema di punti materiali.

Soluzione

Soluzione L'energia potenziale di ciascun punto è $E_{p,i} = m_i g z_i$, avendo scelto come riferimento per l'energia potenziale il piano orizzontale x, y e orientato l'asse z verso l'alto. Per l'insieme dei punti

$$E_p = \sum_i E_{p,i} = \sum_i m_i g z_i = g \sum_i m_i z_i = m g z_{CM} , \quad (4.21)$$

secondo (4.3) proiettata sull'asse z . L'energia potenziale del sistema è eguale a quella del centro di massa, cioè a quella di un punto materiale che occupa la posizione del CM e possiede tutta la massa del sistema. Pertanto il lavoro della forza peso è semplicemente

Lavoro delle forze non conservative

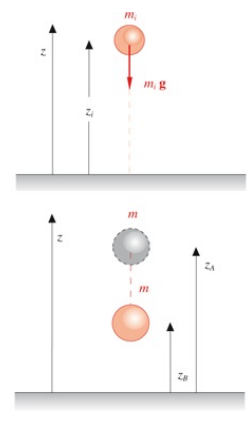


FIGURA 4.21 (Esempio 4.10)

$$W_{\text{peso}} = -\Delta E_p = m g z_A - m g z_B \quad ,$$

calcolabile dallo spostamento verticale del centro di massa da A a B . È questa l'espressione che va usata in (4.18), mentre (4.21) va usata in (4.19) e (4.20), per quanto riguarda la forza peso.

Visualizza soluzione

ESEMPIO 4.11

Discutere l'aspetto energetico della misura dinamica della massa (paragrafo 4.3) e dell'esempio 4.8 sulla conservazione del momento angolare. Nel primo caso si supponga che inizialmente la molla sia compressa dalla lunghezza a riposo d fino a lunghezza nulla e che i punti si stacchino dalla molla quando questa, espandendosi, ha raggiunto la lunghezza d .

Soluzione

Con riferimento alla figura 4.12, le uniche forze in gioco sono le forze elastiche esercitate dalla molla che si estende. Si tratta quindi di forze interne conservative, che compiono il lavoro

$$W^{(l)} = -\Delta E_p = \frac{1}{2} k x_{\text{in}}^2 - \frac{1}{2} k x_{\text{fin}}^2 = \frac{1}{2} k d^2 = E_{p, \text{in}} \quad ,$$

essendo $x_{\text{in}} = d$ e $x_{\text{fin}} = 0$ le deformazioni iniziali e finali della molla. Dunque

$$E_{m, \text{in}} = E_{k, \text{in}} + E_{p, \text{in}} = \frac{1}{2} k d^2 \quad ,$$

$$E_{m, \text{fin}} = E_{k, \text{fin}} + E_{p, \text{fin}} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \quad ,$$

con la condizione $E_{m, \text{in}} = E_{m, \text{fin}}$. Sappiamo inoltre che in modulo $v_2 = m_1 v_1 / m_2$ per cui otteniamo

$$v_1 = d \sqrt{\frac{k m_2}{m_1 (m_1 + m_2)}} \quad , \quad v_2 = d \sqrt{\frac{k m_1}{m_2 (m_1 + m_2)}} \quad .$$

Quando le masse si sono staccate, ciascuna prosegue con velocità costante, in quanto non agiscono più forze.

Qualora invece agisse una forza interna non conservativa al posto della forza elastica, non potremmo conservare l'energia meccanica e dovremmo invece utilizzare $W_{nc} = \Delta E_k$: occorre quindi poter calcolare W_{nc} . Resta sempre valida la conservazione della quantità di moto.

Passiamo all'esempio 4.8. In questo problema si ha variazione di energia cinetica, come si verifica immediatamente:

$$\Delta E_k = E_{k, \text{fin}} - E_{k, \text{in}} = 2 \frac{1}{2} m r_2^2 \omega_2^2 - 2 \frac{1}{2} m r_1^2 \omega_1^2 = m \omega_1^2 r_1^2 \left(\frac{r_1^2}{r_2^2} - 1 \right) \quad .$$

Essendo $r_1 < r_2$, $\Delta E_k < 0$. Il corrispondente lavoro $W = \Delta E_k$ è il lavoro delle forze interne. Queste sono dovute alla tensione della sbarretta, che per una generica distanza r vale $m \omega^2 r$; la forza è

diretta verso il centro, ma lo spostamento è verso l'esterno, per cui il lavoro è negativo in accordo col fatto che E_k diminuisce. Per ω si usa l'espressione ricavata dalla conservazione del momento angolare, $\omega r^2 = \omega_1 r_1^2$, cioè $\omega = \omega_1 r_1^2 / r^2$ e quindi, tenendo appunto conto che $\cos\theta = -1$,

$$W = 2 \int_{r_1}^{r_2} m \frac{\omega_1^2 r_1^4}{r^4} r dr = -2 m \omega_1^2 r_1^4 \left[-\frac{1}{2 r^2} \right]_{r_1}^{r_2} = m \omega_1^2 r_1^2 \left(\frac{r_1^2}{r_2^2} - 1 \right) .$$

Come si vede, la conservazione del momento angolare non implica assolutamente la costanza dell'energia cinetica.

Visualizza soluzione

Riepilogo

Con gli argomenti di questo paragrafo abbiamo terminato la trattazione generale della dinamica dei sistemi di punti materiali. Vogliamo richiamare brevemente i punti salienti.

Le equazioni del moto sono date dal teorema del moto del centro di massa e dal teorema del momento angolare:

$$\mathbf{R}^{(E)} = m \mathbf{a}_{CM} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} \quad , \quad \mathbf{M}^{(E)} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} .$$

Da queste ricaviamo informazioni sull'evoluzione temporale di \mathbf{P} e di \mathbf{L} , dovuta all'azione rispettivamente di forze e momenti esterni e riferita a tutto il sistema, ma non sul moto dei singoli punti.

Le due equazioni sono indipendenti, in quanto per un sistema di forze applicate in punti distinti la risultante e il momento risultante sono grandezze indipendenti, come discuteremo nel paragrafo 4.15.

La variazione di energia cinetica è eguale al lavoro compiuto da tutte le forze agenti, interne ed esterne; se tra queste forze ce ne sono di non conservative, il corrispondente lavoro è eguale alla variazione dell'energia meccanica.

Il calcolo del momento angolare e dell'energia cinetica del sistema può essere eseguito servendosi dei termini di König, che si basano sulla scomposizione del moto rispetto al centro di massa e moto del centro di massa.

L'insieme di queste proprietà è impiegato in tutti i problemi di meccanica dei sistemi, aggiungendo le caratteristiche tipiche del sistema in esame; in particolare nel capitolo 6 ne vedremo l'applicazione al moto dei corpi rigidi.

Dalle equazioni del moto e dal teorema dell'energia cinetica discendono tre leggi di conservazione:

- se $\mathbf{R}^{(E)} = 0$ si conserva la quantità di moto \mathbf{P} ;
- se $\mathbf{M}^{(E)} = 0$ si conserva il momento angolare \mathbf{L} ;
- se tutte le forze agenti sono conservative si conserva l'energia meccanica E_m .

Queste leggi sono indipendenti tra loro (per le prime due ciò deriva dall'indipendenza delle leggi del moto): se si conserva una grandezza, non vuol

dire che si conservano le altre.

Un campo specifico in cui le leggi di conservazione sono molto utili è quello degli urti tra punti materiali (trattati nei prossimi paragrafi) e degli urti tra punti e corpi rigidi (trattati nel capitolo 6).

4.9 Urti tra due punti materiali

Quando due punti materiali vengono a contatto e interagiscono per un intervallo di tempo trascurabile rispetto al tempo di osservazione del sistema, si parla di *urto tra i due punti*. Il fenomeno è di così breve durata da giustificare l'assunzione che durante l'interazione i punti non si muovano in modo apprezzabile.

Nell'urto si possono sviluppare forze molto intense che modificano la quantità di moto di ciascun punto. Queste forze che, come avviene in un urto, agiscono per un tempo breve rispetto al tempo di osservazione, sono chiamate *forze impulsive*. Nella figura 4.22 sono rappresentati due possibili andamenti del modulo della forza in funzione del tempo. L'azione della forza si esplica nell'intervallo $t = t_2 - t_1$.

Osserviamo che le forze che si manifestano durante il processo d'urto sono forze interne al sistema costituito dai due punti materiali interagenti. *In assenza di forze esterne si verifica pertanto durante l'urto la conservazione della quantità di moto totale.*

Se indichiamo con $\mathbf{v}_{1, \text{in}}$, $\mathbf{v}_{2, \text{in}}$ le velocità nell'istante precedente all'urto dei due punti materiali, di masse m_1 e m_2 , e con $\mathbf{v}_{1, \text{fin}}$, $\mathbf{v}_{2, \text{fin}}$ le corrispondenti velocità nell'istante successivo all'urto, la conservazione di \mathbf{P} si scrive

$$\mathbf{P}_{\text{in}} = m_1 \mathbf{v}_{1, \text{in}} + m_2 \mathbf{v}_{2, \text{in}} = m_1 \mathbf{v}_{1, \text{fin}} + m_2 \mathbf{v}_{2, \text{fin}} = \mathbf{P}_{\text{fin}} . \quad (4.22)$$

La quantità di moto del centro di massa rimane invariata nell'urto:

$$\mathbf{P} = (m_1 + m_2) \mathbf{v}_{CM} = \mathbf{P}_{\text{in}} = \mathbf{P}_{\text{fin}} = \text{costante} ; \quad (4.23)$$

il moto del centro di massa non viene cioè alterato dall'urto. Invece variano le quantità di moto di ciascun punto materiale per effetto dell'impulso della forza di interazione:

$$m_1 \mathbf{v}_{1, \text{fin}} - m_1 \mathbf{v}_{1, \text{in}} = \mathbf{J}_{2, 1} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_{2, 1} dt ,$$

$$m_2 \mathbf{v}_{2, \text{fin}} - m_2 \mathbf{v}_{2, \text{in}} = \mathbf{J}_{1, 2} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_{1, 2} dt .$$

$\mathbf{J}_{2, 1}$ è l'impulso dovuto alla forza impulsiva $\mathbf{F}_{2, 1}$ esercitata dal punto 2 sul punto 1 e analogo significato ha $\mathbf{J}_{1, 2}$. Naturalmente

$$\mathbf{F}_{1, 2} = -\mathbf{F}_{2, 1} \Rightarrow \mathbf{J}_{1, 2} = -\mathbf{J}_{2, 1} ;$$

le variazioni di quantità di moto sono eguali ed opposte.

Possiamo conservare la quantità di moto totale anche in presenza di forze esterne? La risposta è positiva se la durata t dell'urto è sufficientemente piccola e le forze esterne non sono impulsive. Infatti la variazione di quantità di moto

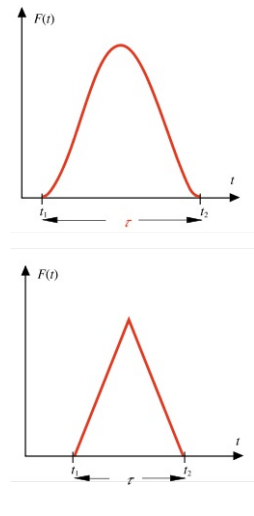


FIGURA 4.22

totale del sistema *dovuta* alle forze esterne è

$$\Delta \mathbf{P} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}^{(E)} dt = \mathbf{F}_m^{(E)} \tau$$

e se t è molto breve ΔP risulta trascurabile. Il ragionamento non sarebbe corretto se $\mathbf{F}^{(E)}$ fosse impulsiva nell'intervallo t in quanto in tal caso il valore medio $\mathbf{F}_m^{(E)}$ potrebbe assumere valori notevoli. Alternativamente, considerando $\mathbf{J}_{1,2}$ o $\mathbf{J}_{2,1}$ prima calcolati, si può scrivere

$$\mathbf{J} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt = \mathbf{F}_m \tau$$

dove \mathbf{F}_m è il valore medio della forza impulsiva nell'intervallo t (figura 4.23). Dato che \mathbf{J} assume un valore finito e t è molto breve, \mathbf{F}_m può assumere valori estremamente grandi, rispetto ai quali $\mathbf{F}_m^{(E)}$ è certamente trascurabile. La forza esterna non modifica i singoli impulsi durante l'urto e quindi resta vera l'eguaglianza $\mathbf{J}_{1,2} = -\mathbf{J}_{2,1}$ e valida la conservazione della quantità di moto totale.

La conservazione del momento angolare non aggiunge informazioni nel caso dell'urto di due corpi puntiformi. Infatti durante l'urto $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}$ e quindi se $\mathbf{P}_{in} = \mathbf{P}_{fin}$, risulta anche $\mathbf{L}_{in} = \mathbf{r} \times \mathbf{P}_{in} = \mathbf{L}_{fin} = \mathbf{r} \times \mathbf{P}_{fin}$: le due leggi di conservazione sono in questo caso equivalenti.

Ricordiamo infine che a priori non è noto se le forze interne che si sviluppano nell'urto sono conservative e pertanto non si può assumere la conservazione dell'energia meccanica del sistema durante l'urto. Dato che la posizione dei punti non varia nell'urto, eventuali energie potenziali dei punti non variano nell'urto e quindi $\Delta E_m = \Delta E_k$: l'argomento appena esposto si traduce pertanto nel fatto che in un urto non si può assumere a priori che l'energia cinetica si conservi.

Riguardo all'energia cinetica torna utile il secondo teorema di König (4.17): per i due punti

$$E_k = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_{CM}^2 + E'_k \quad .$$

Il primo termine, energia cinetica del centro di massa, non varia nell'urto se vale la conservazione della quantità di moto, come supponiamo. Ciò che resta costante o varia, a seconda che le forze interne siano conservative o non conservative, è l'energia cinetica rispetto al centro di massa

$$E'_k = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \quad .$$

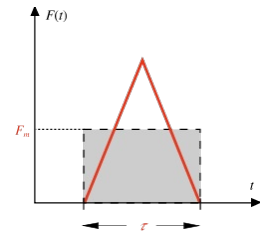


FIGURA 4.23

Sistema del laboratorio e sistema del centro di massa

Il sistema di riferimento inerziale in cui è posto il dispositivo che permette di

fare urtare i due punti e di studiare le caratteristiche dell'urto si chiama spesso sistema del laboratorio. L'urto però può essere studiato anche nel sistema di riferimento del centro di massa (paragrafo 4.6).

Il legame tra le velocità nei due sistemi in qualsiasi istante è

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}'_1 + \mathbf{v}_{CM} \quad , \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}'_2 + \mathbf{v}_{CM} \quad . \quad (4.13)$$

Nel sistema del centro di massa la quantità di moto totale è nulla, come già sappiamo; per altro la verifica è immediata:

$$m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = m_1 \mathbf{v}'_1 + m_2 \mathbf{v}'_2 + (m_1 + m_2) \mathbf{v}_{CM} \Rightarrow m_1 \mathbf{v}'_1 + m_2 \mathbf{v}'_2 = \mathbf{0} \quad ,$$

avendo usato (4.13) e (4.23). Dunque

$$\begin{aligned} m_1 \mathbf{v}'_{1, \text{in}} + m_2 \mathbf{v}'_{2, \text{in}} &= m_1 \mathbf{v}'_{1, \text{fin}} + m_2 \mathbf{v}'_{2, \text{fin}} = \mathbf{0} \\ \Rightarrow \mathbf{p}'_{1, \text{in}} &= -\mathbf{p}'_{2, \text{in}} \quad , \quad \mathbf{p}'_{1, \text{fin}} = -\mathbf{p}'_{2, \text{fin}} \quad . \end{aligned}$$

Dal centro di massa si vedono i punti arrivare verso il centro di massa con quantità di moto eguali in modulo e opposte in verso; i punti si urtano nella posizione occupata dal centro di massa e ripartono dopo l'urto con quantità di moto eguali in modulo e opposte in verso (in generale però $p'_{\text{fin}} \neq p'_{\text{in}}$).

L'energia cinetica nel sistema del centro di massa è semplicemente quella relativa al centro di massa e normalmente si ha

$$E'_{k, \text{in}} = \frac{1}{2} m_1 v'^2_{1, \text{in}} + \frac{1}{2} m_2 v'^2_{2, \text{in}} \neq E'_{k, \text{fin}} = \frac{1}{2} m_1 v'^2_{1, \text{fin}} + \frac{1}{2} m_2 v'^2_{2, \text{fin}} \quad .$$

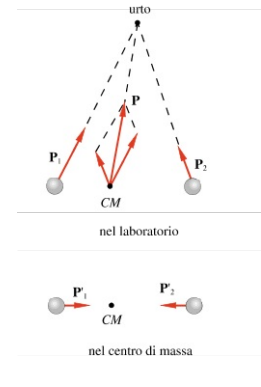


FIGURA 4.24

4.10 Urto completamente anelastico

L'urto si chiama *completamente anelastico* quando i due punti restano attaccati dopo l'urto formando un unico corpo puntiforme di massa $m_1 + m_2$.

Se \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 sono le velocità dei due punti nell'istante prima dell'urto e \mathbf{v}' la velocità comune immediatamente dopo l'urto, da (4.22) e (4.23) si ha

$$m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = (m_1 + m_2)\mathbf{v}' = (m_1 + m_2)\mathbf{v}_{CM},$$

$$\mathbf{v}_{CM} = \frac{m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2}{m_1 + m_2}.$$

Subito dopo l'urto i punti si muovono con la velocità che aveva il centro di massa un istante prima dell'urto (\mathbf{v}_{CM} resta invariata nell'urto). Le variazioni di quantità di moto dei singoli punti sono $m_1\mathbf{v}_{CM} - m_1\mathbf{v}_1$ e $m_2\mathbf{v}_{CM} - m_2\mathbf{v}_2$ e si verifica subito che sono eguali ed opposte.

Calcoliamo l'energia cinetica del sistema prima e dopo l'urto:

$$E_{k, \text{in}} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = E'_k + \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_{CM}^2,$$

avendo applicato il secondo teorema di König (4.17); invece

$$E_{k, \text{fin}} = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_{CM}^2 < E_{k, \text{in}}.$$

In effetti, dopo l'urto completamente anelastico non c'è più moto rispetto al centro di massa, con cui i due punti vengono a coincidere, e concludiamo che in questo tipo d'urto è assorbita proprio E'_k , l'energia cinetica che i punti hanno rispetto al centro di massa prima dell'urto:

$$\Delta E_k = E_{k, \text{fin}} - E_{k, \text{in}} = -E'_k = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_{CM}^2 - \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_2 v_2^2.$$

Ciò che avviene in realtà si può schematizzare così: i due corpi, che assimiliamo a punti materiali, durante l'urto si deformano in modo permanente e restano compenetrati. Il lavoro compiuto, a spese dell'energia cinetica iniziale, per fare avvenire la deformazione non viene più recuperato, ovvero le forze interne che si sviluppano nell'urto non sono conservative.

ESEMPIO 4.12

Un punto di massa m_1 con velocità \mathbf{v}_1 urta in modo completamente anelastico un punto di massa m fermo ($\mathbf{v}_2 = 0$). Calcolare la velocità finale dei due punti, la variazione di energia cinetica, il rapporto tra l'energia cinetica finale e quella iniziale. Nel sistema del centro di massa quali sono le velocità dei punti prima dell'urto?

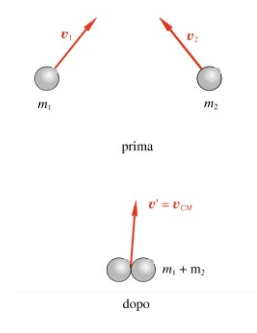


FIGURA 4.25

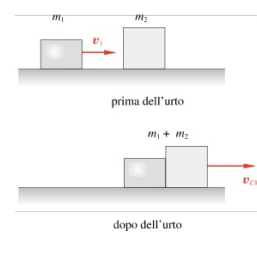


FIGURA 4.26

(Esempio 4.12)

Soluzione

Dalla conservazione della quantità di moto

$$m_1 \mathbf{v}_1 = (m_1 + m_2) \mathbf{v}_{CM} \quad , \quad \mathbf{v}_{CM} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{v}_1 \quad .$$

La direzione e il verso del moto dopo l'urto sono gli stessi del moto di m_1 prima dell'urto (il problema è unidimensionale). Le energie cinetiche sono:

$$\begin{aligned} E_{k, \text{in}} &= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \quad , \\ E_{k, \text{fin}} &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_{CM}^2 = \frac{1}{2} \frac{m_1^2}{m_1 + m_2} v_1^2 \quad , \\ \Rightarrow \Delta E_k &= E_{k, \text{fin}} - E_{k, \text{in}} = -\frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} v_1^2 \quad , \\ \frac{E_{k, \text{fin}}}{E_{k, \text{in}}} &= \frac{m_1}{m_1 + m_2} \quad . \end{aligned}$$

Se le masse sono eguali si perde metà dell'energia cinetica, se $m_1 \gg m_2$ non si perde praticamente nulla ($v_{CM} \approx v_1$, m_1 prosegue quasi indisturbata insieme a m_2), se $m_1 \ll m_2$ si perde praticamente tutta l'energia cinetica ($v_{CM} \ll v_1$). Per quale ragione ΔE_k ha un'espressione identica a quella trovata nell'esempio 4.7? Nel sistema del centro di massa

$$v'_1 = v_1 - v_{CM} = v_1 - \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v_1 \quad , \quad v'_2 = -v_{CM} = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{CM} \quad .$$

Entrambi i punti di muovono verso il CM (che in ogni istante sta nella posizione intermedia dell'esempio 4.1) con velocità diverse, ma eguali quantità di moto. L'energia cinetica nel CM è

$$E'_k = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v_1^2 = -\Delta E_k \quad ,$$

in accordo con quanto detto prima.

Visualizza soluzione

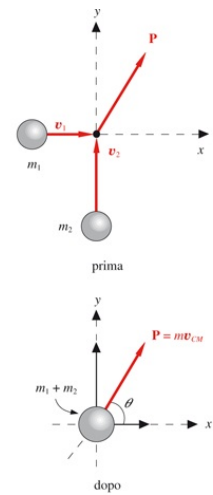


FIGURA 4.27
(Esempio 4.13)

ESEMPIO 4.13

Si studi l'urto completamente anelastico, tra due punti di massa m_1 e m_2 , in moto con velocità \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 , perpendicolari tra di loro.

Soluzione

Prendiamo come origine del sistema di assi x, y il punto in cui avviene l'urto. Chiamiamo θ l'angolo formato dalla quantità di moto totale $\mathbf{P} = m \mathbf{v}_{CM}$ con l'asse x . \mathbf{P} è costante nell'urto per cui

$$m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = (m_1 + m_2) \mathbf{v}_{CM} .$$

In questo problema bidimensionale la conservazione della quantità di moto, che è una legge vettoriale, dà luogo a due equazioni di conservazione, lungo l'asse x e lungo l'asse y , ottenute per proiezione:

$$\begin{aligned} P_{x, \text{in}} = m_1 v_1 &= P_{x, \text{fin}} = (m_1 + m_2) v_{CM} \cos \theta, \\ P_{y, \text{in}} = m_2 v_2 &= P_{y, \text{fin}} = (m_1 + m_2) v_{CM} \sin \theta, \\ \Rightarrow \operatorname{tg} \theta &= \frac{m_2 v_2}{m_1 v_1} \quad , \quad v_{CM} = \frac{\sqrt{(m_1 v_1)^2 + (m_2 v_2)^2}}{m_1 + m_2} \end{aligned}$$

La somma vettoriale delle quantità di moto dei singoli punti un istante prima dell'urto determina

$$\mathbf{P} = (m_1 + m_2) \mathbf{v}_{CM} = m \mathbf{v}_{CM} \quad ,$$

che resta tale dopo l'urto.

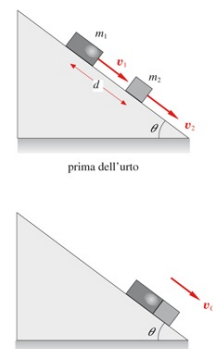


FIGURA 4.28
(Esempio 4.14)

[Visualizza soluzione](#)

ESEMPIO 4.14

Si considerino due corpi puntiformi, di massa m_1 e m_2 , che scendono lungo un piano inclinato liscio con velocità v_1 e v_2 . All'istante $t = 0$ la distanza tra i due corpi è d e le loro velocità sono $v_{0,1}$ e $v_{0,2}$ con $v_{0,1} > v_{0,2}$. Si determini la velocità dopo l'urto, che viene assunto completamente anelastico.

Soluzione

Le velocità dei due corpi sono funzioni del tempo

$$v_1 = v_{0,1} + at \quad , \quad v_2 = v_{0,2} + at$$

con $a = g \sin\theta$. Il moto relativo è uniforme con velocità

$$v_1 - v_2 = v_{0,1} - v_{0,2}$$

e quindi l'urto avviene al tempo $t^* = d / (v_{0,1} - v_{0,2})$. Applichiamo la conservazione della quantità di moto durante l'urto:

$$m_1 v_{0,1} + m_1 a t^* + m_2 v_{0,2} + m_2 a t^* = (m_1 + m_2) v_{CM}$$

$$v_{CM}(t^*) = \frac{m_1 v_{0,1} + m_2 v_{0,2}}{m_1 + m_2} + a t^* = v_{CM}(t=0) + a t^* .$$

Dopo l'urto i due corpi scendono uniti con velocità data da

$$v = v_{CM}(t^*) + a(t - t^*) = v_{CM}(t=0) + a t$$

Quindi il centro di massa scende con la stessa legge prima e dopo l'urto e la sua velocità non subisce discontinuità nell'urto.

Questo è un caso in cui si applica (4.22) pur in presenza della forza esterna peso, in quanto non impulsiva.

Visualizza soluzione

ESEMPIO 4.15 Pendolo balistico

Il pendolo balistico, utilizzato per misurare la velocità di un proiettile, consiste di un grande blocco di legno, appeso verticalmente. Una pallottola di massa m , che viaggia orizzontalmente con velocità v , urta il pendolo rimanendovi conficcata. Se il tempo di collisione è piccolo rispetto al periodo di oscillazione del pendolo, la cordicella che sostiene la massa M resta praticamente verticale durante l'urto. Per tempo di collisione si intende il tempo necessario perché il proiettile si fermi all'interno del legno (nell'esempio 2.25 abbiamo stimato per fenomeni di questo tipo una durata dell'ordine di 10^{-4} s).

Nessuna forza esterna orizzontale agisce sul sistema e pertanto è possibile conservare nell'urto la componente orizzontale della quantità di moto.

Terminata la collisione, il pendolo con la pallottola inizia ad oscillare raggiungendo un'altezza massima h , misurata rispetto alla posizione di equilibrio, tale che l'energia potenziale corrispondente eguagli l'energia cinetica del sistema subito dopo l'urto. Si può pertanto risalire al valore della velocità del sistema ($M + m$) e quindi a quella del proiettile prima dell'urto. La conservazione della quantità di moto durante l'urto, completamente anelastico, dà

$$m v = (m + M) v' \quad .$$

Dopo l'urto, per la conservazione dell'energia meccanica durante l'oscillazione,

$$\frac{1}{2} (m + M) v'^2 = (m + M) g h$$

$$\Rightarrow v' = \sqrt{2 g h} \quad , \quad v = \frac{m + M}{m} \sqrt{2 g h} \quad .$$

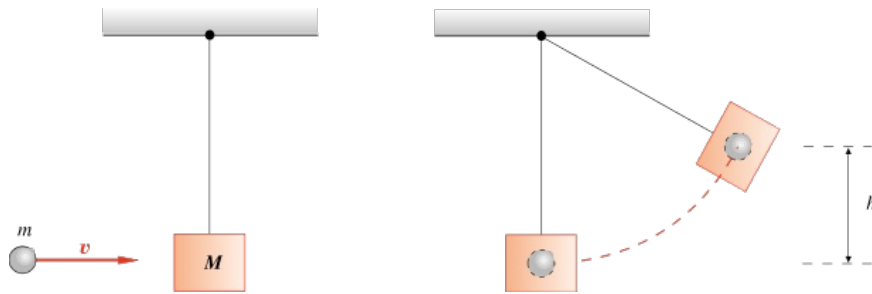


FIGURA 4.29

4.11 Urto elastico

Si definisce come *urto elastico* un urto durante il quale *si conserva anche l'energia cinetica del sistema*. Questo comporta che le forze interne, che si manifestano durante l'urto, siano conservative. I due corpi reali che si urtano subiscono, durante l'urto, delle deformazioni elastiche, riprendendo la configurazione iniziale subito dopo l'urto.

Nello studio di un urto elastico possiamo utilizzare le equazioni

$$\mathbf{P}_{\text{in}} = \mathbf{P}_{\text{fin}} \quad , \quad E_{k, \text{in}} = E_{k, \text{fin}}$$

(ed è l'unico caso in cui le due leggi valgono simultaneamente).

L'urto più generale è tridimensionale e abbiamo sei incognite, le componenti delle velocità dei due punti dopo l'urto, ma solo quattro equazioni (tre dalla conservazione di \mathbf{P} e una dalla conservazione di E_k). Anche nel caso di urto nel piano, abbiamo quattro incognite e tre equazioni. Quindi per risolvere un problema di urto elastico nel piano o nello spazio, oltre a conoscere le velocità prima dell'urto bisogna avere qualche altra informazione sulle velocità dopo l'urto.

Invece nel *caso unidimensionale* (due punti che si muovono prima e dopo l'urto elastico lungo la stessa direzione) abbiamo due equazioni di conservazione e due incognite (le velocità dei due punti dopo l'urto) e possiamo risolvere il problema. Scriviamo dunque in questo caso:

$$m_1 v_{1, \text{in}} + m_2 v_{2, \text{in}} = m_1 v_{1, \text{fin}} + m_2 v_{2, \text{fin}} = (m_1 + m_2) v_{CM} \quad ,$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1, \text{in}}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2, \text{in}}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1, \text{fin}}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2, \text{fin}}^2 \quad .$$

Per determinare i valori di $v_{1, \text{fin}}$ e $v_{2, \text{fin}}$ in funzione di $v_{1, \text{in}}$ e $v_{2, \text{in}}$ è più comodo considerare l'urto anche nel sistema di riferimento del centro di massa, dove $P' = 0$ e quindi:

$$m_1 v'_{1, \text{in}} = -m_2 v'_{2, \text{in}} \quad , \quad m_1 v'_{1, \text{fin}} = -m_2 v'_{2, \text{fin}} \quad ,$$

$$\frac{1}{2} m_1 v'^2_{1, \text{in}} + \frac{1}{2} m_2 v'^2_{2, \text{in}} = \frac{1}{2} m_1 v'^2_{1, \text{fin}} + \frac{1}{2} m_2 v'^2_{2, \text{fin}} \quad .$$

Da queste si ottiene la soluzione

$$v'_{1, \text{fin}} = -v'_{1, \text{in}} \quad , \quad v'_{2, \text{fin}} = -v'_{2, \text{in}} \quad ;$$

nel sistema del centro di massa la velocità e la quantità di moto di ciascun punto restano le stesse in modulo, cambiando solo di verso.

Ritorniamo ora nel sistema inerziale e usiamo (4.13):

$$v_{1, \text{in}} = v'_{1, \text{in}} + v_{CM} \quad , \quad v_{2, \text{in}} = v'_{2, \text{in}} + v_{CM}$$

$$v_{1, \text{fin}} = v'_{1, \text{fin}} + v_{CM} \quad , \quad v_{2, \text{fin}} = v'_{2, \text{fin}} + v_{CM} \quad .$$

Tenendo conto della soluzione trovata nel sistema del centro di massa e del fatto che

$$v_{CM} = \frac{m_1 v_{1, in} + m_2 v_{2, in}}{m_1 + m_2}$$

si ottiene:

$$\begin{aligned} v_{1, fin} &= \frac{(m_1 - m_2) v_{1, in} + 2 m_2 v_{2, in}}{m_1 + m_2} , \\ v_{2, fin} &= \frac{2 m_1 v_{1, in} + (m_2 - m_1) v_{2, in}}{m_1 + m_2} . \end{aligned} \quad (4.24)$$

Nell'applicazione di (4.24) bisogna fare attenzione ai segni delle velocità. Prendendo come riferimento il verso di $v_{1, in}$, $v_{2, in}$ va inserita con segno positivo o negativo a seconda che $v_{2, in}$ sia concorde o discorde a $v_{1, in}$. Ottenute le velocità finali, per ciascuna vale la stessa regola: se è positiva vuol dire che è concorde a $v_{1, in}$, se è negativa che è discorde.

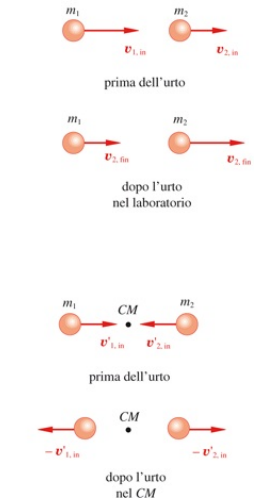


FIGURA 4.30

ESEMPIO 4.16

In un urto elastico tra due punti assumiamo che $v_{1, in}$ sia concorde all'asse x: elencare i possibili stati iniziali e, per ciascuno di questi, i possibili stati finali, precisando i segni delle velocità.

Soluzione

Gli stati iniziali possibili sono due: nel primo $v_{2, in}$ è concorde all'asse x e minore in modulo di $v_{1, in}$ (m_1 insegue e raggiunge m_2), nel secondo $v_{2, in}$ è discorde all'asse x (m_2 va incontro a m_1). Nel primo caso ci sono due possibili stati finali, nel secondo tre.

stato iniziale	stato finale	$v_{1, fin}$	$v_{2, fin}$
		> 0	> 0
		< 0	> 0
		> 0	> 0
		< 0	< 0
		< 0	> 0

Il risultato finale dipende ovviamente dai valori delle masse e delle velocità iniziali.

[Visualizza soluzione](#)

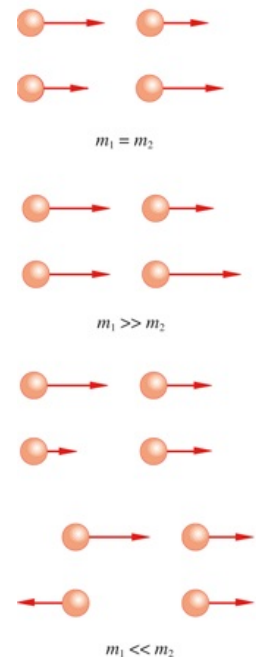


FIGURA 4.31
(Esempio 4.17)

ESEMPIO 4.17

Studiare l'urto elastico tra due punti aventi velocità iniziali concordi, nei casi in cui $m_1 = m_2$, $m_1 \gg m_2$, $m_1 \ll m_2$.

Soluzione

Partiamo dalle (4.24). Nel primo caso

$$v_{1, \text{fin}} = v_{2, \text{in}} \quad , \quad v_{2, \text{fin}} = v_{1, \text{in}} \quad .$$

Dopo l'urto le velocità dei due punti risultano scambiate, m_2 è più veloce di m_1 . Nel secondo caso si trascura m_2 rispetto a m_1 :

$$v_{1, \text{fin}} = v_{1, \text{in}} \quad , \quad v_{2, \text{fin}} = 2v_{1, \text{in}} - v_{2, \text{in}} \quad .$$

Il moto di m_1 è (praticamente) indisturbato, m_2 acquista una velocità maggiore di quella di m_1 . Nel terzo caso si trascura m_1 rispetto a m_2 :

$$v_{1, \text{fin}} = -v_{1, \text{in}} + 2v_{2, \text{in}} \quad , \quad v_{2, \text{fin}} = v_{2, \text{in}} \quad .$$

Ora è m_2 a non subire perturbazioni mentre m_1 torna indietro se $v_{1, \text{in}} > 2v_{2, \text{in}}$ o prosegue nello stesso verso.

[Visualizza soluzione](#)

ESEMPIO 4.18

Ripetere l'esempio 4.17 nel caso in cui m_2 sia ferma e calcolare inoltre il rapporto tra l'energia cinetica finale di m_2 e quella iniziale di m_1 .

Soluzione

Sempre da (4.24), con $v_{2, \text{in}} = 0$, si ha:

$$v_{2, \text{fin}} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1, \text{in}}$$

$$\frac{1}{2} m_2 v_{2, \text{fin}}^2 = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \frac{1}{2} m_1 v_{1, \text{in}}^2$$

$$R = \frac{(E_{k,2})_{\text{fin}}}{(E_{k,1})_{\text{in}}} = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} .$$

Nei tre casi che vogliamo considerare abbiamo:

$m_1 = m_2$	$v_{2, \text{fin}} = v_{1, \text{in}}$	$(v_{1, \text{fin}} = 0)$	$R = 1$,
$m_1 \gg m_2$	$v_{2, \text{fin}} = 2v_{1, \text{in}}$	$(v_{1, \text{fin}} = v_{1, \text{in}})$	$R = 4 \frac{m_2}{m_1} \simeq 0$,
$m_1 \ll m_2$	$v_{2, \text{fin}} = 2 \frac{m_1}{m_2} v_{1, \text{in}} \simeq 0$	$(v_{1, \text{fin}} = -v_{1, \text{in}})$	$R = 4 \frac{m_1}{m_2} \simeq 0$.

Il trasferimento di energia cinetica da m_1 a m_2 è massimo quando le masse sono eguali. Per dimostrarlo basta considerare m_1 fisso e m_2 variabile e imporre $dR/dm_2 = 0$; si trova che la condizione è soddisfatta se $m_2 = m_1$ e si tratta evidentemente di un massimo (l'unico da zero a $+\infty$).

Visualizza soluzione

ESEMPIO 4.19

Un punto materiale di massa m e velocità \mathbf{v} urta elasticamente contro una parete. La direzione del moto è ortogonale alla parete. Con quale velocità rimbalza il punto? Ripetere il problema se la direzione incidente forma un angolo θ con la normale alla parete, che supponiamo liscia.

Soluzione

Nel caso di incidenza normale abbiamo, ponendo $v_2 = 0$ e $m_2 = \infty$,

$$v_{\text{fin}} = -v_{\text{in}} .$$

La velocità è la stessa, solo il verso è cambiato. Si tratta di una situazione limite in cui si conserva l'energia cinetica, ma non la quantità di moto che cambia di verso. Il risultato si spiega considerando che la parete è vincolata a rimanere ferma; allora durante l'urto si sviluppano forze esterne vincolari impulsive, paragonabili alle forze interne, che fanno variare la quantità di moto.

Quando l'urto è obliquo, scomponiamo la velocità incidente nelle componenti $v \cos \theta$, ortogonale alla parete, e $v \sin \theta$, parallela alla parete. Per la componente normale vale il ragionamento precedente; per la componente parallela osserviamo che non essendoci attrito non ci sono forze parallele alla parete e quindi nell'urto si conserva la componente parallela della quantità di moto. Pertanto dopo

L'urto la componente parallela è invariata, la componente normale è rovesciata e si ha la situazione della figura 4.32: la direzione del moto dopo l'urto è simmetrica rispetto alla direzione incidente, formando l'angolo θ con la normale (come avviene nella riflessione di un raggio luminoso da parte di uno specchio piano). Anche ora si ha conservazione dell'energia cinetica, ma non della quantità di moto totale.

L'urto obliquo appena considerato è un urto bidimensionale; esso avviene nel piano individuato dalla direzione di incidenza e dalla normale alla parete. Il fatto che il corpo urtato sia immobile rende possibile la soluzione conoscendo solo lo stato iniziale, a differenza del caso con entrambi i corpi liberi, ricordato all'inizio del paragrafo.

Visualizza soluzione

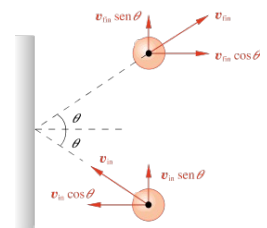


FIGURA 4.32
(Esempio 4.19)

4.12 Urto anelastico

Questo è il caso più comune: i punti ritornano separati dopo l'urto, durante il quale si conserva la quantità di moto del sistema, se non agiscono forze esterne di tipo impulsivo, ma non l'energia cinetica. Una certa frazione di E_k' , energia cinetica prima dell'urto rispetto al centro di massa, viene assorbita.

Ciò è determinato, negli urti tra particelle reali, dal fatto che l'impulso della forza di interazione di una particella con l'altra risulta, nella fase di deformazione dei corpi, superiore a quello nella fase di ritorno dei corpi alla configurazione iniziale. Se l'urto fosse elastico i due impulsi sarebbero eguali (in modulo), mentre per un urto completamente anelastico il secondo sarebbe nullo.

Per chiarire meglio il processo, consideriamolo nel sistema di riferimento del centro di massa. Il punto con quantità di moto p_1' , in nell'istante precedente all'urto vede, per effetto dell'impulso nella fase di deformazione, ridursi progressivamente a zero la sua quantità di moto fino ad arrestarsi. Nella fase successiva, sempre durante l'urto, il punto riacquista quantità di moto fino al valore p_1' , in, opposto in verso e minore in modulo rispetto a p_1' , in. Si definisce coefficiente di restituzione il rapporto

$$e = -\frac{p_{1, \text{fin}}'}{p_{1, \text{in}}'} = -\frac{v_{1, \text{fin}}'}{v_{1, \text{in}}'} = -\frac{p_{2, \text{fin}}'}{p_{2, \text{in}}'} = -\frac{v_{2, \text{fin}}'}{v_{2, \text{in}}'} \quad (4.25)$$

Ricordiamo che, essendo $P' = 0$, in modulo p_1' , in = p_2' , in e p_1' , fin = p_2' , fin, per cui il coefficiente di restituzione è lo stesso anche per la seconda particella, come scritto in (4.25).

L'energia cinetica del sistema delle due particelle dopo l'urto è data da

$$E_{k, \text{fin}}' = \frac{1}{2} m_1 v_{1, \text{fin}}'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2, \text{fin}}'^2 = e^2 \left(\frac{1}{2} m_1 v_{1, \text{in}}'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2, \text{in}}'^2 \right) \\ \Rightarrow E_{k, \text{fin}}' = e^2 E_{k, \text{in}}' .$$

La variazione relativa di energia cinetica nell'urto è

$$\delta = \frac{E_{k, \text{fin}}' - E_{k, \text{in}}'}{E_{k, \text{in}}'} = e^2 - 1 \quad .$$

Nell'urto elastico $e = 1$, $\delta = 0$, l'energia cinetica si conserva. Nell'urto completamente anelastico $e = 0$, $\delta = -1$: tutta l'energia cinetica del moto relativo al centro di massa è assorbita e trasformata. *Nella situazione di urto anelastico il coefficiente di restituzione e risulta compreso tra zero e uno, $E_{k, \text{fin}}'$ è sempre minore di $E_{k, \text{in}}'$.*

Per ricavare la relazione tra le velocità nel sistema inerziale, inseriamo (4.13) in (4.25) ottenendo:

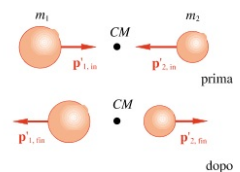


FIGURA 4.33

$$v'_{1, \text{fin}} = v_{1, \text{fin}} - v_{CM} = -e v'_{1, \text{in}} = -e (v_{1, \text{in}} - v_{CM}) \quad ,$$

$$v'_{2, \text{fin}} = v_{2, \text{fin}} - v_{CM} = -e v'_{2, \text{in}} = -e (v_{2, \text{in}} - v_{CM}) \quad ,$$

$$\Rightarrow v_{1, \text{fin}} = v_{CM} (1 + e) - e v_{1, \text{in}} \quad , \quad v_{2, \text{fin}} = v_{CM} (1 + e) - e v_{2, \text{in}} \quad .$$

Poiché $v_{CM} = \frac{m_1 v_{1, \text{in}} + m_2 v_{2, \text{in}}}{m_1 + m_2}$ si ottiene infine

$$v_{1, \text{fin}} = \frac{(m_1 - e m_2) v_{1, \text{in}} + m_2 (1 + e) v_{2, \text{in}}}{m_1 + m_2} \quad (4.26)$$

$$v_{2, \text{fin}} = \frac{m_1 (1 + e) v_{1, \text{in}} + (m_2 - e m_1) v_{2, \text{in}}}{m_1 + m_2} \quad . \quad (4.26)$$

Con $e = 1$ si ritorna alle (4.24), valide per l'urto elastico, mentre con $e = 0$ si ha $v_{1, \text{fin}} = v_{2, \text{fin}} = v_{CM}$, come è giusto per l'urto completamente anelastico.

Seguendo lo stesso ragionamento utilizzato nel caso dell'urto elastico, è chiaro che le (4.26) sono valide solo per gli urti unidimensionali.

ESEMPIO 4.20

Un punto materiale cade, partendo con velocità iniziale nulla da un'altezza h_1 , sopra un piano orizzontale, rimbalza e risale all'altezza h_2 minore di h_1 . Calcolare il coefficiente di restituzione.

Soluzione

Soluzione La velocità un istante prima dell'urto è $v_{\text{in}} = \sqrt{2gh_1}$, quella un istante dopo l'urto è v_{fin} e il punto risale alla quota h_2 tale che $v_{\text{in}} = \sqrt{2gh_2}$, dove il segno meno tiene conto del fatto che v_{fin} è negativa. Dalle (4.26), nel caso limite di $v_{2, \text{in}} = 0$ e $m_2 = \infty$, si ricava $v_{\text{fin}} = -e v_{\text{in}}$. D'altra parte, proprio per la grandissima differenza di massa tra piano e punto, possiamo pensare che il centro di massa sia fermo e quindi che le velocità nel sistema del laboratorio e nel sistema del centro di massa siano eguali. Pertanto:

$$e = -\frac{v'_{\text{fin}}}{v'_{\text{in}}} = -\frac{v_{\text{fin}}}{v_{\text{in}}} = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}} \quad .$$

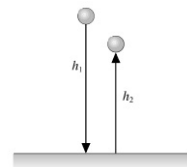


FIGURA 4.34
(Esempio 4.20)

Visualizza soluzione

4.13 Ulteriori nozioni sugli urti

Nei paragrafi precedenti, quando abbiamo esaminato gli urti elastici e gli urti anelastici, ci siamo limitati al caso in cui, prima e dopo l'urto, i due punti si muovono sempre restando sulla stessa retta, quella che contiene le loro velocità e ne congiunge in ogni istante le posizioni. Si tratta di una situazione particolare e semplice da trattare; vediamo subito qualche esempio diverso.

Tra i due punti può esistere una forza interna che agisce anche se i due punti non vengono a contatto; l'azione di questa forza durante il tempo di durata dell'urto (si continua ad usare questo termine pur non essendoci contatto) determina una variazione della quantità di moto dei singoli punti come mostrato qualitativamente nelle figure 4.35a e 4.35b. Se le masse dei punti sono molto diverse, quello con massa maggiore resta praticamente indisturbato (figura 4.35c). Infine nella figura 4.35d è mostrato l'urto di un punto in moto contro un punto fermo, quando tra i due agisce una forza interna con raggio di azione molto corto (rispetto ai casi delle figure precedenti) per cui i punti devono essere molto vicini per interagire; lo schema della figura 4.35d si può comunque riferire a tutti i casi di urto contro un punto fermo, in quanto rappresenta la situazione iniziale e finale delle quantità di moto.

Gli urti con una geometria iniziale del tipo appena descritto si dicono *non centrali* e una grandezza caratteristica dello stato iniziale è il cosiddetto *parametro d'urto* b , per comodità grafica disegnato solo nella figura 4.35c. Quando b è nullo l'urto si chiama *centrale*. Vedremo altri esempi di urti centrali e non centrali nei paragrafi del capitolo 6 dedicati agli urti tra corpi rigidi. Gli esempi qualitativi qui riportati si possono ricondurre all'urto di due punti con carica elettrica dello stesso segno (forza elettrostatica repulsiva, figure 4.35a e 4.35c), all'urto di due punti sottoposti alla forza gravitazionale o elettrostatica attrattiva (figura 4.35b), all'urto di un protone contro un altro protone (forza nucleare, figura 4.35d).

Per quanto riguarda le leggi di conservazione, in assenza di forze esterne impulsive si conserva la quantità di moto e, se le forze interne sono conservative, si conserva anche l'energia. Infine ha significato indipendente anche la conservazione del momento angolare, perché i punti non occupano un'unica posizione durante l'urto, a differenza di quanto visto nel paragrafo 4.9. Un'applicazione fondamentale di queste nozioni si ha nella spiegazione dell'esperimento di Rutherford (paragrafo 1.7 del volume secondo) che portò alla scoperta del nucleo atomico.

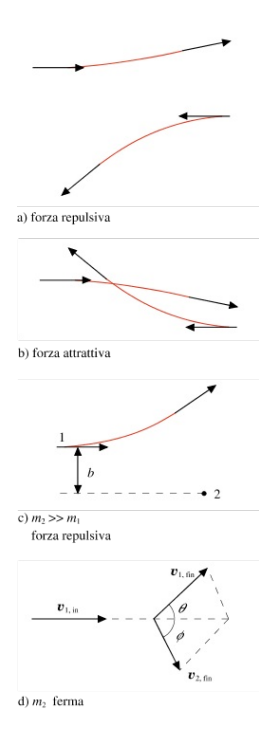


FIGURA 4.35

ESEMPIO 4.21

Un punto materiale di massa m e velocità $v_{1, \text{in}}$ urta un punto di eguale massa, fermo. Si osserva che dopo l'urto il primo punto si muove con velocità $v_{1, \text{fin}}$ lungo una retta che forma l'angolo θ con la

direzione incidente. Calcolare in funzione di $v_{1, in}$, $v_{1, fin}$ e θ il valore dell'angolo Φ formato con la direzione incidente dalla direzione di moto del secondo punto e la velocità $v_{2, fin}$. Come cambiano i risultati se le masse dei due punti sono diverse?

Soluzione

Conserviamo la quantità di moto lungo gli assi x e y , dato che il problema è bidimensionale:

$$\begin{aligned}
 m v_{1, in} &= m v_{1, fin} \cos \theta + m v_{2, fin} \cos \phi & 0 &= m v_{1, fin} \sin \theta - m v_{2, fin} \sin \phi \\
 \Rightarrow v_{2, fin} \sin \phi &= v_{1, fin} \sin \theta & \Rightarrow \operatorname{tg} \phi &= \frac{v_{1, fin} \sin \theta}{v_{1, in} - v_{1, fin} \cos \theta} .
 \end{aligned}$$

Calcolato l'angolo Φ , la velocità $v_{2, fin}$ del secondo punto dopo l'urto si ricava da

$$v_{2, fin} = v_{1, fin} \frac{\sin \theta}{\sin \phi} = \sqrt{v_{1, in}^2 + v_{1, fin}^2 - 2 v_{1, in} v_{1, fin} \cos \theta} ,$$

esprimendo $\sin \Phi$ in funzione di $\operatorname{tg} \Phi$. Lo stesso risultato si ottiene considerando (figura 4.36) che $\mathbf{v}_{2, fin} = \mathbf{v}_{1, in} - \mathbf{v}_{1, fin}$ e applicando il teorema di Carnot.

Notiamo che non si ha dipendenza dai valori delle masse, se queste sono eguali. Se invece sono diverse, si verifica subito che l'espressione di $\operatorname{tg} \Phi$ non cambia, mentre si ha

$$v_{2, fin} = \frac{m_1}{m_2} \sqrt{v_{1, in}^2 + v_{1, fin}^2 - 2 \frac{m_2}{m_1} v_{1, in} v_{1, fin} \cos \theta} ;$$

con $m_1 \neq m_2$ la figura 4.36 è corretta solo se i vettori disegnati sono le quantità di moto e non le velocità.

Visualizza soluzione

ESEMPIO 4.22

Si ripeta il calcolo dell'esempio 4.21 supponendo che l'urto sia elastico e si determini il trasferimento di energia cinetica dal primo al secondo punto; si consideri solo il caso delle masse eguali.

Soluzione

La relazione trovata per $\operatorname{tg} \Phi$ resta vera perché ottenuta utilizzando soltanto la conservazione della quantità di moto. In più, la simultanea conservazione dell'energia cinetica porta al risultato $\Phi = \pi/2 - \theta$: nell'urto elastico tra due particelle di egual massa, rappresentato nella figura 4.37, l'angolo tra le direzioni di moto delle particelle nello stato finale è sempre eguale a 90° . Il risultato si dimostra facilmente scrivendo le relazioni di conservazione dell'energia cinetica e del modulo della quantità di moto:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} m v_{1, in}^2 &= \frac{1}{2} m v_{1, fin}^2 + \frac{1}{2} m v_{2, fin}^2 , \\
 (m v_{1, in})^2 &= (m v_{1, fin})^2 + (m v_{2, fin})^2 + 2 m^2 v_{1, fin} v_{2, fin} \cos (\theta + \phi) .
 \end{aligned}$$

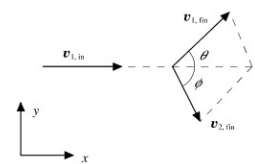


FIGURA 4.36
(Esempio 4.21)

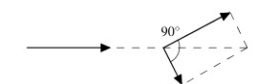


FIGURA 4.37
(Esempio 4.22)

Si verifica subito che queste sono compatibili solo se $\cos(\theta + \Phi) = 0$, cioè se $\theta + \Phi = \pi/2$. Di conseguenza, dalla figura 4.37, si ricava che

$$v_{1,\text{fin}} = v_{1,\text{in}} \cos \theta \quad , \quad v_{2,\text{fin}} = v_{1,\text{in}} \sin \theta$$

e quindi, per le energie cinetiche,

$$(E_{k,1})_{\text{fin}} = \frac{1}{2} m v_{1,\text{fin}}^2 = \frac{1}{2} m v_{1,\text{in}}^2 \cos^2 \theta = (E_{k,1})_{\text{in}} \cos^2 \theta \quad ,$$

$$(E_{k,2})_{\text{fin}} = (E_{k,1})_{\text{in}} \sin^2 \theta = (E_{k,1})_{\text{in}} \cos^2 \phi \quad .$$

L'energia trasferita dalla particella incidente alla particella ferma varia con l'angolo Φ . I casi limite sono: $\Phi = 0$, trasferimento massimo e totale, la particella 2 prosegue lungo la direzione del moto della particella 1, che si ferma; $\Phi = \pi/2$, trasferimento nullo, la particella 2 resta in quiete, la particella 1 prosegue indisturbata.

Visualizza soluzione

4.14 Urti relativistici

Anche con le particelle subatomiche, quali elettroni, protoni e nuclei atomici, è possibile condurre esperimenti d'urto.

Si tratta di urti senza contatto, come quelli descritti nel paragrafo 4.13, in cui tipicamente due particelle arrivano ad una distanza reciproca così piccola (10^{-14} ÷ 10^{-15} m) da risentire delle forze di origine nucleare e delle forze elettriche (in tal caso anche a distanze superiori).

In linea generale lo studio delle caratteristiche degli urti tra particelle ha permesso di verificare la correttezza della formulazione relativistica della meccanica e la validità assoluta delle leggi di conservazione dell'energia, della quantità di moto e del momento angolare. Più specificamente, a seconda del tipo di particelle che partecipano al processo, è possibile ricavare informazioni sulle interazioni tra di esse. Notiamo che in pratica questo è l'unico modo che abbiamo per progredire in modo sistematico nella conoscenza della realtà subnucleare (operativamente, tali indagini richiedono l'uso degli acceleratori di particelle).

Consideriamo due particelle che si urtano; i casi più comuni come realizzazione di laboratorio sono quello in cui una delle particelle è ferma oppure quello in cui le particelle si muovono una verso l'altra. Nello stato finale più semplice, con ancora due particelle, la configurazione è simile a quella mostrata nella figura 4.35d. Bisogna però tener presente che in questi processi le particelle finali possono essere diverse da quelle iniziali (non c'è conservazione della massa, si veda la discussione su energia e massa del paragrafo 3.9). Quindi l'urto a due corpi può essere scritto schematicamente come $m_1 + m_2 \rightarrow m_3 + m_4$; nel caso specifico in cui le particelle restino le stesse, $m_1 + m_2 \rightarrow m_1 + m_2$, si parla di urto elastico.

Come abbiamo detto precedentemente, *negli urti tra particelle si conservano sempre la quantità di moto e l'energia totale*. Questa è la differenza più sostanziale rispetto agli urti tra punti macroscopici, nei quali solo la quantità di moto è sempre conservata (se i punti sono liberi). Ricordando (3.24), notiamo che la conservazione dell'energia totale consente variazioni dell'energia cinetica e dell'energia di massa, purché queste si trasformino una nell'altra. Solo se $m_3 = m_1$, $m_4 = m_2$ l'energia di massa non varia nell'urto e quindi non varia l'energia cinetica: si vede che il termine urto elastico conserva il suo significato.

Le leggi di conservazione della quantità di moto e dell'energia si scrivono

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4 \quad , \quad E_1 + E_2 = E_3 + E_4 \quad ,$$

dove ciascun termine è dato da (3.19) o (3.27). La prima equazione vettoriale dà luogo a due equazioni proiettate sugli assi (le particelle dopo l'urto stanno in un piano che contiene la direzione di incidenza). Noto lo stato iniziale, note cioè

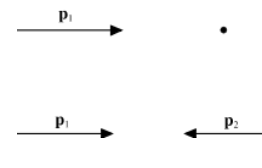


FIGURA 4.38

p_1, p_2, m_1, m_2 , e note le masse m_3 e m_4 , lo stato finale non è determinato: vi sono infatti quattro incognite, i moduli delle quantità di moto p_3, p_4 e i due angoli θ e Φ della figura 4.35d, ma tre sole equazioni di conservazione. Per risolvere il problema occorre fissare una variabile, ad esempio θ , e calcolare le altre tre con le leggi di conservazione: ovvero, lo stato finale è determinabile in funzione di θ (o di un'altra delle incognite).

Non eseguiamo materialmente il calcolo, sia perché non è immediato sia perché non ci serve per applicazioni. Menzioniamo solo che nell'urto elastico tra particelle di egual massa, una in moto e l'altra ferma, l'angolo tra le quantità di moto nello stato finale non è eguale a 90° , come nel caso non relativistico.

Nella discussione fatta finora abbiamo osservato l'urto dal sistema inerziale O , detto del laboratorio, nel quale, ad esempio, la particella bersaglio m_2 è ferma e la particella proiettile m_1 è in moto lungo l'asse x . Consideriamo adesso un altro sistema inerziale O' , con gli assi paralleli a quelli di O , che si muove rispetto ad O nel verso della quantità di moto totale nel laboratorio, $\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$, con velocità costante

$$v_0 = \frac{pc^2}{E},$$

essendo E l'energia totale nel laboratorio,

$$E = E_1 + E_2 = \sqrt{p_1^2 c^2 + m_1^2 c^4} + \sqrt{p_2^2 c^2 + m_2^2 c^4}.$$

Dal sistema O al sistema O' si passa con una trasformazione di Lorentz e, in particolare, con (3.28) per quanto riguarda quantità di moto ed energia. Sviluppando il calcolo si trova subito che $\mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 = 0$, cioè che in O' la quantità di moto iniziale è nulla; dato che la quantità di moto si conserva nell'urto, anche la quantità di moto finale appare nulla in O' . Per questa ragione O' si chiama il sistema di riferimento del centro di massa. Trasformando le energie risulta che l'energia totale vista da O' , $E' = E'_1 + E'_2$, è legata all'energia e alla quantità di moto nel laboratorio dalla

$$E'^2 = E^2 - p^2 c^2.$$

Questa relazione, molto importante, poteva essere ricavata direttamente ricordando che la quantità $E^2 - p^2 c^2$ ha lo stesso valore in qualsiasi sistema inerziale; ma in O' $p' = 0$.

ESEMPIO 4.23

Un protone avente velocità $v = 0.999 c$ urta centralmente contro un protone avente la stessa velocità. Calcolare la quantità di moto e l'energia totale nell'istante dell'urto. La massa del protone è $m = 1.673 \cdot 10^{-27}$ kg.

Soluzione

La quantità di moto è sempre nulla (siamo nel secondo caso della figura 4.38, con $\mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}_1$): per l'urto in esame il sistema di riferimento del laboratorio coincide con quello del centro di massa. L'energia di un singolo protone è

$$E_1 = m \gamma c^2 \quad \text{con} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 22.4 \quad ,$$
$$E_1 = 1.673 \cdot 10^{-27} \cdot 22.4 \cdot (3 \cdot 10^8)^2 = 3.37 \cdot 10^{-9} \text{ J.}$$

Di questa, $0.15 \cdot 10^{-9} \text{ J}$ è energia di massa e $3.22 \cdot 10^{-9} \text{ J}$ energia cinetica. L'energia totale vale $E = 2E_1 = 6.75 \cdot 10^{-9} \text{ J}$.

Se immaginiamo che per un brevissimo istante i protoni urtandosi si fermino, in quell'istante è scomparsa tutta l'energia cinetica e l'energia del sistema, che è fermo ($\mathbf{p} = 0$), è solo energia di massa: prima avevamo $2mc^2$ come energia di massa, ora abbiamo $2m \gamma c^2$, γ volte di più. Subito dopo i protoni o altre particelle che si formano nell'urto danno luogo allo stato finale e l'energia di massa si ritrasforma in parte in energia cinetica (tanto meno quante più particelle sono presenti).

Il metodo descritto, che consente di concentrare in un unico processo elementare e in un volume molto piccolo una grande quantità di energia, è quello usato correntemente per ottenere, facendo collidere due fasci di particelle, eventuali stati instabili con massa molto elevata, che possono segnalare l'esistenza di nuovi tipi di materia, non producibili in condizioni ordinarie.

Visualizza soluzione

4.15 Proprietà dei sistemi di forze applicate a punti diversi

Discutiamo in questo paragrafo alcune proprietà relative a un sistema di forze applicate a punti diversi nello spazio (per esempio agli n punti materiali che costituiscono un sistema di punti).

Indichiamo con $\mathbf{R} = \sum_i \mathbf{F}_i$ la risultante delle forze e con

$$\mathbf{M}_O = \sum_i \mathbf{OP}_i \times \mathbf{F}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$$

il momento risultante delle forze rispetto al polo O . Se cambiano polo, si ha $\mathbf{M}_{O'} = \sum_i \mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i$ con $\mathbf{r}_i = \mathbf{OO}' + \mathbf{r}'_i$ per cui

$$\mathbf{M}_O = \sum_i (\mathbf{OO}' + \mathbf{r}'_i) \times \mathbf{F}_i = \mathbf{OO}' \times \sum_i \mathbf{F}_i + \sum_i \mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i = \mathbf{OO}' \times \mathbf{R} + \mathbf{M}_{O'}$$

Il momento dipende dal polo, a meno che non sia $\mathbf{R} = \mathbf{0}$.

Un'applicazione importante di questo risultato riguarda la coppia di forze. Si chiama così un sistema formato da due forze eguali e di verso opposto, *aventi diversa retta di azione*. La distanza tra le due rette d'azione è chiamata braccio della coppia, b . La risultante delle due forze è nulla e pertanto il momento \mathbf{M} non dipende dalla scelta del polo. \mathbf{M} è ortogonale al piano individuato dalle due rette di azione, ha verso determinato dalla solita regola del prodotto vettoriale e modulo bF , come si ottiene scegliendo ad esempio P_2 come polo (figura 4.40).

Le forze interne di un sistema di punti materiali, considerate nei paragrafi precedenti, costituiscono un insieme di coppie a braccio nullo ($\mathbf{F}_{i,j}$ e $\mathbf{F}_{j,i}$ sono la coppia generica); pertanto il loro momento risultante è nullo, rispetto a qualsiasi polo. Si dimostra così in modo diverso il risultato utilizzato nella dimostrazione del teorema del momento angolare (paragrafo 4.4, figura 4.16).

In generale, dato un qualsiasi sistema di forze, i vettori \mathbf{R} e \mathbf{M}_O non sono ortogonali tra loro e quindi non è possibile trovare due punti O e P tali che $\mathbf{M}_O = \mathbf{OP} \times \mathbf{R}$. Ciò vuol dire che \mathbf{M}_O è indipendente da \mathbf{R} e conferma che le equazioni (4.6) e (4.11) sono indipendenti.

Quest'ultima osservazione ci porta a concludere che un sistema di forze applicate in punti diversi non può in generale essere rappresentato solo dalla sua risultante. La situazione è diversa da quella considerata nel paragrafo 2.22 in cui le forze erano applicate allo stesso punto: in tal caso, nota la risultante, è noto il momento rispetto a qualsiasi polo, $\mathbf{M}_O = \mathbf{OP} \times \mathbf{R}$.

Dall'insieme delle considerazioni riportate si deduce il seguente risultato generale, che noi enunciamo soltanto: *dato un sistema di forze applicate in punti diversi e fissato un polo per i momenti, con il che sono noti \mathbf{R} e \mathbf{M}_O , questo sistema può essere sempre ridotto a una forza \mathbf{R} con retta d'azione passante per il polo (così il momento di \mathbf{R} rispetto al polo è nullo) e ad una*

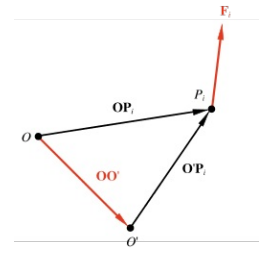


FIGURA 4.39

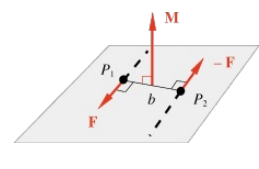


FIGURA 4.40

coppia di forze di momento \mathbf{M}_O (che ha risultante nulla e momento indipendente dal polo).

Vediamo adesso un sistema speciale di forze, per il quale risultante e momento risultante non sono indipendenti.

Sistema di forze parallele

Tale sistema è formato da forze aventi tutte la stessa direzione, individuata dal versore \mathbf{u} . Pertanto $\mathbf{F}_i = F_i \mathbf{u}$ e la risultante $\mathbf{R} = \sum_i \mathbf{F}_i = (\sum_i F_i) \mathbf{u}$ risulta parallela a \mathbf{u} . Il momento risultante è dato da

$$\mathbf{M} = \sum_i \mathbf{r}_i \times F_i \mathbf{u} = (\sum_i F_i \mathbf{r}_i) \times \mathbf{u}$$

ed è ortogonale a \mathbf{u} , ovvero a \mathbf{R} . Deve quindi essere possibile trovare un punto C , dove applicare \mathbf{R} , tale che

$$\mathbf{M} = \mathbf{OC} \times \mathbf{R} = \mathbf{r}_C \times \mathbf{R} .$$

Eguagliando le due espressioni scritte per \mathbf{M}

$$\begin{aligned} (\sum_i F_i \mathbf{r}_i) \times \mathbf{u} &= \mathbf{r}_C \times (\sum_i F_i) \mathbf{u} = (\sum_i F_i) \mathbf{r}_C \times \mathbf{u} \\ \Rightarrow \mathbf{r}_C = \mathbf{OC} &= \frac{\sum_i F_i \mathbf{r}_i}{\sum_i F_i} = \frac{F_1 \mathbf{r}_1 + F_2 \mathbf{r}_2 + \dots + F_n \mathbf{r}_n}{F_1 + F_2 + \dots + F_n} . \end{aligned} \quad (4.27)$$

Il punto C , individuato dal vettore \mathbf{r}_C , è chiamato *centro delle forze parallele*.

A differenza del caso generale di forze con direzioni qualsiasi, un sistema di forze parallele può sempre essere ridotto a una sola forza, pari alla risultante \mathbf{R} , applicata in C . Il risultato non dipende dalla scelta di O , ma solo dalla posizione relativa dei punti e può essere generalizzato a qualsiasi sistema di vettori paralleli.

Una interessante applicazione in tal senso è lo studio della traslazione di un sistema di punti, cioè del moto di un insieme di punti materiali che hanno ad ogni istante la stessa velocità \mathbf{v} . Le quantità di moto $m_1 \mathbf{v}$, ..., $m_n \mathbf{v}$ formano un sistema di vettori paralleli, il cui centro è individuato, secondo (4.27), da

$$\mathbf{r}_C = \frac{\sum_i m_i v \mathbf{r}_i}{\sum_i m_i v} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{\sum_i m_i} = \mathbf{r}_{CM} .$$

Il centro è il centro di massa, come potevamo aspettarci. La risultante delle quantità di moto è $m \mathbf{v}_{CM}$ e il momento è $\mathbf{OC} \times m \mathbf{v}_{CM} = \mathbf{r}_{CM} \times m \mathbf{v}_{CM}$, coincidente col momento angolare \mathbf{L} ; infatti dato che tutti i punti hanno la stessa velocità, che è anche quella del centro di massa, non c'è moto rispetto al centro di massa e, per il primo teorema di König (4.16), il momento angolare \mathbf{L} è pari a $\mathbf{L}_{CM} = \mathbf{r}_{CM} \times m \mathbf{v}_{CM}$.

Un sistema molto comune di forze parallele è quello delle forze peso applicate a un insieme di punti. Le singole forze sono pari a $m_i \mathbf{g}$ (modulo $m_i g$),

la risultante è $\mathbf{R} = m \mathbf{g}$ e il centro, secondo (4.27), è individuato dal vettore

$$\mathbf{r}_C = \frac{\sum_i m_i g \mathbf{r}_i}{\sum_i m_i g} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{\sum_i m_i} = \mathbf{r}_{CM} .$$

Il centro delle forze peso, detto anche centro di gravità o baricentro, coincide con il centro di massa. Osserviamo che per poter considerare le forze peso parallele l'estensione del sistema non deve essere molto grande, così da poter trascurare la curvatura della terra.

Il momento risultante delle forze peso è

$$\mathbf{M} = \mathbf{OC} \times m \mathbf{g} = \mathbf{r}_{CM} \times m \mathbf{g} . \quad (4.28)$$

Notiamo che il centro delle forze parallele non coincide sempre con il centro di massa; ciò avviene solo se le forze parallele (o più in generale i vettori paralleli) hanno modulo proporzionale alle masse, come la forza peso $m_i g$ (o la quantità di moto nella traslazione $m_i v$). Notiamo infine che il metodo di calcolo e il concetto stesso di centro perdono significato se la risultante del sistema di forze parallele è nulla; in tal caso di norma è diverso da zero il momento (una coppia di forze fornisce l'esempio più banale).

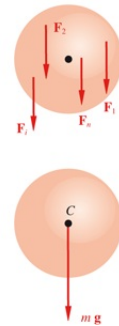


FIGURA 4.41

Momento assiale

Dato un vettore generico \mathbf{a} , che può essere sia una forza che una quantità di moto, calcoliamo il suo momento rispetto ai poli O e O' :

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{OP} \times \mathbf{a} , \quad \mathbf{M}_{O'} = \mathbf{O'P} \times \mathbf{a} .$$

Abbiamo dimostrato nell'appendice C che

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{OO}' \times \mathbf{a} + \mathbf{M}_{O'} .$$

Pertanto il vettore $\mathbf{M}_O - \mathbf{M}_{O'} = \mathbf{OO}' \times \mathbf{a}$ risulta ortogonale a \mathbf{OO}' e conseguentemente i momenti \mathbf{M}_O e $\mathbf{M}_{O'}$ devono avere la stessa componente lungo la direzione dell'asse \mathbf{OO}' . Tale componente si chiama *momento assiale del vettore \mathbf{a} rispetto all'asse \mathbf{OO}'* .

In conclusione, se si calcola il momento \mathbf{M} di un vettore rispetto ai vari punti di un dato asse, al variare del punto varia \mathbf{M} , però la sua componente lungo l'asse è indipendente da dove si sceglie il polo sull'asse.

Il risultato si estende al momento risultante di un sistema di vettori, come forze e quantità di moto.

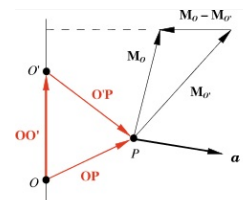


FIGURA 4.42

4.16 Massa variabile

Nel paragrafo 2.3 abbiamo accennato a situazioni in cui la massa del sistema, che noi assimiliamo ad un punto materiale, varia durante il moto. Possibili esempi sono: un nastro trasportatore, su cui vengono caricati o scaricati dei corpi, una scala mobile, un recipiente in moto contenente liquido e nel quale viene versato altro liquido, un veicolo in moto che brucia carburante.

La quantità di moto nel punto può subire una variazione sia perché cambia la velocità sia perché cambia la massa e la (2.2) va scritta esplicitamente

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathbf{v} \frac{dm}{dt} .$$

In particolare, se il moto deve avvenire a velocità costante, è pur sempre necessaria una forza in quanto varia la massa,

$$\mathbf{F} = \mathbf{v} \frac{dm}{dt} ,$$

e la conoscenza della legge di variazione della massa nel tempo permette di calcolare tale forza; sarà in generale necessaria anche un'altra forza per vincere l'attrito.

ESEMPIO 4.24

Sopra un corpo di massa m_0 in moto orizzontale con velocità v_0 viene depositato del materiale, in modo tale che la massa totale aumenti linearmente nel tempo. Calcolare, in assenza di attrito, la forza che bisogna applicare per mantenere costante la velocità. Se invece non agisce nessuna forza, determinare come varia la velocità del corpo.

Soluzione

La variazione lineare della massa si può scrivere $m(t) = m_0 + kt$ dove k è una costante, pari a dm/dt , che esprime la rapidità di aumento della massa. La forza necessaria per mantenere costante la velocità v_0 è

$$F = v_0 \frac{dm}{dt} = v_0 k$$

ed è a sua volta costante. Per una variazione generica di massa, la forza è direttamente proporzionale a dm/dt .

Nel caso in cui non agisca nessuna forza possiamo applicare la legge di conservazione della quantità di moto, tra l'istante iniziale e un istante generico:

$$m_0 v_0 = m(t) v(t) \Rightarrow v(t) = \frac{m_0 v_0}{m(t)} .$$

Questa formula vale per qualsiasi variazione di massa; nel caso particolare proposto

$$v(t) = \frac{m_0 v_0}{m_0 + kt} = \frac{v_0}{1 + \frac{k}{m_0} t} .$$

Si noti che abbiamo implicitamente ammesso che la massa via via aggiunta abbia quantità di moto orizzontale nulla; ad esempio essa viene depositata sul corpo cadendo verticalmente. Si osservi inoltre che in questo problema c'è variazione di velocità e quindi accelerazione, ma non c'è forza; perché?

Visualizza soluzione

Con la legge di conservazione della quantità di moto, che abbiamo applicato nella seconda parte dell'esempio 4.24, si tratta un caso classico, quello del razzo il cui motore brucia combustibile ed espelle gas di scarico ad alta velocità rispetto al razzo stesso, naturalmente nell'ipotesi che non ci siano forze esterne.

Siano m e v massa e velocità del sistema ad un certo istante del moto. In un istante successivo, a seguito dell'espulsione di una massa dm (positiva) con velocità v^* rispetto al razzo, abbiamo la massa $m - dm$ che si muove con velocità $v + dv$ e la massa dm che si muove, in un sistema inerziale, con velocità $v - v^*$ (c'è il segno negativo in quanto v^* è opposta a v). Conserviamo la quantità di moto:

$$mv = (m - dm)(v + dv) + dm(v - v^*) .$$

Trascuriamo i prodotti di due quantità infinitesime e otteniamo

$$m dv = v^* dm \Rightarrow dv = v^* \frac{dm}{m} .$$

Questa relazione dice come aumenta la velocità con la variazione di massa, dovuta alla combustione.

Il caso più semplice è quello di una velocità di combustione dm/dt costante, cioè $m(t) = m_0 - kt$. La variazione infinitesima di massa che si ricava da tale formula è $-kdt$, ma avendo noi considerato dm come il valore assoluto della massa espulsa, poniamo $dm = kdt$ e abbiamo

$$dv = v^* \frac{kdt}{m_0 - kt} \Rightarrow v(t) = v_0 + v^* \ln \frac{m_0}{m_0 - kt} .$$

Si ottiene subito anche l'accelerazione della massa $m(t)$:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{v^* k}{m_0 - kt} .$$

Il prodotto v^*k , che si misura in newton, viene chiamato *spinta* del motore del razzo.

Se il moto fosse verticale, diretto verso l'alto, si dovrebbe tener conto della forza peso, $-mg$. Alla relazione di conservazione, scritta $dp = m dv - v^* dm = 0$, bisognerebbe sostituire

$$dp = mdv - v^* dm = F dt = -mg dt$$

$$\Rightarrow dv = v^* \frac{dm}{m} - g dt \quad .$$

In sostanza alla soluzione precedente bisogna aggiungere un termine che rallenta il moto:

$$v(t) = v_0 + v^* \ln \frac{m_0}{m_0 - kt} - gt \quad .$$

ESEMPIO 4.25

Un razzo di massa $m_0 = 10^6$ kg brucia carburante alla velocità $k = 1.2 \cdot 10^3$ kg/s; i gas vengono espulsi con velocità $v^* = 3 \cdot 10^4$ m/s rispetto al razzo. Supponendo nulla la velocità iniziale, calcolare al tempo $t = 100$ s la velocità del razzo, in assenza e in presenza della forza di gravità. Stimare anche lo spazio percorso.

Soluzione

Applichiamo, nei due casi proposti, le formule trovate per $v(t)$:

$$\begin{array}{ll} \text{senza gravità} & v(100) = 3.84 \cdot 10^3 \text{ m/s} \approx 13800 \text{ km/h} \quad , \\ \text{con gravità} & v(100) = 2.86 \cdot 10^3 \text{ m/s} \approx 10300 \text{ km/h} \quad . \end{array}$$

La spinta del motore è $3.6 \cdot 10^7$ N, rispetto ad una forza peso iniziale di $9.8 \cdot 10^6$ N. Per stimare lo spazio percorso in 100 s, osserviamo che l'accelerazione iniziale vale $a(0) = 36$ m/s² e quella finale $a(100) = 40.9$ m/s², nel caso senza gravità. Con buona approssimazione il moto è uniformemente accelerato, con accelerazione media $a \approx 38.5$ m/s² e in 100 s viene percorsa una distanza di circa 190 km; lo stesso risultato si ottiene per via grafica, calcolando l'area sotto la curva $v(t)$. In presenza di gravità la distanza percorsa risulta di circa 140 km.

Visualizza soluzione

I dati numerici dell'esempio 4.25 rispecchiano, come ordine di grandezza, i valori tipici di razzi utilizzati per missioni spaziali. Risulta conveniente, per ottenere una grande spinta e raggiungere rapidamente una quota dell'ordine del centinaio di chilometri, avere un primo stadio in cui il carico utile è piccolo rispetto alla massa totale, costituita soprattutto da carburante. Il secondo stadio opera in condizioni più favorevoli (velocità iniziale elevata, circa 10^4 km/h, attrito atmosferico quasi nullo, relativamente piccola massa) e può collocarsi in un'orbita stabile rispetto alla terra oppure comunicare ad un eventuale terzo stadio la velocità necessaria, $\sim 4 \cdot 10^4$ km/h, per sfuggire all'attrazione terrestre (vedi capitolo 5).

L'interazione gravitazionale è la prima delle interazioni fondamentali, citate nel paragrafo 2.5, di cui trattiamo alcune caratteristiche. Gli sviluppi classici dell'interazione elettromagnetica costituiscono gran parte del materiale esposto nel secondo volume mentre, come abbiamo già detto, esula dai nostri obiettivi lo studio delle interazioni importanti a livello nucleare e subnucleare.

Dopo aver trovato l'espressione analitica della forza gravitazionale, introduciamo il concetto di campo gravitazionale e il metodo di calcolo legato al teorema di Gauss; si tratta di argomenti che verranno ripresi ed ampliati nel secondo volume.

Infine determiniamo esplicitamente l'orbita di un corpo soggetto alla forza gravitazionale di un altro corpo; si tratta di un caso particolare, ma molto importante, del moto di un sistema di due punti sottoposti ad una specifica interazione mutua.

5.1 La forza gravitazionale

Richiamiamo brevemente le conoscenze sul moto dei pianeti che si avevano prima di Newton (vissuto dal 1642 al 1727).

Agli inizi del 500 era stata avanzata da Copernico l'ipotesi eliocentrica: il sole, e non la terra, era il corpo celeste attorno al quale si svolgeva il moto dei pianeti. Successivamente, le posizioni assunte da questi nel tempo erano state oggetto di numerose e accurate misure da parte di Brahe (fine del 500), misure su cui si basò Keplero per formulare, tra il 1600 e il 1620, le sue tre leggi.

Prima legge

I pianeti percorrono orbite ellittiche intorno al sole che occupa uno dei fuochi dell'ellisse.

Seconda legge

La velocità areale con cui il raggio vettore che unisce il sole ad un pianeta descrive l'orbita è costante.

Terza legge

Il quadrato del periodo di rivoluzione di ogni pianeta è proporzionale al cubo del semiasse maggiore dell'ellisse: $T^2 = k r^3$ (i valori della costante k sono dati nella tabella del paragrafo 5.6).

Le tre leggi di Keplero danno una descrizione cinematica del moto dei pianeti. La spiegazione dinamica venne trovata da Newton nel 1666 e resa nota solamente nel 1687. Da essa prese corpo la *teoria della gravitazione universale*, i cui aspetti più semplici sono esaminati in questo capitolo.

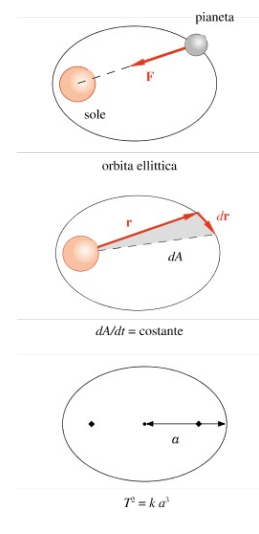


FIGURA 5.1

Diamo una traccia del ragionamento di Newton, inizialmente approssimato. Le orbite dei pianeti, pur essendo certamente ellittiche, sono molto prossime a circonferenze (si veda il paragrafo 5.6); immaginiamo allora che siano circolari. Se questo è vero e se la velocità areale è costante, il moto di un pianeta è circolare uniforme: infatti, ricordando dal paragrafo 2.23 che

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} ,$$

la costanza della velocità areale e di r dà $d\theta/dt = \text{costante}$.

La forza che agisce sul pianeta, permettendogli di percorrere una traiettoria circolare con velocità costante, deve essere esclusivamente centripeta (cioè senza componente tangenziale, figura 5.2) e si scrive

$$F = m \omega^2 r = m \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 r ,$$

essendo T il periodo di rivoluzione, m la massa e r il raggio dell'orbita del pianeta. Utilizziamo ora la terza legge di Keplero $T^2 = kr^3$, confondendo il raggio della circonferenza con il semiasse maggiore dell'ellisse, così che la forza diviene

$$F = \frac{4\pi^2}{k} \frac{m}{r^2} .$$

Questo è il primo risultato fondamentale: *la forza esercitata dal sole sui pianeti, che incurva la loro orbita, è inversamente proporzionale al quadrato della distanza dal sole.*

Consideriamo il sistema sole–terra: la forza esercitata dal sole sulla terra può quindi essere scritta

$$F_{S,T} = \frac{4\pi^2}{k_T} \frac{m_T}{r^2}$$

mentre la forza esercitata dalla terra sul sole ha l'espressione

$$F_{T,S} = \frac{4\pi^2}{k_S} \frac{m_S}{r^2}$$

eguale in modulo a $F_{S,T}$ per il *principio di azione e reazione*. Dall'eguaglianza si ottiene $m_T k_S = m_S k_T$. Definendo la costante

$$\gamma = \frac{4\pi^2}{m_T k_S} = \frac{4\pi^2}{m_S k_T}$$

abbiamo per il modulo della forza sole–terra

$$F = \gamma \frac{m_S m_T}{r^2} ;$$

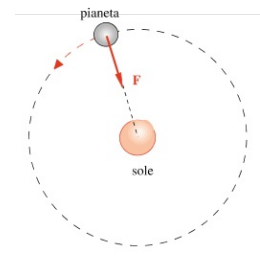


FIGURA 5.2

la direzione è quella della retta congiungente il sole alla terra.

La formula ottenuta è molto semplice ed è simmetrica nei due corpi; Newton ipotizzò che si trattasse di una formula universale ed enunciò la seguente *legge di gravitazione universale*: *date due masse qualsiasi, di dimensioni trascurabili rispetto alla distanza mutua, tra di esse agisce una forza attrattiva diretta lungo la retta congiungente le due masse, il cui modulo dipende direttamente dal prodotto delle masse e inversamente dal quadrato della distanza.*

La costante di proporzionalità γ è *una costante universale*, che non dipende dai valori delle masse e dalla geometria del sistema, ma è caratteristica dell'interazione gravitazionale.

In termini vettoriali (figura 5.3) l'espressione della forza gravitazionale che la massa m_1 esercita sulla massa m_2 è

$$\mathbf{F}_{1,2} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \mathbf{u}_{1,2} \quad (5.1)$$

La forza $\mathbf{F}_{2,1}$, subita da m_1 ad opera di m_2 , è $-\mathbf{F}_{1,2}$.

Innumerevoli verifiche sperimentali, soprattutto in campo astronomico, hanno confermato la correttezza dell'ipotesi.

La prima verifica è dovuta sempre a Newton. La (5.1) deve valere anche per un corpo di massa m posto sulla terra, che è un corpo sferico di massa m_T e raggio r_T : per la forza subita dal corpo scriviamo

$$F = \gamma \frac{m_T m}{r_T^2}$$

Questa formula è valida se si ammette che un corpo a simmetria sferica eserciti una forza come se la massa fosse tutta concentrata nel suo centro (vedi paragrafo 5.5); la prova di questa proprietà fu una delle cause che ritardò la pubblicazione della (5.1). D'altra parte $F = mg$ per cui

$$g = \gamma \frac{m_T}{r_T^2}$$

Però Newton non conosceva né il valore di γ né la massa della terra. Tuttavia, con riferimento al sistema terra-luna, si può scrivere

$$F_{T,L} = \gamma \frac{m_T m_L}{r_L^2} = m_L \omega_L^2 r_L$$

per la forza esercitata dalla terra sulla luna, centripeta per la luna; segue $\gamma m_T = \omega_L^2 r_L^3$ e dunque dal periodo di rotazione della luna attorno alla terra e dalla distanza terra-luna è possibile determinare il prodotto γm_T e quindi g .

Con i valori oggi noti l'accordo è perfetto. Al tempo di Newton il valore stimato per la distanza terra-luna era sbagliato e solo dopo una misurazione

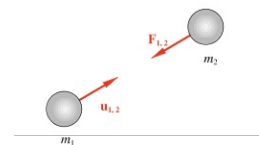


FIGURA 5.3

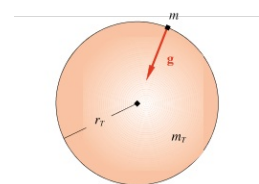


FIGURA 5.4

astronomica più precisa Newton poté trovare un buon accordo tra g e $\gamma m_T / r_T^2$ (altro fatto che ritardò la pubblicazione della teoria).

La misura diretta di γ e quindi la prima determinazione della massa della terra, venne effettuata da Cavendish nel 1798; egli si servì di una bilancia di torsione (vedi paragrafo 7.4) per misurare la forza di attrazione tra due masse sferiche, misura molto difficile essendo la forza dell'ordine di 10^{-9} N a causa del piccolo valore di γ . Le determinazioni più recenti danno

$$\gamma = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2} \quad , \quad m_T = 5.98 \cdot 10^{24} \text{ kg} \quad .$$

La (5.1) mostra che la forza gravitazionale è una forza centrale: viene così chiarito il perché della validità della seconda legge di Keplero (paragrafo 2.23). Vedremo più avanti come si spieghino la prima e la terza legge.

Si noti che solo conoscendo γ si possono determinare le masse dei corpi celesti, come vedremo nell'esempio 5.3 (paragrafo 5.4).

Sottolineiamo che, a differenza delle forze finora considerate, che si manifestano al contatto (macroscopico) tra i corpi, la forza gravitazionale si manifesta a distanza, senza che le masse vengano a contatto. In effetti tutte le interazioni fondamentali conosciute sono forze a distanza, che differiscono però nel raggio di azione (oltre che per altre proprietà): la forza gravitazionale e la forza tra cariche elettriche hanno la stessa dipendenza dalla distanza ($1/r^2$) e si dice che il loro *raggio di azione* è *infinito*, invece la forza forte e quella debole decrescono molto più rapidamente con la distanza e sono efficaci solo a livello subatomico.

Altre caratteristiche notevoli della forza gravitazionale tra due corpi sono costituite dall'indipendenza rispetto a diversi fattori, quali lo stato di moto relativo, la presenza di materia interposta e proprietà specifiche come stato di aggregazione e composizione chimica.

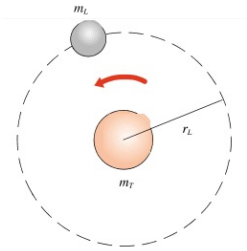


FIGURA 5.5

5.2 Massa inerziale e massa gravitazionale

La legge (5.1) esprime un particolare tipo di interazione esistente in natura il cui valore numerico dipende da γ , che è tipica dell'interazione, dalla geometria del sistema e da una caratteristica dei corpi che partecipano all'interazione, che abbiamo indicato con m e chiamiamo massa gravitazionale.

A priori non c'è nessuna ragione logica per cui la massa gravitazionale, legata a una particolare interazione, debba essere eguale alla massa inerziale che compare nella legge di Newton $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$; qui la grandezza m caratterizza l'inerzia del corpo, qualunque sia la forza agente, e sappiamo che essa può essere determinata con misure cinematiche indipendenti dalla forza peso.

Sulla superficie terrestre vale l'equazione

$$m_I g = \gamma \frac{m_{T,G} m_G}{r_T^2}$$

dove m_I e m_G sono le *masse inerziale e gravitazionale* del corpo attratto dalla terra, la cui massa gravitazionale è $m_{T,G}$. Ne ricaviamo

$$g = \gamma \frac{m_{T,G}}{r_T^2} \frac{m_G}{m_I} .$$

Sperimentalmente, in uno stesso luogo g è indipendente dai corpi, quindi per qualsiasi corpo il rapporto m_G/m_I è pari a una costante, indipendente dal corpo: le due masse m_I e m_G sono per lo meno proporzionali.

Poiché non c'è un modo diretto per misurare il rapporto m_G/m_I , l'ipotesi più semplice è supporre $m_G = m_I$; in pratica questo vuol dire che nell'esperimento di Cavendish i valori delle masse delle sfere sono quelli inerziali e che quindi il valore di γ si basa sull'ipotesi $m_G = m_I$.

Se il rapporto m_G/m_I dipendesse dai corpi, cioè ad esempio dalla sostanza da cui sono costituiti, sarebbe possibile metterlo in evidenza col metodo seguente. Nel paragrafo 3.6 si è visto che in un sistema di riferimento terrestre (non inerziale) un filo a piombo non si dispone parallelamente alla forza di gravità (dipendente da m_G) in quanto risente della forza centrifuga (forza apparente d'inerzia, dipendente da m_I); la deviazione è piccola, ma misurabile. Due fili con appesi due corpi di materiale diverso potrebbero disporsi secondo angoli diversi, se per essi il rapporto m_G/m_I fosse diverso. L'idea e la maniera pratica per mettere in evidenza un eventuale effetto sono dovuti a Eötvös (seconda metà dell'ottocento); l'esperimento non diede risultato, nel senso che l'eguaglianza $m_G/m_I = 1$ fu trovata vera per tutti i materiali provati entro 10^{-6} . Misure moderne, che si sono servite di questo come di altri metodi, hanno verificato l'eguaglianza entro 10^{-12} .

5.3 Campo gravitazionale

La struttura della legge (5.1) si presta a una considerazione interessante; possiamo infatti scrivere:

$$\mathbf{F}_{1,2} = \left(-\gamma \frac{m_1}{r^2} \mathbf{u}_{1,2} \right) m_2 \quad , \quad \mathbf{F}_{2,1} = \left(-\gamma \frac{m_2}{r^2} \mathbf{u}_{2,1} \right) m_1 \quad ,$$

e dire che la forza gravitazionale $\mathbf{F}_{1,2}$ esercitata dal corpo di massa m_1 sull'altro di massa m_2 è pari al prodotto di un vettore, che non dipende da m_2 , ma solo da m_1 e dalla distanza da m_1 , per la massa m_2 sottoposta all'azione di m_1 ; viceversa nel caso di $\mathbf{F}_{2,1}$.

Il vettore tra parentesi si chiama *campo gravitazionale* \mathbf{G} generato dalla massa sorgente del campo nel punto P distante r :

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_1 &= -\gamma \frac{m_1}{r^2} \mathbf{u}_1 \quad , \quad \mathbf{F}_{1,2} = m_2 \mathbf{G}_1 \quad , \\ \mathbf{G}_2 &= -\gamma \frac{m_2}{r^2} \mathbf{u}_2 \quad , \quad \mathbf{F}_{2,1} = m_1 \mathbf{G}_2 \quad ; \end{aligned} \quad (5.2)$$

\mathbf{u}_i è un versore uscente radialmente dal punto in cui si trova la massa sorgente m_i (vedi figura 5.6). \mathbf{G}_1 è diverso da \mathbf{G}_2 , anche in modulo, però $\mathbf{F}_{1,2} = -\mathbf{F}_{2,1}$.

Le formule (5.2) sono valide per masse puntiformi, o a simmetria sferica; in tal caso anche il campo è a simmetria sferica, cioè è centrale, ed è sempre rivolto verso la sorgente.

Il campo gravitazionale totale \mathbf{G} in un punto P (figura 5.7) dovuto a più masse puntiformi $m_1, \dots, m_i, \dots, m_n$ si ottiene sommando vettorialmente i vari contributi

$$\mathbf{G}_i = -\gamma \frac{m_i}{r_i^2} \mathbf{u}_i$$

delle singole masse:

$$\mathbf{G}(P) = \sum_1^n \mathbf{G}_i = \sum_1^n \left(-\gamma \frac{m_i}{r_i^2} \mathbf{u}_i \right) . \quad (5.3)$$

Il campo gravitazionale \mathbf{G} in un punto P (figura 5.8) dovuto a una massa m continua contenuta in una regione limitata, come il corpo C della figura, si calcola in modo analogo: si divide la massa m in parti infinitesime dm , ognuna delle quali genera in P un campo

$$d\mathbf{G} = -\gamma \frac{dm}{r^2} \mathbf{u} \quad ,$$

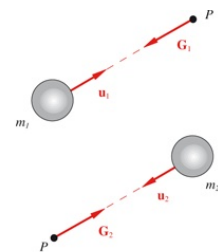


FIGURA 5.6

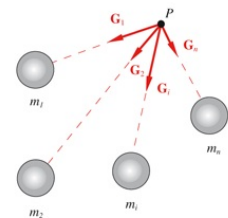


FIGURA 5.7

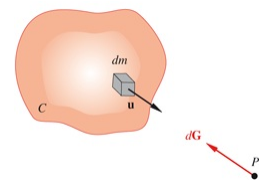


FIGURA 5.8

e si integra vettorialmente su tutti i contributi :

$$\mathbf{G}(P) = \int_C -\gamma \frac{dm}{r^2} \mathbf{u} = \int_V -\gamma \rho \frac{dV}{r^2} \mathbf{u} . \quad (5.4)$$

Nella (5.4) abbiamo usato la relazione $dm = \rho dV$, ovvero la definizione di densità ρ

come rapporto tra una massa infinitesima e il volume che tale massa occupa.

Questa nozione sarà precisata ed estesa nel paragrafo 6.3.

La forza tra due corpi estesi C_1 e C_2 di masse m_1 e m_2 si ottiene calcolando in ciascun elemento di m_2 la forza $d\mathbf{F}_{1,2} = dm_2 \mathbf{G}_1$ esercitata dal corpo di massa m_1 , con \mathbf{G}_1 dato da un'espressione come (5.4) e integrando vettorialmente su tutto C_2 :

$$\mathbf{F}_{1,2} = \int_{C_2} \mathbf{G}_1 dm_2 . \quad (5.5)$$

La nozione di campo è utile concettualmente: per esempio attraverso di esso si esprime agevolmente una proprietà notevole come il teorema di Gauss (paragrafo 5.5) oppure si eseguono più chiaramente calcoli complessi quando le masse sono estese; però non appare indispensabile.

Guardando l'argomento in modo un po' diverso, ci si può chiedere se il campo \mathbf{G} è una grandezza che ha un significato indipendente da m_1 e m_2 .

Cominciando da m_2 , se non si mette la massa m_2 nel campo di m_1 e non si misura $\mathbf{F}_{1,2}$, ha senso parlare di \mathbf{G}_1 ? La risposta può essere in un certo senso affermativa: la presenza di m_1 modifica lo spazio circostante indipendentemente da m_2 , come si verifica osservando che la traiettoria di raggi luminosi che attraversano un campo gravitazionale risulta incurvata, in accordo con le previsioni della teoria della *relatività generale* (vedi paragrafo 5.7). La prima osservazione a conferma di questi fatti venne effettuata nel 1919, durante un'eclisse di sole. Nella figura 5.9, che non è in scala, è mostrata una particolare configurazione del sistema terra-sole e una stella, che in tale situazione si trova per un osservatore terrestre dietro il sole (dato che la terra ruota intorno al sole, in altre configurazioni la stella è visibile e quindi ben localizzata). Se la propagazione della luce fosse sempre rettilinea la stella non dovrebbe essere visibile, se invece i raggi luminosi sono incurvati dal campo gravitazionale del sole essi possono raggiungere la terra. In condizioni normali il fenomeno non si può osservare perché il sole è troppo luminoso; però in caso di eclissi di sole (con la luna cioè che intercetta i raggi solari) l'osservazione diventa possibile e in effetti ha dato risultato positivo.

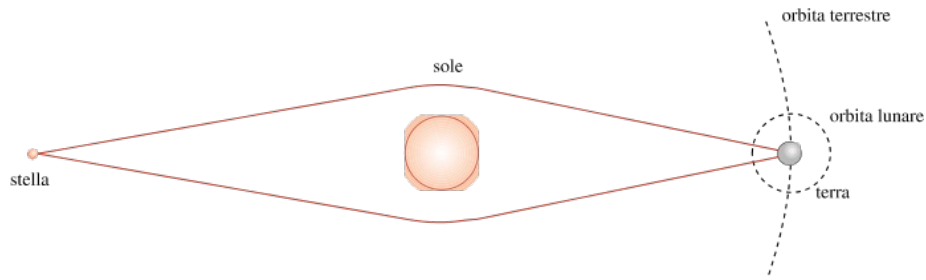


FIGURA 5.9

Può esistere un campo \mathbf{G} senza sorgente m ? Sarebbe possibile in questa situazione: la massa m in opportune condizioni variabili nel tempo genera un campo variabile che si propaga; si potrebbe allora rivelare \mathbf{G} molto lontano da m e molto dopo l'emissione, quando magari m non esiste più. Un fenomeno analogo, che coinvolge il campo elettromagnetico, si verifica per esempio nell'esplosione di una supernova, che avviene con notevole emissione di onde elettromagnetiche (anche luminose). Queste onde si propagano e vengono rivelate sulla terra quando oramai la sorgente ha cessato di esistere. Ci sono prove indirette dell'esistenza di onde gravitazionali, cioè di campi gravitazionali che si propagano, però sulla terra fino ad ora non c'è stata nessuna osservazione sicura dell'arrivo di onde gravitazionali.

In conclusione, l'introduzione della nozione di campo gravitazionale appare giustificata. L'utilità concettuale e pratica di questo modo di procedere risulterà chiara studiandone l'applicazione ai fenomeni elettrici e magnetici.

5.4 Energia potenziale gravitazionale

Dimostriamo direttamente che la forza gravitazionale è conservativa; in effetti sappiamo già che è così in quanto si tratta di una forza centrale, però il calcolo ci serve per trovare l'espressione dell'energia potenziale.

In figura 5.10 è mostrata la traiettoria di una massa m_2 nel campo di una massa m_1 . Il lavoro compiuto durante lo spostamento $d\mathbf{s}$ è

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \mathbf{u}_1 \cdot d\mathbf{s} \quad ;$$

il prodotto scalare $\mathbf{u}_1 \cdot d\mathbf{s}$, figura 5.11, è pari alla proiezione di $d\mathbf{s}$ su \mathbf{u}_1 e quindi a dr , variazione del modulo della distanza tra m_1 e m_2 a seguito dello spostamento $d\mathbf{s}$. Pertanto

$$\begin{aligned} W &= \int_A^B dW = \int_{r_A}^{r_B} -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} dr = -\gamma m_1 m_2 \left(-\frac{1}{r_B} + \frac{1}{r_A} \right) = \\ &= -\gamma \frac{m_1 m_2}{r_A} - \left(-\gamma \frac{m_1 m_2}{r_B} \right) = E_{p,A} - E_{p,B} \quad . \end{aligned}$$

Verifichiamo così che il lavoro non dipende dalla traiettoria, ma solo dalle posizioni iniziali e finali, e che l'energia potenziale ha l'espressione

$$E_p = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r} \quad . \quad (5.6)$$

Il segno negativo deriva da quello di (5.1) e significa che la forza gravitazionale è attrattiva. Possiamo giustificarlo anche così: per due masse molto distanti $r \approx \infty$ per cui $F = 0$, $E_p = 0$; a rigore E_p è definita a meno di una costante additiva, però è ragionevole che a distanza infinita, quando cioè non c'è interazione, l'energia potenziale sia nulla e quindi la costante, che ha il significato di valore dell'energia potenziale per $r = \infty$, si assume nulla. Quando m_2 si avvicina a m_1 la forza gravitazionale compie un lavoro positivo e m_2 acquista energia cinetica; siccome la forza è conservativa, l'energia meccanica, somma dell'energia cinetica e dell'energia gravitazionale, resta costante e quindi se E_k aumenta E_p deve diminuire; essendo nulla per distanza infinita, E_p deve essere negativa per distanze finite.

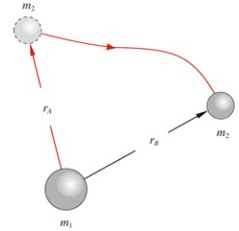


FIGURA 5.10

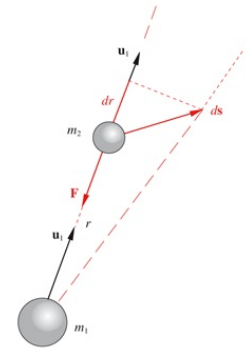


FIGURA 5.11

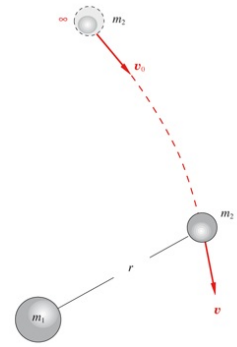


FIGURA 5.12
(Esempio 5.1)

Esempio 5.1

Due masse m_1 e m_2 si trovano a distanza molto grande, praticamente infinita; la massa m_1 è fissa, la massa m_2 ha energia cinetica $E_{k, \text{in}} = \frac{1}{2} m_2 v_0^2$. Calcolare la velocità della massa m_2 quando è a distanza r da m_1 .

Soluzione

L'energia meccanica iniziale del sistema delle due masse è $E_m = E_{k, \text{in}} = \frac{1}{2} m_2 v_0^2$ mentre quando le masse distano r tra loro l'energia meccanica vale

$$E_m = \frac{1}{2} m_2 v^2 - \gamma \frac{m_1 m_2}{r} .$$

Eguagliando le due espressioni si trova

$$v^2 = v_0^2 + 2 \gamma \frac{m_1}{r} .$$

Il risultato è vero qualunque sia la traiettoria seguita da m_2 nel campo di m_1 .

Visualizza soluzione

Esempio 5.2

Calcolare la velocità di fuga di un corpo dalla terra.

Soluzione

Nella condizione iniziale abbiamo un corpo di massa m sulla superficie terrestre, con energia cinetica $E_{k, \text{in}} = \frac{1}{2} m v^2$. Alla fine si vuole che il corpo sia a distanza infinita con velocità $v_0 \geq 0$.

Scriviamo la conservazione dell'energia meccanica:

$$\frac{1}{2} m v^2 - \gamma \frac{m m_T}{r_T} = \frac{1}{2} m v_0^2$$

per cui

$$v^2 = v_0^2 + 2 \gamma \frac{m_T}{r_T} .$$

Si vede che il problema è l'inverso del precedente. Il valore limite (inferiore) di v , detto v_F , *velocità di fuga*, corrisponde a $v_0 = 0$: il corpo arriva a distanza infinita dalla terra con velocità nulla. Si trova

$$v_F = \sqrt{2 \gamma \frac{m_T}{r_T}} ,$$

indipendente dalla massa del corpo. Poiché $r_T = 6.37 \cdot 10^6$ m, inserendo i valori di γ e m_T dati nel paragrafo 5.1, abbiamo

$$v_F = 11.2 \text{ km/s} \cong 4 \cdot 10^4 \text{ km/h} .$$

La stessa formula vale per qualsiasi altro pianeta, con gli appropriati valori di massa e raggio. Nel caso della luna si trova, per esempio, $v_F = 2.4 \text{ km/s} \cong 8.5 \cdot 10^3 \text{ km/h}$. Per i pianeti del sistema solare il maggior valore della velocità di fuga si ha su Giove, dove $v_F = 60 \text{ km/s} = 21.6 \cdot 10^4 \text{ km/h}$.

Visualizza soluzione

Esempio 5.3

Un satellite di massa m descrive un'orbita circolare attorno ad un pianeta di massa M ; il raggio dell'orbita è r e il periodo di rivoluzione è T . Calcolare il valore della massa M del pianeta e l'energia del satellite.

Soluzione

La legge di Newton $\mathbf{F} = m \mathbf{a}$ applicata al satellite si scrive

$$\gamma \frac{m M}{r^2} = m \omega^2 r ;$$

Al posto di ω^2 si sostituisce $4\pi^2 / T^2$ e si trova

$$M = \frac{4\pi^2}{T^2} \frac{r^3}{\gamma} .$$

Vediamo che, noto il valore di γ , la massa del pianeta si può dedurre da misure geometriche e cinematiche sul moto del satellite; il risultato non dipende dalla massa del satellite. L'energia meccanica del satellite è

$$E_m = \frac{1}{2} m v^2 - \gamma \frac{m M}{r} .$$

Riprendendo la legge del moto

$$\gamma \frac{m M}{r^2} = m \omega^2 r = m \frac{v^2}{r}$$

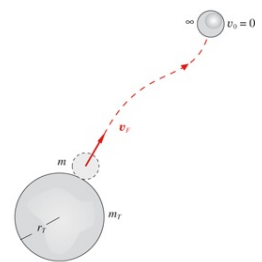


FIGURA 5.13
(Esempio 5.2)

possiamo esprimere l'energia cinetica in funzione di r :

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \gamma \frac{m M}{r} \quad ;$$

troviamo quindi che l'energia totale risulta

$$E_m = -\gamma \frac{m M}{2 r} < 0 \quad .$$

Il valore è negativo in quanto il modulo dell'energia potenziale è maggiore dell'energia cinetica; ciò significa che il satellite non può sfuggire all'attrazione del pianeta e si dice che il sistema è legato, con energia di legame E_m .

Visualizza soluzione

Esempio 5.4

Un satellite artificiale di massa $m = 10^3$ kg descrive un'orbita circolare intorno alla terra. Calcolare, in funzione del raggio r dell'orbita, la velocità, il periodo, l'energia meccanica, la forza gravitazionale, in particolare per r poco maggiore del raggio della terra r_T . Estendere i calcoli al caso di un satellite geostazionario (cioè con periodo eguale a 24 ore). Determinare infine il lavoro necessario per portare il satellite da un'orbita di raggio r_1 a un'orbita di raggio $r_2 > r_1$. Ricordiamo che $m_T = 5.98 \cdot 10^{24}$ kg, $r_T = 6.38 \cdot 10^6$ m, $\gamma = 6.67 \cdot 10^{-11}$ m³/kgs².

Soluzione

Le formule da utilizzare, tutte già viste, sono:

$$F = \gamma \frac{m m_T}{r^2} = m \omega^2 r = m \frac{v^2}{r}$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\gamma \frac{m_T}{r}} \quad , \quad T = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{\gamma m_T}}$$

$$E_m = -\gamma \frac{m m_T}{2r} \quad .$$

Numericamente, $\gamma m_T = 3.99 \cdot 10^{14}$ m³/s² e quindi:

$$v = \frac{2 \cdot 10^7}{\sqrt{r}} \text{ m/s} \quad , \quad T = 3.14 \cdot 10^{-7} r^{3/2} \text{ s}$$

(con riferimento all'esempio 5.3 $T^2 = k r^3$, $k = 9.87 \cdot 10^{-14}$ s²/m³).

Questi risultati non dipendono dalla massa del satellite, mentre ne dipendono forza ed energia meccanica:

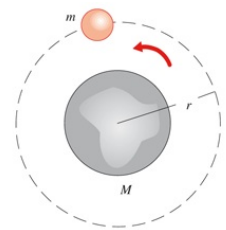


FIGURA 5.14
(Esempio 5.3)

$$F = 3.99 \cdot 10^{14} \frac{m}{r^2} = \frac{3.99 \cdot 10^{17}}{r^2} \text{ N} ,$$

$$E_m = -2 \cdot 10^{14} \frac{m}{r} = \frac{-2 \cdot 10^{17}}{r} \text{ J} .$$

Per un'orbita con raggio di poco superiore al raggio terrestre, ad esempio per un satellite con distanza dalla superficie terrestre dell'ordine di 100 km, poniamo in prima approssimazione $r = r_T$ e troviamo, ricordando che $g = \gamma m_T/r^2$:

$$v = \sqrt{g r_T} = 7.91 \cdot 10^3 \text{ m/s} \approx 28500 \text{ km/h} ,$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r_T}{g}} = 5.05 \cdot 10^3 \text{ s} \approx 84 \text{ minuti} ,$$

$$F = mg = 9.81 \cdot 10^3 \text{ N} ,$$

$$E_m = -\frac{1}{2} mgr_T = -3.14 \cdot 10^{10} \text{ J} .$$

Nel caso del satellite geostazionario il periodo è fissato, $T = 24 \text{ ore} = 8.64 \cdot 10^4 \text{ s}$ e si deduce il raggio dell'orbita

$$r = \left(\frac{T}{3.14 \cdot 10^{-7}} \right)^{2/3} = 4.23 \cdot 10^7 \text{ m} = 42300 \text{ km} ,$$

cioè un'altezza di circa 36000 km dalla superficie terrestre. Infine, nel passaggio da un'orbita ad un'altra l'energia meccanica del satellite varia e quindi il lavoro necessario, fornito da una forza non conservativa, è

$$W = \Delta E_m = E_{m,2} - E_{m,1} = \gamma \frac{m m_T}{2} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = 2 \cdot 10^{17} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \text{ J} .$$

Vogliamo riassumere, per concludere, la situazione cinematica e dinamica del satellite in orbita circolare. L'accelerazione, soltanto centripeta e dovuta alla forza di gravità, vale $g(r) = \gamma m_T/r^2$; essa forma un angolo di $\pi/2$ con la velocità; entrambe, velocità e accelerazione, sono costanti lungo l'orbita. Si può dire che il satellite è in caduta libera, ma a causa delle condizioni iniziali l'orbita di equilibrio è circolare (caduta continua, ma senza mai avvicinarsi alla terra). Qualsiasi oggetto all'interno del satellite risente della stessa accelerazione e si ha quella situazione, detta impropriamente di assenza di peso, già descritta nell'esempio 3.6.

Visualizza soluzione

Potenziale gravitazionale

Anche a (5.6) si può applicare il ragionamento del paragrafo 5.3, che introduce il concetto di *campo gravitazionale*. Precisamente l'energia potenziale

si può scrivere $E_p = m_2 V_1$ ponendo

$$V_1 = \frac{E_p}{m_2} = -\gamma \frac{m_1}{r} ; \quad (5.7)$$

la grandezza $V_1(r)$ si chiama *potenziale gravitazionale* del campo prodotto da m_1 . Chiaramente la situazione è simmetrica nelle masse: si può scrivere anche $E_p = m_1 V_2$ con $V_2 = -\gamma m_2 / r$, potenziale gravitazionale del campo prodotto da m_2 .

Il lavoro per uno spostamento generico della massa m_2 dalla posizione A alla posizione B nel campo di m_1 è

$$W = -\Delta E_p = -m_2 \Delta V_1 = -m_2 (V_{1,B} - V_{1,A}).$$

Tra campo e potenziale esiste la relazione fondamentale

$$\mathbf{G} = -\text{grad } V = -\nabla V , \quad (5.8)$$

che si ricava da (2.20) inserendo (5.1) e (5.6) e dividendo entrambi i membri per m_2 o per m_1 .

Anche al potenziale si applica quanto visto per il campo gravitazionale in presenza di più masse puntiformi o di masse estese: il potenziale si calcola come somma dei vari contributi, finiti o infinitesimi. È bene notare che si tratta di una somma di grandezze scalari (negative) e non vettoriali, come avviene per \mathbf{G} ; quindi l'operazione può risultare più facile da un punto di vista analitico. Calcolato il potenziale di una distribuzione di masse, il campo si ottiene tramite (5.8). Non approfondiamo ulteriormente l'argomento, dato che esso verrà ripreso per il campo e il potenziale generati da cariche elettriche.

Grafici dell'energia

L'energia totale di un sistema di due masse può assumere valore positivo, nullo o negativo a seconda che sia

$$E_k > |E_p| , \quad E_k = |E_p| , \quad E_k < |E_p| .$$

Nei grafici della figura 5.15 sono rappresentati i tre casi: r è la distanza mutua, E l'energia totale costante; la doppia freccia indica la differenza $E - E_p = E_k$ per un particolare valore r . La curva continua mostra $E_p = -\gamma m_1 m_2 / r$ ed è eguale nei tre casi. Vediamo che nei primi due casi non ci sono limiti, mentre nel terzo caso r è limitato ($r \leq r_0$, altrimenti risulterebbe $E_p > E$).

Correggeremo parzialmente queste conclusioni nel paragrafo 5.6 dove calcoleremo un'espressione esplicita per l'energia totale del sistema di due masse, valida

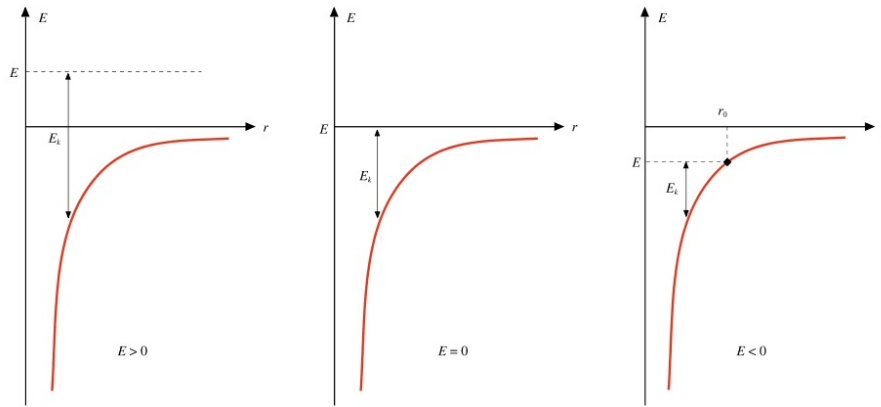


FIGURA 5.15

anche per orbite non circolari. Inoltre vedremo che:

se $E > 0$ l'orbita è iperbolica

se $E = 0$ l'orbita è parabolica

se $E < 0$ l'orbita è ellittica .

Il caso trattato nell'esempio 5.3 appartiene all'ultima categoria: l'energia totale è negativa, l'orbita è limitata.

La situazione descritta per le orbite è mostrata in figura 5.16. In P c'è la massa m_2 con velocità \mathbf{v} . Sono disegnate una possibile traiettoria iperbolica, l'unica traiettoria parabolica e tre possibili traiettorie ellittiche (la centrale in realtà è circolare). Controllando v si può scegliere la traiettoria voluta, come avviene con i satelliti artificiali.

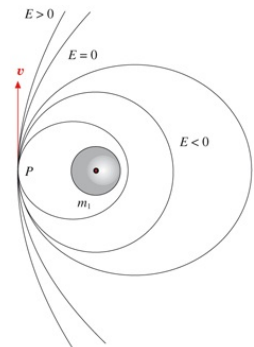


FIGURA 5.16

5.5 Teorema di Gauss. Distribuzione sferica di massa

Consideriamo un certo numero di masse e una superficie geometrica chiusa che ne racchiude n (nella figura 5.17 le masse sono sette e $n = 4$); in ogni punto della superficie determiniamo \mathbf{G} , che è dovuto a tutte le masse presenti (interne ed esterne) e calcoliamo la quantità scalare

$$d\Phi = \mathbf{G} \cdot \mathbf{u}_N dS \quad ;$$

\mathbf{u}_N è il vettore normale alla superficie, che assumiamo orientato verso l'interno, e dS è l'elemento di superficie intorno al punto in cui è calcolato \mathbf{G} . L'integrale esteso a tutta la superficie chiusa

$$\Phi = \oint d\Phi = \oint \mathbf{G} \cdot \mathbf{u}_N dS$$

si chiama *flusso del vettore \mathbf{G} attraverso la superficie chiusa S* .

Il *teorema di Gauss*, che enunciamo senza dimostrazione, afferma che il *flusso del campo gravitazionale attraverso una superficie chiusa è proporzionale alla somma delle masse interne alla superficie*:

$$\Phi = 4\pi\gamma \sum_1^n m_i \quad . \quad (5.9)$$

Nella dimostrazione è essenziale il fatto che il campo gravitazionale di una massa puntiforme è una funzione della distanza del tipo $1/r^2$: il *teorema di Gauss* cioè vale esclusivamente per i campi vettoriali che dipendono inversamente dal quadrato della distanza. In tal senso dire che per un determinato campo vale il teorema di Gauss è equivalente a dire che la sua intensità diminuisce come $1/r^2$.

Il teorema di Gauss, dimostrato agli inizi dell'ottocento, permette di verificare facilmente che il campo di una distribuzione sferica di massa è pari a quello di una eguale massa puntiforme posta nel centro della distribuzione.

Cominciamo con una massa m distribuita su una superficie sferica di raggio R in modo uniforme (cioè la massa per unità di area è costante ovunque). Nel punto P (figura 5.18) il campo \mathbf{G} è radiale: esso è dovuto alla somma di contributi simmetrici, eguali in modulo, che danno risultante radiale; se così non fosse, vorrebbe dire che la distribuzione di massa non è uniforme. In qualsiasi altro punto che abbia dal centro la stessa distanza di P la situazione è la stessa: il campo \mathbf{G} è radiale e il suo modulo dipende solo da r ,

$$\mathbf{G} = -G(r) \mathbf{u}_r \quad .$$

Per calcolare $G(r)$ utilizziamo il teorema di Gauss (5.9): come superficie di

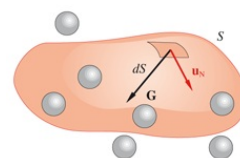


FIGURA 5.17

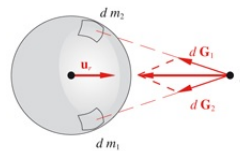


FIGURA 5.18

integrazione prendiamo una superficie sferica S concentrica a m e di raggio $r \geq R$, nei cui punti il campo ha lo stesso valore; la massa contenuta all'interno è appunto m . Abbiamo:

$$\Phi = \oint -G(r) \mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_N dS = G(r) \oint dS = 4\pi r^2 G(r) = 4\pi \gamma m$$

$$\Rightarrow G(r) = \gamma \frac{m}{r^2} \quad , \quad (5.10)$$

come se m fosse concentrata nel centro. Il risultato vale per $r \geq R$; all'interno, per $r < R$, qualsiasi superficie di integrazione si consideri, questa non contiene massa e dunque il flusso attraverso di essa è nullo; deve quindi essere $G = 0$ ovunque.

In figura 5.19 è rappresentato il modulo del campo gravitazionale di una massa distribuita uniformemente su una superficie sferica; si osservi che il campo è discontinuo per $r = R$, cioè nell'attraversare la massa.

Se m è distribuita uniformemente in tutto il volume sferico, all'esterno il discorso è lo stesso:

$$G(r) = \gamma \frac{m}{r^2} \quad , \quad r \geq R \quad . \quad (5.11)$$

All'interno invece cambia tutto, G non è più nullo; resta però vero l'argomento di simmetria radiale. All'interno di una superficie sferica S_1 di raggio $r \leq R$, figura 5.20, c'è la massa $m(r)$ minore di m ; dato che la distribuzione di massa è uniforme (massa per unità di volume eguale ovunque), il rapporto tra $m(r)$ e m è eguale al rapporto tra i volumi occupati ovvero a r^3/R^3 , per cui possiamo scrivere

$$m(r) = m \frac{r^3}{R^3} \quad .$$

Applichiamo (5.9):

$$\Phi(r) = 4\pi r^2 G(r) = 4\pi \gamma m(r) = 4\pi \gamma m \frac{r^3}{R^3}$$

$$\Rightarrow G(r) = \gamma \frac{m}{R^3} r \quad . \quad (5.12)$$

Il campo all'interno di una sfera omogenea cresce linearmente con la distanza dal centro; il grafico di $G(r)$ è mostrato in figura 5.20. Questo caso è una dimostrazione di come una massa estesa possa generare un campo che non ha l'andamento $1/r^2$, tipico della massa puntiforme. Osserviamo infine da (5.12) che una massa puntiforme m_p subisce all'interno della sfera omogenea la forza

$$\mathbf{F} = m_p \mathbf{G} = -\gamma \frac{m m_p}{R^3} \mathbf{r} = -k \mathbf{r} \quad ,$$

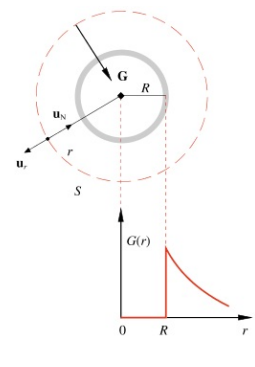


FIGURA 5.19

cioè una forza di tipo elastico. Se lungo un diametro si scavasse un foro e si abbandonasse sulla superficie un punto materiale con velocità nulla, questo descriverebbe un moto armonico all'interno del foro, con ampiezza pari al raggio R .

Riassumendo, da (5.10) e (5.11) si vede che il campo gravitazionale in un punto P all'esterno di una distribuzione sferica uniforme di massa in ogni caso vale

$$\mathbf{G}(r) = -\gamma \frac{m}{r^2} \mathbf{u}_r, \quad (5.13)$$

indipendente, tra l'altro, dal raggio della distribuzione. Questo è anche, in base a (5.2), il campo gravitazionale in P prodotto da una massa m concentrata nel centro della distribuzione; la figura 5.21 mostra l'equivalenza tra le due situazioni.

Come conseguenza di ciò dimostriamo che la forza gravitazionale tra due sfere omogenee di masse m_1 e m_2 , poste a una distanza r tra i loro centri O_1 e O_2 , è eguale alla forza gravitazionale tra due masse puntiformi m_1 e m_2 distanti r .

Ciascun elemento dm_2 della seconda sfera è soggetto a una forza, esercitata dalla prima sfera, che equivale a quella di una massa puntiforme m_1 posta in O_1 ; quindi, secondo (5.2) e (5.13),

$$d\mathbf{F}_{1,2} = dm_2 \mathbf{G}_1 = -\gamma \frac{m_1 dm_2}{r_1^2} \mathbf{u}_1,$$

essendo \mathbf{G}_1 il campo della prima sfera e r_1 la distanza della massa dm_2 da O_1 . Per calcolare la risultante di tutte queste forze $d\mathbf{F}_{1,2}$ osserviamo che, in base al principio di azione e reazione, dm_2 esercita in O_1 una forza eguale e contraria,

$$d\mathbf{F}_{2,1} = -d\mathbf{F}_{1,2} = \gamma \frac{m_1 dm_2}{r_1^2} \mathbf{u}_1,$$

e che, per le proprietà appena viste, l'effetto risultante in O_1 è quello di una massa m_2 puntiforme posta in O_2 . Quindi la forza risultante è, in modulo, $\gamma m_1 m_2 / r^2$. I passi del procedimento sono visualizzati in figura 5.22, che va letta in senso orario partendo da sinistra, in alto.

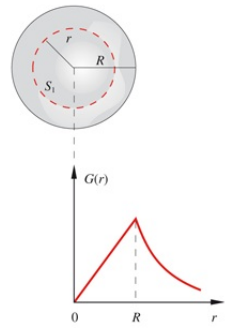


FIGURA 5.20

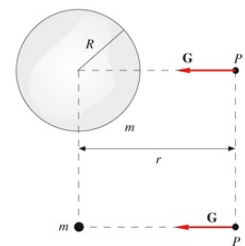


FIGURA 5.21

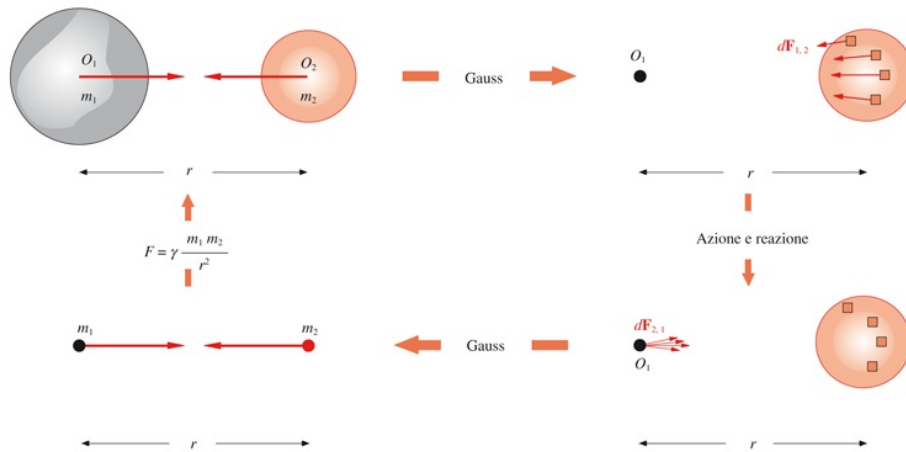


FIGURA 5.22

È importante mettere in evidenza che il risultato è vero anche se i raggi delle due sfere sono confrontabili con la distanza tra i centri, cioè anche se le sfere sono molto vicine o a contatto. Inoltre si può rilasciare l'ipotesi che le sfere siano omogenee, purché la distribuzione di massa vari solo col raggio in modo da conservare la simmetria sferica in ciascuno dei gusci sferici di cui si può pensare composta la sfera.

Le proprietà dimostrate in questo paragrafo discendono dal teorema di Gauss e pertanto valgono per tutti i campi il cui modulo varia come $1/r^2$. In particolare esse sono valide per il campo elettrostatico, come si vedrà nello studio delle forze tra cariche elettriche.

Energia gravitazionale di una massa sferica omogenea

Supponiamo di costruire la sfera, di massa m e raggio R , per gusci successivi, ciascuno compreso tra r e $r + dr$, e calcoliamo il lavoro necessario; il risultato non dipenderà dal procedimento perché la forza è conservativa.

Se è già stata fatta la sfera di raggio r , figura 5.23, il lavoro per portare da distanza infinita a distanza r dal centro la massa dm che si distribuisce nel guscio tra r e $r + dr$ è, secondo (5.6),

$$dW = -dE_p = \gamma \frac{m(r) dm}{r} .$$

Sappiamo che $m(r) = m r^3 / R^3$, da cui

$$dm = \frac{m}{R^3} d(r^3) = \frac{3mr^2}{R^3} dr .$$

Pertanto

$$dW = 3 \gamma \frac{m^2}{R^6} r^4 dr \Rightarrow W = \int_0^R dW = \frac{3}{5} \gamma \frac{m^2}{R} .$$

Questo lavoro è fornito dalla forza gravitazionale ed è eguale a $E_{p, in} - E_{p, fin}$

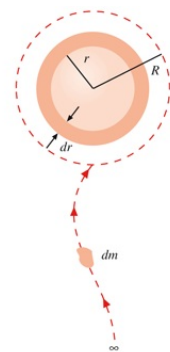


FIGURA 5.23

. Però $E_{p, \text{in}} = 0$ perché inizialmente tutte le parti della sfera sono infinitamente lontane tra loro e quindi

$$E_{p, \text{fin}} = -W = -\frac{3}{5} \gamma \frac{m^2}{R} \quad (5.14)$$

è l'espressione dell'energia potenziale gravitazionale di una sfera omogenea di massa m e raggio R , cioè dell'energia immagazzinata nel sistema a seguito dell'azione della forza gravitazionale.

Notiamo che al contrarsi della massa l'energia aumenta in modulo; al limite per $R \rightarrow 0$ l'energia diverge. Questo vuol dire che da un punto di vista energetico una massa puntiforme non ha significato (in fisica classica, mentre invece per particelle subnucleari elementari è possibile superare il problema di queste divergenze).

Si può dimostrare che quando il raggio ha un valore R_0 tale che

$$\frac{3}{5} \gamma \frac{m^2}{R_0} = mc^2 \quad ,$$

essendo c la velocità della luce nel vuoto, dalla sfera non può sfuggire alcun segnale luminoso: essa si comporta come un *buco nero*.

Il sole ha massa $m_S = 1.98 \cdot 10^{30}$ kg e raggio $R_S = 6.96 \cdot 10^8$ m ; la sua energia potenziale vale in modulo

$$|E_p| = \frac{3}{5} \gamma \frac{m_S^2}{R_S} = 2.25 \cdot 10^{41} \text{ J} \quad (\text{mentre } m_S c^2 = 1.78 \cdot 10^{47} \text{ J}) \quad .$$

Il valore di $R_0 = \frac{3}{5} \gamma \frac{m^2}{c^2}$ risulta pari a 880 m, molto minore di R_S . Il sole cioè è ancora molto lontano dal somigliare a un buco nero.

5.6 Determinazione della traiettoria

Vogliamo adesso dimostrare che l'orbita dei pianeti è ellittica (1^a legge di Keplero) e che il quadrato del periodo di rivoluzione è proporzionale al cubo del semiasse maggiore (3^a legge di Keplero).

Dobbiamo però premettere alcune proprietà delle coniche.

Parentesi geometrica sulle coniche

Una conica è una curva piana definita (vedi figura 5.24) come luogo dei punti per i quali il rapporto tra la distanza da un punto (fuoco) e la distanza da una retta (direttrice) è pari a una costante positiva che si chiama eccentricità ε :

$$\varepsilon = \frac{PF}{PQ} = \frac{r}{d + r \cos \theta} ;$$

d è la distanza tra il fuoco e la direttrice ed è un parametro dato. Pertanto l'equazione di una conica in coordinate polari di centro F è

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\varepsilon d} - \frac{1}{d} \cos \theta . \quad (5.15)$$

Se $\varepsilon < 1$ abbiamo un'ellisse, se $\varepsilon = 1$ una parabola, se $\varepsilon > 1$ un'iperbole. In particolare per un'ellisse di semiassi a e b valgono le relazioni:

$$a = \frac{\varepsilon d}{1 - \varepsilon^2} \quad b = a \sqrt{1 - \varepsilon^2} \quad \varepsilon^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} . \quad (5.16)$$

L'area dell'ellisse è $A = \pi a b = \pi a^2 \sqrt{1 - \varepsilon^2}$

($\varepsilon = 0$ quindi corrisponde a una circonferenza)

Equazione del moto. Traiettoria

Consideriamo due punti isolati, di masse M e m , tra i quali esiste la forza gravitazionale $\gamma M m / r^2$. In un sistema di riferimento inerziale

$$\mathbf{F} = m \mathbf{a}_m , \quad -\mathbf{F} = M \mathbf{a}_M .$$

Secondo quanto visto nel paragrafo 3.1, l'accelerazione relativa di m rispetto a M è

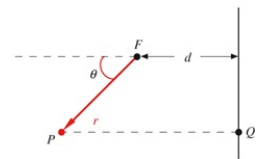


FIGURA 5.24

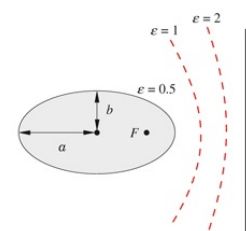


FIGURA 5.25

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_m - \mathbf{a}_M = \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right) \mathbf{F} = \frac{1}{\mu} \mathbf{F} \quad ,$$

dove

$$\mu = \frac{mM}{m+M}$$

si chiama *massa ridotta* del sistema ($\mu < m$ e $\mu < M$). Pertanto

$$\mathbf{F} = \mu \mathbf{a} \quad : \quad (5.17)$$

il moto relativo di due punti materiali sottoposti alla loro interazione mutua è equivalente al moto di un punto con massa eguale alla massa ridotta e sottoposto a una forza eguale alla forza di interazione mutua. Ovvero, l'equazione del moto di m rispetto a M , $\mathbf{F} = \mu \mathbf{a}$, è identica a quella valida in un sistema di riferimento inerziale, col solo scambio $m \rightarrow \mu$ e con la forza \mathbf{F} immutata, anche se M si muove di moto accelerato.

Il risultato non dipende dal tipo di forza agente e mostra che il problema del moto relativo di due punti è riconducibile al moto di un punto materiale.

Introduciamo adesso al posto di \mathbf{F} l'espressione $-\gamma \frac{mM}{r^2} \mathbf{u}_r$

Introduciamo adesso al posto di \mathbf{F} l'espressione $-\gamma \frac{mM}{r^2} \mathbf{u}_r$ in quanto vogliamo studiare il moto di m rispetto a M sotto l'azione dell'interazione gravitazionale tra le due masse (che possono essere estese, purché con simmetria sferica).

La forza è centrale e quindi il moto si svolge in un piano, con momento angolare costante. Possiamo usare per \mathbf{a} la *formula di Binet* (2.27), che dà l'accelerazione, in un campo di forze centrali, in funzione delle coordinate polari di m rispetto a M e del valore costante di \mathbf{L} . Nella (2.27) bisogna però sostituire μ^2 a m^2 , come dobbiamo fare in tutte le espressioni che riguardano il moto di m (ma non nella forza). La (5.17) diventa allora

$$-\gamma \frac{mM}{r^2} \mathbf{u}_r = -\mu \frac{L^2}{\mu^2 r^2} \left[\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right] \mathbf{u}_r$$

ovvero

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = \gamma \mu \frac{mM}{L^2} \quad . \quad (5.18)$$

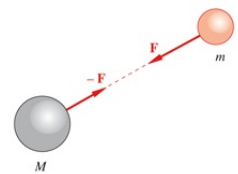


FIGURA 5.26

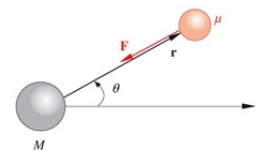


FIGURA 5.27

La soluzione di questa equazione differenziale dà $r(\theta)$, cioè la relazione funzionale tra r e θ che corrisponde, in coordinate polari, alla traiettoria di m rispetto a M .

A primo membro di (5.18) riconosciamo la nota struttura $\frac{d^2 r}{dt^2} + \frac{\gamma}{r^3} = -\frac{mM}{L^2 r^2}$.
 feaagKart1ev2aaatCvAUfeBSjuyZL2yd9gzLbvyNv2CaerbuLwBLn
 hiov2DGi1BTfMBaeXatLxBI9gBaerbd9wDYLwzYbItLDharqqtubsr
 4rNCHbGeaGqiVuoJe9sqqrpepCoxbbL8F4rqqrFfpeea0xe9Lq=Jc9
 vqaqpepmoxbba9pwe9Q8fso=yqaqpepae9pg0FirpepeKkFroxfr=x
 fr=xb9adbaqaeeGaciGaaiaabeqaamaabaabaaGcbaWaaSaaaeaaca
 WGKbWaaWbaaSqaabeaacaIYaaaaOGaamOzaaqaiaadsgacaWG4bWa
 aWbaaSqaabeaacaIYaaaaaakiabgUcaRiaadAgaaaa@3D73@ , tipica
 dell'oscillatore armonico; però l'equazione non è omogenea. Come vedremo nel
 capitolo 9, in questo caso la soluzione più generale consiste nella somma $A \cos \theta + S_p$,
 dove $A \cos \theta$ è la soluzione più generale dell'equazione omogenea e S_p è una
 soluzione particolare di (5.18). Ora è evidente che $S_p = (1/r)_p = \text{costante}$ è una
 soluzione di (5.18) e che tale costante è proprio $\gamma \mu m M / L^2$ (basta sostituire
 nell'equazione e si ritrova un'identità). Pertanto la funzione che risolve (5.18) è

$$\frac{1}{r} = \gamma \mu \frac{m M}{L^2} + A \cos \theta \quad (5.19)$$

Confrontando (5.19) con (5.15) vediamo che la traiettoria è una conica.

Momento angolare. Energia

Un primo risultato del suddetto confronto è che

$$L^2 = \gamma \mu m M \varepsilon d \quad (5.20)$$

I parametri della traiettoria ε e d danno il valore costante del momento angolare della massa m .

L'energia totale di m è la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale:

$$E = \frac{1}{2} \mu v^2 - \gamma \frac{m M}{r} = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \mu r^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - \gamma \frac{m M}{r} \quad (5.21)$$

avendo fatto ricorso a (1.19), valida perché il moto è piano. Per la stessa ragione possiamo usare la (2.21), riscritta come

$$L = \mu r^2 \frac{d\theta}{dt} \quad (5.22)$$

Il primo termine di (5.21) si può trasformare ricorrendo a (5.15):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \right) = - \frac{1}{r^2} \frac{dr}{dt} = \frac{\sin \theta}{d} \frac{d\theta}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \mu \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} \mu \frac{r^4}{d^2} \sin^2 \theta \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{\sin^2 \theta}{d^2} \frac{L^2}{\mu} ,$$

avendo utilizzato (5.22). Questa permette di trasformare anche il secondo termine di (5.21):

$$\frac{1}{2} \mu r^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{L^2}{\mu r^2} .$$

Infine il terzo termine di (5.21) tramite (5.20) diviene

$$-\gamma \frac{mM}{r} = - \frac{L^2}{\varepsilon d \mu r} .$$

Mettendo insieme i vari risultati

$$E = \frac{1}{2} \frac{\sin^2 \theta}{d^2} \frac{L^2}{\mu} + \frac{1}{2} \frac{L^2}{\mu r^2} - \frac{L^2}{\varepsilon d \mu r} .$$

Riutilizzando (5.15) per $1/r$ e $1/r^2$ MathType@MTEF@5@5@+=
 feaagKart1ev2aaatCvAUfeBSjuyZL2yd9gzLbvyNv2CaerbuLwBLn
 hiov2DGi1BTfMBaeXatLxBI9gBaerbd9wDYLwzYbItLDharqqtubsr
 4rNCHbGeaGqiVu0Je9sqqrpepC0xbbL8F4rqqrFfpeea0xe9Lq=Jc9
 vqaqpepmoxbba9pwe9Q8fso=yqaqpepae9pg0FirpepeKkFroxfr=x
 fr=xb9adbaqaeeGaciGaaiaabeqaamaabaabaaGcbaWaaSaaaeaca
 aIXaaabaGaamOCaaaacaaMc8UaaGPaVlaaykW7caaMc8Uaamyzaiaa
 ykW7caaMc8UaaGPaVlaaykW7daWcaaqaiaaigdaaeacaWGYbWaaW
 baaSqabeaacaIYaaaaaaaaa@47A5@ e (5.20) si ottiene

$$E = \frac{L^2}{2 \mu \varepsilon^2 d^2} (\varepsilon^2 - 1) = \gamma \frac{mM}{2 \varepsilon d} (\varepsilon^2 - 1) . \quad (5.23)$$

Anche l'energia totale, costante perché la forza è conservativa, si ricava dai parametri dell'orbita. Viceversa, fissati i valori di L ed E , si possono calcolare ε e d .

La (5.23) ci permette di dimostrare quanto enunciato nel paragrafo 5.4. Con $\varepsilon < 1$, orbita ellittica, l'energia è negativa, con $\varepsilon = 1$, orbita parabolica, l'energia è nulla, con $\varepsilon > 1$, orbita iperbolica, l'energia è positiva.

Poiché il sistema pianeta-sole è legato, l'energia totale è negativa e quindi l'orbita del pianeta è un'ellisse, come prescrive la prima legge di Keplero.

Nel caso particolare di orbite ellittiche utilizziamo (5.16) per trasformare (5.20) e (5.23):

$$L^2 = \gamma \mu m M a (1 - \varepsilon^2) , \quad E = -\gamma \frac{mM}{2a} . \quad (5.24)$$

Data l'energia totale E , è fissato solo il semiasse maggiore a , ma non l'eccentricità ε : a parità di energia si possono avere ellissi diverse (stessa a , diversa ε) con momento angolare diverso, a conferma che energia e momento angolare sono indipendenti.

Infine dalla (2.26), che dà il periodo di rivoluzione, riscritta come

$$T = 2\mu \frac{A}{L} = 2\mu \frac{\pi a^2}{L} \sqrt{1-\varepsilon^2}$$

e confrontata con la prima delle (5.24) si ottiene

$$L^2 = \frac{4\pi^2 \mu^2 a^4 (1-\varepsilon^2)}{T^2} = \gamma \mu m M a (1-\varepsilon^2)$$

$$\Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 \mu a^3}{\gamma m M} = \frac{4\pi^2}{\gamma (m+M)} a^3 = k a^3 \quad ,$$

che è la *terza legge di Keplero*. Si osservi che la costante

$$k = \frac{4\pi^2}{\gamma (m+M)}$$

è praticamente eguale per tutti i pianeti, essendo la massa m di ciascun pianeta molto minore della massa M del sole.

La legge della gravitazione di Newton è quindi in grado di spiegare le leggi di Keplero relative ai pianeti del sistema solare. D'altra parte non c'è nulla nelle dimostrazioni svolte che dipenda da caratteristiche specifiche del sole e dei pianeti; per questa ragione Newton avanzò l'ipotesi che la legge avesse validità universale (e abbiamo visto nel paragrafo 5.1 il calcolo di g , relativo al sistema corpo-terra, fatto utilizzando il sistema terra-luna). In particolare le leggi di Keplero valgono per i satelliti di un pianeta, materiali o artificiali; nella terza legge cambia soltanto il valore di k . Per i satelliti artificiali terrestri $k = 4\pi^2/\gamma m_T = 9.87 \cdot 10^{-14} \text{ s}^2/\text{m}^3$ (esempio 5.4), essendo la massa del satellite trascurabile rispetto a quella della terra; per il sistema terra-luna il valore è di poco diverso, dato che $m_L = 1.23 \cdot 10^{-2} m_T$.

Grafici dell'energia

Riprendiamo adesso, alla luce di (5.21), l'argomento relativo ai grafici dell'energia, trattato nel paragrafo 5.4 (figura 5.15). Nella (5.21) il secondo termine si può scrivere $L^2/2\mu r^2$ come abbiamo dimostrato, per cui

$$E = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} - \gamma \frac{mM}{r} = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + E_{p, \text{eff}}$$

con

$$E_{p, \text{eff}} = \frac{L^2}{2\mu r^2} - \gamma \frac{mM}{r},$$

detta *energia potenziale efficace*, somma dell'energia potenziale gravitazionale e del termine $L^2 / 2\mu r^2$, che è una parte dell'energia cinetica, ma che, in presenza di forze centrali, si può esprimere come funzione delle coordinate in quanto dipende solo dalla distanza di m da M .

Energia potenziale efficace

Se confrontiamo $L^2 / 2\mu r^2$ con $-\gamma mM / r$ vediamo che per r grande predomina E_p , ma che per r tendente a zero predomina $L^2 / 2\mu r^2$. La loro somma $E_{p, \text{eff}}$ ha l'andamento mostrato in figura 5.28.

Quando l'energia totale è positiva o nulla (E_1 o E_2), r ha un valore minimo r_1 o r_2 : al di sotto di questi sarebbe $E < E_{p, \text{eff}}$, che non è possibile. La distanza tra m e M non può quindi scendere al di sotto di un certo valore che dipende da E (retta orizzontale) e da L (curva di $E_{p, \text{eff}}$): a parità di E , maggiore è L maggiore è la distanza minima. Si osservi che quando r è minimo (o massimo) $dr/dt = 0$ e uno dei termini che compongono l'energia cinetica si annulla, per cui l'energia meccanica E coincide con $E_{p, \text{eff}}$.

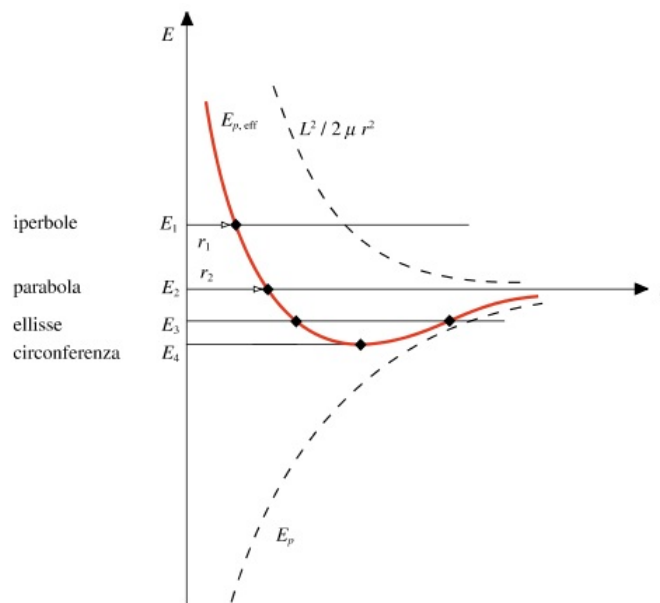


FIGURA 5.28

Quando l'energia totale è negativa (E_3) la distanza tra m e M ha un valore minimo e uno massimo, salvo nel caso di E_4 in cui è permesso un solo valore di r e l'orbita è circolare. Non sono possibili valori minori di E_4 perché deve sempre essere $E \geq E_{p, \text{eff}}$. La configurazione con energia minima è dunque quella con orbita circolare, tutte le altre configurazioni hanno un livello energetico superiore.

In definitiva, dalla figura 5.28 si hanno informazioni interessanti sul moto di

m rispetto a M . Fissate le masse, la curva di E_p è fissata; le condizioni iniziali danno E e L : il valore di E determina se il sistema è legato o meno e quindi il tipo di traiettoria, il valore di L determina, tra l'altro, il valore della distanza di minimo impatto. In pratica, solo se la velocità iniziale è nulla o diretta lungo la retta di azione della forza, m cade sicuramente su M , altrimenti descrive un'orbita, aperta o chiusa, attorno a M a cui si avvicina più o meno a seconda del valore di L ; siccome però né M né m sono in generale puntiformi, può anche accadere che l'orbita di m incontri la superficie di M : si riveda la figura 5.16 immaginando M di dimensioni maggiori.

Nella realtà sperimentale, in astronomia l'orbita è data e da essa si possono calcolare energia e momento angolare; invece, nel lancio di satelliti artificiali, si possono fissare le condizioni iniziali e scegliere l'orbita più appropriata.

Al termine $L^2 / 2\mu r^2$ si dà talvolta il nome di *energia potenziale centrifuga*, anche se nel sistema non c'è alcuna forza centrifuga; si usa tale termine per sottolineare il fatto che maggiore è L maggiore è la distanza minima e quindi è come se ci fosse una forza repulsiva dipendente da L^2 (diretta da M a m , cioè centrifuga): si parla anche di *barriera centrifuga*, per visualizzare l'impossibilità di scendere al di sotto di un certo valore di r .

Energia potenziale
centrifuga

Considerazioni conclusive

Le leggi della meccanica che abbiamo studiato nei capitoli precedenti forniscono il quadro generale in cui collocare e risolvere situazioni specifiche. Il caso della forza tra due masse e del moto che ne risulta è un esempio classico, molto importante. Per risolverlo abbiamo usato varie proprietà, dimostrate in generale e applicate al caso in cui la forza abbia appunto l'espressione (5.1).

Un altro esempio di grande rilevanza verrà trattato nel volume secondo: si tratta della forza elettrostatica che ha una struttura identica a (5.1), a parte la differenza fondamentale dell'esistenza di cariche di due segni (mentre la massa ha solo un segno), che rende la fenomenologia più varia.

Con riferimento alla discussione del capitolo 2 sul significato di $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, la scoperta della (5.1) è un esempio di deduzione della forza da misure geometriche e cinematiche; l'uso successivo è invece un esempio di come dalla conoscenza della forza si possano calcolare le traiettorie. Un caso storico famoso è il seguente: dallo studio di anomalie nella traiettoria di Urano, non giustificabili come perturbazioni, da parte dei pianeti conosciuti, della forza esercitata dal sole, si calcolò dove si sarebbe potuto trovare un altro pianeta, fino ad allora sconosciuto, la cui presenza avrebbe fatto tornare i conti e si scoprì così, nel 1846, il pianeta Nettuno.

Concludiamo con una precisazione: abbiamo detto che le orbite dei pianeti attorno al sole sono certamente ellittiche, a parte piccole perturbazioni dovute alle forze tra pianeti, ma poco diverse da circonferenze.

Nella tabella sono riportati vari dati relativi ai pianeti, tra cui l'eccentricità dell'orbita. Da questa si calcola con (5.16) il rapporto tra i semiassi dell'ellisse.

All'eccentricità massima di Plutone, $\varepsilon = 0.250$, corrisponde un rapporto $b/a = 0.968$, contro un valore $b/a = 1$ per una traiettoria circolare ($\varepsilon = 0$). L'eccentricità dell'orbita terrestre è $\varepsilon = 0.017$, per cui $b/a = 0.999$.

Pianeta	Massa (kg)	Raggio (m)	Periodo (s)	Eccentricità	Semiasse magg. (m)	T^2/a^3 (s^2/m^3)
Mercurio	$0.32 \cdot 10^{24}$	$2.43 \cdot 10^6$	$0.76 \cdot 10^7$	0.206	$5.79 \cdot 10^{10}$	$2.98 \cdot 10^{-19}$
Venere	$4.88 \cdot 10^{24}$	$6.06 \cdot 10^6$	$1.94 \cdot 10^7$	0.007	$1.08 \cdot 10^{11}$	2.99
Terra	$5.98 \cdot 10^{24}$	$6.37 \cdot 10^6$	$3.16 \cdot 10^7$	0.017	$1.50 \cdot 10^{11}$	2.96
Marte	$0.64 \cdot 10^{24}$	$3.37 \cdot 10^6$	$5.94 \cdot 10^7$	0.093	$2.28 \cdot 10^{11}$	2.98
Giove	$19.00 \cdot 10^{26}$	$6.99 \cdot 10^7$	$3.74 \cdot 10^8$	0.048	$7.78 \cdot 10^{11}$	2.97
Saturno	$5.68 \cdot 10^{26}$	$5.85 \cdot 10^7$	$9.35 \cdot 10^8$	0.056	$1.43 \cdot 10^{12}$	2.99
Urano	$0.87 \cdot 10^{26}$	$2.33 \cdot 10^7$	$2.65 \cdot 10^9$	0.046	$2.87 \cdot 10^{12}$	2.97
Nettuno	$1.03 \cdot 10^{26}$	$2.21 \cdot 10^7$	$5.22 \cdot 10^9$	0.009	$4.50 \cdot 10^{12}$	2.99
Plutone	$1.08 \cdot 10^{24}$	$3 \cdot 10^6$	$7.82 \cdot 10^9$	0.250	$5.92 \cdot 10^{12}$	2.95
Luna	$7.35 \cdot 10^{22}$	$1.74 \cdot 10^6$	$2.36 \cdot 10^6$	0.055	$3.84 \cdot 10^8$	$9.84 \cdot 10^{-14}$
Sole	$1.98 \cdot 10^{30}$	$6.96 \cdot 10^8$	—	—	—	—

Ricollegandoci infine all'inizio del capitolo, noi abbiamo ora completato la presentazione di una delle interazioni fondamentali esistenti in natura, appunto quella gravitazionale. Si tratta di una interazione molto debole se considerata a livello elementare. Ad esempio, l'attrazione gravitazionale tra un elettrone e un protone posti ad una distanza eguale alle dimensioni di un atomo di idrogeno è pari a

$$\gamma \frac{m_e m_p}{r^2} = \frac{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 9.11 \cdot 10^{-31} \cdot 1.67 \cdot 10^{-27}}{(0.53 \cdot 10^{-10})^2} = 3.63 \cdot 10^{-47} \text{ N} \quad ,$$

mentre la corrispondente forza elettrostatica vale $8.24 \cdot 10^{-8}$ N. In effetti l'interazione gravitazionale è sempre trascurata a livello atomico rispetto alle altre forze agenti. Anche per corpi macroscopici l'effetto è difficilmente apprezzabile; due corpi di massa 1 kg e posti a distanza di 1 m si attraggono con una forza numericamente eguale a γ , cioè di $6.67 \cdot 10^{-11}$ N. L'interazione gravitazionale diventa invece importante in presenza di grandi masse, come quelle dei pianeti e delle stelle; oltre che negli ordinari fenomeni descritti (forza peso, attrazione terra-luna e terra-sole), essa ha un ruolo fondamentale nella cosmologia, in fenomeni quali l'espansione dell'universo e i collassi stellari. In tali casi è però necessaria una profonda modificazione, cui accenniamo nel prossimo paragrafo.

5.7 Cenni di relatività generale

La teoria della relatività generale, concepita inizialmente da Einstein nel 1915, porta a una formulazione più generale dell'interazione gravitazionale, valida per qualsiasi valore del campo gravitazionale e per corpi che si muovono con qualsiasi velocità, purché inferiore a quella della luce nel vuoto. A basse velocità e campi deboli si ritrovano i risultati della teoria newtoniana: è questa la situazione tipica dei fenomeni terrestri e planetari, per i quali la formulazione classica è completamente adeguata.

L'unica eccezione allora (1915) conosciuta e inspiegabile era un'anomalia nel moto del pianeta Mercurio, che è il più vicino al sole e quindi quello che sente un maggior campo gravitazionale. La spiegazione del fenomeno costituì il primo grande successo della teoria di Einstein; il secondo fu la previsione della deviazione dei raggi luminosi in un campo intenso, che abbiamo descritto nel paragrafo 5.3. La terza previsione originale di Einstein, e cioè la diminuzione della frequenza della luce quando questa si allontana da un corpo massiccio (e viceversa l'aumento dell'avvicinarsi), venne verificata con successo in laboratorio soltanto nel 1960.

Non sono però soltanto queste le previsioni che si possono ottenere dalla relatività generale e dai suoi successivi sviluppi. Le equazioni generali della teoria ammettono soluzioni con carattere ondulatorio: in certe situazioni quindi il campo gravitazionale prodotto da una sorgente si propaga nello spazio, con la velocità della luce; altre soluzioni portano alla previsione dell'esistenza dei buchi neri. Non si tratta però di fenomeni facilmente individuabili. Delle onde gravitazionali si ha finora soltanto una prova indiretta di esistenza e sono stati localizzati nell'universo alcuni oggetti che potrebbero essere buchi neri. Malgrado le difficoltà, la dinamica di questo campo di ricerca negli ultimi decenni è stata notevole, sia per un rinnovato interesse teorico che per la disponibilità di raffinate tecniche osservative sulla superficie terrestre e al di fuori di questa (satelliti e navicelle spaziali). E tutte le nuove verifiche sperimentali che è stato possibile effettuare hanno confermato la teoria.

Un'esposizione, seppure a livello introduttivo, delle basi della relatività generale è troppo complessa per essere qui riportata. Diciamo soltanto che uno dei punti di partenza è l'eguaglianza tra massa inerziale e massa gravitazionale, verificata sperimentalmente con grande precisione (paragrafo 5.2).

6.1 Definizione di corpo rigido. Prime proprietà

Nel capitolo 4 abbiamo illustrato le proprietà generali della dinamica dei punti materiali; non avendo fatto alcuna ipotesi sulle forze esterne e sulle eventuali forze esistenti tra i punti, salvo il fatto che obbedissero alla terza legge di Newton (principio di azione e reazione), quelle proprietà si possono applicare alle più svariate situazioni. Bisogna però ricordare che si tratta di proprietà globali, riguardanti il moto del centro di massa, il momento angolare e l'energia cinetica totali; nulla di generale abbiamo potuto dire sul moto dei singoli punti.

Nel capitolo 5 abbiamo esaminato il caso particolare di due punti distanti r , tra i quali si esercita una forza centrale, attrattiva e dipendente da $1/r^2$, la forza gravitazionale. In tale situazione molto specifica, ma di importanza fondamentale, siamo stati in grado di calcolare, per il moto relativo, l'energia, il momento angolare e la forma delle orbite. Aggiungiamo ora che quando si hanno soltanto due punti il problema del loro moto relativo, dovuto alla forza interna di interazione, è sempre risolvibile, anche nel caso di forze diverse da quella gravitazionale. Già il semplice passaggio a tre punti complica enormemente il problema, che non ha una soluzione generale per quanto riguarda il moto relativo.

La situazione che ci apprestiamo a studiare in questo capitolo riguarda un altro caso particolare, anch'esso fondamentale soprattutto per le sue applicazioni pratiche. Il sistema fisico in esame è un insieme di punti materiali sottoposti ad un'interazione mutua tale da mantenerli in posizione fissa l'uno rispetto all'altro. Un sistema di questo tipo si chiama *corpo rigido* e più precisamente è definito come un *sistema di punti materiali in cui le distanze tra tutte le possibili coppie di punti non possono variare*. Come spesso accade in Fisica si tratta di un modello ideale, quello del corpo indeformabile, al quale si avvicinano i corpi solidi ordinari, nella pratica sempre deformabili (argomento che affronteremo nel capitolo 7). L'approssimazione è molto buona per corpi formati da materiali come acciaio, alluminio, cemento armato, vetro, certe materie plastiche, meno buona nel caso di piombo o gomma, giusto per fare alcuni esempi. Da un punto di vista microscopico le forze che garantiscono la rigidità dei solidi sono essenzialmente forze elettriche tra i costituenti (atomi o molecole), come descriveremo nel capitolo 19 del secondo volume.

Intuitivamente, nel moto di un corpo rigido come può essere quello di una sfera da biliardo, di una ruota, di una punta di trapano, di una trottola, è possibile individuare un moto d'assieme, cioè uno spostamento globale, naturalmente riconducibile al moto del centro di massa (si osservi che, in base

alle definizioni, il centro di massa è in una posizione immutabile rispetto a tutti i punti del corpo rigido). Però ci si rende anche conto che i vari punti possono descrivere traiettorie diverse tra loro e da quella del centro di massa; basta pensare, tra gli esempi appena fatti, al moto dei punti di una ruota che rotola senza strisciare (vedi paragrafo 6.8 e anche la figura 1.30). Ciò vuol dire che il moto d'insieme non contiene e non può rappresentare tutta la dinamica del moto di un corpo rigido, ovvero che questo non può essere trattato alla stessa stregua del moto di un punto materiale. Più avanti e nel paragrafo 6.2 preciseremo quantitativamente queste osservazioni introduttive.

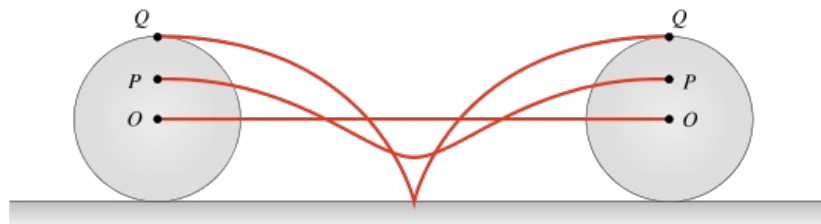


FIGURA 6.1

Lo studio del moto di un corpo rigido verrà fatto normalmente in un sistema di riferimento inerziale. Un altro sistema importante è il sistema di riferimento del centro di massa del corpo rigido (non inerziale, con gli assi paralleli a quelli del sistema inerziale; si riveda il paragrafo 4.6). In questo sistema si può studiare solo il moto rispetto al centro di massa; poiché la distanza dei singoli punti dal centro di massa non cambia mai, ciascun punto è visto dal centro di massa o fermo o in moto lungo un arco di circonferenza. Infine possiamo considerare un sistema di riferimento con gli assi solidi al corpo rigido; tale sistema, in cui ciascun punto è fermo, può essere utile per visualizzare il moto del corpo rigido rispetto agli altri due sistemi di riferimento.

Vediamo ora di determinare quanti parametri sono necessari per individuare la posizione nello spazio di un corpo rigido ad un certo istante. Un punto nello spazio è individuato da tre parametri, le sue coordinate, e quindi n punti tra loro indipendenti da $3n$ parametri. Nel caso di un corpo rigido, formato da n punti, la condizione che le distanze tra tutte le possibili coppie di punti siano costanti riduce il numero di parametri ad un valore minore di $3n$.

Consideriamo un sistema x^*, y^*, z^* con l'origine nel centro di massa, figura 6.2, e gli assi, di versori $\mathbf{u}_{x^*}, \mathbf{u}_{y^*}, \mathbf{u}_{z^*}$, solidali con il corpo rigido. Ciascuno dei tre assi è individuato, rispetto a un sistema esterno, da tre coseni direttori $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ che sono le componenti cartesiane del versore \mathbf{u}_{i^*} in quel sistema: in tutto quindi nove coseni direttori, che però non sono tra loro indipendenti. Infatti quelli di un dato asse devono soddisfare alla condizione

$$\alpha_i^2 + \beta_i^2 + \gamma_i^2 = 1$$

avendo il versore modulo unitario; in totale sono tre condizioni, una per ogni

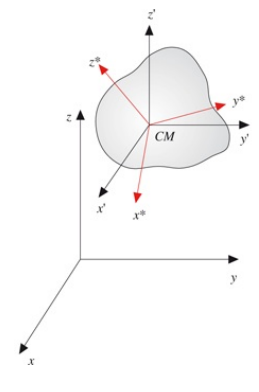


FIGURA 6.2

asse. Inoltre gli assi devono essere mutuamente ortogonali, il che comporta $\mathbf{u}_{x^*} \cdot \mathbf{u}_{y^*} = 0$, $\mathbf{u}_{y^*} \cdot \mathbf{u}_{z^*} = 0$, $\mathbf{u}_{z^*} \cdot \mathbf{u}_{x^*} = 0$, ovvero le tre condizioni.

$$\begin{aligned}\alpha_x \alpha_y + \beta_x \beta_y + \gamma_x \gamma_y &= 0 \quad , \\ \alpha_y \alpha_z + \beta_y \beta_z + \gamma_y \gamma_z &= 0, \\ \alpha_z \alpha_x + \beta_z \beta_x + \gamma_z \gamma_x &= 0.\end{aligned}$$

Quindi i parametri indipendenti che individuano i tre assi sono tre (nove coseni direttori con sei condizioni).

Per completare il quadro dobbiamo individuare la posizione del centro di massa, tramite le sue tre coordinate e quindi in totale occorrono sei parametri per descrivere la posizione di un corpo rigido.

Pertanto, se conosciamo dove si trova ad un certo istante un punto P di un corpo rigido (la cui posizione rispetto al sistema x^* , y^* , z^* è fissa e misurabile una volta per tutte), l'evoluzione nel tempo della posizione di P nel sistema di riferimento inerziale è nota se conosciamo il moto del centro di massa, individuato da tre parametri, e il cambiamento nel tempo della direzione dei tre assi x^* , y^* , z^* individuati da altri tre parametri.

Questo primo risultato conferma l'osservazione che il moto di un corpo rigido è più complesso di quello di un punto materiale (sei parametri invece di tre), ma in un modo definito, indipendente dal numero n dei punti costituenti. Oltre al moto del centro di massa, basta considerare il moto rispetto al centro di massa.

Il numero l di parametri necessari per descrivere il moto di un sistema si chiama numero di *gradi di libertà del sistema*. Un corpo rigido ha quindi $l = 6$, un punto materiale $l = 3$, n punti materiali indipendenti $l = 3n$, un punto vincolato a muoversi lungo una linea $l = 1$ o sopra una superficie $l = 2$, due punti vincolati ad avere sempre la stessa distanza tra loro $l = 5$ (sei coordinate dei due punti con una condizione sulla distanza).

Abbiamo detto che un corpo rigido è formato da n punti; tali punti possono essere un insieme discreto oppure essere distribuiti con continuità (vedi paragrafo 6.3); ad ogni modo un corpo rigido è un corpo esteso. Il suo moto è determinato dalle forze esterne che, in generale, sono più di una e sono applicate in punti diversi del corpo. Si tratta quindi di sistemi di forze, caratterizzati da una risultante $\mathbf{R}^{(E)}$ e da un momento risultante $\mathbf{M}^{(E)}$, grandezze indipendenti tra loro (paragrafo 4.15). Ricordiamo inoltre che il lavoro delle forze interne è nullo in un sistema rigido, dove i punti mantengono invariate le distanze mutue (paragrafo 4.10): pertanto la variazione dell'energia cinetica di un corpo rigido è eguale al lavoro delle sole forze esterne. Di conseguenza nel resto del capitolo tralascieremo il simbolo $^{(E)}$ per le grandezze $\mathbf{R}^{(E)}$, $\mathbf{M}^{(E)}$, $W^{(E)}$ non essendo possibile fare confusioni e scriveremo così le leggi fondamentali:

$$\mathbf{R} = m \mathbf{a}_{CM} \quad , \quad \mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} \quad , \quad \Delta E_k = W \quad .$$

Gradi di libertà di un sistema

6.2 Moto di un corpo rigido

Per arrivare a stabilire quale sia il moto più generale di un corpo rigido cominciamo ad esaminare due tipi di moto, molto semplici da descrivere, che possono essere compiuti da un corpo rigido.

Il primo tipo è il *moto di traslazione*: tutti i punti descrivono traiettorie eguali, in generale curvilinee, percorse con la stessa velocità \mathbf{v} , che può variare nel tempo in modulo, direzione e verso: \mathbf{v} coincide con \mathbf{v}_{CM} , velocità del centro di massa. Pertanto, nel moto di traslazione, che può essere uniforme o vario, se è noto il moto del centro di massa è noto quello di qualsiasi altro punto.

Traslazione di un corpo rigido

Nella figura 6.3a vediamo una generica traslazione; si noti come l'angolo tra gli assi del sistema del centro di massa e gli assi del sistema solidale al corpo non cambi durante il moto.

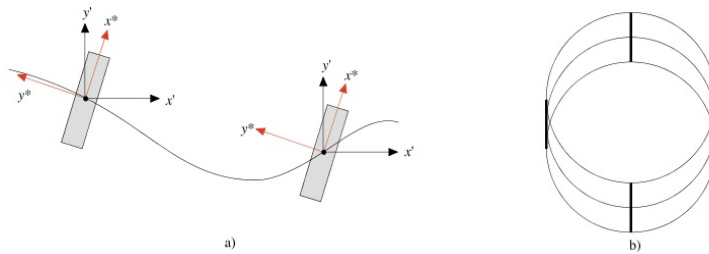


FIGURA 6.3

Qualsiasi segmento tracciato nel corpo rigido rimane parallelo a se stesso durante una traslazione. La figura 6.3b mostra un moto di traslazione in cui tutti i punti descrivono una traiettoria circolare: le circonferenze sono tutte eguali, ma non hanno lo stesso centro.

Rotazione di un corpo rigido

La dinamica è quella di un punto materiale e non c'è movimento rispetto al centro di massa:

$$\mathbf{L}' = 0 \quad , \quad E'_k = 0 \quad .$$

Le grandezze significative in una traslazione sono:

quantità di moto	:	$\mathbf{P} = m \mathbf{v}_{CM}$
energia cinetica	:	$E_k = E_{k,CM} = \frac{1}{2} m \mathbf{v}_{CM}^2 \quad .$

L'equazione del moto del centro di massa è

$$\mathbf{R} = M \mathbf{a}_{CM} \quad .$$

La conoscenza del momento angolare si ricava dalla conoscenza della quantità di moto e della posizione del centro di massa:

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_{CM} = \mathbf{r}_{CM} \times m \mathbf{v}_{CM} = \mathbf{r}_{CM} \times \mathbf{P} \quad ;$$

\mathbf{L} cioè non è indipendente da \mathbf{P} . Di conseguenza anche l'equazione $\mathbf{M} = d\mathbf{L}/dt$ non aggiunge alcuna informazione (si verifichi che risulta $\mathbf{M} = \mathbf{r}_{CM} \times \mathbf{R}$).

Implicitamente abbiamo usato le nozioni legate al moto di traslazione quando abbiamo trattato il moto di piccoli blocchetti, ad esempio lungo un piano inclinato, e i loro urti; infatti li abbiamo equiparati a punti materiali.

Il secondo tipo di moto è la *rotazione*: tutti i punti descrivono un moto circolare, le traiettorie sono archi di circonferenze diverse che stanno su piani tra loro paralleli e hanno il centro su uno stesso asse, l'asse di rotazione. La rigidità del corpo implica che tutti i punti abbiano in un dato istante la stessa velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$, che è parallela all'asse di rotazione; le velocità \mathbf{v}_i dei singoli punti sono diverse, a seconda della distanza R_i dall'asse di rotazione (in modulo $v_i = \omega R_i$). Se l'asse di rotazione è fisso nel tempo, $\boldsymbol{\omega}$ può cambiare solo in modulo e verso e abbiamo un moto circolare vario, in particolare uniforme se $\boldsymbol{\omega}$ è costante; nel caso più generale $\boldsymbol{\omega}$ può cambiare anche in direzione (asse di rotazione variabile).

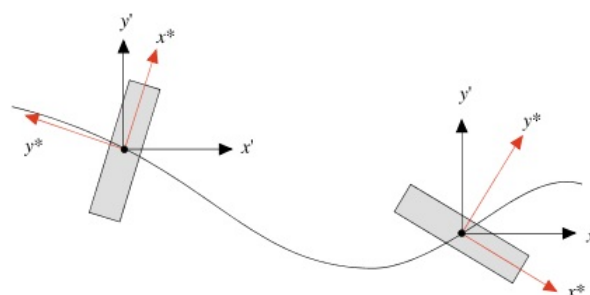
L'equazione dinamica di base del moto di rotazione è

$$\mathbf{M} = d\mathbf{L}/dt.$$

Vedremo in seguito come si calcola \mathbf{L} che nelle rotazioni è una delle grandezze significative, e come dall'equazione del moto si ricava l'accelerazione angolare α e quindi la velocità angolare ω . Vedremo anche che espressione assume l'energia cinetica.

I due moti considerati, traslazione e rotazione, sono gli unici da studiare in dettaglio, in quanto si dimostra che il *moto rigido più generale è una rototraslazione: ogni spostamento infinitesimo può sempre essere considerato come somma di una traslazione e di una rotazione infinitesime, individuate da \mathbf{v} e $\boldsymbol{\omega}$, variabili nel tempo*. La dimostrazione esula dai nostri scopi, però il risultato era già intuibile dalla conoscenza del numero di parametri necessari a descrivere un qualsiasi moto di un corpo rigido e dall'osservazione che il moto di un punto qualsiasi del corpo era esprimibile come somma del moto del centro di massa e del moto relativo al centro di massa, insieme al fatto che quest'ultimo non può essere che rotatorio.

In figura 6.5, estensione della figura 6.3a, è mostrata una possibile rototraslazione di una sbarretta rigida; si vede chiaramente che i vari punti descrivono traiettorie diverse.



Rotazione di un corpo rigido

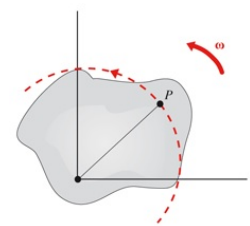


FIGURA 6.4

FIGURA 6.5

Per descrivere una rototraslazione si utilizzano sia il teorema del moto del centro di massa che il teorema del momento angolare, avendo preso come polo un punto fisso nel sistema inerziale o il centro di massa.

Una constatazione fondamentale da fare a questo punto è che la descrizione del moto di un corpo rigido non è univoca. Vediamolo prima in modo formale. Consideriamo due punti P e Q di un corpo rigido: per un moto di rototraslazione le velocità dei due punti sono:

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{OP} \quad , \quad \mathbf{v}_Q = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{OQ} \quad .$$

O è un punto generico, che potrebbe anche coincidere con il centro di massa: \mathbf{v}_O individua il moto di traslazione, $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{OP}$ e $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{OQ}$ una rotazione istantanea attorno ad un asse passante per O (*asse istantaneo di rotazione*). Sottraendo membro a membro

$$\mathbf{v}_P - \mathbf{v}_Q = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{OP} - \mathbf{OQ}) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{QP} \Rightarrow \mathbf{v}_P = \mathbf{v}_Q + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{QP} .$$

Il moto di P è ancora una rototraslazione, caratterizzata dalla velocità \mathbf{v}_Q e dalla stessa velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$, che individua l'asse di rotazione passante per Q . In particolare, se Q è fermo, $\mathbf{v}_Q = \mathbf{0}$ e il moto è una pura rotazione.

Quindi la rototraslazione che descrive il moto ad un certo istante è caratterizzata da \mathbf{v} e $\boldsymbol{\omega}$, ma mentre $\boldsymbol{\omega}$ è unica, \mathbf{v} dipende da quale asse di rotazione vogliamo considerare. Vedremo un esempio interessante di ciò nel paragrafo 6.8 che tratta il moto di puro rotolamento, cioè il moto ideale di una ruota. Facciamo subito un altro esempio. In figura 6.6 è mostrato un giro completo compiuto da un'asta rigida, giacente in un piano orizzontale, che ruota rispetto ad un asse verticale passante per il suo estremo O ; nella parte di destra vediamo il sistema dall'alto, guardando lungo l'asse di rotazione. Possiamo considerare questo moto una rotazione pura attorno all'asse indicato oppure una rototraslazione con rotazione istantanea attorno ad un asse passante per il centro di massa e parallelo al precedente (nel sistema del centro di massa si vede l'asta ruotare), mentre la traslazione è individuata dal moto circolare del centro di massa.

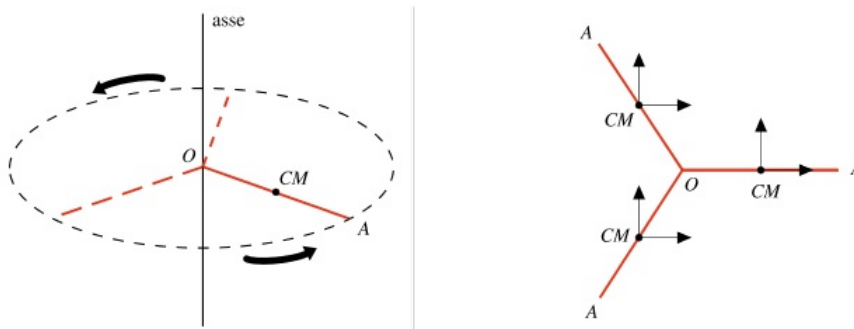


FIGURA 6.6

La velocità angolare delle due rotazioni è la stessa in quanto in un intervallo di tempo dt l'angolo $d\theta$ della prima rotazione coincide con l'angolo della rotazione rispetto al centro di massa. Pur potendo dunque descrivere il moto in vari modi vedremo che i valori del momento angolare e dell'energia cinetica del corpo non dipendono dalla descrizione.

Abbiamo già incontrato un moto di rototraslazione nello studio del moto relativo (paragrafo 3.1): la velocità di trascinamento (3.6), legata al moto di un sistema di riferimento rispetto all'altro, è composta da un termine di traslazione e da un termine di rotazione. E in effetti il sistema di riferimento relativo (come qualsiasi altro sistema di riferimento) è assimilabile ad un corpo rigido, essendo formato da tre assi in posizione fissa tra loro; diventa così evidente che la velocità angolare che compare nelle formule di Poisson deve essere la stessa.

Sottolineamo infine che in una generica rototraslazione i parametri \mathbf{v} e $\boldsymbol{\omega}$ sono indipendenti tra loro. Solo in particolari situazioni, tipicamente in presenza di qualche vincolo, la velocità di traslazione e la velocità di rotazione sono legate da una relazione analitica; un buon esempio è di nuovo quello della ruota, nel paragrafo 6.8.

6.3 Corpo continuo. Densità. Posizione del centro di massa

La schematizzazione di un corpo rigido come sistema di punti materiali necessita di un approfondimento. Un corpo esteso reale appare avere una struttura continua rispetto a qualsiasi suddivisione macroscopica; d'altra parte sappiamo che è costituito da atomi o molecole. Il singolo punto materiale va allora pensato come un piccolo volume dV contenente una massa dm ; dV è piccolo nella scala macroscopica (potrebbe essere un cubetto di spigolo 10^{-6} m), ma molto grande nella scala atomica (dove le dimensioni lineari sono dell'ordine di $10^{-9} \div 10^{-10}$ m), così da contenere un grandissimo numero di atomi: ad esempio in $1 \mu\text{m}^3$ di alluminio ci sono circa 10^{10} atomi.

Questa suddivisione concettuale ha vari vantaggi. Innanzitutto essa permette di utilizzare i risultati trovati per i sistemi discreti di punti nel capitolo 4; l'estensione ai sistemi continui di punti comporta la sostituzione di sommatorie con integrali, come vedremo subito. Ciò mette in luce un secondo vantaggio: la suddivisione della massa del corpo e del volume da essa occupato in un numero (praticamente) infinito di elementi (praticamente) infinitesimi consente di applicare i metodi del calcolo integrale per la determinazione di alcune grandezze di interesse. Il fatto che la suddivisione suddetta ignori l'effettiva struttura granulare del corpo solido non è significativo in quanto tale struttura è irrilevante ai fini della dinamica macroscopica.

Un ulteriore vantaggio è che si riesce a tener conto in modo semplice di come la massa è distribuita all'interno del corpo. Ciò viene fatto introducendo la grandezza *densità* (di massa), definita come rapporto tra la massa infinitesima e il volume da essa occupato:

$$\rho = \frac{dm}{dV} . \quad (6.1)$$

Anche supponendo che i volumi infinitesimi dV siano tutti eguali, non è detto che essi contengano tutti la stessa massa: dm può variare a seconda del volume considerato. Scrivendo da (6.1) $dm = \rho dV$ l'eventuale variazione della distribuzione di massa all'interno del corpo è espressa appunto dalla funzione ρ (x, y, z). La massa totale del corpo è quindi

$$m = \int dm = \int_V \rho dV , \quad (6.2)$$

dove l'integrale è esteso a tutto il volume del corpo.

Un corpo nel quale la densità è costante si dice omogeneo; per esso (6.1) e (6.2) diventano

$$\rho = \frac{m}{V} \quad , \quad m = \rho V \quad . \quad (6.3)$$

I corpi in cui ciò non succede si dicono non omogenei. In essi si usa comunque definire una densità media $\bar{\rho} = m/V$, valore medio nel volume V della funzione ρ .

Ripetiamo che la valutazione della variazione di densità è fatta sulla scala macroscopica tipica del volume dV , scala nella quale la materia appare continua.

Esempi di corpi omogenei sono un blocco di metallo o di vetro, una massa d'acqua o un volume di gas (il concetto di densità si estende anche ai fluidi, che tratteremo nel capitolo 8). Corpi non omogenei si possono trovare in natura, come certi tipi di legno o di roccia, oppure possono essere costruiti artificialmente, ad esempio incollando lamine di materiali diversi. Su grande scala non sono omogenee né la terra né l'atmosfera terrestre.

In casi particolari la massa può essere distribuita invece che in un volume su una superficie S , come avviene per membrane, dischi, bolle di sapone, oppure lungo una linea l , come per fili e bacchette sottili. In corrispondenza si introducono i concetti di *densità superficiale* e di *densità lineare*:

$$\rho_s = \frac{dm}{dS} \Rightarrow m = \int \rho_s dS \quad , \quad \rho_l = \frac{dm}{dl} \Rightarrow m = \int \rho_l dl \quad . \quad (6.4)$$

Densità superficiale
Densità lineare

La grandezza $v = 1/\rho = dV/dm$ si chiama *volume specifico*; mentre la densità può essere pensata come la massa contenuta nell'unità di volume, il volume specifico rappresenta il volume occupato dall'unità di massa.

Nella prima parte della tabella 6.1 sono riportati i valori della densità di alcune sostanze solide. Nella seconda parte diamo la densità media della terra, del sole, dell'ipotetico sole ridotto a buco nero citato nel paragrafo 5.5 e, per confronto, quella del nucleo del ferro. Per l'unità di misura si veda la successiva nota.

Tabella 6.1 Densità di alcune sostanze

berillio	$1.85 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$	ioduro di sodio	$3.67 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$
carbonio (grafite pura)	2.27	vetro comune	$2.4 \div 2.8$
alluminio	2.70	vetro Pyrex	2.23
silicio	2.33	quarzo	2.64
ferro	7.87	plexiglas	1.18
rame	8.96	ghiaccio	0.92
argento	10.5	legno (quercia)	$0.6 \div 0.9$
tungsteno	19.35	cemento armato	$2.4 \div 2.5$
platino	21.45	(mercurio	13.59)
piombo	11.35	(acqua a 4°C	1.00)

	$R \text{ (m)}$	$V \text{ (m}^3\text{)}$	$m \text{ (kg)}$	$\rho \text{ (kg/m}^3\text{)}$
terra	$6.37 \cdot 10^6$	$1.08 \cdot 10^{21}$	$5.98 \cdot 10^{24}$	$5.54 \cdot 10^3$
sole	$6.96 \cdot 10^8$	$1.41 \cdot 10^{27}$	$1.98 \cdot 10^{30}$	$1.40 \cdot 10^3$
sole collassato	880	$2.85 \cdot 10^9$	$1.98 \cdot 10^{30}$	$6.95 \cdot 10^{20}$
nucleo del ferro	$5.6 \cdot 10^{-15}$	$7.36 \cdot 10^{-43}$	$9.27 \cdot 10^{-26}$	$1.26 \cdot 10^{17}$

Unità di misura

La densità si misura in kg/m^3 ; la densità superficiale e quella lineare si misurano rispettivamente in kg/m^2 e kg/m .

Si faccia attenzione al fatto che talvolta le densità sono date in g/cm^3 e che $1 \text{ kg/m}^3 = 10^3 \text{ g/cm}^3$. Per esempio, la densità dell'acqua nel sistema internazionale è 10^3 kg/m^3 .

Calcolo della posizione del centro di massa

La posizione di ciascun punto di un corpo rigido, di massa $dm = \rho dV$, è individuata dal raggio vettore \mathbf{r} ; in accordo con la definizione (4.3) la posizione del centro di massa è data dalla somma degli infiniti vettori $\mathbf{r} dm$ divisa per la massa totale:

$$\mathbf{r}_{CM} = \frac{\int \mathbf{r} dm}{\int dm} = \frac{\int \mathbf{r} \rho dV}{m} \quad (6.5)$$

Se il corpo è omogeneo ($\rho = \text{costante}$),

$$\mathbf{r}_{CM} = \frac{\rho}{m} \int \mathbf{r} dV = \frac{1}{V} \int \mathbf{r} dV \quad (6.6)$$

Nel risolvere gli integrali si osservi che \mathbf{r} e ρ sono funzioni delle coordinate e che anche dV è esprimibile in termini di coordinate: per esempio, in coordinate cartesiane, $dV = dx dy dz$. L'integrale è un integrale triplo.

Dalla (6.6) è evidente che in un corpo omogeneo la posizione del centro di massa, data dal raggio vettore \mathbf{r}_{CM} che è la media della funzione vettoriale \mathbf{r} (x ,

y, z) nel volume V , non dipende dal valore della massa del corpo, ma solo dalla sua forma: ad esempio il centro di massa di un'asta omogenea è sempre nel centro, qualunque sia il materiale di cui essa è costituita (vedi esempio 6.3). Anche se meno evidente, ciò continua ad essere vero per un corpo non omogeneo se la distribuzione di massa, cioè la funzione $\rho(x, y, z)$, è la stessa indipendentemente dal materiale costituente.

Se un corpo omogeneo è simmetrico rispetto ad un punto, un asse o un piano, il centro di massa rispettivamente coincide col centro di simmetria o è un punto dell'asse o del piano di simmetria. Se esistono più assi o piani di simmetria, il centro di massa sta sulla loro intersezione. Ad esempio, in un triangolo piano qualsiasi ci sono tre assi di simmetria che sono le tre mediane; il centro di massa sta nel loro punto di intersezione.

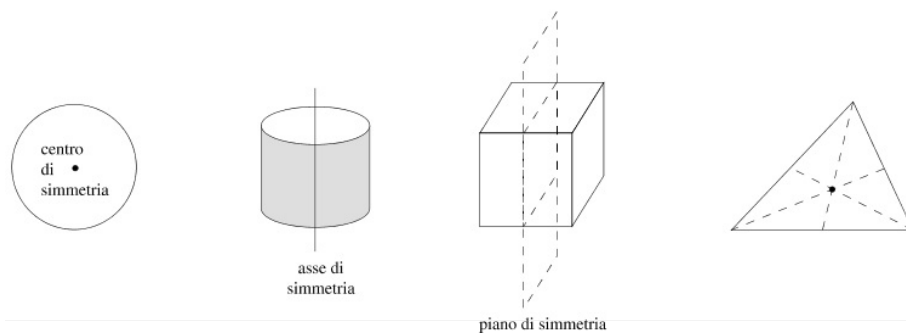


FIGURA 6.7

Esempio 6.1

Si calcoli la posizione del centro di massa di un semianello rigido omogeneo di massa m e raggio R .

Soluzione

La massa del semianello è data da $m = \rho_l \pi R$; ρ_l , densità lineare dell'anello, è costante poiché il corpo è omogeneo. Individuiamo un punto sull'anello tramite il vettore $\mathbf{r} = R \mathbf{u}_r$, dove $\mathbf{u}_r = \sin\phi \mathbf{u}_x + \cos\phi \mathbf{u}_y$. La posizione del centro di massa si calcola con (6.5), adattata al caso unidimensionale:

$$m \mathbf{r}_{CM} = \int_l \rho_l \mathbf{r} dl = \int_l \rho_l R \mathbf{u}_r R d\phi = \rho_l R^2 \int_l \mathbf{u}_r d\phi = \rho_l R^2 \int_l (\sin\phi \mathbf{u}_x + \cos\phi \mathbf{u}_y) d\phi =$$

$$= \rho_l R^2 \left[\mathbf{u}_x \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \sin\phi d\phi + \mathbf{u}_y \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos\phi d\phi \right].$$

Il primo integrale è nullo mentre il secondo vale 2. Pertanto

$$\mathbf{r}_{CM} = \frac{2 \rho_l R^2}{m} \mathbf{u}_y = \frac{2 \rho_l R^2}{\rho_l \pi R} \mathbf{u}_y = \frac{2 R}{\pi} \mathbf{u}_y = 0.637 R \mathbf{u}_y.$$

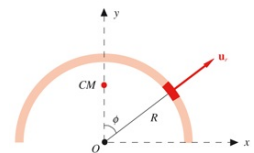


FIGURA 6.8
(Esempio 6.1)

Il centro di massa si trova sull'asse y , come poteva essere previsto per ragioni di simmetria.

Visualizza Soluzione

Esempio 6.2

Si trovi la posizione del centro di massa di una lamina piana omogenea di spessore trascurabile, avente la forma di un semicerchio; la massa è m , il raggio R .

Soluzione

Si consideri un elemento dS di lamina, definito da due rette parallele al diametro AB , a distanza y e $y + dy$ dall'origine (vedi figura 6.9). La lunghezza dell'elemento è $2x = 2R\sqrt{1 - y^2/R^2}$, l'altezza dy , la massa $dm = \rho_S dS = \rho_S 2x dy$, con ρ_S densità superficiale della lamina, costante. La massa della lamina è $m = \rho_S \pi R^2$.

Per ragioni di simmetria il centro di massa si troverà sull'asse y , quindi calcoliamo l'ordinata y_{CM} del centro di massa, sempre da (6.5) opportunamente riscritta e proiettata sull'asse y :

$$m y_{CM} = \int_S y \rho_S 2x dy = 2\rho_S \int_0^R xy dy .$$

Si osservi che la variabile y può andare da zero a R e che in corrispondenza la variabile x va da R a zero. Da $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ si ricava

$$dy = -\frac{x dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} = -\frac{x}{y} dx \Rightarrow y dy = -x dx$$

e quindi

$$m y_{CM} = -2\rho_S \int_R^0 x^2 dx = 2\rho_S \int_0^R x^2 dx = \frac{2}{3} \rho_S R^3 .$$

Sostituendo il valore di m si trova infine

$$y_{CM} = \frac{4R}{3\pi} = 0.424 R .$$

Un metodo alternativo consiste nel considerare una diversa superficie dS (vedi figura 6.10), con $dS = \pi r dr$ (base πr per altezza dr). Su dS è distribuita la massa $dm = \rho_S dS$.

Poiché dS è assimilabile a un semianello di raggio r , sappiamo dall'esempio 6.1 che il relativo centro di massa ha ordinata $y = 2r/\pi$. Il semicerchio è costituito da infiniti semianelli infinitesimi e quindi

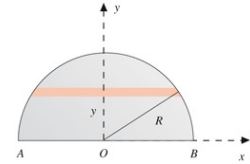


FIGURA 6.9
(Esempio 6.2)

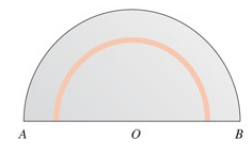


FIGURA 6.10
(Esempio 6.2)

$$m y_{CM} = \int_S y \rho_S dS = \int_0^R \frac{2r}{\pi} \rho_S \pi r dr = 2 \rho_S \int_0^R r^2 dr = \frac{2}{3} \rho_S R^3$$

e si ritrova il risultato precedente.

Sfruttando quanto visto e argomenti di simmetria si dimostri che il centro di massa di una lamina avente la forma di un quarto di cerchio ha le coordinate $x_{CM} = y_{CM} = 4 R/3 \pi$.

Visualizza Soluzione

Esempio 6.3

Si determini la posizione del centro di massa di una bacchetta rettilinea omogenea di massa m e lunghezza l .

Soluzione

Per ragioni di simmetria il centro di massa deve trovarsi al centro della bacchetta. Consideriamo un elemento di massa $dm = \rho_l dx$ posto a distanza x da un estremo della bacchetta, coincidente con l'origine dell'asse x lungo cui è disposta la bacchetta (vedi figura 6.11). Abbiamo

$$m x_{CM} = \int_0^l x \rho_l dx = \rho_l \frac{l^2}{2} .$$

Poiché la massa della bacchetta è $m = \rho_l l$ troviamo $x_{CM} = l/2$ come previsto.

Visualizza Soluzione

Esempio 6.4

Si determini la posizione del centro di massa di una bacchetta di massa m e lunghezza l , la cui densità lineare è ρ_1 nel primo tratto lungo $l/3$ e ρ_2 nel secondo tratto lungo $2l/3$.

Soluzione

Il centro di massa della prima parte della bacchetta si trova a distanza $l/6$ dall'estremo O , mentre il centro di massa della seconda parte si trova a distanza $(l/3 + 1/2 \cdot 2l/3) = 2l/3$ dallo stesso estremo. Calcoliamo ora la posizione del centro di massa di due punti materiali, di massa rispettivamente $\rho_1 l/3$ e $\rho_2 \cdot 2l/3$, posti nei centri di massa delle due parti della bacchetta. Abbiamo da (5.3):

$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{\rho_1 \frac{l}{3} \frac{l}{6} + \rho_2 \frac{2l}{3} \frac{2l}{3}}{\rho_1 \frac{l}{3} + \rho_2 \frac{2l}{3}} = \frac{l}{6} \frac{\rho_1 + 8 \rho_2}{\rho_1 + 2 \rho_2} .$$

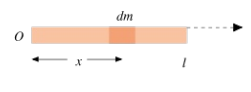


FIGURA 6.11
(Esempio 6.3)



FIGURA 6.12
(Esempio 6.4)

Ovviamente, se $\rho_1 = \rho_2$, $x_{CM} = l/2$.

Si noti che il risultato dipende solo dal rapporto tra le densità; a parità di valore di tale rapporto la posizione del centro di massa non cambia, qualunque siano i valori delle masse.

Visualizza Soluzione

Centro di massa e forza peso

Consideriamo un corpo continuo sottoposto alla forza peso; su ciascun elemento agisce la forza $\mathbf{g} dm$ e la risultante di tutte queste forze parallele è

$$\int \mathbf{g} dm = \mathbf{g} \int dm = m \mathbf{g} \quad ,$$

applicata nel centro di massa. Rispetto ad un polo fisso, che potrebbe essere l'origine delle coordinate, il momento risultante è

$$\mathbf{M} = \int \mathbf{r} \times \mathbf{g} dm = \left(\int \mathbf{r} dm \right) \times \mathbf{g} = m \mathbf{r}_{CM} \times \mathbf{g} = \mathbf{r}_{CM} \times m \mathbf{g} \quad ,$$

eguale al momento della risultante, cioè della forza peso, rispetto allo stesso polo. Questi risultati sono l'estensione ad un sistema continuo di punti di quanto visto nel paragrafo 4.15 per i sistemi di forze parallele.

Anche l'energia potenziale si calcola integrando:

$$E_p = \int g z dm = g \int z dm = m g z_{CM} \quad ,$$

secondo (6.5) proiettata sull'asse z verticale; la formula è identica a (4.21), ricavata per un sistema discreto.

Se il corpo è libero e agisce solo la forza peso, la traiettoria del centro di massa è verticale rettilinea oppure parabolica a seconda delle condizioni iniziali.

Nota. Calcolo della tensione lungo un filo con massa non trascurabile

Nella nota del paragrafo 2.14 abbiamo mostrato che la tensione lungo un filo teso non può avere lo stesso valore se la massa del filo non è trascurabile. Calcoliamo ora la variazione della tensione lungo il filo, nell'ipotesi che la massa m_F sia distribuita lungo il filo con densità lineare $\rho_l = m_F/l$ costante; l è la lunghezza del filo.

Riprendiamo l'esempio 2.17 e la nota suddetta, riferendoci alla figura 2.39; ricordiamo che la tensione nell'estremo superiore vale $T_1 = (m + m_F) g$ e nell'estremo inferiore $T_2 = mg$. Un elemento dx di filo, distante x dall'estremo superiore, è tirato verso l'alto dalla tensione $T(x)$ che deve bilanciare la forza peso $g dm$ dell'elemento di filo e la tensione $T(x + dx)$ che tira l'elemento verso il basso. Supponiamo che $T(x + dx)$ sia inferiore di una quantità dT rispetto a $T(x)$ per cui

$$T(x) = g dm + T(x + dx) = g dm + T(x) - dT \Rightarrow dT = g dm = g \rho_l dx \quad ,$$

$$T_1 - T(x) = \int_0^x dT = g \rho_l x = m_F g \frac{x}{l} \quad ,$$

$$T(x) = T_1 - m_F g \frac{x}{l} = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{l} x \quad .$$

La tensione diminuisce linearmente lungo il filo.

In modo analogo si calcola la variazione nel caso dell'esempio 2.19. L'equazione del moto dell'elemento infinitesimo di filo è $T(x + dx) - T(x) = a dm$, essendo a l'accelerazione di tutto il sistema, e si ottiene la legge lineare $T(x) = T_Q + [(T_P - T_Q)/l] x$.

Applichiamo infine la stessa procedura al caso dell'esempio 2.18, in cui un punto di massa m ruota in un piano orizzontale attorno ad un punto O con velocità angolare ω (figura 2.33). Il filo ha massa m_F ed è lungo R , così che $\rho_l = m_F/R$. La tensione ha il valore incognito T_O nel centro e decresce fino al valore $T_P = m \omega^2 R$. L'equazione del moto dell'elemento di filo è

$$T(r) - T(r + dr) = dT = dm \omega^2 r = \rho_l \omega^2 r dr$$

$$\Rightarrow T_O - T(r) = \rho_l \omega^2 \frac{r^2}{2} = m_F \omega^2 \frac{r^2}{2R} \quad ,$$

$$T(r) = T_O - m_F \omega^2 \frac{r^2}{2R} \quad .$$

Abbiamo detto che per $r = R$ $T(R) = T_P = m \omega^2 R$ e quindi

$$T_O = m \omega^2 R + m_F \omega^2 \frac{R}{2} \quad :$$

nell'origine la tensione (e la reazione vincolare) è aumentata rispetto al caso $m_F = 0$, come se la massa del filo fosse concentrata nel centro del filo. In definitiva

$$T(r) = T_O - \frac{T_O - T_P}{R^2} r^2 \quad .$$

La legge di variazione è quadratica.

6.4 Rotazioni rigide attorno ad un asse fisso in un sistema di riferimento inerziale

Riprendiamo lo studio del moto rotatorio di un corpo rigido, iniziato nel paragrafo 6.2, e consideriamo la rotazione di un corpo rigido attorno ad un asse fisso in un sistema di riferimento inerziale, situazione particolare che però si presenta in molti problemi pratici, come ad esempio le rotazioni di parti di macchine o di motori. I punti dell'asse di rotazione sono punti fissi e quindi possono essere utilizzati come poli per il calcolo dei momenti. Si osservi che l'asse di rotazione può essere esterno al corpo e che il centro di massa non è detto sia un punto dell'asse stesso. Il vettore velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ ha direzione fissa, quella dell'asse di rotazione, mentre il modulo è in generale variabile nel tempo; il verso di $\boldsymbol{\omega}$ indica il verso della rotazione. Se $\boldsymbol{\omega}$ varia, è diverso da zero il vettore accelerazione angolare $\boldsymbol{\alpha} = d\boldsymbol{\omega}/dt$, anch'esso parallelo all'asse di rotazione. Ricordiamo che nella rotazione rigida ciascun punto P_i del corpo descrive in un piano ortogonale all'asse una traiettoria circolare con centro sull'asse e raggio R_i pari alla distanza di P_i dall'asse. La velocità del punto è \mathbf{v}_i , di modulo ωR_i , l'accelerazione è \mathbf{a}_i , con componente normale $\omega^2 R_i$ e tangente αR_i .

Nel seguito, per l'espressione di grandezze additive, useremo per comodità sommatorie sui singoli punti, proprie di un corpo rigido discontinuo. È chiaro peraltro come si passa alla struttura continua e agli integrali.

Calcolo del momento angolare. Momento d'inerzia

Assumiamo l'asse z come asse di rotazione; $\boldsymbol{\omega}$ è quindi parallelo all'asse z . Il polo dei momenti è il punto O sull'asse z . Il raggio vettore \mathbf{r}_i del punto P_i forma un angolo θ_i con l'asse z e un angolo di $\pi/2$ con la velocità \mathbf{v}_i del punto P_i . In figura 6.13 è mostrata anche la traiettoria del punto P_i , di raggio R_i , e si vede che $R_i = r_i \sin \theta_i$.

Il momento angolare del punto P_i rispetto al polo O è dato da $\mathbf{L}_i = \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i$: \mathbf{L}_i è ortogonale al piano individuato dai vettori \mathbf{r}_i , \mathbf{v}_i e forma un angolo $\pi/2 - \theta_i$ con l'asse z . Il modulo di \mathbf{L}_i è

$$L_i = m_i r_i v_i = m_i r_i R_i \omega \quad .$$

Calcoliamo ora la proiezione del momento angolare \mathbf{L}_i sull'asse di rotazione, ovvero il *momento angolare assiale*:

$$L_{i,z} = L_i \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_i\right) = L_i \sin \theta_i = m_i r_i \sin \theta_i R_i \omega = m_i R_i^2 \omega \quad .$$

Il momento angolare del corpo è $\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{L}_i$ e in generale non è parallelo

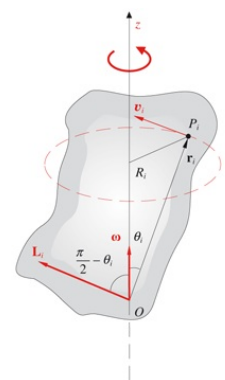


FIGURA 6.13

all'asse di rotazione: ciò vuol dire che in generale non esiste una relazione di proporzionalità tra \mathbf{L} e $\boldsymbol{\omega}$. La proiezione di \mathbf{L} sull'asse z è

$$L_z = \sum_i L_{iz} = (\sum_i m_i R_i^2) \omega = I_z \omega \quad (6.7)$$

Il coefficiente I_z si chiama *momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse z* :

$$I_z = \sum_i m_i R_i^2 = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) \quad (6.8)$$

Il momento d'inerzia dipende quindi dalle masse e dalla loro posizione rispetto all'asse di rotazione: non è una caratteristica del corpo che si possa calcolare nota la sua struttura (come la posizione del centro di massa), ma per definirlo è necessario conoscere anche la posizione rispetto al corpo dell'asse di rotazione.

La (6.8) pertanto dice che *la componente del momento angolare rispetto all'asse di rotazione è proporzionale alla velocità angolare e dipende, tramite il coefficiente I_z , solo dalla forma del corpo e dalla posizione dell'asse rispetto al corpo*.

Riassumendo: il momento angolare di un corpo rigido che ruota rispetto ad un asse non è in generale parallelo all'asse di rotazione e ruota attorno a questo assieme al corpo. La componente parallela all'asse può variare solo in modulo, è proporzionale a ω e non dipende dalla scelta del polo. Invece la *componente ortogonale all'asse* varia in direzione, può variare in modulo e dipende dalla scelta del polo; essa è data dalla somma vettoriale di contributi, ciascuno dei quali vale in modulo

$$L_{i,\perp} = L_i \cos\theta_i = m_i r_i R_i \omega \cos\theta_i \quad (6.9)$$

Il momento angolare risulta certamente parallelo all'asse di rotazione e quindi a $\boldsymbol{\omega}$ quando l'asse di rotazione è un *asse di simmetria* del corpo (per ogni \mathbf{L}_i c'è un \mathbf{L}_j simmetrico rispetto all'asse così che la loro somma vettoriale è parallela all'asse) o, più in generale, quando l'asse di rotazione coincide con un *asse principale d'inerzia*, come vedremo nel paragrafo 6.10. In tali condizioni

$$\mathbf{L} = I_z \boldsymbol{\omega} \quad , \quad L = L_z \quad , \quad L_{\perp} = 0 \quad (6.10)$$

Un moto come quello più generale di \mathbf{L} , che ruota attorno all'asse di rotazione, si chiama, come già discusso nel paragrafo 1.11, *moto di precessione* e in particolare moto di precessione uniforme se la velocità angolare è costante. In questo caso anche \mathbf{L} è costante in modulo e dalla (1.32) e (4.11) si ha

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L} \quad (6.11)$$

La variazione di \mathbf{L} nel tempo, che si riferisce solo alla variazione di direzione e non del modulo, è espressa semplicemente da $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}$; $d\mathbf{L}$ è ortogonale a \mathbf{L} e

Momento d'inerzia rispetto ad un'asse

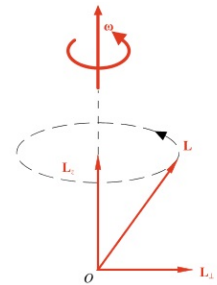


FIGURA 6.14

parallelo a \mathbf{M} e il suo modulo vale, in base alla figura 6.15, $dL = L_{\perp} d\Phi$.

Pertanto, sempre in modulo

$$M = \frac{dL}{dt} = L_{\perp} \frac{d\phi}{dt} = L_{\perp} \omega \quad (6.12)$$

La situazione dinamica dunque è la seguente, nel caso di ω costante: il momento angolare, che non è parallelo a ω , cambia nel tempo secondo (6.11) e ciò è dovuto al momento delle forze esterne, il cui modulo è dato da (6.12). Resta da determinare quali siano le forze esterne che agiscono durante la rotazione uniforme del corpo rigido. Per chiarire l'argomento ci serviamo degli esempi che seguono. Quando invece \mathbf{L} è parallelo a ω non c'è precessione e, se ω è costante, non c'è momento risultante delle forze esterne.

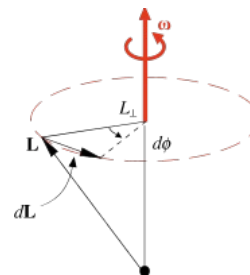


FIGURA 6.15

Esempi sugli effetti del non parallelismo tra \mathbf{L} e ω

Consideriamo il corpo rigido più semplice possibile, due punti materiali di eguale massa m collegati tra loro da un'asta di massa trascurabile e lunga $2r$. Facciamo ruotare questo corpo attorno all'asse di simmetria verticale passante per il centro di massa O e ortogonale all'asta di collegamento: in figura 6.16 S è il supporto dell'asse e C un cuscinetto che assicura la verticalità. Sia ora che nei casi successivi supponiamo costante la velocità angolare e che non ci siano attriti.

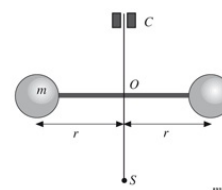


FIGURA 6.16

I momenti angolari dei due punti, qualunque sia il polo sull'asse, hanno la stessa componente lungo l'asse di rotazione e componenti opposte ortogonalmente all'asse, per cui

$$L = L_z = 2mr^2\omega = I_z \omega \quad , \quad L_{\perp} = 0 \quad .$$

\mathbf{L} è costante, il momento delle forze è nullo. Verifichiamo indipendentemente questo risultato. A ciascun punto è applicata la forza $m\mathbf{g}$ e, tramite l'aggancio all'asta, la forza centripeta che è eguale in modulo a $m\omega^2 r$: i momenti delle forze peso rispetto ad un polo sull'asse sono eguali ed opposti, le due forze centripete formano una coppia di braccio nullo. Per quanto riguarda le forze, la risultante vale $2m\mathbf{g}$ ed è applicata nel centro di massa O del corpo. Il supporto S sostiene il corpo esplicando la reazione $-2m\mathbf{g}$ e, a rigore, il cuscinetto C non ha alcuna funzione poiché in condizioni di perfetta simmetria l'asse resta spontaneamente verticale.

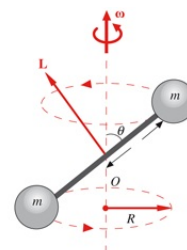


FIGURA 6.17

Ruotiamo adesso il sistema, come mostrato nella figura 6.17. I momenti angolari dei due punti, prendendo il centro di massa O come polo, sono eguali, la risultante \mathbf{L} non è parallela all'asse e ha le componenti

$$\begin{aligned} L_z &= 2m(r \sin\theta)^2 \omega = 2 m R^2 \omega && \text{costante} \\ L_{\perp} &= 2m r R \omega \cos\theta && \text{variabile in direzione} \end{aligned} .$$

\mathbf{L} precessa uniformemente e la sua variazione è legata al momento delle forze esterne; in modulo, secondo (6.12),

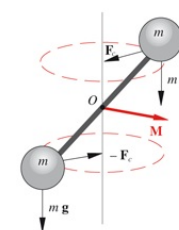


FIGURA 6.18

$$M = L_{\perp} \omega = 2m r R \omega^2 \cos\theta \quad .$$

Le forze peso rispetto ad O continuano ad avere momenti eguali ed opposti e non contribuiscono al momento risultante; invece le forze centripete, ciascuna pari a $m\omega^2 R$, sono ora una coppia di braccio $2r\cos\theta$ (vedi figura 6.18) con momento $2mrR\omega^2\cos\theta$. In conclusione, quando le masse sono distribuite in modo tale che \mathbf{L} e $\boldsymbol{\omega}$ non siano paralleli, esiste un momento esterno responsabile della variazione di \mathbf{L} nel tempo, pur essendo la rotazione uniforme: tale momento è il momento delle forze centripete che permettono il verificarsi del moto rotatorio. Il risultato non dipende dalla scelta del polo perché non ne dipende \mathbf{M} ; cambiando polo cambia il momento angolare, ma non la sua derivata rispetto al tempo.

Dalla figura 6.18 si capisce che l'azione del momento tende a modificare la direzione dell'asse di rotazione, per cui il cuscinetto C viene sollecitato; tutta la struttura di sostegno (non disegnata) reagisce sviluppando un momento eguale e contrario a \mathbf{M} , così da mantenere verticale l'asse di rotazione. La sollecitazione è proporzionale a ω^2 e richiede un adeguato dimensionamento di cuscinetto e sostegno per evitarne la rottura; ad ogni modo c'è un'usura nel tempo. In pratica conviene, quando ciò non sia in contrasto con altri requisiti, realizzare per sistemi in rotazione una configurazione per cui \mathbf{L} sia parallelo a $\boldsymbol{\omega}$. Questo è il motivo, per esempio, della procedura di equilibratura delle ruote di un'automobile.

La risultante delle forze invece non cambia passando dalla figura 6.16 alla figura 6.17; inoltre le reazioni in C sono certamente ortogonali all'asse e il sostegno S deve reagire soltanto al peso.

Il primo caso esaminato, quello della figura 6.16, può essere reso asimmetrico spostando l'asse di rotazione (figura 6.19). Il centro di massa non sta più sull'asse e dista da O di $r_{CM} = (r_2 - r_1)/2$. Le forze centripete hanno risultante $m\omega^2 (r_2 - r_1)$, come se la massa $2m$ fosse concentrata nel centro di massa, in accordo col teorema del moto del centro di massa. Le forze peso hanno, rispetto a qualsiasi punto dell'asse, il momento $\mathbf{r}_{CM} \times 2m\mathbf{g}$, di modulo $mg (r_2 - r_1)$. Durante il moto in ogni istante sono applicate all'asse in S e in C forze di reazione orizzontali la cui somma è eguale alla forza centripeta $m\omega^2 (r_2 - r_1)$ necessaria a mantenere il centro di massa in orbita circolare; inoltre S deve sostenere il peso del corpo e in C deve svilupparsi una forza il cui momento rispetto a S sia opposto al momento della forza peso. Queste conclusioni si applicano in generale ai casi in cui il centro di massa non sta sull'asse di rotazione.

Infine una combinazione dei vari effetti si ha se la configurazione asimmetrica viene anche inclinata (figura 6.20).

Ampliando quanto già rilevato, diciamo che la migliore situazione dinamica, dal punto di vista dell'equilibrio dell'asse di rotazione, si ha quando il centro di

massa sta sull'asse e questo è un asse di simmetria o, più in generale, un asse principale d'inerzia.

Equazione del moto

Nel caso più semplice in cui \mathbf{L} è parallelo a $\boldsymbol{\omega}$, valgono le (6.10) per cui

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d}{dt} (I_z \boldsymbol{\omega}) = I_z \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = I_z \boldsymbol{\alpha}$$

e la (4.11) si scrive

$$\mathbf{M} = I_z \boldsymbol{\alpha} \quad (6.13)$$

Questa è l'equazione del moto di rotazione: la conoscenza del momento delle forze esterne permette di calcolare l'accelerazione angolare, se è noto il momento di inerzia; sia $\boldsymbol{\alpha}$ che \mathbf{M} sono paralleli all'asse di rotazione, cioè a $\boldsymbol{\omega}$.

Si può quindi ottenere la legge oraria, note le condizioni iniziali del moto, cioè la posizione angolare e la velocità angolare iniziali:

$$\alpha = \frac{M}{I_z} \Rightarrow \omega(t) = \omega_0 + \int_0^t \alpha dt \Rightarrow \theta(t) = \theta_0 + \int_0^t \omega dt \quad ,$$

che sono le (1.28) e (1.29). Se $M = 0$ il corpo resta in quiete o si muove con moto circolare uniforme:

$$\alpha = 0 \quad , \quad \omega = \omega_0 \quad , \quad \theta = \theta_0 + \omega t \quad .$$

Nel caso che M sia costante il moto è circolare uniformemente accelerato:

$$\alpha = \text{costante} \quad , \quad \omega = \omega_0 + \alpha t \quad , \quad \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 \quad .$$

Infine con M generico, $\alpha = \alpha(t)$ e il moto è circolare vario. Quando invece \mathbf{L} non è parallelo a $\boldsymbol{\omega}$ si utilizza (6.7):

$$\frac{dL_z}{dt} = \frac{d}{dt} (I_z \omega) = I_z \frac{d\omega}{dt} = I_z \alpha$$

e proiettando (4.11) sull'asse di rotazione

$$M_z = I_z \alpha \quad (6.14)$$

Da questa si ricava $\alpha = M_z/I_z$ e la legge oraria, con le stesse formule appena scritte: il moto di rotazione dipende adesso dal momento assiale delle forze esterne.

Resta l'altra proiezione di (4.11) in direzione ortogonale all'asse di rotazione, cioè $dL_{\perp}/dt = M_{\perp}$. Questa non porta a variazione di α , ma è responsabile degli effetti descritti precedentemente negli esempi.

La situazione è analoga a quella vista nel moto circolare di un punto

Equazione del moto di rotazione

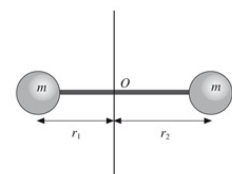


FIGURA 6.19

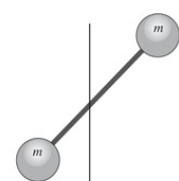


FIGURA 6.20

materiale. La legge $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ proiettata sulla tangente alla traiettoria determina l'accelerazione tangenziale \mathbf{a}_T e quindi la legge oraria, mentre la proiezione ortogonale alla traiettoria permette di calcolare la forza centripeta necessaria perché avvenga il moto, ma non ha influenza sulla legge oraria.

Per quanto riguarda in particolare il moto del centro di massa, se questo non sta sull'asse di rotazione, ma ne dista R_{CM} , l'accelerazione \mathbf{a}_{CM} si calcola a partire da a e ω : precisamente la componente tangente è $a_{CM,T} = \alpha R_{CM}$, quella normale è $a_{CM,N} = \omega^2 R_{CM}$.

Calcolo dell'energia cinetica e del lavoro

L'energia cinetica del corpo rigido nel moto di rotazione è data da

$$E_k = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i R_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} I_z \omega^2 \quad . \quad (6.15)$$

Anche l'energia cinetica dipende dal momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse di rotazione. La (6.15) mostra l'altra possibile maniera per arrivare alla definizione di questa grandezza, in accordo con (6.8).

Se il momento angolare è parallelo a $\boldsymbol{\omega}$, da (6.10) abbiamo

$$E_k = \frac{L^2}{2I_z} \quad ;$$

nel caso contrario $E_k = L^2 / 2I_z$.

Quando un corpo rigido in quiete o in rotazione con velocità angolare ω_{in} viene portato a ruotare con velocità angolare ω_{fin} a seguito dell'applicazione di un momento esterno, l'energia cinetica subisce una variazione e quindi è stato compiuto un lavoro. La (4.18) si scrive nel caso in esame

$$W = \Delta E_k = \frac{1}{2} I_z \omega_{fin}^2 - \frac{1}{2} I_z \omega_{in}^2 \quad . \quad (6.16)$$

Ricaviamo ora la relazione tra momento e lavoro. La (6.16) in forma infinitesimale dà, tenendo conto di (6.15) e (6.14),

$$dW = dE_k = I_z \omega d\omega = I_z \frac{d\theta}{dt} \alpha dt = I_z \alpha d\theta = M_z d\theta \quad .$$

Integrando dalla posizione iniziale a quella finale

$$W = \int_0^\theta M_z d\theta \quad . \quad (6.17)$$

Se in particolare $\mathbf{L} = I_z \boldsymbol{\omega}$, a M_z va sostituito M . In ogni caso per eseguire il calcolo bisogna conoscere la dipendenza del momento dall'angolo.

La potenza istantanea è data da

$$\frac{dW}{dt} = M_z \frac{d\theta}{dt} = M_z \omega \quad .$$

Nella trattazione della rotazione di un corpo rigido abbiamo incontrato situazioni già viste nel moto circolare; anche la (6.17) è formalmente identica alla (2.25). Questo fatto non deve sorprendere perché si tratta sempre di moto circolare, anche se non di un punto, ma di un insieme di punti con distanze mutue invariabili. La legge dinamica è diversa: in essa l'azione esterna è rappresentata dal momento delle forze e l'inerzia del corpo dal momento d'inerzia (come discuteremo nel paragrafo 6.5), però alla fine si arriva a calcolare l'accelerazione angolare α , che è identica per tutti i punti come lo è la velocità angolare, e da questo punto in poi la cinematica è la stessa. Altro fatto in comune, che abbiamo già sottolineato, è la presenza di forze centripete, necessarie perché ci sia un moto circolare.

Esempio 6.5

Si consideri un disco omogeneo, di raggio r e massa m_2 , che può ruotare senza attrito attorno ad un asse fisso orizzontale passante per il suo centro di massa O . Sul bordo del disco è avvolto un filo inestensibile che non slitta rispetto al disco e sostiene un punto materiale di massa m_1 . Si determini il moto del sistema, la tensione del filo e la reazione dei supporti che sostengono l'asse di rotazione. Il momento d'inerzia del disco rispetto all'asse di rotazione vale $I = \frac{1}{2} m_2 r^2$.

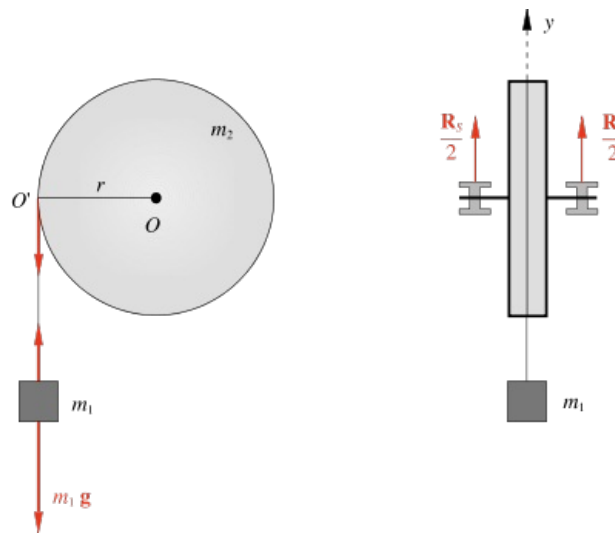


FIGURA 6.21

Soluzione

Per l'equilibrio verticale del disco vale l'equazione

$$m_2 \mathbf{g} + \mathbf{T} + \mathbf{R}_s = 0$$

dove \mathbf{T} è la tensione del filo e \mathbf{R}_s la reazione dei supporti, ciascuno dei quali esercita una reazione $\mathbf{R}_s / 2$ (si veda la figura 6.21).

Come polo dei momenti scegliamo il centro di massa del disco O . Rispetto a tale polo il momento della forza peso è nullo come pure quello di \mathbf{R}_s . Solo la tensione del filo ha momento diverso da zero e l'equazione del moto del disco è

$$I \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{T} \quad .$$

Per il punto di massa m_1 l'equazione del moto è

$$m_1 \mathbf{g} + \mathbf{T} = m_1 \boldsymbol{\alpha} \quad .$$

Inoltre, data la situazione di non slittamento del filo rispetto al disco, si ha $a = ar$: l'accelerazione di m_1 è eguale a quella di tutti i punti del filo e quindi anche di O' , che sta sul bordo.

Dalla seconda e terza relazione, riscritte come

$$\frac{1}{2} m_2 r^2 \frac{a}{r} = rT \quad , \quad m_1 g - T = m_1 a \quad ,$$

si ottiene

$$a = \frac{2 m_1}{2 m_1 + m_2} g \quad , \quad T = \frac{m_1 m_2}{2 m_1 + m_2} g \quad .$$

Si sostituisce nella prima relazione e si ha

$$R_s = m_2 g + T = \frac{3 m_1 + m_2}{2 m_1 + m_2} m_2 g \quad ,$$

che risulta minore di $(m_1 + m_2) g$, reazione dei supporti quando il sistema è fermo.

Il moto del punto materiale è rettilineo uniformemente accelerato (con accelerazione minore di g), mentre per il disco il moto è circolare uniformemente accelerato con accelerazione angolare $\alpha = a/r$. Sugeriamo, per esercizio, di prendere come polo il punto O' e verificare che la soluzione è la stessa. L'accelerazione di m_1 e quindi del disco può essere calcolata anche utilizzando la conservazione dell'energia:

$$\frac{1}{2} m_1 v^2 + m_1 g y + \frac{1}{2} I \omega^2 = \text{costante} \quad .$$

L'asse verticale y è orientato verso l'alto per cui la velocità del punto materiale è $v = - dy/dt$. Deriviamo la precedente relazione, tenendo conto che $v = \omega r$:

$$m_1 v \frac{dv}{dt} - m_1 g v + \frac{1}{2} m_2 r^2 \omega \frac{d\omega}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad m_1 v a - m_1 g v + \frac{1}{2} m_2 r^2 \frac{v}{r} \frac{a}{r} = 0$$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{2 m_1}{2 m_1 + m_2} \quad .$$

Dalla conservazione dell'energia possiamo ottenere direttamente la velocità v e la velocità angolare ω in funzione della quota y .

Visualizza Soluzione

6.5 Momento d'inerzia

Nello studio delle rotazioni rigide il momento d'inerzia ha un ruolo fondamentale, analogo a quello della massa nella legge di Newton: a parità di momento applicato un corpo assume un'accelerazione angolare maggiore o minore a seconda del valore del momento d'inerzia rispetto all'asse di rotazione. C'è però una profonda differenza nel paragone tra il ruolo della massa e del momento d'inerzia, come abbiamo già sottolineato: mentre possiamo associare ad ogni corpo una certa massa, non ha senso parlare di momento d'inerzia di un corpo di determinata forma, ma bisogna sempre specificare l'asse di rotazione a cui si fa riferimento.

Il *momento d'inerzia per un corpo continuo* si deduce da (6.8) con lo stesso procedimento che porta da (4.3) a (6.5) per la posizione del centro di massa:

$$I = \int R^2 dm = \int \rho R^2 dV = \int \rho (x^2 + y^2) dV \quad ; \quad (6.18)$$

R è la distanza dell'elemento di massa dm dall'asse z , assunto come asse di rotazione.

Essendo il momento d'inerzia additivo, cioè definito attraverso sommatorie o integrali, se si suddivide un corpo in tante parti *il momento d'inerzia totale è la somma dei momenti d'inerzia parziali, calcolati tutti rispetto allo stesso asse*; si ricordi il ragionamento analogo fatto per la posizione del centro di massa.

Nella tabella sono riportati i momenti d'inerzia di alcuni corpi rigidi omogenei, rispetto agli assi indicati, che sono assi di simmetria passanti per il centro di massa.

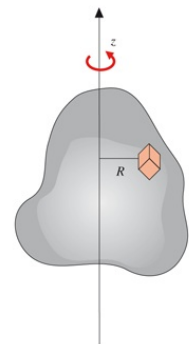
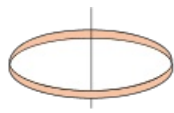
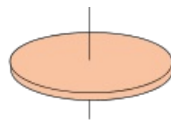


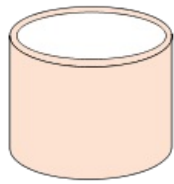
FIGURA 6.22



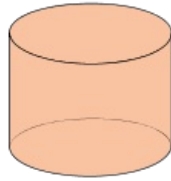
anello $I = m R^2$



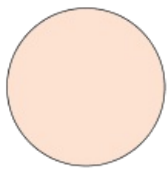
disco $I = \frac{1}{2} m R^2$



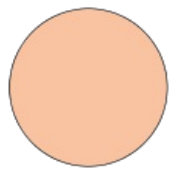
guscio cilindrico
sottile
 $I = m R^2$



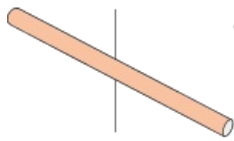
cilindro pieno
 $I = \frac{1}{2} m R^2$



guscio sferico sottile
 $I = \frac{2}{3} m R^2$

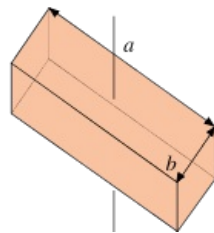


sfera piena
 $I = \frac{2}{5} m R^2$



asta sottile

$$I = \frac{1}{12} m d^2$$



lastra

$$I = \frac{1}{12} m (a^2 + b^2)$$

Negli esempi che seguono è indicato il metodo di calcolo di alcuni momenti d'inerzia.

Esempio 6.6

Calcolare il momento d'inerzia di un anello omogeneo, di massa m e raggio R , rispetto ad un asse z passante per il centro dell'anello e ortogonale al piano dell'anello, come nella relativa figura della tabella. Estendere il calcolo a un guscio cilindrico sottile.

Soluzione

Consideriamo prima l'anello: la massa è distribuita uniformemente lungo una circonferenza e pertanto ciascun elemento di massa dell'anello dista della stessa quantità R dall'asse z ; il momento d'inerzia vale quindi $I_z = m R^2$.

Eseguiamo a scopo didattico il calcolo partendo da (6.18) e tenendo conto che la densità è lineare:

$$I_z = \int R^2 dm = \int \rho_l R^2 dl = \rho_l R^2 \int dl = \rho_l R^2 2 \pi R \quad .$$

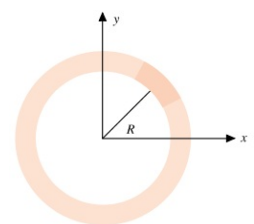


FIGURA 6.23
(Esempio 6.6)

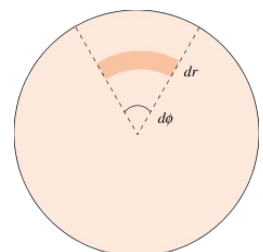


FIGURA 6.24

Poiché la massa dell'anello è $m = \rho_l 2\pi R$, si ottiene $I_z = m R^2$. Il guscio cilindrico sottile si può considerare come un insieme di anelli sovrapposti e, se m è la massa totale, di nuovo si ha $I_z = m R^2 (= \sum_i m_i R^2)$.

Visualizza Soluzione

Esempio 6.7

Calcolare il momento d'inerzia di un disco sottile omogeneo, di massa m e raggio R , rispetto ad un asse z ortogonale al piano del disco e passante per il suo centro. Estendere il calcolo a un disco spesso, ovvero a un cilindro pieno.

Soluzione

La massa è distribuita uniformemente sulla superficie del disco, con densità superficiale ρ_s : $m = \rho_s \pi R^2$; il momento d'inerzia è

$$I_z = \int r^2 dm = \int \rho_s r^2 dS \quad ,$$

dove r rappresenta la distanza dell'elemento di massa dm dall'asse e varia tra zero e R . Per eseguire il calcolo è più semplice utilizzare le coordinate polari nel piano. La superficie infinitesima dS è quella tratteggiata in figura 6.24 e la sua area vale, a meno di infinitesimi di ordine superiore, $dS = r dr d\Phi$. Pertanto si ha

$$I_z = \rho_s \int r^2 r dr d\Phi = \rho_s \int r^3 dr d\Phi \quad .$$

Dato che la funzione integranda non dipende da Φ , è possibile spezzare l'integrale:

$$I_z = \rho_s \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} d\Phi = 2\pi \rho_s \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{2} \pi \rho_s R^4 \quad .$$

Utilizzando l'espressione della massa, $I_z = \frac{1}{2} m R^2$. Un cilindro è equivalente ad un insieme di dischi sottili sovrapposti e quindi $I_z = \frac{1}{2} m R^2$ se m è la massa totale. A questo risultato si può arrivare attribuendo ad ogni disco sottile la massa dm e il momento d'inerzia $dI = R^2 dm/2$ e sommando tutti i contributi: $I_z = \int dI$; oppure si può pensare alla somma di tanti termini finiti, come fatto per il guscio cilindrico nell'esempio 6.6.

Visualizza Soluzione

Esempio 6.8

Calcolare il momento d'inerzia di un guscio sferico sottile, di massa m e raggio R , rispetto ad un asse z coincidente con un diametro.

Soluzione

La massa è distribuita uniformemente con densità ρ_S su una superficie sferica; l'elemento di superficie dS mostrato in figura 6.25 ha l'area

$$dS = r \, d\phi \, R \, d\theta$$

e su di esso si trova la massa $dm = \rho_S dS$, che dista dall'asse di rotazione $r = R \sin\theta$. Pertanto:

$$\begin{aligned} I_z &= \int r^2 dm = \int r^2 \rho_S r \, d\phi \, R \, d\theta = \rho_S R^4 \int \sin^3 \theta \, d\theta \, d\phi = \rho_S R^4 \int_0^\pi \sin^3 \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \\ &= 2\pi \rho_S R^4 \int_0^\pi \sin^3 \theta \, d\theta . \end{aligned}$$

L'integrale $\int_0^\pi \sin^3 \theta \, d\theta$ si può scrivere $-\int_0^\pi (1 - \cos^2 \theta) \, d\cos\theta = \frac{4}{3}$; per cui

$$I_z = \frac{8}{3} \pi \rho_S R^4 = \frac{2}{3} m R^2$$

considerando che $m = \rho_S 4\pi R^2$.

Visualizza Soluzione

Esempio 6.9

Calcolare il momento d'inerzia di una sfera omogenea, di massa m e raggio R , rispetto ad un asse z coincidente con un diametro.

Soluzione

La massa, distribuita uniformemente all'interno della sfera con densità ρ , vale $m = \rho \frac{4}{3} \pi R^3$. Dividiamo la sfera in sezioni circolari di raggio $r = R \sqrt{1 - \frac{z^2}{R^2}}$.

Ciascuna è assimilabile a un disco di massa $dm = \rho \pi r^2 dz$ e momento d'inerzia $dI = \frac{1}{2} dm r^2 = \frac{1}{2} \rho \pi (R^2 - z^2)^2 dz$.

$$dm = \rho \, dV = \rho \, \pi r^2 \, dz$$

e momento d'inerzia

$$dI = \frac{1}{2} dm r^2 = \frac{1}{2} \rho \pi (R^2 - z^2)^2 dz$$

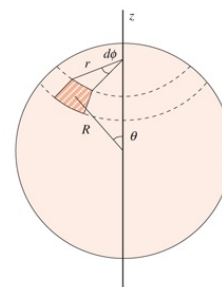


FIGURA 6.25 (Esempio 6.8)

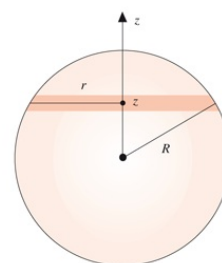


FIGURA 6.26 (Esempio 6.9)

Integriamo per z variabile da zero a R , moltiplicando il risultato per due così da coprire l'intera sfera:

$$I_z = \rho \pi \int_0^R (R^4 + z^4 - 2R^2 z^2) dz = \rho \pi \left(R^5 + \frac{R^5}{5} - \frac{2}{3} R^5 \right) = \rho \pi R^5 \frac{8}{15} = \frac{2}{5} m R^2 .$$

Alternativamente, si può considerare la sfera come formata da gusci sferici infinitesimi, cioè di raggio r e spessore dr , con r variabile da zero a R . Ciascun guscio ha massa

$$dm = \rho dV = \rho 4 \pi r^2 dr$$

e momento d'inerzia, secondo l'esempio 6.8,

$$dI = \frac{2}{3} r^2 dm = \frac{8}{3} \rho \pi r^4 dr \Rightarrow I_z = \frac{8}{3} \rho \pi \int_0^R r^4 dr = \frac{8}{15} \rho \pi R^5 = \frac{2}{5} m R^2 .$$

Visualizza Soluzione

Esempio 6.10

Calcolare il momento d'inerzia di una sottile asta omogenea, di massa m e lunghezza d , rispetto ad un asse ortogonale all'asta e passante per il suo centro. Ripetere il calcolo se invece l'asse passa per un estremo dell'asta.

Soluzione

Detta S la sezione dell'asta, la massa è $m = \rho S d$; un elemento di massa $dm = \rho S dx$ si trova a distanza x dall'asse (si assume che le dimensioni trasversali siano trascurabili rispetto a d). Pertanto

$$I_z = \int_{-d/2}^{d/2} x^2 dm = \rho S \int_{-d/2}^{d/2} x^2 dx = \frac{1}{12} \rho S d^3 .$$

Utilizzando la massa dell'asta, $I_z = \frac{1}{12} m d^2$

Nel secondo caso

$$I_z = \int_0^d x^2 dm = \rho S \int_0^d x^2 dx = \frac{1}{3} \rho S d^3 = \frac{1}{3} m d^2 .$$

Visualizza Soluzione

Esempio 6.11

Dato un corpo piatto, per esempio una lamina sottile, che ha una dimensione trascurabile rispetto alle altre due, calcolare i momenti di inerzia rispetto ai tre assi, x , y , z della figura 6.28.

Soluzione

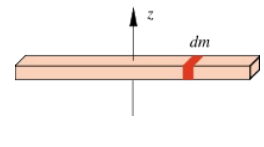


FIGURA 6.27
(Esempio 6.10)

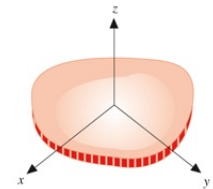


FIGURA 6.28
(Esempio 6.11)

Si può assumere, dato lo spessore trascurabile del corpo, $z = 0$, per cui

$$I_x = \int \rho (y^2 + z^2) dV = \int \rho y^2 dV$$

$$I_y = \int \rho (x^2 + z^2) dV = \int \rho x^2 dV$$

$$I_z = \int \rho (x^2 + y^2) dV = I_x + I_y \quad .$$

Se il corpo piatto è un anello con centro nell'origine

$$I_x = I_y = \frac{1}{2} I_z = \frac{1}{2} m R^2 \quad .$$

Analogamente, per un disco, $I_x = I_y = \frac{1}{2} I_z = \frac{1}{4} m R^2$

Visualizza Soluzione

In tutte le formule trovate il momento d'inerzia ha un'espressione del tipo $I = f m d^2$, dove m è la massa del corpo, d una dimensione significativa (ad esempio il raggio per una sfera, la lunghezza per un'asta ecc.) e f un fattore numerico legato alla struttura del sistema (forma del corpo e posizione dell'asse di rotazione). Pertanto il momento d'inerzia si può sempre scrivere come

$$I = m k^2 \quad , \quad k = \sqrt{f} d = \sqrt{\frac{I}{m}} \quad ; \quad (6.19)$$

Raggio giratore

k è il *raggio giratore* del corpo. Dato un corpo con momento d'inerzia I rispetto ad un asse, si immagini di concentrare la sua massa in un punto: k rappresenta la distanza dall'asse a cui bisogna porre questo punto per avere lo stesso momento d'inerzia I .

Unità di misura

Il momento d'inerzia, somma di prodotti massa per distanza al quadrato, si misura in kg m^2 .

Il raggio giratore si misura ovviamente in metri.

6.6 Teorema di Huygens-Steiner

Abbiamo già messo in evidenza, nei precedenti calcoli di momenti d'inerzia, come siano stati scelti assi di rotazione particolari, cioè assi di simmetria passanti per il centro di massa. Se si sceglie un altro asse per il quale vengono meno le condizioni di simmetria il calcolo dei vari integrali può diventare a volte assai complicato.

Il *teorema di Huygens-Steiner* (H.S.) semplifica enormemente il problema. Esso stabilisce che il momento d'inerzia di un corpo di massa m rispetto ad un asse che si trova a una distanza a dal centro di massa del corpo è dato da

$$I = I_c + m a^2 \quad (6.20)$$

dove I_c è il momento d'inerzia del corpo rispetto ad un asse parallelo al primo e passante per il centro di massa.

Per dimostrare il teorema, consideriamo due assi z e z' , tra loro paralleli, distanti a ; l'asse z' passa per il centro di massa. La relazione tra le coordinate nei due sistemi, con centro in O e nel centro di massa, è dato da

$$x = x' \quad , \quad y = y' + a \quad , \quad z = z' \quad .$$

Il momento d'inerzia di un punto generico P_i rispetto all'asse z è dato da

$$m_i (x_i^2 + y_i^2) .$$

Sommiamo su tutti i punti utilizzando le formule di trasformazione:

$$I_z = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) = \sum_i [x_i'^2 + (y_i' + a)^2] = \sum_i m_i (x_i'^2 + y_i'^2) + \sum_i m_i a^2 + 2 a \sum_i m_i y_i' .$$

Il primo termine è il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse z' , il secondo è ma^2 e il terzo è nullo in quanto $\sum_i m_i y_i' = m y'_{CM}$ e y'_{CM} , coordinata del centro di massa nel sistema del centro di massa, è nulla. Abbiamo quindi trovato la (6.20).

Il teorema di H.S. si rivela così un utilissimo strumento di calcolo: è sufficiente determinare il momento d'inerzia rispetto ad un asse passante per il centro di massa e lo si può ricavare rispetto a qualunque altro asse parallelo; notiamo che è sempre $I_{z'} < I_z$.

Per esempio, il momento d'inerzia di un disco rispetto ad un asse ortogonale al disco e passante per il bordo vale

$$I = \frac{1}{2} m R^2 + m R^2 = \frac{3}{2} m R^2 .$$

Analogamente il momento d'inerzia di un'asta lunga d rispetto ad un asse passante per un estremo e ortogonale all'asta si scrive

Teorema di
HuygensSteiner

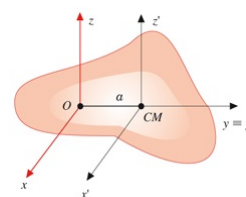


FIGURA 6.29

$$I = \frac{1}{12} m d^2 + m \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} m d^2 \quad ,$$

come ricavato direttamente nell'esempio 6.10.

Esempio 6.12

Calcolare il momento d'inerzia di una lastra piana omogenea rettangolare, di lati a e b e massa m , rispetto ad un asse z di rotazione ortogonale alla lastra e passante per il suo centro.

Soluzione

Sulla lastra della figura 6.30 è tracciato un elemento a forma di asta sottile, lungo a , largo dy , con il centro distante y dall'origine e di massa $dm = \rho dS = \rho a dy$. Il suo momento d'inerzia, per (6.20), è

$$dI = \frac{1}{12} dm a^2 + dm y^2$$

e il momento d'inerzia della lastra, di massa $m = \rho ab$, risulta

$$\begin{aligned} I_z &= \int_S dI = \frac{1}{12} m a^2 + \int y^2 dm = \frac{1}{12} m a^2 + \rho a \int_{-b/2}^{b/2} y^2 dy \\ &= \frac{1}{12} m a^2 + \rho a \frac{b^3}{12} = \frac{1}{12} m (a^2 + b^2). \end{aligned}$$

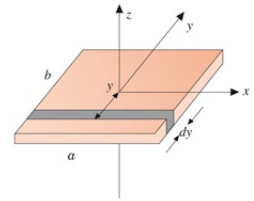


FIGURA 6.30
(Esempio 6.12)

Visualizza Soluzione

Esempio 6.13

Calcolare il momento d'inerzia di un sistema costituito da un'asta omogenea di lunghezza d e massa m , con agli estremi due sfere omogenee di raggio R e massa M (i centri delle sfere si trovano sulla retta individuata dall'asta) rispetto ad un asse passante per il centro C dell'asta e a questa ortogonale.

Soluzione

Calcoliamo il momento di inerzia di una delle due sfere rispetto all'asse di rotazione, applicando il teorema di H.S.:

$$I_s = \frac{2}{5} M R^2 + M \left(\frac{d}{2} + R\right)^2 \quad ;$$

$d/2 + R$ è la distanza tra il centro della sfera e il centro dell'asta. Per l'asta

$I_a = \frac{1}{12} m d^2$ e in totale

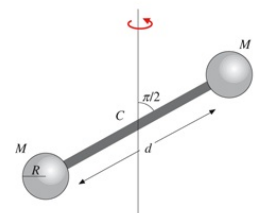


FIGURA 6.31
(Esempio 6.13)

$$I = 2 I_s + I_a = 2 M \left[\frac{2}{5} R^2 + \left(\frac{d}{2} + R \right)^2 \right] + \frac{1}{12} m d^2 .$$

Visualizza Soluzione

Esempio 6.14

Calcolare il momento d'inerzia di un cilindro cavo sottile che ruota attorno ad un asse ortogonale all'asse del cilindro e passante per il centro. La massa del cilindro è m , il raggio R , la lunghezza d .

Soluzione

Suddividiamo il cilindro in tanti anelli sottili; ciascun anello, di massa dm , dista x dall'asse di rotazione e ha rispetto a questo il momento d'inerzia

$$dI = \frac{1}{2} dm R^2 + dm x^2 ,$$

secondo l'esempio 6.11 e il teorema di H.S. La massa dell'anello spesso dx è $dm = 2\pi R \rho dx$, la massa del cilindro è $m = 2\pi R \rho d$.

Il momento d'inerzia totale si ottiene integrando tra zero e $d/2$ e moltiplicando per 2:

$$\begin{aligned} I &= \int dm R^2 + \int 2 dm x^2 = 2\pi R^3 \rho \int_0^{d/2} dx + 4\pi R \rho \int_0^{d/2} x^2 dx \\ &= \pi R^3 \rho d + \frac{1}{6} \pi R \rho d^3 = \frac{1}{2} m R^2 + \frac{1}{12} m d^2 . \end{aligned}$$

Se il cilindro fosse pieno, sarebbe $I = \frac{1}{2} m R^2 + \frac{1}{12} m d^2$

feaagKart1ev2aaatCvAUfeBSjuyZL2yd9gzLbvyNv2CaerbuLwBLn
hiov2DGi1BTfMBaeXatLxBI9gBaerbd9wDYLwzYbItLDharqqubsr
4rNCHbGeaGqiVu0Je9sqqrpepCoxbbL8F4rqrFfpeeaOxe9Lq=Jc9
vqaqppemoxbba9pwe9Q8fso=yqaqpepae9pg0FirpepeKkFroxfr=x
fr=xb9adbaqaeeGaciGaaiaabeqaamaabaabaaGcbaGaamysaiabg2
da9maalaabaGaaGymaaqaiaaisdaaaGaamyBaiaadkfadaahaaWc
beqaiaaikaadaaGccqGHRAWkdaWcaaqaiaaigdaaeacaaIXaGaaG
OmaaaacaWGTbGaamizamaaCaaaleqabaGaaGOmaaaaaa@41F7@ .

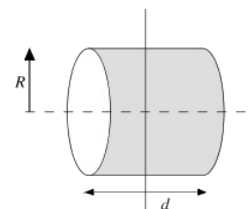


FIGURA 6.32
(Esempio 6.14)

Visualizza Soluzione

Teorema di H.S. e teorema di König

Riprendiamo in esame l'espressione (6.15) dell'energia cinetica di rotazione, dove I_z è il momento d'inerzia del corpo rigido rispetto all'asse z di rotazione, e applichiamo il teorema di H.S. (6.20):

$$E_k = \frac{1}{2} (I_z + m a^2) \omega^2 = \frac{1}{2} I_z \omega^2 + \frac{1}{2} m a^2 \omega^2 ;$$

I_z' è il momento d'inerzia rispetto ad un asse passante per il centro di massa e parallelo all'asse z , mentre a è la distanza tra i due assi. D'altra parte $a\omega$ rappresenta la velocità v_{CM} del centro di massa, che percorre una traiettoria circolare di raggio a rispetto all'asse z ; quindi

$$E_k = \frac{1}{2} I_z \omega^2 + \frac{1}{2} m v_{CM}^2 ,$$

in accordo col risultato del teorema di König per l'energia cinetica (4.17) e con le caratteristiche del moto rigido: quando il centro di massa non è sull'asse di rotazione, l'energia cinetica è data dalla somma di $E_k = \frac{1}{2} I_z \omega^2$, tipico della rotazione che costituisce il moto rispetto al centro di massa, e di $E_{k, CM} = \frac{1}{2} m v_{CM}^2$, energia cinetica del centro di massa.

Avevamo preannunciato questo risultato nel paragrafo 6.2 con riferimento alla figura 6.6. Abbiamo adesso la prova quantitativa che l'energia cinetica non dipende dal fatto di considerare il moto una pura rotazione rispetto all'asse z oppure una rototraslazione, con rotazione rispetto all'asse z' passante per il centro di massa. Si noti che in questo tipo di rototraslazione la velocità di traslazione e quella di rotazione non sono indipendenti.

Esempio 6.15

Un disco posto in un piano orizzontale ruota attorno ad un asse verticale distante $a = 0.1$ m dal suo centro; la massa del disco è $m = 6$ kg, il raggio è $R = 0.2$ m; la velocità angolare vale $\omega = 12$ rad/s. Calcolare la forza che deve essere esercitata dai supporti sull'asse per permettere la rotazione, il momento della forza peso rispetto al punto O , l'energia cinetica del disco. Se, partendo da fermo, il disco deve raggiungere la velocità di regime in 4 s, che momento costante bisogna applicare? Quanto vale durante la fase di accelerazione l'accelerazione tangente del centro di massa?

Soluzione

La forza sull'asse deve eguagliare la forza centripeta applicata al centro di massa, $m\omega^2 a = 86.4$ N. Il momento della forza peso è $M = mga = 5.9$ Nm. Il momento d'inerzia rispetto all'asse di rotazione è

$$I = \frac{1}{2} m R^2 + m a^2 = 0.12 + 0.06 = 0.18 \text{ kg m}^2 \Rightarrow E_k = \frac{1}{2} I \omega^2 = 12.96 \text{ J} .$$

Oppure $E_k = \frac{1}{2} I' \omega^2 + \frac{1}{2} m v_{CM}^2 = \frac{1}{2} (\frac{1}{2} m R^2) \omega^2 + \frac{1}{2} m (\omega a)^2 = 8.64 + 4.32 = 12.96 \text{ J}$

il primo valore è l'energia di rotazione rispetto al centro di massa, il

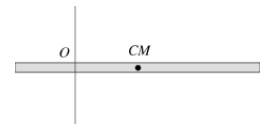


FIGURA 6.33
(Esempio 6.15)

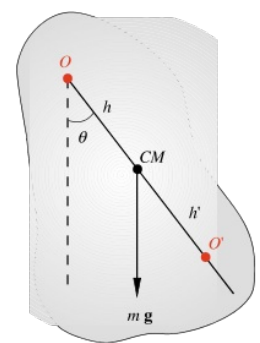


FIGURA 6.34
Esempio 6.15

secondo l'energia di traslazione del centro di massa. Da $\omega = \alpha t$ si ricava $\alpha = 3 \text{ rad/s}^2$ e $M = I\alpha = 0.54 \text{ Nm}$. Infine $a_{CM, T} = \alpha a = 0.3 \text{ m/s}^2$.

Visualizza Soluzione

6.7 Pendolo composto

Si chiama *pendolo composto*, o pendolo fisico, ogni corpo rigido che possa oscillare, per azione del suo peso, in un piano verticale attorno ad un asse orizzontale non passante per il centro di massa. In figura 6.34 è rappresentata la sezione del pendolo contenente il centro di massa CM ; O è la traccia dell'asse di rotazione, ortogonale al foglio, e h è la distanza del centro di massa da O .

Se si sposta il pendolo composto dalla posizione di equilibrio statico ($\theta = 0$, centro di massa sulla retta verticale passante per O), sia a destra che a sinistra, l'azione del peso è tale da riportare il pendolo verso la posizione di equilibrio.

Il momento della forza peso, che agisce come un momento di richiamo verso $\theta = 0$, è parallelo all'asse di rotazione e vale $M = -mgh \sin\theta$. Se non esistono momenti di forze di attrito nella rotazione attorno all'asse, gli eventuali momenti dovuti alle reazioni dei supporti sono ortogonali all'asse stesso e pertanto l'equazione del moto è (6.14):

$$\frac{dL_z}{dt} = I_z \alpha = I_z \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgh \sin\theta \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgh}{I_z} \sin\theta = 0 \quad ;$$

I_z è il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse di rotazione orizzontale, z ; per il teorema di H.S., $I_z = I_c + m h^2$.

Se l'ampiezza delle oscillazioni è piccola, $\sin\theta \cong \theta$, e si ottiene

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgh}{I_z} \theta = 0 \quad ,$$

che è l'equazione del moto armonico e ha la soluzione

$$\theta = \theta_0 \sin(\Omega t + \phi) \quad .$$

La pulsazione è $\Omega = \sqrt{mgh / I_z}$ e il periodo vale

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I_z}{mgh}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad ; \quad (6.21)$$

$l = I_z / mh$ rappresenta la *lunghezza ridotta del pendolo composto* e corrisponde alla lunghezza del filo di un pendolo semplice che oscilla con lo stesso periodo.

Lunghezza ridotta del pendolo composto

Quando l'ampiezza dell'oscillazione è grande il pendolo si muove ancora di moto periodico, ma non più armonico (si riveda la discussione a proposito del pendolo semplice nel paragrafo 2.13).

Osserviamo che, posto $h' = I_c / mh$ ovvero $I_c = mh h'$, si ha

$$l = \frac{I_z}{mh} = \frac{I_c + mh^2}{mh} = \frac{I_c}{mh} + h = h' + h > h \quad ;$$

la lunghezza l individua rispetto a O un punto O' distante h' dal centro di massa (come mostrato in figura 6.34). Se facciamo oscillare il pendolo rispetto ad un asse orizzontale passante per O' (e parallelo al precedente asse), la distanza tra il centro di oscillazione e il centro di massa è ora h' . Chiamiamo I' il momento d'inerzia del corpo rispetto al nuovo asse di rotazione; la nuova lunghezza ridotta è

$$l' = \frac{I'}{m h'} = \frac{I_c + m h^2}{m h'} = \frac{m h h' + m h^2}{m h'} = h + h' = l \quad ,$$

eguale alla precedente. I due assi passanti per O e O' si chiamano *assi reciproci* e concludiamo che il periodo di oscillazione attorno ai due assi reciproci è lo stesso.

Il pendolo fisico viene impiegato per misurare accuratamente il valore dell'accelerazione di gravità g : la precisione può raggiungere una parte su 10^6 . Nel dispositivo detto pendolo reversibile di Kater il corpo è un'asta che può essere sospesa in due punti O e O' : i due assi di rotazione passanti per O e O' sono all'incirca reciproci. Si possono fare scorrere lungo l'asta due piccole masse, in modo da variare il momento d'inerzia e la posizione del centro di massa, fino a trovare una configurazione in cui i periodi di oscillazione rispetto ai due assi sono eguali. D'altra parte la distanza fissa $l = OO'$ è misurabile con precisione. Pertanto dalla misura del periodo si ricava g attraverso (6.21).

6.8 Moto di puro rotolamento

Passiamo adesso a considerare una situazione fisica differente in cui l'asse di rotazione non è un asse materiale, con supporti e cuscinetti, bensì un asse geometrico che si sposta insieme al corpo rigido. Questo, di forma cilindrica o sferica, si trova sopra un piano e si muove rispetto ad esso. Se le velocità di tutti i punti sono eguali tra loro e parallele al piano abbiamo un moto di traslazione e il corpo striscia sul piano. In generale però il corpo in questione rotola sul piano e il punto di contatto ha velocità non nulla rispetto al piano: si dice allora che il *corpo rotola e striscia*. Se invece la velocità del punto di contatto è nulla, si ha un *moto di puro rotolamento*, le cui proprietà vogliamo studiare. L'esempio pratico immediato di questo problema è il moto di una ruota.

In ogni intervallo di tempo dt il corpo che rotola senza strisciare può venire considerato come se ruotasse rispetto ad un asse, fisso durante dt , passante per il punto di contatto C e ortogonale al piano della figura 6.35, con velocità angolare ω .

La velocità di ogni punto del corpo di conseguenza è ortogonale alla linea che congiunge il punto con C ed è in modulo proporzionale alla distanza da C , $v_p = \omega |PC|$. In un intervallo dt successivo il contatto avviene in un altro punto C' , infinitamente vicino a C , e si ripete la rotazione attorno ad un altro asse fisso passante per C' e così di seguito.

È evidente che deve agire una forza per tenere fermo, nell'intervallo dt , il punto C : si tratta di una *forza di attrito statico* (il punto C è fermo) che si esercita tra il piano e il corpo.

La velocità del punto C , distante r dal centro di massa, si può sempre scrivere $\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_{CM} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, somma della velocità del centro di massa e della velocità di C relativa al centro di massa; si ricordi che la velocità angolare, rispetto ad un asse passante per il centro di massa parallelo all'asse fisso o rispetto a quest'ultimo, è sempre la stessa. La condizione di puro rotolamento è $\mathbf{v}_C = 0$ e quindi

$$\mathbf{v}_{CM} = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

(nella figura 6.36 $\boldsymbol{\omega}$ è diretto verso il foglio, \mathbf{r} da CM a C e quindi $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ risulta opposto a \mathbf{v}_{CM}). In modulo

$$v_{CM} = \omega r \Rightarrow a_{CM} = \alpha r ; \quad (6.22)$$

nel moto di puro rotolamento esiste una precisa relazione tra la velocità con cui avanza il centro di massa e la velocità angolare, cioè queste due grandezze non sono indipendenti.

Nel complesso la successione di rotazioni infinitesime attorno al punto di contatto istantaneo equivale ad una rototraslazione in cui il centro di massa

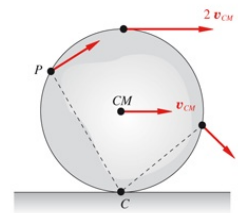


FIGURA 6.35

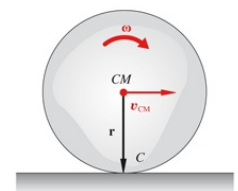


FIGURA 6.36

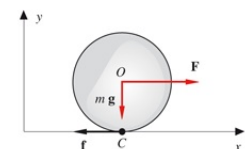


FIGURA 6.37

avanza con velocità v_{CM} mentre il corpo ruota con velocità angolare ω rispetto al centro di massa.

Trattiamo inizialmente il caso di un corpo di massa m e raggio r che rotola senza strisciare su una superficie piana orizzontale sotto l'azione di una forza orizzontale \mathbf{F} costante applicata all'asse (figura 6.37). Sul corpo agiscono anche la forza peso $m\mathbf{g}$ e la reazione del piano \mathbf{R} , che ha una componente normale \mathbf{N} e una componente tangenziale \mathbf{f} (forza di attrito statico). Dato che la forza \mathbf{F} spinge tutto il corpo verso destra, la reazione \mathbf{f} deve avere il verso indicato in figura per tenere fermo il punto di contatto.

La legge del moto del centro di massa è

$$\mathbf{F} + \mathbf{R} + m\mathbf{g} = m\mathbf{a}_{CM} \quad ,$$

che proiettata sugli assi x e y dà rispettivamente

$$F - f = ma_{CM} \quad , \quad N - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad N = mg \quad .$$

Il teorema del momento angolare, scelto il centro di massa O come polo, si scrive

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{f} = I\boldsymbol{\alpha} \quad \Rightarrow \quad rf = I\alpha = I \frac{a_{CM}}{r} \quad .$$

Facendo sistema tra questa equazione e l'equazione del moto lungo l'asse x si ricavano le due incognite a_{CM} e f :

$$a_{CM} = \frac{F}{m \left(1 + \frac{I}{mr^2} \right)} \quad , \quad f = \frac{F}{1 + \frac{mr^2}{I}} \quad . \quad (6.23)$$

È essenziale notare che f non può assumere qualsiasi valore: essa non può superare la massima forza di attrito statico, ovvero deve essere soddisfatta la disequaglianza

$$f \leq \mu_s N = \mu_s mg \quad \Rightarrow \quad F \leq \mu_s mg \left(1 + \frac{mr^2}{I} \right) = F_{\text{lim}} \quad .$$

Pertanto il moto può essere di puro rotolamento solo se la forza applicata non supera il valore limite indicato; altrimenti il corpo rotola e striscia contemporaneamente.

Invece di spingere il corpo, si può applicare all'asse un momento costante \mathbf{M} (figura 6.38), per esempio tramite un motore. Questa volta l'azione del momento tende a far slittare verso sinistra il punto di contatto e \mathbf{f} deve avere il verso indicato.

Dalle equazioni

$$\mathbf{R} + m\mathbf{g} = m\mathbf{a}_{CM} \quad , \quad \mathbf{M} + \mathbf{r} \times \mathbf{f} = I\boldsymbol{\alpha}$$

ricaviamo

$$N = mg \quad , \quad f = ma_{CM} \quad , \quad M - rf = I \frac{a_{CM}}{r}$$

$$\Rightarrow a_{CM} = \frac{M}{mr \left(1 + \frac{I}{mr^2}\right)} \quad , \quad f = \frac{M}{r \left(1 + \frac{I}{mr^2}\right)} \quad . \quad (6.24)$$

Anche ora bisogna verificare che

$$f \leq \mu_s N = \mu_s mg \quad \Rightarrow \quad M \leq \mu_s mgr \left(1 + \frac{I}{mr^2}\right) = M_{\text{lim}} \quad .$$

Mentre sotto l'azione di \mathbf{F} la reazione tangente \mathbf{f} si oppone al moto, a causa dell'azione di \mathbf{M} \mathbf{f} favorisce il moto, anzi è la forza che causa l'accelerazione del centro di massa: quando un motore fa girare una ruota, è l'attrito col suolo che la spinge avanti.

Nel caso più generale si ha l'azione contemporanea di una forza e di un momento, applicati come nelle figure 6.37 e 6.38. Non possiamo decidere a priori qual è il verso della forza di attrito \mathbf{f} , per cui la assumiamo parallela e concorde all'asse x , salvo capire il verso effettivo dal segno della soluzione. Le equazioni del moto sono

$$F + f = ma_{CM} \quad , \quad M - rf = I \frac{a_{CM}}{r}$$

$$\Rightarrow a_{CM} = \frac{1}{m} \frac{F + \frac{M}{r}}{1 + \frac{I}{mr^2}} \quad , \quad f = \frac{\frac{M}{r} - \frac{I}{mr^2} F}{1 + \frac{I}{mr^2}} \quad , \quad (6.25)$$

con $f \leq \mu_s N = \mu_s mg$. La forza di attrito risulta concorde o discorde rispetto all'asse x a seconda che M sia maggiore o minore di IF/mr . In particolare, se $M = IF/mr$, f è nulla e $a_{CM} = F/m$: è possibile un moto accelerato anche in assenza di attrito, ad esempio su una superficie ghiacciata.

Discutiamo alcuni aspetti comuni a tutti e tre gli esempi visti. Il moto di traslazione e il moto di rotazione sono entrambi uniformemente accelerati: a_{CM} e α sono costanti se la sollecitazione esterna è costante. Conoscendo le condizioni iniziali da a_{CM} si calcola $v_{CM}(t)$ e da α si calcola $\omega(t)$; in realtà basta un solo calcolo perché vale (6.22). In assenza di forze e momenti il corpo resta in quiete o compie una rototraslazione uniforme: a_{CM} e α sono nulle, v_{CM} e ω costanti. Può anche accadere che al corpo in movimento venga applicata una forza costante negativa, nel senso che si oppone al moto, oppure un momento frenante: avremo allora un moto uniformemente decelerato.

Le forme più semplici di corpi che rotolano sono l'anello, il cilindro cavo, il disco, il cilindro pieno, la sfera (piena o cava), i cui momenti d'inerzia rispetto ad un asse passante per il centro di massa e parallelo all'asse di rotazione

istantanea passante per il punto di contatto sono stati dati nella tabella del paragrafo 6.5. Spesso nelle formule che abbiamo ricavato viene utilizzata (6.19), così che al posto di I/m compare k^2 .

Suggeriamo come esercizio di scrivere l'equazione del momento angolare assumendo C come polo invece di O . Le equazioni sono modificate e bisogna ricordare anche di sostituire I con $I + mr^2$, in accordo col teorema di H.S.; le soluzioni sono ovviamente le stesse.

Le situazioni che abbiamo descritto sono tra le più semplici; in altri casi la forza può essere applicata in un punto diverso dal centro e non essere orizzontale, possono esserci più forze, la superficie di rotolamento può essere inclinata o curva (vedi esempi 6.17 e 6.19). Le equazioni vettoriali di partenza sono quelle viste; salvo casi particolari, la forza di attrito statico risulta diversa da zero e bisogna sempre verificare che sia inferiore al valore massimo possibile.

In conclusione, nel moto di rotolamento di un corpo rigido è possibile, con opportuni valori delle forze e dei momenti esterni, realizzare le condizioni per cui la reazione del piano è tale da tenere fermo il punto di contatto, così che il corpo rotola senza strisciare. Il puro rotolamento è la situazione che si cerca sempre di ottenere quando un corpo deve rotolare, ad esempio per le ruote di un qualsiasi veicolo, su strada o su rotaia, anche nella fase di frenata.

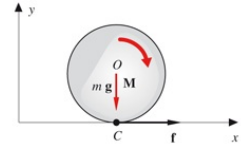


FIGURA 6.38

Conservazione dell'energia. Attrito volvente

Al moto di puro rotolamento sotto l'azione di forze conservative, come sono le forze costanti e in particolare la forza peso, si può applicare la legge di conservazione dell'energia meccanica. Infatti la forza di attrito, che è normalmente diversa da zero, agisce su un punto fermo per cui lo spostamento è nullo ed è quindi nullo il lavoro. Vedremo vari esempi tra breve.

Come avviene sempre in meccanica, la conservazione dell'energia è in realtà un caso limite. Si osserva sperimentalmente che un corpo che rotola senza strisciare sopra un piano orizzontale, in assenza di forze e momenti applicati, si arresta dopo un certo tempo. Deve esistere perciò un'altra forma di attrito (*attrito volvente o di rotolamento*), che viene attribuito alla deformazione locale del piano ed è schematizzato con l'azione di un momento $M_v = h m g$, che si oppone al moto; h è il *coefficiente di attrito volvente*, espresso in metri. Per vincere il momento dovuto all'attrito volvente si deve applicare al corpo di forma circolare, di massa m e raggio r , una forza di trazione $F_2 \geq h m g/r$.

Attrito volvente

Consideriamo ad esempio un cilindro di acciaio ($m = 10^3$ kg, $r = 0.2$ m) posto sopra un piano di acciaio; siano $\mu_s = 0.2$ e $h = 5 \cdot 10^{-5}$ m rispettivamente il coefficiente di attrito statico e di attrito volvente. La trazione limite per farlo strisciare è $F_1 = \mu_s m g = 1960$ N, mentre quella per farlo rotolare è $F_2 = h m g/r = 2.5$ N. Dato che $F_2 \ll F_1$ si capisce il vantaggio della ruota rispetto alla slitta!

Proprio per la piccolezza dell'effetto, dopo averlo qui menzionato noi trascureremo sempre il momento di attrito volvente.

Esempio 6.16

Un disco rigido rotola senza strisciare su un piano orizzontale; la sua massa è $m = 5$ kg, il raggio è $r = 0.2$ m, il coefficiente di attrito statico è $\mu_s = 0.3$. Al disco è applicata la forza $F = 21$ N, come in figura 6.37. Calcolare il valore del momento che bisogna applicare alla ruota, come in figura 6.38, per avere la stessa accelerazione del centro di massa e il valore della forza di attrito statico nei due casi.

Soluzione

Utilizziamo le relazioni (6.23), con $I = \frac{1}{2} mr^2$ e quindi $I/mr^2 = \frac{1}{2}$:

$$a_{CM} = \frac{21}{5 \left(1 + \frac{1}{2}\right)} = 2.8 \text{ m/s}^2, \quad f_1 = \frac{21}{1 + 2} = 7 \text{ N}.$$

La massima forza di attrito statico è $\mu_s mg = 14.7$ N, superiore a f per cui il moto di puro rotolamento può avvenire (F_{lim} vale 44.1 N).

Dal confronto tra (6.23) e (6.24) si vede che con un momento $M = rF$ si produce la stessa accelerazione, quindi $M = 4.2$ Nm. La corrispondente forza di attrito statico è

$$f_2 = \frac{4.2}{0.2 \left(1 + \frac{1}{2}\right)} = 14 \text{ N} = 2f_1,$$

anch'essa inferiore, seppur di poco, al valore limite 14.7 N (M_{lim} vale 4.4 Nm). Se prendiamo le espressioni delle forze di attrito nei due casi e imponiamo $f_1 < f_2$ troviamo, se $M = rF$,

$$\frac{F}{1 + \frac{mr^2}{I}} < \frac{F}{1 + \frac{I}{mr^2}} \Rightarrow I^2 < (mr^2)^2.$$

In effetti, per i corpi di forma semplice che abbiamo elencato, I è sempre minore di mr^2 eccettuato il caso dell'anello (o del guscio cilindrico) in cui $I = mr^2$. Ciò vuol dire che $f_1 \leq f_2$: a parità di accelerazione quando agisce un momento la forza di attrito richiesta è maggiore (o eguale) che quando agisce una forza. Nel nostro caso numerico se raddoppiamo la forza il moto è ancora di puro rotolamento, ma se raddoppiamo il momento il corpo rotola e striscia.

Visualizza Soluzione

Esempio 6.17

Determinare la velocità che raggiunge alla fine del percorso un corpo rigido che rotola senza strisciare lungo un piano inclinato.

Soluzione

Applichiamo la conservazione dell'energia, assumendo che per $t = 0$ il corpo sia in quiete. La variazione di energia potenziale, data da (4.21), è mgh ; per l'energia cinetica finale utilizziamo il teorema di König (4.17) e (6.19):

$$m g h = \frac{1}{2} I_c \omega^2 + \frac{1}{2} m v_{CM}^2 = \frac{1}{2} m k^2 \frac{v_{CM}^2}{r^2} + \frac{1}{2} m v_{CM}^2 \quad .$$

Pertanto

$$v_{CM} = \sqrt{\frac{2 g h}{1 + \frac{k^2}{r^2}}} < \sqrt{2 g h} \quad .$$

Se il corpo scivolasse senza attrito arriverebbe in fondo con velocità maggiore, $v_{CM} = \sqrt{2gh}$. Invece, se rotola senza strisciare, l'energia potenziale si trasforma in energia cinetica di traslazione $\frac{1}{2} m v_{CM}^2$ e in energia cinetica di rotazione nel moto rispetto al centro di massa $\frac{1}{2} I_c \omega^2$. Per questa ragione la velocità finale deve essere inferiore a $\sqrt{2gh}$.

L'accelerazione e la forza di attrito statico agente durante il moto di puro rotolamento si ottengono dalle equazioni

$$m g \sin\theta - f = m a_{CM} \quad , \quad f r = I_c \alpha = m k^2 \frac{a_{CM}}{r} \quad ,$$

$$a_{CM} = \frac{g \sin\theta}{1 + \frac{k^2}{r^2}} \quad , \quad f = \frac{m g \sin\theta}{1 + \frac{r^2}{k^2}} \quad ,$$

che sono le (6.23) con $I = m k^2$ e $F = m g \sin\theta$. Inoltre deve essere soddisfatta la condizione

$$f \leq \mu_s m g \cos\theta \Rightarrow \tan\theta \leq \mu_s \left(1 + \frac{r^2}{k^2} \right) \quad .$$

Il significato di quest'ultimo risultato è che, per avere moto di puro rotolamento, l'angolo di inclinazione del piano non deve superare il valore

$$\theta_M = \arctg \mu_s \left(1 + \frac{r^2}{k^2} \right) \quad .$$

Osserviamo, per curiosità, che in una gara tra un anello, un disco e una sfera, di eguale massa e raggio, che scendono rotolando senza strisciare lungo un piano inclinato, la vittoria spetta alla sfera e l'ultimo posto all'anello. Infatti dalla tabella del paragrafo 6.5 per l'anello $k^2 / r^2 = 1$ e $v_{CM} = \sqrt{gh}$, per il disco $k^2 / r^2 = 1/2$ e $v_{CM} = \sqrt{1.33gh}$, per la sfera $k^2 / r^2 = 2/5$ e $v_{CM} = \sqrt{1.43gh}$. A parità di massa e raggio, la differenza sta nella distribuzione della massa rispetto all'asse di rotazione.

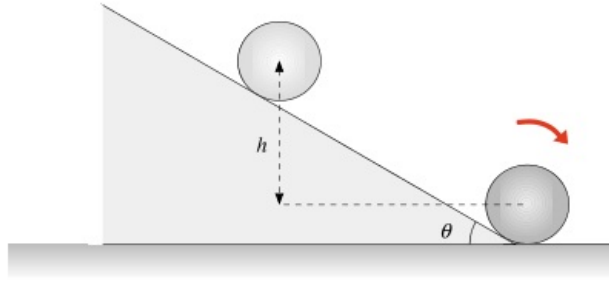


FIGURA 6.39

Visualizza Soluzione

Esempio 6.18

Un disco, di raggio r e massa m , scende srotolando un filo, che non slitta rispetto al bordo del disco. Determinare l'accelerazione del centro di massa e la tensione del filo.

Soluzione

Il moto del centro di massa obbedisce alla relazione

$$m g - T = m a_{CM}$$

mentre per il moto rispetto al centro di massa si ha

$$T r = I_c \alpha = \frac{1}{2} m r^2 \frac{a_{CM}}{r} .$$

Pertanto

$$a_{CM} = \frac{2}{3} g \quad , \quad T = \frac{1}{3} m g .$$

Il moto è uniformemente accelerato con velocità

$$v_{CM} = \frac{2}{3} g t \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{2 g t}{3 r}$$

se la velocità iniziale è nulla.

Si noti che la tensione del filo quando il disco è in moto è inferiore al valore mg che si avrebbe se il disco fosse fermo.

Il problema può essere risolto anche con la conservazione dell'energia, analogamente a quanto visto nell'esempio 6.5. Assumendo l'asse y verticale orientato verso l'alto

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_c \omega^2 + m g y_{CM} &= \text{costante} \\ \Rightarrow \frac{3}{4} m v_{CM}^2 + m g y_{CM} &= \text{costante} \end{aligned}$$

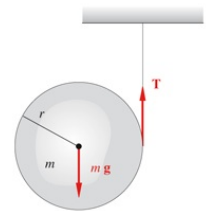


FIGURA 6.40

(Esempio 6.18)

in quanto $\omega = v_{CM}/r$ e $I_c = \frac{1}{2} m r^2$. Si deriva rispetto al tempo:

$$\frac{3}{2} m v_{CM} a_{CM} - m g v_{CM} = 0 \Rightarrow a_{CM} = \frac{2}{3} g .$$

Visualizza Soluzione

Esempio 6.19

Un cilindro di raggio $R/4$ rotola senza strisciare dentro un tubo di raggio R . Nella metà di destra del tubo l'attrito è nullo. Se all'istante iniziale il cilindro è fermo e la quota del centro di massa è $R/2$, determinare la posizione di arrivo del cilindro e la velocità angolare ω .

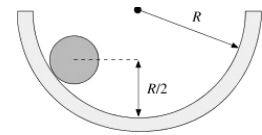


FIGURA 6.41
(Esempio 6.19)

Nel punto più basso il centro di massa è sceso della quantità $R/2 - R/4 = R/4$

rispetto alla posizione iniziale. Pertanto, conservando l'energia,

$$m g \frac{R}{4} = \frac{1}{2} I_c \omega^2 + \frac{1}{2} m v_{CM}^2$$

con $I_c = \frac{1}{2} m (R/4)^2$ e $v_{CM} = \omega R/4$. Allora, nel punto più basso

$$v_{CM} = \sqrt{\frac{gR}{3}} \quad , \quad \omega = 4 \sqrt{\frac{g}{3R}} .$$

Quando risale nella parte destra il cilindro non incontra attrito e quindi ω rimane costante, come pure l'energia cinetica di rotazione:

$$\frac{1}{2} I_c \omega^2 = \frac{1}{12} m g R = \frac{1}{3} m g \left(\frac{R}{4} \right) = \text{costante} .$$

L'energia cinetica di traslazione si trasforma invece in energia potenziale:

$$\frac{1}{2} m v_{CM}^2 = \frac{1}{6} m g R = \frac{2}{3} m g \left(\frac{R}{4} \right) = m g \Delta h \Rightarrow \Delta h = \frac{R}{6} = \frac{2}{3} \frac{R}{4} .$$

La quota finale del centro di massa è $R/4 + 2/3 R/4 = 5/3 R/4$; questo valore è pari a $5/6$ del valore iniziale $R/2$. In conclusione, il centro di massa è sceso di $R/4$ e poi risale di $2/3 R/4$: un terzo dell'energia potenziale iniziale si è

trasformata in energia cinetica di rotazione, come visto prima.

Nell'istante in cui il corpo si ferma e torna indietro, la sua energia è dunque cinetica di rotazione e potenziale; quando ripassa nel punto più basso, l'energia è tutta cinetica. Nella risalita lungo il tratto con attrito il moto non è di puro rotolamento (il corpo ruota nel verso sbagliato) e il momento dell'attrito frena la rotazione, con conseguente dissipazione di energia. Perciò alla fine, dopo una serie di oscillazioni, il corpo si ferma.

Visualizza Soluzione

Esempio 6.20

Un cilindro pieno, di massa $m_1 = 20$ kg e raggio $r = 0.25$ m, rotola senza strisciare su un piano orizzontale; all'asse del cilindro è applicato il momento costante $M = 30$ Nm ed è appeso, tramite un filo inestensibile e di massa trascurabile, un corpo di massa $m_2 = 10$ kg, come in figura 6.42. Calcolare l'accelerazione del centro di massa del cilindro, la tensione del filo e il minimo valore ammesso per il coefficiente di attrito.

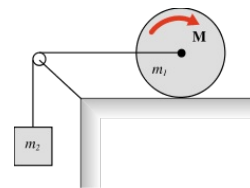


FIGURA 6.42

Soluzione

Scriviamo le tre equazioni del moto:

$$\begin{array}{ll} \text{moto del CM} & f - T = m_1 a_{CM} \\ \text{rotazione} & M - rf = I a_{CM} / r \\ \text{moto di } m_2 & T - m_2 g = m_2 a_{CM} \end{array}$$

con $I = \frac{1}{2} m_1 r^2 = 0.625$ kgm² ; **f** deve essere opposta a **T**. Risolviamo il sistema trovando per l'accelerazione

$$a_{CM} = \frac{\frac{M}{r} - m_2 g}{\frac{3}{2} m_1 + m_2} = 0.55 \text{ m/s}^2 \quad .$$

Dalla terza equazione si ricava $T = 103.5$ N e dalla prima $f = 114.5$ N. Dovendo essere $f \leq \mu_s m_1 g$ risulta $\mu_s \geq 0.58$.

Visualizza Soluzione

6.9 Impulso angolare. Momento dell'impulso

Nel paragrafo 2.3 abbiamo visto la forma integrale (2.3) della legge di Newton (2.2): l'impulso della forza è eguale alla variazione della quantità di moto, proprietà nota come teorema dell'impulso.

Una deduzione analoga si può fare a proposito dell'equazione (4.11). L'azione di un momento durante un intervallo finito di tempo causa una variazione finita del momento angolare:

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M} dt = \mathbf{L}(t_2) - \mathbf{L}(t_1) = \Delta \mathbf{L} \quad . \quad (6.26)$$

L'integrale del momento nel tempo si chiama *impulso angolare* o *impulso del momento* e la (6.26) si può chiamare teorema dell'impulso angolare. Il rapporto $\Delta \mathbf{L}/(t_2 - t_1)$ dà il valor medio del momento nell'intervallo di integrazione.

Un modo particolare per mettere in rotazione rispetto ad un asse fisso o per fare rotolare un corpo rigido consiste nell'applicazione in un punto determinato del corpo di una forza intensa per un tempo molto breve (forza impulsiva, vedi paragrafo 4.9), ovvero nell'applicazione di un impulso. Con riferimento alla figura 6.43 utilizziamo (6.26) prendendo come polo il centro O di sospensione del corpo:

$$\int \mathbf{M} dt = \int (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) dt = \mathbf{r} \times \int \mathbf{F} dt = \mathbf{r} \times \mathbf{J} = \Delta \mathbf{L} \quad . \quad (6.27)$$

È possibile portare \mathbf{r} fuori dall'integrale perché non dipende dal tempo.

La grandezza $\mathbf{r} \times \mathbf{J}$ si chiama *momento dell'impulso* (della forza). L'applicazione dell'impulso provoca, oltre ad una variazione di quantità di moto, una variazione di momento angolare eguale al momento dell'impulso. Osserviamo che nell'integrale non compaiono le forze di reazione del vincolo perché hanno momento nullo essendo applicate nel polo O . Non compare nemmeno la forza peso perché il suo impulso angolare si assume trascurabile rispetto all'impulso angolare dovuto a \mathbf{F} .

Abbiamo già ricavato nel paragrafo 2.22 espressioni formalmente identiche a (6.26) e (6.27), valide per un punto materiale. La principale differenza, nel caso del corpo rigido, sta nell'espressione del momento angolare oltre che, ovviamente, al tipo di moto che può compiere. Con riferimento a (6.26) poi ricordiamo che \mathbf{M} è il momento risultante delle forze esterne, in generale indipendente dalla loro risultante.

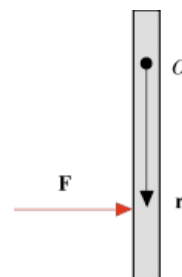


FIGURA 6.43

Esempio 6.21

Un'asta rigida ($m = 2.4$ kg, $d = 0.4$ m) è posata sopra un piano orizzontale liscio ed è collegata in un

estremo ad un asse verticale. In un intervallo di tempo $\Delta t = 0.2$ s viene applicato all'asse un momento (ad esempio accendendo un motore elettrico per il tempo Δt). A seguito di ciò l'asta, inizialmente ferma, entra in rotazione e descrive un giro completo nel piano orizzontale in un tempo $T = 10$ s. Calcolare l'impulso angolare e il valor medio del momento nel tempo Δt . Calcolare anche l'impulso della forza e discutere qualitativamente le reazioni sull'asse.

Soluzione

La velocità angolare dell'asta è $\omega = 2\pi/T = 0.63$ rad/s; il suo momento d'inerzia rispetto all'asse passante per un estremo è $I = md^2/3 = 0.13$ kg m². Pertanto l'asta, inizialmente ferma, ha acquistato il momento angolare

$$L = \Delta L = I\omega = 8.2 \cdot 10^{-2} \text{ kg m}^2/\text{s} = M_m \Delta t \quad .$$

Il valore trovato è eguale all'impulso angolare (6.26) e il valore medio del momento risulta $M_m = L/\Delta t = 0.41$ Nm.

Nell'intervallo Δt la velocità del centro di massa dell'asta passa dal valore zero al valore $v_{CM} = \omega d/2 = 0.13$ m/s; la variazione di quantità di moto è

$$\Delta p = p = m v_{CM} = 0.31 \text{ kg m/s} = J = F_m \Delta t \quad .$$

Abbiamo così trovato l'impulso della forza applicata al corpo, la quale ha valor medio $F_m = \Delta p/\Delta t = 1.55$ N. Si noti che M_m non è eguale a $F_m d/2$ e che dentro F_m ci sono tutte le varie reazioni vincolari. I supporti dell'asse devono applicare la forza centripeta (vedi paragrafo 6.4) e, durante il tempo Δt , esplicitare opportune reazioni impulsive.

Visualizza Soluzione

Esempio 6.22

Si consideri un pendolo composto, costituito da un'asta di lunghezza l e massa m , libera di ruotare attorno ad un asse orizzontale, passante per un suo estremo O . Inizialmente l'asta è ferma in posizione verticale. Si determini l'impulso \mathbf{J} , ortogonale all'asta, che si deve applicare a distanza $r \leq l$ da O per far compiere all'asta una rotazione di 90° .

Soluzione

Il momento dell'impulso, rispetto ad O , è dato in modulo da rJ . Appliciamo (6.27) con $L_{in} = 0$ e quindi $L_{fin} = I\omega = rJ$. I è il momento d'inerzia rispetto all'asse passante per O e vale $\frac{1}{3} ml^2$. La velocità angolare che l'asta acquista a seguito dell'applicazione dell'impulso è

$$\omega = \frac{3 r J}{m l^2} \quad .$$

L'applicazione dell'impulso ha durata così breve da poter considerare l'asta

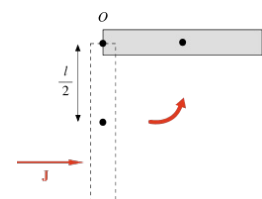


FIGURA 6.44
(Esempio 6.22)

ferma in tale intervallo di tempo.

Subito dopo però l'asta inizia a ruotare e, dopo una rotazione di 90° , il centro di massa si è sollevato di $l/2$, per cui l'energia potenziale dell'asta è aumentata di $mgl/2$. Per la conservazione dell'energia

$$m g \frac{l}{2} = \frac{1}{2} I \omega^2 \Rightarrow J = \frac{m}{r} \sqrt{\frac{g l^3}{3}} .$$

Come nell'esempio 6.21 da ω possiamo calcolare la velocità del centro di massa subito dopo l'applicazione dell'impulso. Risulta

$$v_{CM} = \omega \frac{l}{2} = \frac{3 r J}{2 m l} ,$$

diversa da J/m . Questo perché durante l'applicazione di \mathbf{J} si sviluppa nel polo O una reazione vincolare impulsiva, di cui bisogna tener conto. Anzi, proprio dal calcolo della variazione di quantità di moto, che è $m v_{CM}$, e da J si può determinare l'impulso della reazione. L'impulso di reazione non compare invece nel momento dell'impulso perché rispetto ad O ha momento nullo. In conclusione, bisogna fare attenzione e considerare tutti i possibili contributi nella relazione

$$(m \mathbf{v}_{CM})_{fin} - (m \mathbf{v}_{CM})_{in} = \mathbf{J} ,$$

soprattutto quando il corpo è vincolato.

Visualizza Soluzione

Esempio 6.23

Una sfera omogenea di massa m e raggio r è posta sopra un piano orizzontale scabro; inizialmente la sfera è in quiete. Viene applicato un impulso orizzontale \mathbf{J} , la cui retta di azione passa per il centro della sfera. Determinare il moto della sfera.

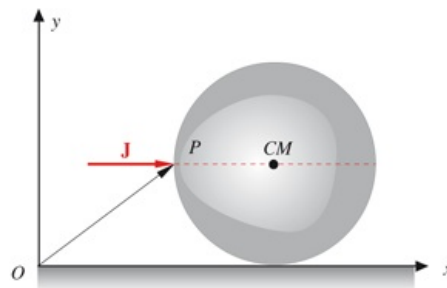


FIGURA 6.45

Soluzione

La velocità iniziale del centro di massa nell'istante successivo all'azione di \mathbf{J} si ottiene applicando il teorema dell'impulso:

$$\mathbf{J} = m \mathbf{v}_{CM} \Rightarrow v_{CM}(0) = \frac{J}{m}$$

(la sfera non è vincolata, la forza di attrito non è impulsiva).

Inoltre da (6.27) prendendo come polo l'origine O del sistema di riferimento, si ha:

$$\mathbf{OP} \times \mathbf{J} = \mathbf{L}_O = \mathbf{L}' + \mathbf{r}_{CM} \times m \mathbf{v}_{CM} = \mathbf{L}' + \mathbf{r}_{CM} \times \mathbf{J} ,$$

dove si è utilizzata (4.16). In modulo $r J = I_c \omega + r J$ e quindi $\omega = 0$: il corpo, nell'istante successivo all'azione dell'impulso, inizia a strisciare con velocità $v_{CM}(0)$, ma non rotola, $\omega(0) = 0$. Successivamente agisce solo la forza di attrito $\mu_d mg$ opposta al moto:

$$m \mathbf{a}_{CM} = -\mu_d m \mathbf{g} \quad , \quad \mathbf{a}_{CM} = -\mu_d \mathbf{g} \quad ,$$

$$v_{CM}(t) = v_{CM}(0) - \mu_d g t = \frac{J}{m} - \mu_d g t \quad .$$

Per effetto del momento della forza di attrito il corpo inizia a rotolare, pur continuando a strisciare. Assumendo come polo il centro di massa

$$\mu_d m g r = I_c \alpha = \frac{2}{5} m r^2 \alpha \quad , \quad \alpha = \frac{5}{2} \mu_d \frac{g}{r} \quad ,$$

$$\omega(t) = \alpha t = \frac{5}{2} \frac{\mu_d g t}{r} \quad .$$

All'istante iniziale $v_{CM} > \omega r$ e finché vale questa diseuguaglianza il corpo prosegue nel suo moto di rotolamento con strisciamento. Poiché però v_{CM} decresce e ω aumenta, ad un certo istante t^* $v_{CM} = \omega r$ ovvero

$$\frac{J}{m} - \mu_d g t^* = \frac{5}{2} \mu_d g t^* \Rightarrow t^* = \frac{2}{7} \frac{J}{\mu_d m g} \quad , \quad v_{CM}(t^*) = \frac{5J}{7m} = \frac{5}{7} v_{CM}(0) \quad .$$

Considerato che non agiscono sulla sfera forze motrici o momenti motori e che è soddisfatta la condizione $v_{CM} = \omega r$, per $t > t^*$ il moto della sfera diventa uniforme e di puro rotolamento.

Notiamo che durante il moto il momento della forza di attrito rispetto ad O è sempre nullo e che quindi, rispetto ad O , si conserva il momento angolare. All'inizio $L = Jr$, durante il moto $L = I_c \omega + r m v_{CM}$; eguagliando e imponendo $v_{CM} = \omega r$ si trova subito $v_{CM} = 5J/7m$. Questo tipo di soluzione non ci dà però il valore di t^* .

Applichiamo ora l'impulso \mathbf{J} ad un'altezza h rispetto al piano del moto, diversa da r , e cerchiamo qual è il valore di h per cui la sfera inizia a muoversi con moto di puro rotolamento.

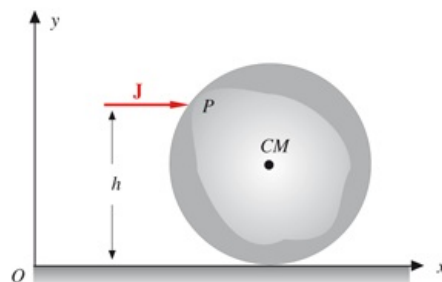


FIGURA 6.46

È sempre $v_{CM}(0) = J / m$. Applichiamo (6.27) con polo nel centro di massa:

$$\mathbf{r} \times \mathbf{J} = \mathbf{L} = I_c \boldsymbol{\omega} \quad , \quad (h - r) J = \frac{2}{5} m r^2 \omega \quad ,$$

$$\omega = \frac{5}{2} \frac{(h - r) J}{m r^2} \quad .$$

Imponendo $J / m = \omega r$ si ottiene $h = 7/5 r$.

Si osservi che con $h > r$ $\mathbf{r} \times \mathbf{J}$ ovvero $\boldsymbol{\omega}$ è diretto verso il foglio, cioè il moto di rotazione è orario, come deve in questo caso. Se fosse $h < r$ $\boldsymbol{\omega}$ sarebbe invece diretto verso il lettore e non si potrebbe realizzare un moto di puro rotolamento (verso destra).

Le situazioni descritte sono tipiche del moto di una palla di biliardo colpita con la stecca.

Visualizza Soluzione

6.10 Teorema di Poinsot. Ellissoide d'inerzia

Affrontiamo adesso il problema del legame tra \mathbf{L} e $\boldsymbol{\omega}$ in generale per arrivare a dimostrare l'esistenza degli assi principali d'inerzia e le relative proprietà. Consideriamo, figura 6.47, un punto qualsiasi O di un corpo rigido e assumiamo un sistema di riferimento con origine in O e con i tre assi x, y, z solidali al corpo stesso. Il versore di un qualsiasi asse di rotazione passante per O si scrive $\mathbf{u} = \alpha \mathbf{u}_x + \beta \mathbf{u}_y + \gamma \mathbf{u}_z$, dove α, β, γ , coseni direttori dell'asse, sono le componenti di \mathbf{u} rispetto ai tre assi di riferimento (si veda il paragrafo 6.1).

Un punto P_i del corpo è individuato dal vettore posizione

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{OP}_i = x_i \mathbf{u}_x + y_i \mathbf{u}_y + z_i \mathbf{u}_z \quad .$$

La sua distanza dall'asse di rotazione è

$$R_i = r_i \sin \theta_i = | \mathbf{u} \times \mathbf{r}_i |$$

e il momento d'inerzia vale

$$m_i R_i^2 = m_i (\mathbf{u} \times \mathbf{r}_i)^2 \quad .$$

Il prodotto vettoriale, espresso tramite le componenti di \mathbf{u} e \mathbf{r}_i (vedi appendice C), si scrive

$$\mathbf{u} \times \mathbf{r}_i = (\beta z_i - \gamma y_i) \mathbf{u}_x + (\gamma x_i - \alpha z_i) \mathbf{u}_y + (\alpha y_i - \beta x_i) \mathbf{u}_z \quad .$$

Eseguendo il quadrato di $\mathbf{u} \times \mathbf{r}_i$ abbiamo il momento d'inerzia di P_i rispetto all'asse di rotazione. Il *momento d'inerzia del corpo* si ottiene sommando su tutti i punti:

$$I = I_{xx} \alpha^2 + I_{yy} \beta^2 + I_{zz} \gamma^2 - 2 I_{xy} \alpha \beta - 2 I_{yz} \beta \gamma - 2 I_{zx} \gamma \alpha \quad , \quad (6.28)$$

dove i coefficienti $I_{j,i}$ hanno le seguenti espressioni:

$$I_{xx} = \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2) \quad \text{momento d'inerzia rispetto all'asse } x$$

$$I_{yy} = \sum_i m_i (x_i^2 + z_i^2) \quad \text{momento d'inerzia rispetto all'asse } y$$

$$I_{zz} = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) \quad \text{momento d'inerzia rispetto all'asse } z$$

$$I_{xy} = \sum_i m_i x_i y_i \quad , \quad I_{yz} = \sum_i m_i y_i z_i \quad , \quad I_{zx} = \sum_i m_i z_i x_i \quad .$$

Gli ultimi tre termini sono detti *prodotti d'inerzia*.

La formula (6.28), che fornisce il momento d'inerzia in funzione dei coseni direttori dell'asse di rotazione, è valida qualunque sia l'asse di rotazione.

Prendiamo ora sull'asse di rotazione il punto geometrico P , la cui distanza da O vale $d = 1 / I$; le coordinate di tale punto sono

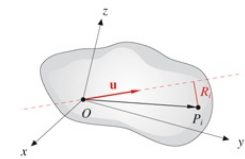


FIGURA 6.47

$$X = \frac{\alpha}{\sqrt{I}} \quad , \quad Y = \frac{\beta}{\sqrt{I}} \quad , \quad Z = \frac{\gamma}{\sqrt{I}} \quad .$$

Infatti, per ricavare i valori delle coordinate di P basta ricordare che l'estremo del vettore \mathbf{u} , che dista di una lunghezza unitaria da O , ha coordinate α, β, γ e quindi un punto che dista d ha coordinate $\alpha d, \beta d, \gamma d$. Dividiamo l'espressione (6.28) proprio per I :

$$1 = I_{xx} X^2 + I_{yy} Y^2 + I_{zz} Z^2 - 2 I_{xy} XY - 2 I_{yz} YZ - 2 I_{zx} ZX. \quad (6.29)$$

Questa relazione dà la condizione a cui soddisfano le coordinate di un qualsiasi punto che dista dall'origine di una lunghezza $1/\sqrt{I}$, essendo I il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse di rotazione individuato dai punti O e P . Geometricamente, il luogo dei punti che soddisfano (6.29) è una superficie tridimensionale detta ellissoide di centro O : nel caso specifico esso prende il nome di *ellissoide d'inerzia del corpo relativo al punto O* .

Il risultato ora ottenuto, valido qualunque sia la distribuzione di massa del corpo e comunque si scelga il punto O , rappresenta il *teorema di Poinsot*: fissato il punto O , in base alle caratteristiche del problema, e tre assi cartesiani con centro in O , è possibile immediatamente calcolare i coefficienti I_{ij} e determinare l'equazione dell'*ellissoide d'inerzia*, che è *fisso rispetto al corpo* e quindi *non dipende dalla scelta del sistema di riferimento, ma solo da O* . Se si prende ora un qualsiasi asse di rotazione, passante per O , e si calcola la distanza tra O e il punto geometrico P di intersezione dell'asse con l'ellissoide, questa vale $1/\sqrt{I}$ e quindi è ottenuto il momento d'inerzia del corpo rispetto a quell'asse. La determinazione, sempre possibile, dell'ellissoide d'inerzia fornisce la conoscenza del momento d'inerzia del corpo rispetto a qualsiasi asse di rotazione passante per il centro dell'ellissoide.

Nel tipo più generale di ellissoide si possono individuare, nel piano equatoriale, un diametro massimo ed uno minimo, tra loro perpendicolari; tali assi, con un terzo perpendicolare a entrambi, vengono chiamati *assi dell'ellissoide*. Se come assi x, y, z solidali al corpo si scelgono proprio gli assi dell'ellissoide, si può dimostrare che la (6.29) assume la forma

$$I_x X^2 + I_y Y^2 + I_z Z^2 = 1, \quad (6.30)$$

dove I_x, I_y, I_z sono i momenti d'inerzia del corpo rispetto agli assi dell'ellissoide e si chiamano *momenti principali d'inerzia*. Gli assi dell'ellissoide, fissi rispetto al corpo, si chiamano *assi principali d'inerzia*. I tre semiassi dell'ellissoide (vedi figura 6.49) hanno lunghezze rispettivamente

$$1/\sqrt{I_x} \quad , \quad 1/\sqrt{I_y} \quad , \quad 1/\sqrt{I_z} \quad .$$

Se il punto O coincide con il centro di massa, si parla di *ellissoide centrale d'inerzia* e di *assi centrali d'inerzia*.

Gli assi centrali d'inerzia, come gli assi principali d'inerzia, sono sempre

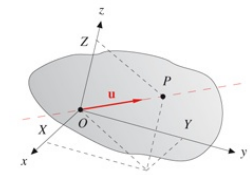


FIGURA 6.48

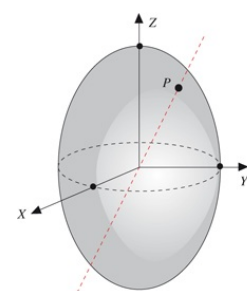


FIGURA 6.49

almeno tre, ma possono essere di numero superiore se il corpo è dotato di particolari simmetrie. Ciò è evidente dalla forma dell'ellissoide d'inerzia: se si tratta, ad esempio, di un ellissoide di rotazione rispetto all'asse Z , cioè ottenuto facendo ruotare un'ellisse attorno ad un suo asse, qualsiasi asse nel piano X, Y passante per il centro è asse centrale d'inerzia. Se inoltre l'ellissoide si riduce ad una superficie sferica, qualsiasi asse passante per il centro è asse centrale d'inerzia.

Rivediamo, alla luce di quanto discusso in questo paragrafo, la relazione tra il momento angolare \mathbf{L} e il vettore velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$. Il momento angolare, rispetto al polo O , è dato da:

$$\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times m_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) ;$$

$\boldsymbol{\omega}$ è parallelo all'asse di rotazione e può essere espresso come

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_x \mathbf{u}_x + \omega_y \mathbf{u}_y + \omega_z \mathbf{u}_z .$$

Ellissoide centrale d'inerzia

Sviluppando il prodotto vettoriale $\sum_i \mathbf{r}_i \times m_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)$ e calcolando le componenti si ottiene

$$\begin{aligned} L_x &= I_{xx} \omega_x - I_{xy} \omega_y - I_{xz} \omega_z \\ L_y &= -I_{xy} \omega_x + I_{yy} \omega_y - I_{yz} \omega_z \\ L_z &= -I_{xz} \omega_x - I_{yz} \omega_y + I_{zz} \omega_z . \end{aligned}$$

Gli elementi della matrice simmetrica detta *matrice d'inerzia*

$$\begin{vmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{vmatrix}$$

Matrice d'inerzia

sono gli stessi che compaiono nella (6.28).

Se scegliamo come assi di riferimento gli assi principali d'inerzia relativi ad O la matrice d'inerzia risulta diagonalizzata e la relazione tra \mathbf{L} e $\boldsymbol{\omega}$ si semplifica:

$$\mathbf{L} = I_x \omega_x \mathbf{u}_x + I_y \omega_y \mathbf{u}_y + I_z \omega_z \mathbf{u}_z , \quad (6.31)$$

dove I_x, I_y, I_z hanno lo stesso significato che nella (6.30).

La (6.31) evidenzia che per un generico asse di rotazione passante per O , ossia per una generica direzione di $\boldsymbol{\omega}$ rispetto al corpo, \mathbf{L} non è parallelo a $\boldsymbol{\omega}$: infatti il coefficiente di proporzionalità tra L_x e ω_x , L_y e ω_y , L_z e ω_z non è lo stesso (sarebbe $I_x = I_y = I_z$ solo nel caso particolare che l'ellissoide d'inerzia relativo ad O fosse sferico). Però, se si sceglie come asse di rotazione proprio un asse principale d'inerzia, $\boldsymbol{\omega}$ è parallelo a quell'asse e quindi ha componente solo

lungo quell'asse (le altre due componenti sono nulle); conseguentemente risulta $\mathbf{L} = I \boldsymbol{\omega}$, dove I rappresenta il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse principale d'inerzia coincidente con l'asse di rotazione.

Quest'ultimo argomento mette in luce l'importanza degli assi principali d'inerzia: dato un corpo rigido e fissato un suo punto O , *esistono sempre almeno tre assi passanti per quel punto e ortogonali tra loro tali che quando il corpo ruota rispetto ad uno di essi il momento angolare \mathbf{L} è parallelo a $\boldsymbol{\omega}$, ovvero all'asse di rotazione.* È quindi possibile, nella pratica, realizzare nelle parti rotanti di una macchina la condizione $\mathbf{L} = I \boldsymbol{\omega}$, essenziale per ridurre al minimo le sollecitazioni ai supporti dell'asse di rotazione, come discusso nel paragrafo 6.4.

Valutiamo ora l'energia cinetica del corpo nel sistema di riferimento degli assi principali d'inerzia. Con sviluppi analoghi a quelli precedenti si trova

$$E_k = \frac{1}{2} (I_x \omega_x^2 + I_y \omega_y^2 + I_z \omega_z^2) \quad . \quad (6.32)$$

Utilizzando (6.31) si ottiene

$$E_k = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L}) = \frac{1}{2} \left(\frac{L_x^2}{I_x} + \frac{L_y^2}{I_y} + \frac{L_z^2}{I_z} \right) \quad . \quad (6.33)$$

Se l'asse di rotazione è un asse principale d'inerzia l'energia cinetica vale

$$E_k = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{L^2}{2I}$$

dove I coincide con I_x o I_y o I_z .

In situazioni nelle quali l'energia cinetica resta costante qualunque sia l'asse di rotazione si può definire un *ellissoide dell'energia*. Nella (6.32) dividiamo entrambi i membri per E_k , ottenendo

$$\frac{I_x}{2E_k} \omega_x^2 + \frac{I_y}{2E_k} \omega_y^2 + \frac{I_z}{2E_k} \omega_z^2 = 1 \quad (6.34)$$

che, se i coefficienti sono costanti, è un ellissoide nelle coordinate $\omega_x, \omega_y, \omega_z$

. Si può immaginare, sovrapposto al sistema di riferimento con origine in O e avente per assi gli assi principali di inerzia, con coordinate X, Y, Z , un secondo sistema con la stessa origine e gli stessi assi, sui quali però le coordinate sono le componenti di $\boldsymbol{\omega}$. La punta del vettore $\boldsymbol{\omega}$, che è applicato in O ed è parallelo all'asse di rotazione, descrive la superficie dell'ellissoide dell'energia al variare dell'asse di rotazione (la costanza di E_k non implica quella di $\boldsymbol{\omega}$). Anche l'ellissoide dell'energia è fisso rispetto al corpo.

Come osservazione conclusiva sottolineiamo un aspetto del teorema di Poincot: anche se a livello della distribuzione geometrica delle masse, cioè a livello della forma del corpo, non ci sono evidenti simmetrie, c'è sempre una simmetria nei momenti d'inerzia, che si manifesta con l'esistenza dell'ellissoide d'inerzia.

6.11 Giroscopi

Si chiama *giroscopio un corpo rigido con un punto che è mantenuto fisso da un opportuno sistema di vincoli*. Il moto del giroscopio risulta in una rotazione rispetto ad un asse passante per il punto fisso, asse che in generale varia nel tempo. Il moto è piuttosto complicato e ci limitiamo, pertanto, ad esaminare solo qualche caso semplice. Avremo modo, in questo studio, di utilizzare le nozioni del paragrafo 6.10.

1° Caso

Il punto fisso coincide con il centro di massa, non ci sono momenti esterni rispetto al centro di massa ($\mathbf{M} = 0$) e la rotazione avviene attorno ad un asse centrale d'inerzia, per cui $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$.

Tale situazione si realizza tramite dispositivi a *sospensione cardanica*, come in figura 6.50. Il giroscopio è il disco interno che ruota intorno all'asse z . L'anello esterno può ruotare attorno all'asse x , mentre quello interno attorno all'asse y . L'asse di rotazione z può essere orientato in qualsiasi direzione. Il peso del giroscopio è equilibrato dalla reazione dei supporti dell'asse x .

Dato che $\mathbf{M} = 0$, $\mathbf{L} = \text{costante}$ e quindi anche $\boldsymbol{\omega} = \text{costante}$. *L'asse di rotazione resta fisso nel tempo.*

Un'applicazione di questa proprietà si realizza negli stabilizzatori di direzione. Un giroscopio, montato su un corpo in movimento, mantiene la direzione del suo asse fisso, ad esempio posizionata, all'inizio del moto del corpo, parallelamente alla direzione da seguire.

Se il corpo devia da questa direzione cambia l'orientazione relativa tra corpo e giroscopio. Questa deviazione, evidenziata da opportuni sensori, attiva il dispositivo per la correzione automatica della rotta.

2° Caso

Il punto fisso coincide con il centro di massa, la rotazione ha luogo attorno ad un asse centrale d'inerzia, $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$, ma agisce rispetto al punto fisso un momento esterno.

Avendo come riferimento la figura 6.50, supponiamo che l'asse di rotazione sia orizzontale e che venga applicata una forza verticale, come in figura 6.51a. Il momento rispetto al centro di massa è $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ e giace in un piano orizzontale. la variazione di \mathbf{L} è $d\mathbf{L} = \mathbf{M} dt$, parallela a \mathbf{M} : l'asse si sposta in un piano orizzontale e non verso il basso (\mathbf{L} , costante in modulo, *precede* rispetto ad un asse verticale con velocità angolare $\boldsymbol{\Omega}$ tale che $\mathbf{M} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{L}$). Se invece la forza applicata è orizzontale (figura 6.51b) l'asse ruota in un piano verticale.

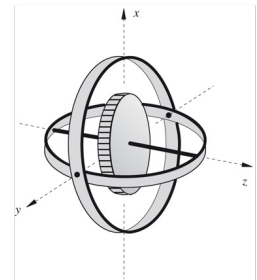


FIGURA 6.50

Precessione del
giroscopio

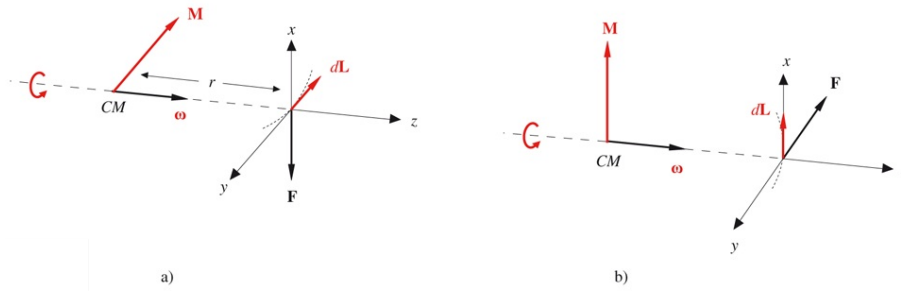


FIGURA 6.51

Il comportamento sarebbe ben diverso se fosse $\boldsymbol{\omega} = 0$: lo spostamento dell'asse seguirebbe \mathbf{F} e non sarebbe a 90° rispetto a \mathbf{F} , i momenti sarebbero ancora quelli disegnati, ma sia \mathbf{L} che $d\mathbf{L}$ risulterebbero paralleli a \mathbf{M} .

3° Caso

Il punto fisso coincide con il centro di massa, non ci sono momenti esterni, però l'asse di rotazione non è un asse centrale d'inerzia, \mathbf{L} e $\boldsymbol{\omega}$ non sono paralleli. Nel dispositivo di figura 6.50 si può realizzare questa situazione applicando un impulso all'asse di rotazione con il che il momento dell'impulso fa cambiare \mathbf{L} , rendendolo non parallelo all'asse di rotazione.

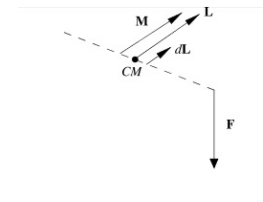


FIGURA 6.52

Dalla condizione $\mathbf{M} = 0$ si ha sempre che \mathbf{L} è costante in direzione e modulo. Inoltre, non essendoci attriti, l'energia cinetica di rotazione resta costante. Da (6.33) segue $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L} = \text{costante}$: la proiezione di $\boldsymbol{\omega}$ sulla direzione fissa di \mathbf{L} deve restare costante durante il moto. Pertanto la punta del vettore $\boldsymbol{\omega}$ sta sempre su un piano ortogonale a \mathbf{L} (figura 6.53). D'altra parte la punta di $\boldsymbol{\omega}$ descrive l'ellissoide dell'energia (6.34). Poincot ha dimostrato che l'ellissoide e il suddetto piano hanno un solo punto in comune in ogni istante e che durante il moto l'ellissoide rotola senza strisciare sul piano.

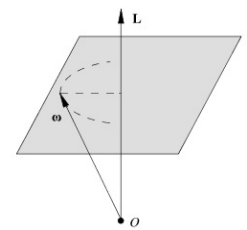


FIGURA 6.53

Nei casi più semplici $\boldsymbol{\omega}$ ruota rispetto a \mathbf{L} con un moto di precessione e ruota rispetto all'ellissoide dell'energia, cioè non ha una posizione costante nel corpo. In questo tipo di moto, che si chiama *nutazione*, vediamo dunque il giroscopio ruotare rispetto ad un asse che non è fisso rispetto al giroscopio stesso e che a sua volta ruota rispetto ad una direzione fissa.

Nutazione

4° Caso

Il punto fisso O è diverso dal centro di massa e quindi, rispetto a O , è diverso da zero il momento della forza peso.

L'esempio tipico è costituito dal moto di una trottola (figura 6.54). Il punto fisso, assunto come polo, è il punto di contatto della trottola con il piano di appoggio. L'asse di rotazione, che è un asse centrale d'inerzia, passa per O e per il centro di massa. Abbiamo $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$ con $\boldsymbol{\omega}$ costante in modulo.

Il momento della forza peso è $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times m \mathbf{g}$, mentre il momento della reazione del piano è nullo. Pertanto

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \times m \mathbf{g}$$

e, siccome \mathbf{L} è costante in modulo, vale anche la (6.11):

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{L} = \boldsymbol{\Omega} \times I \boldsymbol{\omega} ;$$

$\boldsymbol{\Omega}$ è la *velocità angolare di precessione del vettore \mathbf{L}* , ovvero dell'asse di rotazione della trottola, rispetto all'asse verticale passante per O . Eguagliando

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega} \times I \boldsymbol{\omega} &= \mathbf{r} \times m \mathbf{g} \\ \Rightarrow \boldsymbol{\Omega} &= -\frac{m r}{I \omega} \mathbf{g} . \end{aligned}$$

La *velocità angolare di precessione* è inversamente proporzionale alla velocità angolare della trottola. Il *periodo del moto di precessione* è

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi I \omega}{m g r} .$$

La precessione descritta qui è analoga a quella vista nel secondo caso. Il fenomeno si verifica quando è applicata all'asse di rotazione una forza costante con momento normale all'asse.

Osserviamo, anche se a posteriori, che nell'analisi del moto della trottola abbiamo fatto un'approssimazione: \mathbf{L} non coincide completamente con $I\boldsymbol{\omega}$ perché il corpo, oltre a ruotare attorno all'asse passante per O e per il centro di massa, ruota anche rispetto ad un asse verticale. Tuttavia, se ω è grande la precessione è molto lenta e il suo contributo al momento angolare è piccolo.

Se l'asse di rotazione non è un asse centrale di inerzia alla precessione si aggiunge la nutazione. In questo caso la punta di $\boldsymbol{\omega}$ non descrive la circonferenza della figura 6.54, ma oscilla rispetto a questa, salendo e scendendo (figura 6.56).

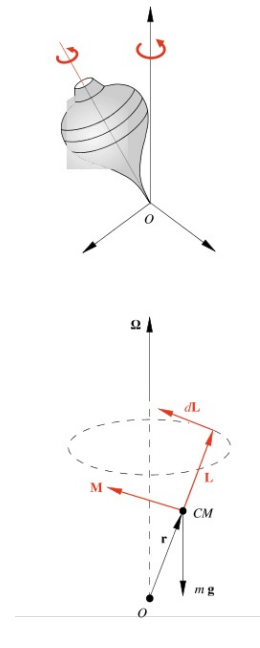


FIGURA 6.54

6.12 Corpo rigido libero

Nello studio del moto di un corpo rigido libero, cioè di un corpo in cui nessun punto è vincolato, si utilizzano le due equazioni:

$$\mathbf{R} = m \mathbf{a}_{CM} \quad \text{moto del centro di massa,}$$

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} \quad \text{moto rispetto al centro di massa.}$$

Il moto è in generale complicato in quanto l'asse di rotazione può variare nel tempo, anche rispetto al corpo. Se rispetto al centro di massa $\mathbf{M} = \mathbf{0}$, come nel caso agisca solo la forza peso, $\mathbf{L} = \text{costante}$. Si ha $\boldsymbol{\omega} = \text{costante}$ solo se la rotazione avviene attorno ad un asse centrale d'inerzia.

Un esempio molto semplice di corpo rigido libero è un disco che ruota attorno ad un asse verticale passante per il suo centro e contemporaneamente si sposta in un piano in assenza di attrito ($v_{CM} = \text{costante}$, $\omega = \text{costante}$, non legate tra loro).

Un caso interessante si ricava dall'esempio 6.22. Nell'istante in cui si applica l'impulso \mathbf{J} in un punto posto alla distanza d dal centro di massa supponiamo che l'asta sia lasciata libera. La velocità con cui si muove il centro di massa subito dopo l'applicazione dell'impulso è $\mathbf{v}_{CM} = \mathbf{J}/m$. Inoltre l'asta inizia a ruotare, attorno ad un asse orizzontale passante per il centro di massa, in verso antiorario e con velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ ricavabile tramite il momento dell'impulso:

$$\mathbf{d} \times \mathbf{J} = \mathbf{L} = I_c \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{12} m l^2 \boldsymbol{\omega} \quad , \quad \omega = \frac{12 d J}{m l^2} \quad .$$

Successivamente l'asta continua a ruotare con velocità angolare costante ω attorno all'asse orizzontale passante per il centro di massa, che a sua volta percorre una traiettoria parabolica in un piano verticale. L'equazione del moto del centro di massa è $m \mathbf{a}_{CM} = m \mathbf{g}$, con la condizione iniziale $\mathbf{v}_{CM}(0) = \mathbf{J}/m$.

Consideriamo infine il moto della terra. Le forze esercitate dal sole e dalla luna hanno momento non nullo rispetto al centro di massa della terra e pertanto si ha una precessione dell'asse di rotazione terrestre rispetto ad un asse ortogonale al piano dell'orbita. L'angolo di precessione è di $23^\circ 27'$, mentre il periodo della precessione, detta degli equinozi, è di 27725 anni. Inoltre l'asse di rotazione non è un asse centrale d'inerzia per cui alla precessione si sovrappone la *nutazione* con periodo di 19 anni.

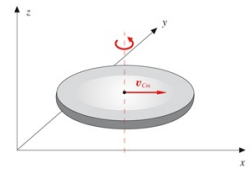


FIGURA 6.55

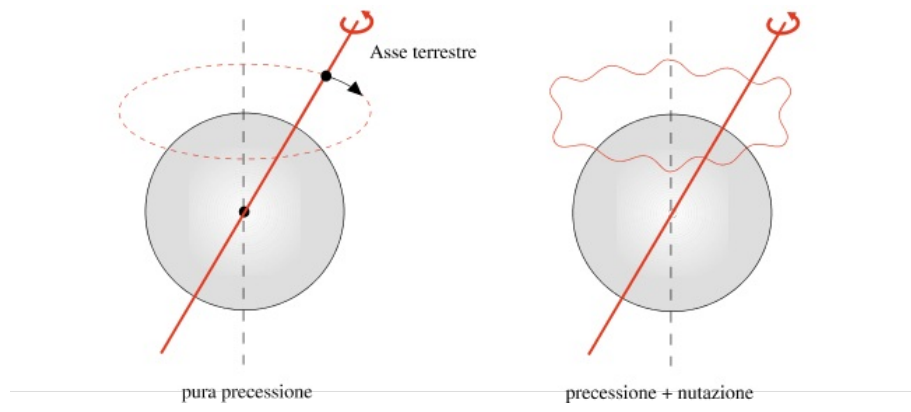


FIGURA 6.56

6.13 Leggi di conservazione nel moto di un corpo rigido

Puntualizziamo in questo paragrafo considerazioni già fatte sulle leggi di conservazione, adattandole alle caratteristiche specifiche dei moti dei corpi rigidi.

Iniziamo dalla *conservazione della quantità di moto del sistema*, $\mathbf{P} = m \mathbf{v}_{CM}$. Se la risultante delle forze esterne è nulla, il centro di massa si muove di moto rettilineo uniforme, ma il moto dei singoli punti non è detto sia traslatorio rettilineo uniforme. Si guardi, ad esempio, un punto di un corpo che compie un moto di puro rotolamento uniforme oppure un punto di un disco, posto su un piano orizzontale senza attrito, che ruota attorno ad un asse verticale passante per il centro di massa e contemporaneamente si muove nel piano con $\mathbf{v}_{CM} = \text{costante}$ (figura 6.55). L'argomento si estende da un solo corpo rigido ad un sistema di corpi rigidi in moto.

Assumendo come polo un punto fisso in un sistema di riferimento inerziale o il centro di massa, se $\mathbf{M} = 0$ il momento angolare resta costante in modulo, direzione e verso. Questo però non comporta $\boldsymbol{\omega} = \text{costante}$, in quanto non è detto che il moto di rotazione avvenga attorno ad un asse principale d'inerzia, cioè che sia $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$.

Sono di particolare interesse i casi in cui si ha conservazione del momento angolare in un sistema formato da più corpi rigidi, dove la variazione della posizione relativa delle singole parti determina una variazione del momento d'inerzia del sistema.

Si abbiano ad esempio due sferette eguali, ciascuna di massa m e raggio r , collegate da un'asta orizzontale di lunghezza variabile e di momento d'inerzia trascurabile. Le due sfere, inizialmente poste a distanza $2r_1 \gg r$, sono in rotazione con velocità angolare costante ω_1 attorno ad un asse verticale equidistante dalle due sferette. Rispetto al centro di massa del sistema, posto sull'asse di rotazione, tutti i momenti esterni sono nulli, pertanto il momento angolare resta costante:

$$L = I_1 \omega_1 = \text{costante} \quad , \quad I_1 = 2 \left[\frac{2}{5} m r^2 + m (r + r_1)^2 \right] \cong 2 m r_1^2 \quad .$$

Riduciamo la distanza tra le due sferette, avvicinandole da $2r_1$ a $2r_2$, con $r_2 < r_1$. Il momento d'inerzia diventa $I_2 = 2 m r_2^2 < I_1$. Le forze che applichiamo per avvicinare le sferette hanno momento nullo rispetto al centro di massa e quindi $L_2 = L_1$:

$$2 m r_2^2 \omega_2 = 2 m r_1^2 \omega_1 \Rightarrow \omega_2 = \frac{r_1^2}{r_2^2} \omega_1 > \omega_1 \quad .$$

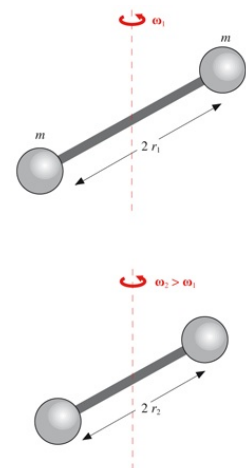


FIGURA 6.57

La variazione del momento d'inerzia porta a una variazione della velocità angolare, anche se \mathbf{L} è costante.

Questo caso, nell'approssimazione in cui si trascuri il raggio delle sfere rispetto alla distanza dall'asse, è lo stesso che abbiamo visto negli esempi 4.8 e 4.11. Anche l'aspetto energetico è lo stesso: c'è una variazione di energia cinetica, eguale al lavoro delle forze centripete, che ha l'espressione trovata negli esempi suddetti. Possiamo quindi verificare, in un caso differente da quelli visti precedentemente, l'indipendenza della legge di conservazione del momento angolare da quella dell'energia. Nel sistema esaminato \mathbf{L} è costante, però a diverse configurazioni con lo stesso momento angolare corrispondono energie diverse, cioè l'energia non si conserva (e in altre situazioni può succedere il contrario). Un modo più generale di calcolare il lavoro è il seguente:

$$W = \Delta E_k = E_{k, \text{fin}} - E_{k, \text{in}} = \frac{L^2}{2 I_{\text{fin}}} - \frac{L^2}{2 I_{\text{in}}}$$

e si verifica subito che il risultato è lo stesso.

La legge di conservazione dell'energia meccanica nel moto di un corpo è valida quando non ci sono attriti o quando, come nel moto di puro rotolamento, le forze di attrito non compiono lavoro, pur essendo presenti. Osserviamo inoltre che le reazioni vincolari che tengono fissi uno o più punti del corpo, non compiono lavoro, mentre la presenza di momenti di attrito che agiscono sull'asse di rotazione determina un lavoro che provoca una diminuzione dell'energia meccanica.

Supponendo che siano verificate le condizioni per la conservazione dell'energia meccanica e che agisca solo la forza peso, se il centro di massa resta in un piano orizzontale $\Delta E_p = 0$ ed è sufficiente considerare solo l'energia cinetica; se invece cambia la quota del centro di massa, $\Delta E_p = m g \Delta z_{CM}$.

Consideriamo ad esempio un'asta, di massa m e lunghezza l , che può ruotare in un piano verticale attorno ad un suo estremo (come nell'esempio 6.22). Se viene lasciata cadere, con velocità iniziale nulla, dalla posizione orizzontale, quando raggiunge la posizione verticale ha velocità angolare ω e il suo centro di massa ha velocità v_{CM} che si possono calcolare imponendo la conservazione dell'energia meccanica:

$$E_{\text{in}} = m g l = E_{\text{fin}} = \frac{1}{2} I \omega^2 + m g \frac{l}{2}$$

con $I = \frac{1}{3} m l^2$. Pertanto

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{l}}, \quad v_{CM} = \omega \frac{l}{2} = \sqrt{\frac{3gl}{4}}$$

Se si ha un sistema di corpi rigidi bisogna esaminare anche la natura delle forze interne prima di una eventuale applicazione della legge di conservazione dell'energia.

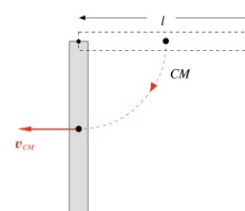


FIGURA 6.58

Esempio 6.24

L'asta della figura 6.58 è tenuta ferma ad un angolo θ_0 rispetto alla verticale. Ad un certo istante essa viene abbandonata con velocità iniziale nulla e inizia ad oscillare in assenza di attriti. Calcolare, in funzione dell'angolo θ rispetto alla verticale, l'accelerazione angolare, le componenti tangente e normale dell'accelerazione del centro di massa, le analoghe componenti della reazione \mathbf{R} nel perno di sostegno. Scrivere i risultati per un pendolo composto generico di momento d'inerzia $m k^2$ rispetto all'asse di rotazione e poi per l'asta. Per quest'ultima in particolare, con $\theta_0 = \pi/2$, applicare le formule ai casi $\theta = \pi/2$ e $\theta = 0$.

Soluzione

Chiamiamo h la distanza del centro di massa del corpo dall'asse di rotazione (vedi paragrafo 6.7). Per l'accelerazione angolare abbiamo:

$$M = -m g h \sin\theta = I \alpha \quad , \quad \alpha = -\frac{g h}{k^2} \sin\theta \Rightarrow a_{CM,T} = \alpha h = -g \frac{h^2}{k^2} \sin\theta \quad .$$

Il segno meno ha il significato già visto nel moto del pendolo e, più in generale, nel moto armonico semplice: esso segnala che le forze agenti tendono a riportare il corpo verso la posizione di equilibrio.

Per l'asta ($I = ml^2/3$, $h = l/2$, $k^2 = l^2/3$) i due risultati si scrivono

$$\alpha = -\frac{3g}{2l} \sin\theta \quad , \quad a_{CM,T} = -\frac{3}{4} g \sin\theta \quad .$$

Applichiamo ora la conservazione dell'energia:

$$m g h (1 - \cos\theta_0) = m g h (1 - \cos\theta) + \frac{1}{2} m k^2 \omega^2 \Rightarrow \omega^2 = 2 g \frac{h}{k^2} (\cos\theta - \cos\theta_0)$$

$$a_{CM,N} = \omega^2 h = 2 g \frac{h^2}{k^2} (\cos\theta - \cos\theta_0) \quad ,$$

diretta verso il centro di sospensione. Per l'asta

$$a_{CM,N} = \frac{3}{2} g (\cos\theta - \cos\theta_0) \quad .$$

La forza di reazione entra nell'equazione del moto del centro di massa

$$\mathbf{R} + m \mathbf{g} = m \mathbf{a}_{CM} \quad .$$

Proiettando lungo la direzione tangente e normale alla traiettoria

$$R_T - m g \sin\theta = m a_{CM,T} \quad , \quad R_N - m g \cos\theta = m a_{CM,N} \quad .$$

Di R_N sappiamo che deve essere opposta alla componente della forza peso per comunicare l'accelerazione centripeta al centro di massa, per R_T

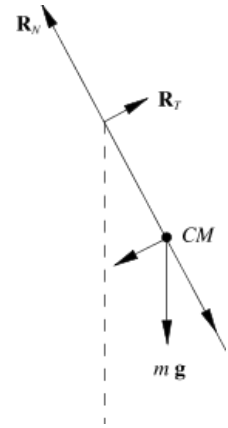


FIGURA 6.59
(Esempio 6.24)

vedremo il segno dalla soluzione. Si ha

$$R_T = mg \left(1 - \frac{h^2}{k^2} \right) \operatorname{sen} \theta \quad ,$$

$$R_N = 2 mg \frac{h^2}{k^2} (\cos \theta - \cos \theta_0) + mg \cos \theta \quad .$$

Dato che $I = m k^2 = I_C + m h^2$, k^2 è maggiore di h^2 ; nella situazione della figura 6.59 R_T risulta positiva, ovvero opposta a $mg \operatorname{sen} \theta$ (in modulo R_T è minore di $mg \operatorname{sen} \theta$). Nel caso dell'asta

$$R_T = \frac{1}{4} mg \operatorname{sen} \theta \quad , \quad R_N = \frac{1}{2} mg (5 \cos \theta - 3 \cos \theta_0) \quad .$$

Con $\theta_0 = \pi/2$, la prima situazione ($\theta = \pi/2$) è quella dell'istante di partenza:

$$\alpha = -\frac{3g}{2l} \quad , \quad a_{CM,T} = -\frac{3}{4}g \quad , \quad a_{CM,N} = 0 \quad , \quad R_T = \frac{1}{4}mg \quad , \quad R_N = 0 \quad .$$

La seconda situazione ($\theta = 0$) è quella del passaggio del centro di massa sulla verticale:

$$\alpha = 0 \quad , \quad a_{CM,T} = 0 \quad , \quad a_{CM,N} = \frac{3}{2}g \quad , \quad R_T = 0 \quad , \quad R_N = \frac{5}{2}mg \quad .$$

Visualizza Soluzione

Esempio 6.25

Un'asta è tenuta ferma in posizione verticale, come in figura 6.60. Abbandonata con velocità iniziale nulla l'asta ruota e ad un certo istante passa per la posizione indicata, a 90° con la precedente; sull'asse agisce un momento costante di attrito. Calcolare quanto valgono le componenti tangenziale e normale dell'accelerazione dell'estremo P dell'asta. La massa dell'asta è $m = 4.2$ kg, la lunghezza $l = 0.8$ m, il momento d'attrito vale $M_a = 4.5$ Nm.

Soluzione

Per il calcolo di a_P , T ricorriamo all'equazione del moto, come fatto nell'esempio 6.24. Il modulo di α è dato dall'equazione (valida per $\theta = \pi/2$)

$$mg \frac{l}{2} - M_a = I \alpha = \frac{1}{3} m l^2 \alpha \Rightarrow \alpha = 13.4 \operatorname{rad/s}^2 \quad , \quad a_{P,T} = \alpha l = 10.7 \operatorname{m/s}^2 \quad .$$

A causa della presenza dell'attrito non possiamo utilizzare la conservazione dell'energia; ricorriamo invece alla relazione che lega la variazione di energia meccanica al lavoro delle forze dissipative,

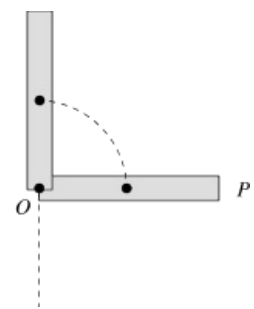


FIGURA 6.60
(Esempio 6.25)

$$E_{m,\text{fin}} - E_{m,\text{in}} = W_{\text{diss}} \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{1}{3} m l^2 \omega^2 - mg \frac{l}{2} = -M_a \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \omega^2 = 21.0 \text{ (rad/s)}^2 \quad , \quad a_{p,N} = \omega^2 l = 16.8 \text{ m/s}^2 .$$

Visualizza Soluzione

Esempio 6.26

Un disco, di massa $m_1 = 9 \text{ kg}$ e raggio r , ruota senza attrito in un piano orizzontale attorno ad un asse verticale passante per il suo centro. Lungo un diametro del disco è scavata una scanalatura nella quale può scorrere un punto materiale di massa $m_2 = 1.5 \text{ kg}$. Inizialmente il disco ruota con velocità angolare $\omega_0 = 6 \text{ rad/s}$ e il punto si trova quasi nel centro. Si lascia libero il punto che inizia a scorrere lungo la scanalatura e ad un certo istante raggiunge il bordo del disco. Calcolare il valore della velocità angolare in quell'istante.

Soluzione

Durante lo scorrimento la velocità del punto ha una componente ortogonale alla scanalatura e una parallela; al moto lungo il diametro però non è associato momento angolare rispetto al centro perché raggio vettore e velocità sono paralleli. Le forze di reazione, con componente normale ed eventualmente parallela (se c'è attrito tra punto e disco), sono forze interne e hanno momento nullo. Il momento della forza peso di m_2 è ortogonale all'asse. Possiamo quindi conservare il momento angolare lungo l'asse e scrivere

$$\frac{1}{2} m_1 r^2 \omega_0 = \frac{1}{2} m_1 r^2 \omega + m_2 r^2 \omega \quad ,$$

dove l'ultimo addendo esprime il momento angolare del punto quando raggiunge il bordo del disco. Segue

$$\omega = \frac{m_1}{m_1 + 2 m_2} \omega_0 = 4.5 \text{ rad/s} \quad .$$

Visualizza Soluzione

6.14 Urti tra punti materiali e corpi rigidi o tra corpi rigidi

Nei problemi d'urto trovano in generale applicazione le leggi di conservazione che abbiamo discusso nel paragrafo precedente.

Riassumendo sinteticamente, in un urto l'energia cinetica del sistema rimane costante solo se l'urto è dichiaratamente elastico. Se agiscono solo forze interne, o quelle esterne non sono di tipo impulsivo, si conserva la quantità di moto totale. Se invece esiste un vincolo che tiene fermo un punto del corpo rigido, e quindi sviluppa una forza di tipo impulsivo durante l'urto, non si verifica la conservazione della quantità di moto. Infine, qualora rispetto a un certo polo, fisso in un sistema di riferimento inerziale o coincidente con il centro di massa, il momento delle forze esterne, comprese quelle vincolari, è nullo, si conserva il momento angolare rispetto a tale polo. Se agiscono solo forze interne \mathbf{L} si conserva sempre, indipendentemente dalla scelta del polo.

Quando il corpo urtato è vincolato, il sistema di vincoli può esplicare durante l'urto un sistema di forze che ha una risultante \mathbf{R} e un momento risultante \mathbf{M} . L'effetto complessivo, nel brevissimo tempo di durata dell'urto, è dato dall'impulso della forza $\mathbf{J} = \int \mathbf{R} dt$ e dall'impulso angolare $\int \mathbf{M} dt$, eguali rispettivamente alla variazione della quantità di moto e alla variazione del momento angolare del sistema.

Essendo la quantità di moto e il momento angolare grandezze vettoriali, è possibile realizzare situazioni in cui la loro conservazione è parziale; per esempio, P_x e P_y si conservano, P_z cambia: questo vuol dire che l'impulso ha componenti J_x e J_y nulle, mentre J_z è diversa da zero. Analogamente per \mathbf{L} e l'impulso angolare.

Esempio 6.27

Un'asta è ferma sopra un piano orizzontale liscio; la massa è m_1 , la lunghezza l . Un punto materiale, di massa m_2 e velocità \mathbf{v} perpendicolare all'asta, colpisce l'asta a distanza x dal centro O e vi resta attaccato. Determinare la velocità lineare e quella angolare del sistema dopo l'urto.

Soluzione

Durante l'urto, completamente anelastico, agiscono solo forze interne e pertanto si ha conservazione della quantità di moto \mathbf{P} e del momento angolare \mathbf{L} .

La conservazione di \mathbf{P} fornisce la velocità del centro di massa prima e dopo l'urto. Dopo l'urto coincide con quella del sistema asta più punto materiale attaccato all'asta:

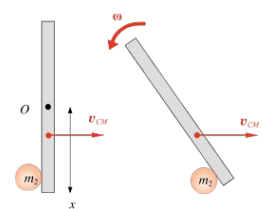


FIGURA 6.61
(Esempio 6.27)

$$m_2 \mathbf{v} = (m_1 + m_2) \mathbf{v}_{CM} \quad , \quad \mathbf{v}_{CM} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{v} \quad .$$

Determiniamo la posizione del centro di massa rispetto al centro dell'asta nell'istante in cui avviene l'urto:

$$(m_1 + m_2) x_{CM} = m_2 x \quad \Rightarrow \quad x_{CM} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} x \quad .$$

Prima e dopo l'urto il centro di massa si muove lungo la linea tratteggiata in figura 6.61, con velocità \mathbf{v}_{CM} .

Per quanto riguarda la conservazione di \mathbf{L} , assumendo come polo il centro di massa possiamo scrivere

$$(x - x_{CM}) m_2 v = I \omega \quad , \quad I = m_1 \frac{l^2}{12} + m_1 x_{CM}^2 + m_2 (x - x_{CM})^2$$

e quindi

$$\omega = \frac{(x - x_{CM}) m_2 v}{m_1 \frac{l^2}{12} + m_1 x_{CM}^2 + m_2 (x - x_{CM})^2} = \frac{m_2 x v}{(m_1 + m_2) \frac{l^2}{12} + m_2 x^2} \quad .$$

La rotazione avviene in senso antiorario. Se l'urto avesse luogo dall'altra parte rispetto al centro dell'asta il verso di rotazione sarebbe orario. Non si ha rotazione solo con un urto al centro dell'asta ($x = 0, \omega = 0$).

Dopo l'urto il centro di massa si muove con moto rettilineo uniforme, mentre gli altri punti hanno un moto composto da una traslazione con velocità \mathbf{v}_{CM} e da una rotazione, con velocità angolare ω , rispetto ad un asse verticale passante per il centro di massa.

In particolare, se $m_1 = m_2 = m$, $x_{CM} = x/2$

feaagKart1ev2aqatCvAUfeBSjuyZL2yd9gzLbvyNv2CaerbuLwBLn
hiov2DGi1BTfMBaeXatLxBI9gBaerbd9wDYLwzYbItLDharqqtubsr
4rNCHbGeaGqiVuoJe9sqqrpepCoxbbL8F4rqqrFfpeea0xe9Lq=Jc9
vqaqpepmoxbba9pwe9Q8fso=yqaqpepae9pg0FirpepeKkFroxfr=x
fr=xb9adbeqaaeGaciGaiaabeqaamaabaabaaGcbaGaamyBamaaBa
aaleaacaalIXaGaaGPaVdqabaGccqGH9aqpcaaMc8UaaGPaVlaad2ga
daWgaaWcbaGaaGomaqabaGccaaMc8Uaeyypa0JaaGPaVlaaykW7ca
WGTbGaaGPaVlaaykW7caGGSaGaaGPaVlaaykW7caWG4bWaaSbaaSqa
aiaadoeacaWGnbaabeaakiaaykW7cqGH9aqpcaaMc8UaaGPaVpaala
aabaGaamiEaaqaaiaaikdaaaaaa@5718@

$$v_{CM} = \frac{v}{2} \quad , \quad \omega = \frac{x v}{l^2/6 + x^2} \quad .$$

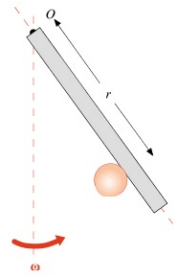


FIGURA 6.62
(Esempio 6.28)

Esempio 6.28

Nell'esempio precedente assumiamo che l'asta sia vincolata ad un estremo, attorno al quale può ruotare senza attrito. Per semplicità sia $m_1 = m_2 = m$; indichiamo con r la distanza del punto d'impatto dall'estremo fisso. Determinare la velocità angolare ω del sistema asta più punto materiale dopo l'urto e l'impulso della reazione vincolare durante l'urto.

Soluzione

In questo caso non possiamo conservare la quantità di moto del sistema, in quanto durante l'urto agisce una forza esterna di tipo impulsivo esplicita dal vincolo. È possibile però conservare il momento angolare rispetto al punto fisso perché il momento angolare delle forze vincolari è nullo rispetto a tale polo:

$$r m v = I \omega \quad , \quad I = m \frac{l^2}{3} + m r^2 \Rightarrow \omega = \frac{r v}{l^2/3 + r^2} \quad .$$

Durante l'urto la quantità di moto del sistema varia per effetto dell'impulso \mathbf{J} delle forze vincolari:

$$\mathbf{J} = \Delta \mathbf{P} = \mathbf{P}_{\text{fin}} - \mathbf{P}_{\text{in}} \quad .$$

$\mathbf{P}_{\text{in}} = m \mathbf{v}$ mentre \mathbf{P}_{fin} può essere calcolata come somma delle quantità di moto del punto e dell'asta o come quantità di moto del centro di massa del sistema, nell'istante successivo all'urto. Nel primo caso:

$$\mathbf{P}_{\text{fin}} = m \omega r \mathbf{u}_v + m \omega \frac{l}{2} \mathbf{u}_v = m \left(r + \frac{l}{2} \right) \omega \mathbf{u}_v \quad ,$$

dove ωr è la velocità del punto, $\omega \frac{l}{2}$ la velocità del centro di massa dell'asta, subito dopo l'urto, e \mathbf{u}_v è il versore della velocità \mathbf{v} del punto prima dell'urto. Con la seconda procedura, bisogna prima calcolare la posizione del centro di massa del sistema nell'istante dell'urto:

$$x_{CM} = \frac{m \frac{l}{2} + m r}{2 m} = \frac{1}{2} \left(r + \frac{l}{2} \right)$$

e quindi $\mathbf{P}_{\text{fin}} = 2m v_{CM} = 2m x_{CM} \omega \mathbf{u}_v = m \left(r + \frac{l}{2} \right) \omega \mathbf{u}_v$. Solo durante l'urto \mathbf{P}_{fin} e \mathbf{P}_{in} hanno la stessa direzione, dopo \mathbf{P} cambia anche di direzione.

Pertanto l'impulso della reazione vincolare è dato da

$$\mathbf{J} = m \left[\omega \left(r + \frac{l}{2} \right) - v \right] \mathbf{u}_v = m l v \frac{\frac{r}{2} - \frac{l}{3}}{\frac{l^2}{3} + r^2} \mathbf{u}_v .$$

Osserviamo che per $r > \frac{2}{3} l$ l'impulso è parallelo e concorde a \mathbf{v} , mentre per $r < \frac{2}{3} l$ esso è opposto a \mathbf{v} . L'impulso è nullo se $r = \frac{2}{3} l$: in tale caso durante l'urto il vincolo non agisce, è come se fossimo nell'esempio precedente con $x = (\frac{2}{3} l - \frac{l}{2}) = \frac{l}{6}$ e infatti troviamo, in ambedue i casi, lo stesso valore della velocità angolare, $\omega = \frac{6}{7} v l$ (naturalmente il vincolo agisce dopo l'urto, facendo ruotare l'asta attorno all'estremo fisso).

Questi risultati si spiegano considerando che a causa dell'urto il sistema tende ad avanzare sul piano, ma anche a ruotare. Pertanto l'estremo, che resta fisso, è sollecitato sia ad avanzare, dal che deriva una reazione vincolare negativa, che a ruotare rispetto ad un asse verticale passante per il centro di massa del sistema, fatto che dà origine a una reazione 2 vincolare positiva o negativa a seconda del punto di impatto. Solo se $r = \frac{2}{3} l$ i due effetti sono eguali e contrari.

Visualizza Soluzione

Esempio 6.29

Un'asta, di massa m_1 e lunghezza l , è libera di ruotare in un piano verticale attorno ad un asse fisso orizzontale passante per il suo centro, figura 6.63. Un punto materiale, di massa m_2 e velocità \mathbf{v} parallela all'asse di rotazione, colpisce l'asta a un estremo e vi resta attaccato. Nell'istante dell'urto l'asta sta ruotando con velocità angolare ω in verso antiorario. Determinare la velocità angolare ω' dopo l'urto, l'impulso e l'impulso angolare delle reazioni vincolari.

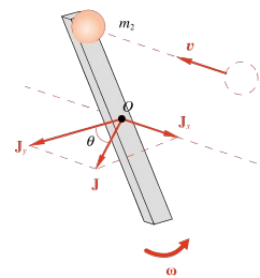


FIGURA 6.63
(Esempio 6.29)

Soluzione

Nell'urto si conserva la componente del momento angolare parallela all'asse di rotazione non essendoci momenti esterni con questa direzione. Invece il momento angolare del punto materiale, ortogonale all'asse di rotazione, viene annullato nell'urto dal momento esplicito dai supporti vincolari dell'asse, che impediscono la modifica dell'asse di rotazione. Ovviamente non si conservano quantità di moto e energia.

Assumendo come polo il centro dell'asta abbiamo

$$I \omega = \left(I + m_2 \frac{l^2}{4} \right) \omega' \quad , \quad I = m_1 \frac{l^2}{12} \quad , \quad \omega' = \frac{m_1}{m_1 + 3 m_2} \omega .$$

La rotazione è sempre in verso antiorario. Dopo l'urto, per effetto del momento della forza peso del punto materiale, la velocità angolare cambierà.

L'impulso delle forze vincolari si calcola tramite la variazione della quantità

di moto del sistema. L'impulso ha due componenti, una lungo la direzione dell'asse di rotazione x , dovuta all'arresto del proiettile, l'altra lungo una direzione ortogonale y , dovuta all'inizio della rotazione del proiettile (l'asta non contribuisce) :

$$P_{in,x} = m_2 v \quad , \quad P_{fin,x} = 0 \quad , \quad P_{in,y} = 0 \quad , \quad P_{fin,y} = m_2 \frac{l}{2} \omega' .$$

Pertanto il modulo dell'impulso è dato da

$$J = \sqrt{(m_2 v)^2 + (m_2 \frac{l}{2} \omega')^2} = m_2 \sqrt{v^2 + \frac{l^2}{4} \omega'^2} .$$

In figura 6.63 \mathbf{J} , che sta nel piano x, y ortogonale al piano in cui ruota l'asta, forma con questo l'angolo

$$\theta = \arctg \frac{J_x}{J_y} = \frac{2v}{l \omega'} .$$

L'impulso angolare esplicito dai supporti agenti sull'asse di rotazione è eguale alla variazione della componente del momento angolare ortogonale all'asse di rotazione (la componente parallela si conserva) e quindi è eguale ed opposto al momento iniziale del punto materiale:

$$\int \mathbf{M} dt = -\mathbf{OP} \times m_2 \mathbf{v}$$

essendo \mathbf{OP} il raggio vettore dal centro dell'asta al punto d'impatto. In modulo l'impulso angolare vale $m_2 l v$.

Pertanto, durante l'urto, le reazioni vincolari fanno cambiare in direzione e modulo la quantità di moto del punto materiale, mentre il loro momento risultante mantiene orizzontale l'asse di rotazione.

Visualizza Soluzione

Esempio 6.30

Un disco, di massa m_1 e raggio R , ruota con velocità angolare ω in un piano orizzontale attorno ad un asse verticale passante per il centro. Da un'altezza h viene lasciato cadere sul disco un punto materiale di massa m_2 . Il punto urta il disco ad una distanza $d < R$ dal centro del disco e vi rimane attaccato. Determinare la velocità angolare del sistema nell'istante successivo all'urto, l'impulso e l'impulso angolare delle reazioni vincolari.

Soluzione

Il problema è analogo al precedente, per cui diamo una spiegazione concisa: conservazione del momento angolare parallelamente all'asse di

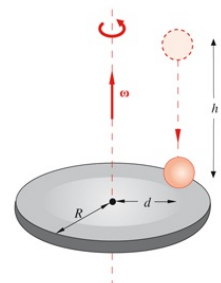


FIGURA 6.64
(Esempio 6.30)

rotazione

$$I \omega = (I + m_2 d^2) \omega' \quad , \quad I = \frac{1}{2} m_1 R^2$$

$$\omega' = \frac{m_1 R^2}{2 m_1 R^2 + 2 m_2 d^2} \omega \quad ;$$

componente dell'impulso nel piano orizzontale $m_2 d \omega'$; componente verticale dello impulso $m_2 g h$; modulo dell'impulso $J = m_2 d \sqrt{\omega'^2 + 2gh}$; angolo di \mathbf{J} rispetto alla verticale $\theta = \arctg d \omega' / \sqrt{2gh}$; modulo dell'impulso angolare $m_2 d \sqrt{2gh}$

Visualizza Soluzione

Esempio 6.31

Un'asta, di massa m_1 e lunghezza l , è libera di ruotare in un piano verticale attorno ad un asse orizzontale passante per il suo centro. Inizialmente l'asta è in quiete in posizione orizzontale. Un punto materiale, di massa m_2 , colpisce con velocità \mathbf{v} , ortogonale all'asta in direzione verticale, l'estremo dell'asta. Assumendo che l'urto sia elastico e che la velocità \mathbf{v}' del punto materiale dopo l'urto sia parallela a \mathbf{v} , determinare nell'istante successivo all'urto la velocità angolare ω dell'asta e il modulo e il verso di \mathbf{v}' .

Soluzione

Data la presenza di una forza vincolare in O non è possibile conservare la quantità di moto; possiamo però conservare rispetto ad O il momento angolare e, dato che l'urto è elastico, possiamo utilizzare la conservazione dell'energia. Pertanto, assumendo v' positiva se ha il verso indicato in figura,

$$m_2 v \frac{l}{2} = I \omega - m_2 v' \frac{l}{2} \quad , \quad I = m_1 \frac{l^2}{12} \quad ; \quad \frac{1}{2} m_2 v^2 = \frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{1}{2} m_2 v'^2 \quad .$$

Risolvendo il sistema si trova

$$\omega = \frac{12 m_2}{m_1 + 3 m_2} \frac{v}{l} \quad , \quad v' = \frac{m_1 - 3 m_2}{m_1 + 3 m_2} v \quad .$$

Il punto materiale prosegue il suo moto nello stesso verso se $3 m_2 > m_1$ ($v' < 0$), rimbalza se $3 m_2 < m_1$ ($v' > 0$), si ferma nell'istante dell'urto se $3 m_2 = m_1$ ($v' = 0$).

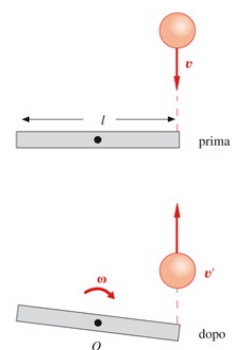


FIGURA 6.65
(Esempio 6.31)

Visualizza Soluzione

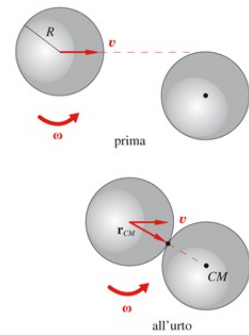


FIGURA 6.66
(Esempio 6.32)

Esempio 6.32

Un disco, di massa m e raggio R , scivola con velocità \mathbf{v} su un piano orizzontale liscio. Esso urta un altro disco identico, inizialmente in quiete e con il centro a distanza R dalla retta percorsa dal centro del primo disco (vedi figura 6.66). Dopo l'urto i due dischi restano attaccati e procedono come un unico corpo rigido. Determinare che velocità angolare deve avere il primo disco affinché dopo l'urto la velocità angolare del sistema sia nulla.

Soluzione

Nell'urto si conserva il momento angolare, rispetto a qualsiasi polo. Prendendo come polo il centro di massa del sistema e volendo che dopo l'urto il moto sia traslatorio, abbiamo $\mathbf{L}_{\text{fin}} = \mathbf{0}$; quindi, rispetto al centro di massa, deve essere $\mathbf{L}_{\text{in}} = \mathbf{0}$. Prima dell'urto solo il disco in movimento contribuisce al momento angolare, per cui abbiamo

$$\mathbf{L}_{\text{in}} = I\boldsymbol{\omega} + \mathbf{r}_{CM} \times m \mathbf{v} ,$$

secondo il teorema di König; $I\boldsymbol{\omega}$ è il momento angolare del disco rispetto al proprio centro di massa ($I = \frac{1}{2} m R^2$), $\mathbf{r}_{CM} \times m \mathbf{v}$ è il momento angolare del centro di massa del disco rispetto al centro di massa del sistema e vale in modulo $R/2 m v$ (il centro di massa del sistema dista $R/2$ dalla retta individuata da \mathbf{v}). Si osservi che $\mathbf{r}_{CM} \times m \mathbf{v}$ è diretto verso il foglio; se $\mathbf{L}_{\text{in}} = \mathbf{0}$, $I\boldsymbol{\omega}$ deve essere diretto verso il lettore, cioè il primo disco deve ruotare in senso antiorario. Allora in modulo

$$I\omega - \frac{R}{2} m v = 0 \quad , \quad \text{per cui} \quad \omega = \frac{v}{R} .$$

Visualizza Soluzione

Quando due corpi estesi si urtano, come è il caso dell'esempio 6.32, ma non restano attaccati, le quantità di moto dopo l'urto formano normalmente un certo angolo con la direzione che avevano prima dell'urto. Infatti la forza interna impulsiva $\mathbf{F}_{2,1}$ agente sul primo corpo non è parallela a $\mathbf{p}_{1,\text{in}}$ e quindi $\mathbf{p}_{1,\text{fin}}$ risulta deviata rispetto alla direzione iniziale del moto; lo stesso succede per il secondo corpo. La situazione è mostrata qualitativamente in figura 6.67 riferita a

due dischetti che non ruotano prima dell'urto. Essi non ruotano nemmeno dopo se non c'è attrito al contatto, cioè se le forze interne non hanno componente tangente. Altrimenti il momento dell'attrito mette in rotazione i dischetti.

Solo se i centri dei due dischetti si muovono lungo la stessa retta non si ha deviazione e si parla di urto centrale; l'urto della figura 6.67 non è centrale.

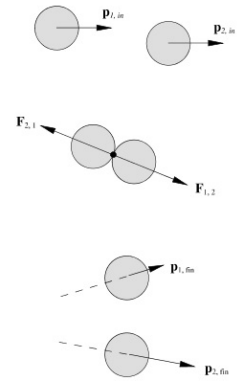


FIGURA 6.67

6.16 Riepilogo

Riassumiamo gli argomenti più importanti sviluppati in questo capitolo. Il *moto più generale* di un corpo rigido è *rototraslatorio*. Nella traslazione tutti i punti hanno lo stesso moto, pari a quello del centro di massa, e pertanto possiamo utilizzare le relazioni fisiche introdotte nello studio del moto di un punto materiale. L'*energia cinetica* è $E_k = \frac{1}{2} m v_{CM}^2$, mentre il *momento angolare* è dato da $\mathbf{L} = \mathbf{r}_{CM} \times m \mathbf{v}_{CM}$.

Nella rotazione tutti i punti ruotano con la stessa velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ attorno all'asse di rotazione, parallelo a $\boldsymbol{\omega}$. Il *momento d'inerzia rispetto all'asse* è dato da $I = \sum_i m_i R_i^2$ (o utilizzando l'espressione per un corpo continuo $I = \int R^2 dm$), il *momento angolare* rispetto all'asse o momento angolare assiale è $L_z = I\omega$ e l'*energia cinetica* è $E_k = \frac{1}{2} I\omega^2$.

Se l'asse è fisso in un sistema di riferimento inerziale e s'identifica con un *asse principale d'inerzia*, $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$ e l'equazione del moto di rotazione è

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = I \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = I \boldsymbol{\alpha} .$$

Se invece l'asse di rotazione non è un asse principale d'inerzia, nell'equazione del moto compaiono i momenti assiali: $M_z = dL_z / dt = I\alpha$.

Il problema si complica se l'asse di rotazione è variabile nel tempo, pur restando sempre valido il teorema del momento angolare. Nel caso che un punto sia fisso, si hanno i cosiddetti fenomeni giroscopi.

Un caso interessante di moto di rototraslazione è il moto di *puro rotolamento*.

Richiamiamo adesso alcune regole di opportunità nella scelta del polo per \mathbf{L} e per \mathbf{M} , utili soprattutto nella risoluzione di problemi.

Se il moto di rotazione avviene rispetto ad un asse fisso il polo viene scelto di norma tra i punti dell'asse.

Se un punto P del corpo è mantenuto fisso conviene sceglierlo come polo, in modo tale da annullare il momento delle forze che sono applicate in P (forze vincolari in genere). È importante l'applicazione negli *urti con corpi vincolati*. In ogni caso, si deve sempre considerare la possibilità di scegliere come polo il centro di massa, facendo attenzione, nel caso di sistemi composti, a prendere il centro di massa di tutti i punti.

Ricordiamo infine che se il centro di massa è fermo, $\mathbf{R} = \mathbf{0}$, \mathbf{L} e \mathbf{M} non dipendono dal polo.

I corpi solidi di norma hanno una forma e un volume non facilmente modificabili; da questo fatto deriva per astrazione la nozione di corpo ideale indeformabile o corpo rigido. In realtà tutti i corpi solidi si deformano sotto l'azione di sollecitazioni meccaniche.

Le deformazioni descritte nel seguito sono tutte di tipo elastico, intendendo con questo termine che al cessare della sollecitazione il corpo ritorna nella configurazione originaria. A parte i casi degli esempi 7.3 e 7.4, tratteremo sempre situazioni di equilibrio statico: la sollecitazione, applicata ad un corpo in quiete, lo deforma e ciò causa da parte del corpo una reazione eguale e contraria. Inoltre assumeremo che i processi siano *isotermi*, cioè si svolgano a temperatura costante.

7.1 Trazione e compressione

Quando un materiale viene sollecitato tramite una forza, che chiamiamo carico, di piccola intensità, esso subisce una deformazione proporzionale al carico; tale deformazione è elastica nel senso sopra precisato.

La proporzionalità tra deformazione e carico costituisce la *legge di Hooke*, già evidenziata nello studio di una molla. Se applichiamo una forza F all'estremo di una molla, fissata nell'altro estremo ad un punto vincolato, essa subisce un allungamento Δx , raggiungendo una configurazione di equilibrio, con Δx proporzionale a F . L'allungamento origina nella molla una reazione elastica, proporzionale all'allungamento stesso, la quale fa equilibrio a F .

Uno studio della deformazione elastica di un corpo solido può essere realizzato utilizzando il semplice dispositivo in figura 7.1. Una sbarra solida omogenea è posata su un tavolo e bloccata a una estremità; all'altra estremità viene applicata una forza di modulo F , per esempio dovuta alla forza peso della massa m . In questo caso il carico è di *trazione* e, come nella situazione con una molla, si raggiunge un equilibrio in cui la reazione elastica della sbarra eguaglia la forza applicata. Se la sbarra subisce l'azione di una forza di verso contrario alla precedente, si parla di *compressione*.

Nella pratica, più che i valori assoluti della deformazione e del carico, si utilizzano quelli specifici o unitari. Si definisce come *carico specifico* o unitario σ il rapporto tra la forza applicata ortogonalmente a una superficie e la superficie stessa, ovvero la forza applicata ortogonalmente all'unità di superficie. Analogamente la *deformazione specifica* o unitaria ε , detta anche *allungamento lineare unitario*, è l'allungamento subito da un materiale di lunghezza unitaria ovvero il rapporto tra allungamento e lunghezza. In formule

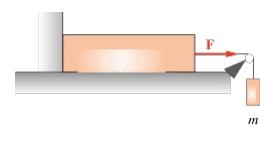


FIGURA 7.1

Carico specifico

Deformazione
specificata

$$\sigma = \frac{F}{S}, \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \quad (7.1)$$

Secondo la legge di Hooke, carico specifico e allungamento unitario per piccoli valori del carico sono proporzionali ed il loro rapporto è definito come *modulo di Young o modulo di elasticità E*:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \Rightarrow \varepsilon = \frac{1}{E} \sigma \rightarrow \frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E} \frac{F}{S} \quad (7.2)$$

Modulo di Young

La (7.2) rappresenta la relazione tra allungamento lineare e forza applicata, in funzione delle dimensioni geometriche del solido e delle sue caratteristiche elastiche. Un alto valore di E determina, a parità di carico specifico, un allungamento specifico minore. In figura 7.2 è riportato il grafico comunemente usato nello studio delle proprietà elastiche di un corpo sottoposto a trazione o compressione.

Nella tabella 7.1 sono elencati i valori del modulo di Young di alcuni materiali, alla temperatura di 20°C. Da (7.1) e (7.2) si vede che l'unità di misura di E , eguale a quella di σ , è il N/m²; ε invece è adimensionale.

Tabella 7.1 Modulo di Young

Materiale	E
acciaio	$2.1 \cdot 10^{11}$ N/m ²
alluminio	$7.0 \cdot 10^{10}$
argento	$7.5 \cdot 10^{10}$
ferro	$2.0 \cdot 10^{11}$
gomma	$5-80 \cdot 10^6$
ottone	$9.1 \cdot 10^{10}$
piombo	$1.4 \cdot 10^{10}$
platino	$1.5 \cdot 10^{11}$
polietilene	$1-14 \cdot 10^8$
rame	$1.1 \cdot 10^{11}$
tungsteno	$3.5 \cdot 10^{11}$
vetro per finestre	$7.0 \cdot 10^{10}$

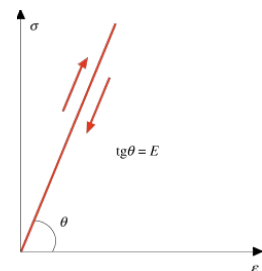
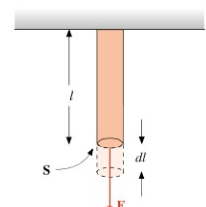


FIGURA 7.2

Il modulo di Young presenta, in genere, per i metalli, valori decrescenti al crescere della temperatura, fino a che non si verifichi una trasformazione di fase cioè una modifica della struttura cristallina. Ad esempio, per l'alluminio, il modulo di Young varia da $7 \cdot 10^{10}$ N/m² alla temperatura di 20°C (temperatura ambiente) a $5 \cdot 10^{10}$ N/m² a 500°C, mentre per il ferro varia da $2 \cdot 10^{11}$ N/m², a 20°C, a $1.5 \cdot 10^{11}$ N/m² a 500°C.

Esempio 7.1

Determinare, per un filo di alluminio, di diametro $d = 2$ mm e lunghezza $l = 1.2$ m, l'allungamento per effetto di una sollecitazione a trazione con carico



$$F = 120 \text{ N.}$$

Soluzione

La sezione del filo è

$$S = \pi \left(\frac{d}{2} \right)^2 = \pi (10^{-3})^2 = 3.14 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 ,$$

pertanto il carico specifico vale

$$\sigma = \frac{F}{S} = \frac{120}{3.14 \cdot 10^{-6}} = 3.82 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2 .$$

L'allungamento è dato da (7.2), con $E = 7 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$ (vedi tabella 7.1):

$$\Delta l = l \frac{\sigma}{E} = 1.2 \frac{3.82 \cdot 10^7}{7 \cdot 10^{10}} = 0.65 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 0.65 \text{ mm};$$

l'allungamento unitario ε vale $\Delta l / l = 0.54 \cdot 10^{-3}$.

Visualizza Soluzione

Esempio 7.2

Un filo è costituito da un tratto di alluminio, lungo 30 cm e di diametro 1 mm, e da un tratto di ferro, lungo 40 cm e di diametro 0.4 mm. Al filo è appesa la massa m e l'allungamento totale è $\Delta l = 0.82$ mm. Calcolare di quanto si è allungato ciascun filo e quanto vale m .

Soluzione

Scriviamo (7.2) per ciascun tratto di filo, indicando con 1 l'alluminio e 2 il ferro e notando che in equilibrio statico il carico è lo stesso (la tensione lungo il filo è costante):

$$\frac{\Delta l_1}{l_1} = \frac{1}{E_1} \frac{F}{S_1} , \quad \frac{\Delta l_2}{l_2} = \frac{1}{E_2} \frac{F}{S_2}$$

con $S_1 = \pi d_1^2 / 4$, $S_2 = \pi d_2^2 / 4$. Pertanto

$$\frac{\Delta l_1}{\Delta l_2} = \frac{l_1 E_2 d_2^2}{l_2 E_1 d_1^2} = 0.34 .$$

Sappiamo che $\Delta l_1 + \Delta l_2 = \Delta l = 0.82$ mm e ricaviamo

$$\Delta l_1 = 0.21 \text{ mm} , \quad \Delta l_2 = 0.61 \text{ mm} .$$

Segue $F = 38.5 \text{ N} = mg$, $m = 3.9$ kg.

Visualizza Soluzione

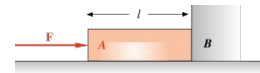


FIGURA 7.4
(Esempio 7.3)

Esempio 7.3

Una sbarra omogenea AB , di sezione S e lunghezza l , è posta su un piano orizzontale con un estremo B vincolato ad un supporto fisso. All'estremo libero A viene applicata una forza F costante e distribuita uniformemente sulla sezione. Determinare la variazione di lunghezza nei due casi:

- a) in presenza di vincolo
- b) senza vincolo

Soluzione

In presenza di vincolo, da (7.2)

$$\Delta l = \frac{\sigma}{E} = \frac{l F}{E S} .$$

In assenza di supporto la sbarra si muove con moto uniformemente accelerato. La forza di compressione su una sezione a distanza x dall'estremo A è data da

$$T = F \left(1 - \frac{x}{l} \right) .$$

Infatti, detta a l'accelerazione del centro di massa della sbarra, e quindi di tutti i punti materiali che la costituiscono, si ha

$$a = \frac{F}{m} = \frac{F}{\rho l S}$$

con ρ densità della sbarra. Un elemento di lunghezza $l - x$, che si muove con la stessa accelerazione, risente della forza

$$F_x = \rho S (l - x) a = \rho S (l - x) \frac{F}{\rho l S} = F \left(1 - \frac{x}{l} \right) = T .$$

In sostanza questa è la forza che attraverso la parte lunga x viene trasmessa alla successiva parte lunga $l - x$; tale forza di compressione decresce linearmente lungo la sbarra dal valore F per $x = 0$ al valore zero per $x = l$. La variazione di lunghezza di un elemento dx posto a distanza x da A è

$$d\xi = \frac{T}{E S} dx = \frac{F}{E S} \left(1 - \frac{x}{l} \right) dx ,$$

avendo usato (7.2) con $\varepsilon = d\xi / dx$. La variazione di lunghezza della sbarra in moto è

$$\Delta l' = \int_0^l d\xi = \frac{F}{E S} \int_0^l \left(1 - \frac{x}{l} \right) dx = \frac{1}{2} \frac{l F}{E S} ;$$

la variazione $\Delta l'$ è la metà della variazione Δl per la sbarra vincolata.

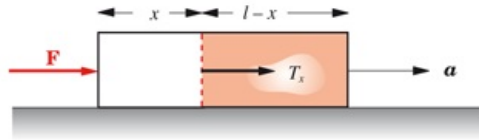


FIGURA 7.5

Osserviamo che tutti gli elementi dx si muovono con l'accelerazione a , come detto: per ciascuno il prodotto massa per accelerazione vale

$$\rho S dx \frac{F}{\rho S l} = \frac{F}{l} dx$$

e si verifica che è eguale a $T(x) - T(x + dx)$. Sull'elemento agiscono quindi la forza motrice dell'elemento che lo precede e la forza resistente dell'elemento che lo segue. Nella (7.2) però la forza che compare è la forza $T(x)$ di compressione e non la reazione del supporto contro cui l'elemento è compresso. In effetti, se l'elemento è fermo, la forza di compressione è eguale in modulo alla reazione ed è sottinteso che la deformazione avviene sotto l'azione di queste due forze. Se il corpo è in moto sotto l'azione di una forza, per ciascun elemento dx la situazione è quasi identica: esso è compresso contro l'elemento successivo, però le forze non sono esattamente eguali e contrarie e anzi è proprio la differenza tra di esse che fornisce la forza necessaria per il moto; eseguendo il calcolo si trova che la differenza di deformazione tra moto e quiete è di un fattore 2. Se invece il moto fosse uniforme, $\Delta l' = 0$: lungo la sbarra non c'è compressione, gli elementi dx non premono l'uno contro l'altro.

Visualizza Soluzione

Esempio 7.4

Un'asta sottile, di sezione S , lunghezza l e massa m , ruota con velocità angolare costante ω attorno ad un asse verticale, perpendicolare all'asta stessa e passante per un suo estremo. Determinare la variazione di lunghezza Δl .

Soluzione

Si segue il ragionamento dell'esempio precedente. Attraverso la sezione distante x dall'asse viene esercitata sul resto dell'asta la forza $T(x)$ necessaria per il moto circolare.

Questa forza è la risultante delle forze agenti su tutti gli elementi dx compresi tra x e l , cioè delle forze

$$dm \omega^2 x = \rho S \omega^2 x dx \quad ;$$

$$T(x) = \int_x^l \rho S \omega^2 x dx = \frac{1}{2} \rho S \omega^2 (l^2 - x^2) \quad .$$

La variazione di lunghezza $d\xi$ di un elemento dx distante x dall'asse è dato da (7.2):

$$d\xi = \frac{T}{SE} dx = \frac{1}{2} \rho \frac{\omega^2}{E} (l^2 - x^2) dx \quad ;$$

integrando su tutta la lunghezza della sbarra

$$\Delta l = \int_0^l d\xi = \frac{1}{2} \rho \frac{\omega^2}{E} \int_0^l (l^2 - x^2) dx = \frac{1}{3} \rho \frac{\omega^2}{E} l^3 = \frac{1}{3} m l^2 \frac{\omega^2}{S E} .$$

Per esempio un'asta di acciaio, $E = 2.11 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$, lunga 1 m, di sezione 1 cm^2 e massa 0.78 kg, che ruota con velocità angolare $\omega = 100 \text{ rad/s}$, si allunga di $\Delta l = 0.12 \text{ mm}$.

Visualizza Soluzione

Esempio 7.5

Dimostrare che in una sbarra sottoposta a trazione si può definire un'energia potenziale elastica per unità di volume che vale $\sigma \varepsilon / 2$. Utilizzare per il calcolo numerico i dati dell'esempio 7.1.

Soluzione

Per un dato valore F del carico l'allungamento sia Δl , ovvero consideriamo una situazione caratterizzata da σ ed ε . Ad un incremento dF del carico segue uno spostamento dl e quindi un lavoro

$$dW = (F + dF) dl = S(\sigma + d\sigma) dl \approx S \sigma dl = S l \sigma d\varepsilon .$$

Per unità di volume il lavoro risulta $\sigma d\varepsilon = E \varepsilon d\varepsilon$; si integra su un allungamento finito e si ottiene

$$\int_0^\varepsilon E \varepsilon d\varepsilon = \frac{1}{2} E \varepsilon^2 = \frac{\sigma^2}{2E} = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon .$$

Questo lavoro è immagazzinato nella sbarra sotto forma di energia potenziale, come avviene in una molla.

Con $\varepsilon = 0.54 \cdot 10^{-3}$, $\sigma = 3.82 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2$, la densità di energia potenziale è $2.06 \cdot 10^4 \text{ J/m}^3$; $-63 \cdot 10^{-2}$ nel volume ($3.77 \cdot 10 \text{ m}^3$) l'energia è $7.77 \cdot 10 \text{ J}$.

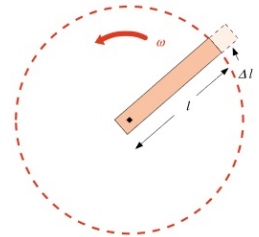


FIGURA 7.6
(Esempio 7.4)

Visualizza Soluzione

Legge di Poisson

Per effetto della trazione la sbarra non solo si allunga, ma subisce anche una variazione di sezione. Se r è una dimensione trasversale, ad esempio il raggio per una sbarra cilindrica, si trova, ricordando (7.1) e (7.2), la *legge di Poisson*:

$$\frac{\Delta r}{r} = -\nu \frac{\Delta l}{l} = -\nu \varepsilon = -\nu \frac{\sigma}{E} ; \quad (7.3)$$

ν , grandezza adimensionale, rappresenta il *coefficiente di Poisson*. I suoi valori sono compresi tra zero, per il sughero, e 0.5, per il caucciù. La (7.3) è

valida per valori non troppo elevati di σ .

In tabella 7.2 riportiamo i valori di ν per alcuni materiali alla temperatura di 20°C.

Nella trazione il volume della sbarra non diminuisce. Consideriamo infatti una sbarra cilindrica (anche se la trattazione è applicabile in generale) di volume iniziale $V = \pi r^2 l$. Dopo la trazione il volume diventa

$$V + \Delta V = \pi (r + \Delta r)^2 (l + \Delta l) = \pi r^2 l + \pi r^2 \Delta l + 2 \pi r l \Delta r ,$$

trascurando i termini, di ordine superiore al primo, contenenti $(\Delta r)^2$, $\Delta r \Delta l$ e $(\Delta r)^2 \Delta l$. Se supponiamo $\Delta V \geq 0$ deve essere $\Delta l / l \geq - 2 \Delta r / r$. Dalla (7.3) deriva $\nu \leq 0.5$ come condizione perché sia $\Delta V \geq 0$.

Sperimentalmente $\nu \leq 0.5$: concludiamo pertanto che il volume della sbarra sottoposta a trazione non diminuisce mai, qualunque sia il materiale di cui è composta la sbarra. Il volume rimane costante se $\nu = 0.5$, mentre aumenta per $\nu < 0.5$. Al contrario, il volume di una sbarra sottoposta ad un carico di compressione non aumenta mai.

Tabella 7.2 Coefficiente di Poisson

Materiali	ν
acciaio	0.30
alluminio	0.33
caucciù	0.50
ferro	0.30
ottone	0.35
piombo	0.40
platino	0.38
rame	0.34
vetro per finestre	0.25

7.2 Deformazione plastica. Rottura. Isteresi elastica

Il comportamento elastico del materiale si manifesta entro certi valori del carico. Al di sopra di un *valore critico del carico*, che dipende dal tipo di materiale, si determina una deformazione permanente, che prende il nome di *deformazione plastica*, e che non è reversibile quando viene rimosso il carico.

Il carico specifico sotto cui avviene l'inizio della deformazione plastica è definito come *carico specifico di snervamento* σ_s . Per valori superiori a σ_s si osserva un notevole aumento della deformazione, anche per aumenti limitati del carico, come si vede in figura 7.7: nel tratto lineare si ha deformazione elastica (reversibile), per $\sigma > \sigma_s$ si ha deformazione plastica (non reversibile, nel senso che preciseremo tra breve).

Per l'acciaio $\sigma_s = 30$, per il rame è compreso tra 7 e 30, per il piombo è dell'ordine di 1, in unità 10^7 N/m^2 .

L'inizio della deformazione plastica può manifestarsi in certi materiali bruscamente, così che è facile individuare il valore σ_s , mentre in altri materiali il passaggio dalla deformazione elastica a quella plastica è graduale.

Aumentando ulteriormente il carico il materiale arriva alla *rottura*. Il carico specifico a cui avviene la rottura è chiamato carico specifico ultimo o *carico unitario di rottura* σ_u .

Il carico di rottura a trazione, sempre in unità 10^7 N/m^2 , è per l'acciaio compreso tra 50 e 200, a seconda della composizione, mentre scende a 10 per l'alluminio, 3–9 per il vetro e intorno a 1 per il piombo. Il carico di rottura in compressione può differire da quello in trazione: nel vetro esso è pari a 60–120, per il piombo a 5.

Il prodotto tra il carico specifico σ e l'allungamento specifico ε ha le dimensioni di un'energia per unità di volume:

$$\sigma \varepsilon = \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \frac{\text{m}}{\text{m}} = \frac{\text{N m}}{\text{m}^3} = \frac{\text{J}}{\text{m}^3} .$$

In grafici come quelli della figura 7.7 e della figura 7.8 l'area sottesa dalla curva carico–allungamento è data dall'integrale $\int \sigma d\varepsilon$ e ha dunque il significato di una energia assorbita dal materiale per unità di volume. Tale area viene spesso indicata come *modulo di tenacità*. Nella figura 7.8 qualsiasi area sotto il tratto lineare, come quella indicata, vale $\sigma \varepsilon / 2$ e si ritrova il risultato dell'esempio 7.5.

In effetti un materiale ad alta resistenza meccanica, cioè in grado di sopportare elevati carichi specifici, assorbe una considerevole quantità di energia prima di arrivare alla condizione di rottura. Tale *materiale* è chiamato *tenace*. Un materiale, invece, nel quale la rottura ha luogo senza una

Deformazione plastica

Carico specifico di snervamento

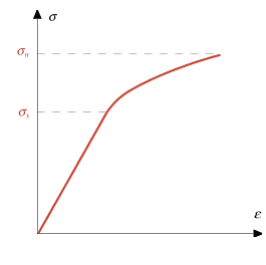


FIGURA 7.7

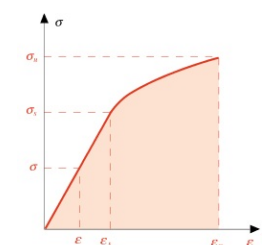


FIGURA 7.8

apprezzabile deformazione plastica, e quindi con un assorbimento minore di energia, è chiamato *fragile*.

La *duttilità di un materiale* è indice della deformazione plastica prima della rottura e può essere espressa dall'allungamento specifico (o riduzione specifica) intervenuto sotto carico. Un *materiale duttile è anche tenace*, in quanto è in grado di deformarsi in modo elevato prima della rottura.

Proprietà caratteristica dei corpi solidi è l'*isteresi elastica*. Consideriamo una sbarra sottoposta a trazione e rappresentiamo in un grafico, simile a quello della figura 7.7, il legame tra σ ed ε . Si inizia dalla situazione a riposo ($\sigma = 0, \varepsilon = 0$), per un materiale che non ha superato il limite di elasticità, cioè non ha mai subito deformazione plastica. Aumentando il carico specifico la deformazione aumenta linearmente fino a $\sigma = \sigma_s$, poi più rapidamente. Quando siamo nel punto *A* riduciamo la forza di trazione: si osserva che non ripercorriamo all'indietro la curva $\sigma(\varepsilon)$ appena trovata, ma che la sbarra resta più deformata: per $\sigma = 0$ si ha $\varepsilon > 0$ (punto *B*). Occorre comprimere la sbarra ($\sigma < 0$) per ritornare a trovare $\varepsilon = 0$ (punto *C*). Continuando a comprimere riduciamo la lunghezza della sbarra ($\varepsilon < 0$), fino ad arrivare nel punto *D*, simmetrico di *A*. Adesso diminuiamo la compressione e torniamo indietro: si trova che il percorso è diverso e che, per $\sigma = 0$, la sbarra è ancora compressa ($\varepsilon < 0$, punto *E*). Applicando una trazione si ritorna in *A*.

Il ciclo descritto *ABCDE* nel piano σ, ε si chiama *ciclo di isteresi*: esso mostra che la relazione tra σ ed ε non è univoca (come nel tratto di comportamento elastico) per un corpo che abbia subito carichi superiori a quello di deformazione plastica, ma dipende da come è stato trattato il corpo. Il fenomeno dell'isteresi non si presenta se il punto *A* si trova nel tratto lineare. Il comportamento mostrato in figura 7.9 giustifica l'uso dei termini, a seconda dei casi, di deformazione reversibile o irreversibile.

L'area del ciclo $\oint \sigma d\varepsilon$ rappresenta l'energia per unità di volume assorbita durante il processo e fornita dal lavoro delle forze di trazione e compressione: poiché il materiale ritorna nello stato di partenza, ma il lavoro speso nel ciclo è positivo, ci rendiamo conto che le forze in gioco non sono conservative. *L'energia meccanica assorbita in un ciclo è completamente dissipata: risulta che viene trasformata in calore.*

È possibile ritornare allo stato iniziale, $\sigma = 0$ ed $\varepsilon = 0$, percorrendo una serie di cicli di area sempre minore, come mostrato in figura 7.10. Se invece si prende come punto di partenza il punto *B* della figura 7.9, si trova che il materiale ha un comportamento elastico fino ad un carico specifico $\sigma' > \sigma_s$. Superando σ' e poi riducendo il carico a zero il nuovo punto di riposo *B'* è a destra di *B*. Iterando il processo si riesce a innalzare considerevolmente il limite di elasticità del materiale: si parla di *processo di incrudimento*. Con un riscaldamento a temperatura elevata per un certo tempo (*ricottura*) si riporta il materiale nelle condizioni primitive.

Duttilità

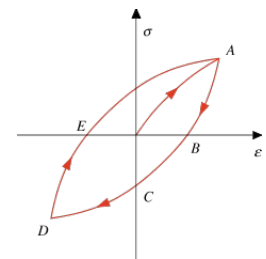


FIGURA 7.9

Ciclo di isteresi

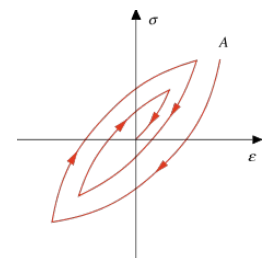


FIGURA 7.10

7.3 Scorrimento

Consideriamo un parallelepipedo solido incollato su due facce opposte a due lastre rigide, una bloccata e una mobile parallelamente all'altra. Applicando una forza F come in figura 7.11, si osserva uno *scorrimento* della faccia superiore rispetto a quella inferiore, che si può misurare tramite l'angolo θ . Si trova che tra il carico specifico $\sigma = F/S$ e l'angolo θ esiste una relazione lineare

$$\sigma = G \theta \quad (7.4)$$

Il parametro G , che caratterizza questo tipo di deformazione, si chiama *modulo di rigidità* o di *taglio* ed è tipico del materiale.

All'applicazione di F il corpo reagisce elasticamente e si ottiene una situazione di equilibrio con $\theta = \sigma / G$. Quando F viene tolta il corpo riassume la configurazione iniziale. Anche per lo scorrimento vale quanto discusso nel paragrafo 7.3 sul limite di elasticità.

In tabella 7.3 riportiamo i valori del modulo di rigidità per alcuni materiali, alla temperatura di 20°C.

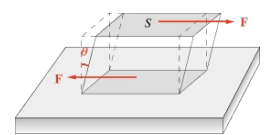


FIGURA 7.11

Tabella 7.3 Modulo di rigidità

Materiale	G
acciaio	$8.5 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2 \cdot \text{rad}$
alluminio	$2.5 \cdot 10^{10}$
ferro	$8.0 \cdot 10^{10}$
ottone	$3.0 \cdot 10^{10}$
piombo	$5.0 \cdot 10^9$
platino	$6.0 \cdot 10^{10}$
rame	$4.0 \cdot 10^{10}$
tungsteno	$1.4 \cdot 10^{11}$
vetro	$2.5\text{-}3.2 \cdot 10^{10}$

Si dimostra che tra le costanti elastiche viste finora esiste la relazione

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (7.5)$$

valida per piccole deformazioni, ovvero per carichi non troppo elevati.

Esempio 7.6

Un cubetto di ferro di 1 cm di lato è soggetto a un processo di scorrimento per effetto di un carico specifico σ , raggiungendo una situazione di equilibrio con $\theta = 10^{-3}$ rad. Determinare il valore della forza di taglio applicata.

Soluzione

Da (7.4) e consultando la tabella 7.3

$$\sigma = G \theta = 8 \cdot 10^{10} \cdot 10^{-3} = 8 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2,$$

$$F = \sigma S = 8 \cdot 10^7 \cdot 10^{-4} = 8 \cdot 10^3 \text{ N}.$$

Visualizza Soluzione

7.4 Torsione. Pendolo e bilancia di torsione

Consideriamo ancora una sbarra cilindrica di raggio r e lunghezza l , bloccata su una base, e applichiamo all'altra base una coppia di forze con momento \mathbf{M} , parallelo all'asse della sbarra, che risulta così sottoposta a *torsione*. Il valore di \mathbf{M} necessario per far ruotare la base inferiore rispetto a quella superiore di un angolo θ si ricava dall'espressione

$$M = \frac{\pi}{2} G \frac{r^4}{l} \theta = k \theta \quad . \quad (7.6)$$

L'effetto di torsione dipende fortemente dalle dimensioni trasversali: con una sbarra molto sottile, ad esempio un filo, si ottiene una deviazione misurabile anche con l'applicazione di un momento molto piccolo. La dipendenza da G significa che la torsione ha caratteristiche simili allo scorrimento longitudinale della figura 7.11.

La reazione elastica della sbarra si manifesta con un momento $-\mathbf{M}$, il cui modulo vale quindi $-k\theta$, cioè proporzionale all'angolo di torsione. Su questo fatto si basano sia il *pendolo* che la *bilancia di torsione*.

Per effettuare la torsione il momento esterno compie il lavoro (6.17)

$$W = \int_0^\theta M(\theta) d\theta = k \int_0^\theta \theta d\theta = \frac{1}{2} k \theta^2 \quad , \quad (7.7)$$

immagazzinato nel sistema come *energia potenziale elastica*.

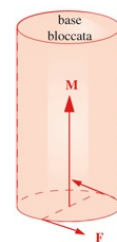


FIGURA 7.12

Esempio 7.7

Determinare il momento necessario per provocare la torsione di $\theta = 1^\circ$ di una sbarra cilindrica di ferro ($G = 8.0 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2 \cdot \text{rad}$) con $r = 1 \text{ cm}$ e $l = 1 \text{ m}$.

Soluzione

Il coefficiente k nella (7.6) vale

$$k = \frac{\pi}{2} 8 \cdot 10^{10} \frac{10^{-8}}{1} = 1.26 \cdot 10^3 \text{ Nm / rad.}$$

Dato che $\theta = 1^\circ$ corrisponde a $1.7 \cdot 10^{-2} \text{ rad}$, $M = 21.4 \text{ Nm}$.

Visualizza Soluzione

Esempio 7.8

Un albero motore lungo $l = 1 \text{ m}$ gira con velocità angolare $\omega = 104.7 \text{ rad/s}$ (10^3 giri/minuto)

fornendo una potenza $P = 10 \text{ kW}$. La torsione dell'albero non deve superare $\theta = 1^\circ = 1.7 \cdot 10^{-2} \text{ rad}$. Calcolare il valore minimo che deve avere il diametro dell'albero, fatto di acciaio con $G = 8.5 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2 \cdot \text{rad}$.

Soluzione

Dal punto di vista dinamico siamo in una situazione di equilibrio in cui il momento motore eguaglia il momento resistente e l'albero gira con velocità angolare costante. La potenza P è eguale a $M\omega$ da cui si ricava $M = 95.5 \text{ Nm}$. L'albero subisce torsione durante il funzionamento e a regime il momento elastico di torsione eguaglia M (un caso analogo si ha quando si applica una forza F ad una molla che a sua volta tira un corpo sottoposto ad attrito: in regime di moto uniforme $F = kx = F_{att}$). Pertanto

$$\frac{\pi}{2} G \frac{r^4}{l} \theta = 95.5 \text{ Nm} \Rightarrow d = 2r = 2.9 \text{ cm} .$$

Visualizza Soluzione

Pendolo di torsione

Un pendolo di torsione si realizza sospendendo un corpo solido a un filo; generalmente il punto di aggancio coincide con il centro di massa. Per esempio, un possibile pendolo di torsione consiste in un disco sospeso al centro (figura 7.13), essendo il filo verticale e il disco in un piano orizzontale. Se ruotiamo il disco di un angolo θ , mantenendolo orizzontale, il filo di sospensione subisce una torsione e sviluppa un momento elastico $-k\theta$, con k dato da (7.6). Se ora lasciamo libero il corpo, esso si mette in rotazione sotto l'azione del momento elastico, secondo l'equazione

$$-k\theta = I \ddot{\theta} = I \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

dove I è il momento d'inerzia del sistema rispetto all'asse di rotazione, coincidente col filo. La soluzione dell'equazione

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{k}{I} \theta = 0$$

è data da $\theta = \theta_0 \sin(\omega t + \phi)$, con $\omega = \sqrt{\frac{k}{I}}$. Il sistema descrive una *oscillazione armonica*.

Si noti che, a differenza del pendolo semplice e del pendolo composto, non

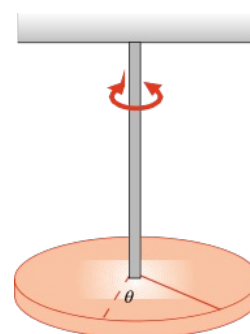


FIGURA 7.13

dobbiamo imporre, per avere un moto armonico, una piccola ampiezza di oscillazione, perché il filo anche con una torsione di parecchi giri sviluppa un momento proporzionale all'angolo. L'unica limitazione è di essere in condizioni di comportamento elastico del filo in torsione.

Durante l'oscillazione del pendolo di torsione si può applicare la legge di conservazione dell'energia meccanica (trascurando l'attrito dell'aria e dissipazioni di energia nel filo). Nella generica posizione individuata dall'angolo θ si utilizza (7.7) e si scrive

$$\frac{1}{2} k\theta^2 + \frac{1}{2} I\Omega^2 = \text{costante} \quad ,$$

dove Ω è la velocità angolare e la costante è eguale, per esempio, alla massima energia potenziale $\frac{1}{2} k\theta_0^2$; dall'eguaglianza si ricava $\Omega(\theta)$.

Citiamo due applicazioni pratiche, basate sulla misura del periodo di oscillazione $T=2\pi/\omega=2\pi \sqrt{I/k}$. Se è noto il momento d'inerzia si ottiene la costante k e quindi il modulo di rigidità del materiale che costituisce il filo. Invece, se è noto k si determina I ; questo metodo è utile nel caso di lastre di forma qualsiasi (la posizione del centro di massa si trova con i metodi del paragrafo 6.15).

Bilancia di torsione. Esperimento di Cavendish

Su un principio analogo si basa la *bilancia di torsione*: si sfrutta il fatto che un filo sviluppa un momento di reazione alla torsione calcolabile dall'angolo di torsione e che in equilibrio il momento elastico è eguale al momento esterno, che ha causato la torsione. Se questo momento è dato dall'applicazione di una coppia di forze di braccio l (l potrebbe essere la lunghezza di un'asta sospesa al centro e che quindi costituisce la bilancia di torsione), deve essere $Fl = k\theta$. Dalla misura dell'angolo di equilibrio θ si può calcolare il valore di F .

La bilancia di torsione risulta uno strumento molto sensibile, in grado cioè di misurare forze molto piccole (fino a 10^{-9} N); storicamente essa è servita a Coulomb (1785) per determinare la forza che si esercita tra cariche elettriche e a Cavendish (1788) per misurare la costante γ nella (5.1).

Nell'*esperimento di Cavendish* due piccole masse sferiche sono fissate agli estremi di un'asticciola, sospesa per il centro ad un filo (questa è la bilancia). Due masse sferiche molto maggiori sono poste vicino alle masse piccole, come in figura 7.15 che è una vista dall'alto, cioè lungo il filo.

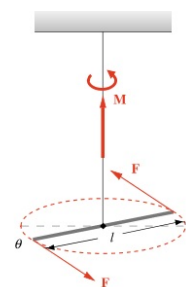


FIGURA 7.14

Le forze di attrazione gravitazionale sulle masse piccole formano una coppia che fa ruotare la bilancia fino al raggiungimento di una posizione di equilibrio, in cui il momento gravitazionale eguaglia il momento di torsione. Successivamente si inverte la posizione delle sfere grandi e in definitiva si misura l'angolo 2θ e si calcola γ . Un esempio numerico, che ci permette di valutare la difficoltà dell'esperimento, è svolto qui di seguito. Ricordiamo che solo dopo la determinazione di γ è stato possibile calcolare la massa della terra.

Esempio 7.9

In un esperimento come quello di Cavendish le sfere piccole hanno massa $m_1 = 0.05 \text{ kg}$, le sfere grandi $m_2 = 500 \text{ kg}$, la lunghezza dell'asta è $d = 80 \text{ cm}$, la distanza tra i centri di una sfera grande e della piccola ad essa vicina è $R = 20 \text{ cm}$. Il filo è di alluminio, lungo $l = 1 \text{ m}$ e di raggio $r = 0.1 \text{ mm}$. Calcolare il periodo della bilancia di torsione e l'angolo di deviazione, utilizzando il valore noto di γ .

Soluzione

La costante elastica del filo è

$$k = \frac{\pi}{2} G \frac{l^4}{l} = 3.93 \cdot 10^{-6} \text{ Nm/rad};$$

il momento d'inerzia della bilancia vale, supponendo le sfere piccole puntiformi,

$$I = 2 m \frac{d^2}{4} = 1.6 \cdot 10^{-2} \text{ kg m}^2$$

$$\Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{k}} = 401 \text{ s} .$$

È dunque necessario un tempo dell'ordine di 100 s per raggiungere l'equilibrio. La forza tra una coppia di sfere è

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{R^2} = 4.17 \cdot 10^{-8} \text{ N}$$

e il momento rispetto al centro della bilancia di torsione è

$$M = Fd = 3.34 \cdot 10^{-8} \text{ Nm}$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{M}{k} = 8.5 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \approx 0.5^\circ .$$

A seguito della rotazione le sfere piccole si avvicinano a quelle grandi di $\Delta R = \theta d/2 = 3.4 \text{ mm}$. L'attrazione aumenta leggermente e si ha un'ulteriore piccola deviazione. L'effetto finale è $\sim 8.8 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$.

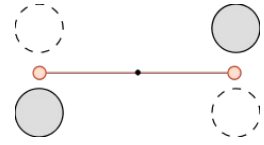


FIGURA 7.15

Visualizza Soluzione

7.5 Pressione. Compressione uniforme

Nei capitoli precedenti abbiamo sempre considerato forze applicate a punti; in questo capitolo, trattando le proprietà elastiche dei solidi, compare il rapporto tra forza agente e superficie su cui è applicata la forza, F/S . Tale rapporto si chiama *pressione* e questa grandezza acquista notevole importanza nello studio dei fluidi, come vedremo nel capitolo 8 a cui rimandiamo per una migliore definizione e per le unità di misura, e in termodinamica.

Per ora ci limitiamo a considerare la pressione nell'ambito di una particolare maniera di deformare un corpo, la cosiddetta compressione uniforme, che consiste nell'applicare alla superficie del corpo una pressione ovunque costante (pressione idrostatica). Ciò si realizza facilmente immergendo il corpo in un fluido mantenuto a sua volta sotto pressione. In figura 7.16 è rappresentato un cubo compresso su ogni faccia da forze perpendicolari alla superficie.

Se V è il volume del corpo in corrispondenza della *pressione esterna* p , ad una variazione Δp corrisponde una *variazione di volume* ΔV data da

$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{1}{\beta} \Delta p \quad (7.8)$$

dove β si chiama *modulo di compressibilità isoterma*; ciò vuol dire che la variazione di volume è misurata in condizioni sperimentali tali che la temperatura del corpo rimanga costante durante la compressione. Le unità di misura di β sono eguali a quelle della pressione. In tabella 7.4 riportiamo alcuni valori di β (in N/m^2), alla temperatura di 20°C .

Tabella 7.4 Modulo di compressibilità isoterma

Materiale	β
acciaio	$1.6 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$
acqua	$2.1 \cdot 10^9$
alluminio	$7.0 \cdot 10^{10}$
ferro	$1.7 \cdot 10^{11}$
mercurio	$2.8 \cdot 10^{10}$
ottone	$6.1 \cdot 10^{10}$
rame	$1.4 \cdot 10^{11}$
tungsteno	$2.0 \cdot 10^{11}$
vetro per finestre	$5.0\text{-}5.5 \cdot 10^{10}$

Tra β e le altre costanti elastiche esiste la relazione

$$\beta = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (7.9)$$

analoga alla (7.5). In pratica si vede che *sono indipendenti due sole costanti elastiche*: per un dato materiale si possono determinare, con esperimenti di

Modulo di compressibilità isoterma

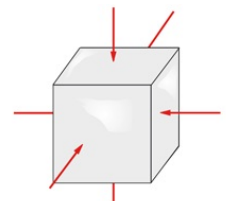


FIGURA 7.16

trazione e di torsione, E e G e poi calcolare ν e β attraverso (7.5) e (7.9).

Esempio 7.10

Determinare la variazione percentuale di volume di una sbarra di ferro sottoposta a una compressione uniforme, a temperatura costante, con una pressione $p_0 = 1.5 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$, noti il modulo di Young e il coefficiente di Poisson.

Soluzione

I valori delle costanti elastiche sono $E = 2.0 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$ (tabella 7.1) e $\nu = 0.30$ (tabella 7.2), per cui da (7.9) si ottiene $\beta = 1.7 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$, in accordo con la tabella 7.4. Pertanto da (7.8) si ha

$$\frac{\Delta V}{V} = - \frac{1.5 \cdot 10^9}{1.7 \cdot 10^{11}} = -0.88 \cdot 10^{-2} = -0.88\%$$

Si osservi che Δp sarebbe eguale a $p_0 - p_a$, dove p_a è la pressione atmosferica, pari a $\sim 10^5 \text{ N/m}^2$: quindi $\Delta p = p_0$. Certamente l'effetto è molto piccolo: meno dell'1% per una variazione di pressione enorme (oltre diecimila volte la pressione atmosferica).

Visualizza Soluzione

Notiamo che in tabella 7.4 sono riportati valori del modulo di compressibilità anche per i liquidi, come l'acqua o il mercurio. Nei liquidi β è più piccolo che nei solidi, ma sempre di valore elevato. In pratica solidi e liquidi sono molto poco compressibili: è appunto questo il significato di un grande valore di β . Per far variare dell'1% un dato volume d'acqua occorre una variazione di pressione di $2.1 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2$, circa 200 volte il valore della pressione atmosferica.

Completamente diverso è il caso dei gas, che studieremo in dettaglio nei capitoli successivi. Vogliamo ora solo ricordare che in condizioni isoterme un gas segue con buona approssimazione la legge di Boyle, $pV = \text{costante}$. Di qui differenziando otteniamo $p dV + V dp = 0$ ovvero

$$\frac{dV}{V} = - \frac{dp}{p} \Rightarrow \beta = p \quad : \quad (7.10)$$

il coefficiente di compressibilità isoterma per un gas è pari alla pressione stessa. I gas sono dunque comprimibili assai facilmente: per esempio, partendo da 1 m^3 di gas alla pressione di 10^5 N/m^2 , il volume si riduce a metà semplicemente raddoppiando la pressione, si riduce a un decimo decuplicando la pressione, ecc.

Queste stesse variazioni di pressione producono in un liquido o in un solido variazioni relative di volume estremamente piccole e trascurabili nella pratica.

Osserviamo che *il modulo di compressibilità è l'unica grandezza caratteristica di una deformazione elastica che possiamo definire per un fluido*. Lo scorrimento, la trazione e la torsione perdono significato in quanto un fluido non sviluppa le corrispondenti reazioni elastiche. Bisogna poi dire che *la compressione di un fluido è un processo sempre reversibile*, cioè il comportamento del fluido è sempre elastico, senza fenomeni simili all'isteresi.

7.6 Durezza

La *durezza* è definita come la resistenza di un corpo alla penetrazione da parte di un altro corpo opportunamente sagomato a forma di sferetta di piccolo raggio o di punta. La durezza di un materiale è un dato importante da un punto di vista tecnico e presenta due aspetti interessanti, la facilità di misura e la possibilità di correlarla alla resistenza meccanica del materiale; resta però un concetto piuttosto empirico, come si capisce dai metodi di misura che adesso descriviamo.

Il *metodo di Brinell* misura la durezza in relazione all'impronta lasciata nel materiale da una sfera di acciaio con diametro di ~ 1 cm, sottoposta a un carico dell'ordine di 10^4 N, che può essere variato in base alla durezza del materiale. Per un materiale duro l'impronta è piccola, mentre una grande impronta caratterizza un materiale di bassa durezza.

Un secondo *metodo* è quello di *Rockwell* che utilizza un corpo penetrante di piccole dimensioni (*indentatore*) e l'*indice di durezza* è legato alla profondità del solco lasciato.

Infine citiamo il *metodo di Vickers*, che utilizza come indentatore una piramide di diamante a base quadrata, con angolo al vertice ottuso (136°). L'impronta prodotta è di piccole dimensioni e la sua misura si effettua con un microscopio.

Numericamente la durezza è generalmente misurata come rapporto tra la forza premente e l'area dell'impronta permanente lasciata.

Una relazione lineare intercorre tra il carico specifico necessario a produrre la rottura e la durezza Brinell, nel caso di leghe metalliche (figura 7.17).

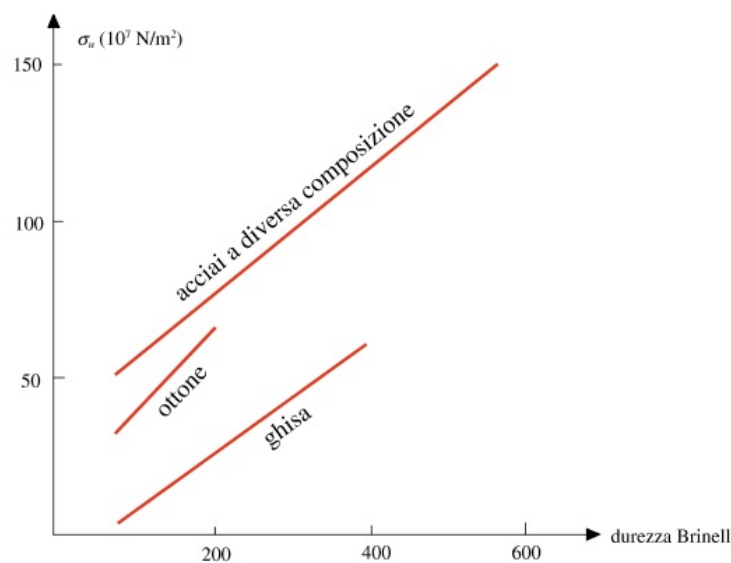


FIGURA 7.17

8.1 Generalità sui fluidi. Pressione

Una delle caratteristiche di un corpo solido è di avere una forma propria; invece una sostanza liquida o gassosa non ha questa proprietà, essa assume la forma del recipiente che la contiene. A una tale sostanza ci si riferisce in generale col nome di *fluido*.

Passiamo in rassegna alcune proprietà dei fluidi, mettendo in evidenza prima le diversità tra liquidi e gas e considerando successivamente gli aspetti comuni.

I liquidi hanno un volume definito e una superficie limite, mentre i gas non presentano un volume proprio, ma tendono ad occupare tutto il volume a disposizione. La densità dei liquidi è molto maggiore di quella dei gas: ad esempio per l'acqua $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$, per un gas come l'aria, a pressione atmosferica e a temperatura ambiente, $\rho = 1.3 \text{ kg/m}^3$. I *liquidi*, per quanto riguarda il comportamento elastico, *sono* praticamente *incompressibili* come i solidi, mentre un *gas* risulta *compressibile* con facilità.

Tali differenze sono dovute alla diversa forza dei legami tra atomi e molecole nella fase liquida o nella fase gassosa. Malgrado ciò, è possibile trattare in modo unificato le proprietà meccaniche di liquidi e gas.

Da un punto di vista macroscopico i fluidi sono sistemi continui, composti cioè da un numero infinito di elementi, ciascuno di massa $dm = \rho dV$ (vedi paragrafo 6.3). Caratteristica principale è la possibilità di scorrimento di una qualsiasi parte di fluido rispetto ad un'altra adiacente o alla parete del contenitore. Allo scorrimento si oppone una forza di attrito interno (paragrafo 8.6). Tuttavia il fluido non può resistere allo scorrimento, cioè non esiste una forza di attrito statico che determini una situazione di equilibrio, come avviene tramite l'attrito radente statico per certi valori della forza applicata nei solidi o nel fenomeno elastico dello scorrimento, sempre nei solidi. Quindi, se un fluido è in quiete, le forze tra gli elementi di fluido devono essere normali alle superficie di separazione, altrimenti i vari elementi inizierebbero a scorrere l'uno rispetto all'altro, abbandonando lo stato di quiete.

Non si può parlare di forza applicata in un punto del fluido: per ciascun elemento dm si considerano forze di volume, proporzionali a dV , come la forza peso $dF = g dm = g \rho dV$, e forze di superficie, proporzionali a dS , $dF = p dS$ dove p è la pressione già introdotta nel paragrafo 7.5.

Dalla definizione di fluido in equilibrio è possibile dedurre che la *pressione in un fluido non ha caratteristiche direzionali*; essa è una funzione scalare del punto che si considera all'interno del fluido e non dipende dall'orientazione

della superficie su cui è misurata. Pertanto, nel seguito del capitolo e quando studieremo le proprietà dei gas da un punto di vista termodinamico, intendiamo come pressione in un punto del fluido il rapporto tra la forza agente su una superficie infinitesima che circonda il punto e l'area della superficie stessa, cioè

$$p = \frac{dF}{dS} \quad , \quad p = \frac{F}{S} \quad , \quad (8.1)$$

dove la seconda espressione vale per una superficie finita se nei punti di questa la pressione è costante.

La non direzionalità della pressione si dimostra ricorrendo ad un metodo che riprenderemo nei paragrafi 8.2 e 8.4, basato sul cosiddetto *principio di solidificazione*. Si immagina un elemento di fluido separato dal resto del fluido da una superficie indeformabile e se ne analizza lo stato meccanico. Nella figura 8.1 l'elemento è un prisma a sezione triangolare, di lati $a = AB$, $b = BC$, $c = CA$; lo spessore normalmente al foglio è h . Il prisma è in quiete sotto l'azione delle forze di pressione indicate, ciascuna ortogonale alla superficie su cui agisce e costante su di essa. L'equilibrio lungo gli assi orizzontale e verticale richiede rispettivamente

$$F_c = p_c ch = F_a \cos\theta = p_a ah \cos\theta \quad ,$$

$$F_b = p_b bh = F_a \sin\theta = p_a ah \sin\theta \quad .$$

Essendo $c = a \cos\theta$ e $b = a \sin\theta$, si vede che $p_a = p_b = p_c$, indipendentemente dal valore delle aree e dell'angolo. Il ragionamento può essere ripetuto per qualsiasi orientazione del prisma e si conclude, passando al limite e riducendo il prisma ad un punto, che *la pressione in un punto di un fluido è una quantità scalare*: il suo valore può dipendere dalla posizione del punto, ma non dipende dalla direzione. Nelle equazioni dell'equilibrio non si è tenuto conto di eventuali forze di volume agenti sul prisma in quanto nel passaggio al limite esse scompaiono (dV è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a dS).

La misura della pressione all'interno di un fluido può essere semplicemente realizzata introducendo una piccola scatola con una parete deformabile, all'interno della quale è stato fatto il vuoto. Dalla deformazione della parete si deduce la forza F dovuta al fluido che agisce sulla superficie S della parete ovvero la pressione. Cambiando l'orientazione della scatola, e quindi della superficie deformabile, si verifica che la pressione in un medesimo punto è sempre la stessa. Questo strumento di misura è chiamato *barometro aneroide*.

Pressione in un fluido

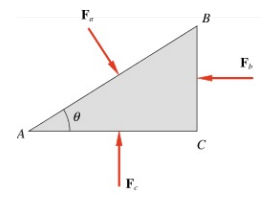


FIGURA 8.1

Unità di misura

Barometro aneroide

L'unità di misura della pressione è il pascal (Pa), pari a 1 N/m^2 . Un multiplo importante è il bar,

$$1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa} \quad ,$$

il cui valore è molto vicino a quello della pressione atmosferica. Infatti il valore standard è

$$p_{\text{atm}} = 1.01325 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 1.01325 \text{ bar} \quad .$$

Altre unità, che sono state abbandonate per legge e quindi non devono essere usate, sono l'atmosfera, che ha il valore appena citato, e il millimetro di mercurio, detto anche torr:

$$1 \text{ mm Hg} = 1 \text{ torr} = \frac{1}{760} \text{ atmosfere} = 133.3 \text{ Pa} \quad .$$

Lavoro delle pressioni

In equilibrio statico non ci sono spostamenti, anche se ci sono forze, e il lavoro è nullo. È però possibile in condizioni diverse che sotto l'azione delle forze di pressione ci sia uno spostamento e quindi un lavoro associato. Vedremo alcuni casi più avanti in questo capitolo e poi nel capitolo 11, quando studieremo le proprietà dei gas in termodinamica. Anticipiamo qui la formula generale che permette di calcolare il lavoro in funzione della pressione.

Consideriamo la situazione più facile: una forza $dF = p dS$ agisce ortogonalmente ad una superficie dS che a seguito di ciò si sposta concordemente alla forza di una quantità dh (figura 8.2). Il lavoro infinitesimo vale

$$dW = dF dh = p dS dh = p dV \quad ,$$

dove dV è il volume infinitesimo coperto dalla superficie dS nello spostamento dh . Integrando sulla variazione complessiva di volume si ottiene

$$W = \int p dV \quad . \quad (8.2)$$

Questa formula è valida in generale per forme qualsiasi: nella figura 8.3 vediamo un corpo che, sottoposto ad una pressione esterna, subisce una variazione di volume. Ciò avviene, per esempio, nella compressione uniforme, trattata nel paragrafo 7.5 e che costituisce l'argomento dell'esempio 8.1. In particolare il corpo può essere un gas contenuto in un cilindro con pistone mobile (in sostanza come nella figura 8.2), caso che tratteremo nel capitolo 11.

Esempio 8.1

Un corpo di volume V è sottoposto ad una compressione uniforme isoterma, con la pressione esterna che passa dal valore p_1 al valore p_2 .

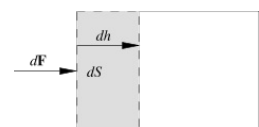


FIGURA 8.2

Calcolare il lavoro delle forze esterne. Applicare il risultato ad una massa d'acqua contenuta in un volume cubico di 1 m^3 , quando la pressione passa dal valore $p_1 = 10^5 \text{ Pa}$ al valore $p_2 = 10^8 \text{ Pa}$. Di quanto si sposta una faccia del cubo?

Soluzione

Ricorriamo a (7.8), tralasciando il segno, e a (8.2):

$$W = \int p dV = \int_{p_1}^{p_2} p \frac{V}{\beta} dp = \frac{V}{2\beta} (p_2^2 - p_1^2) \quad .$$

Nell'operazione di integrazione si è considerato costante il volume, che in realtà cambia, anche se poco (vedi dopo). Discuteremo nei capitoli 10 e 11 la questione del segno del lavoro in questo tipo di processi.

Per la massa d'acqua considerata $V = 1 \text{ m}^3$, $\beta = 2.1 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$, p_1 e p_2 si trascura rispetto a p_2 e si ha

$$W = \frac{V}{2\beta} p_2^2 = 2.4 \cdot 10^6 \text{ J} \quad .$$

La contrazione della massa d'acqua avviene con una variazione di volume che vale in modulo

$$\Delta V = \frac{V}{\beta} (p_2 - p_1) = \frac{V}{\beta} p_2 = 4.8 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3 \quad ,$$

ovvero la diminuzione è del 4.8%. Dato che la variazione è piccola, approssimativamente possiamo dividere ΔV per 6 ottenendo il volume Sx coperto dallo spostamento di una faccia (con $S = 1 \text{ m}^2$) e quindi

$$x = \frac{\Delta V}{6S} = 8 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 8 \text{ mm} \quad .$$

Si noti che, per una data massa, una variazione di volume comporta una variazione di densità; percentualmente le due variazioni sono eguali (e di segno opposto). Pur sotto una pressione così grande, pari a quella che agisce alle massime profondità oceaniche ($\sim 10^4 \text{ m}$), la variazione di densità dell'acqua è estremamente contenuta.

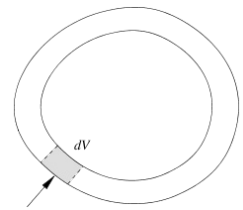


FIGURA 8.3

Visualizza Soluzione

Struttura microscopica dei fluidi

Le proprietà dei corpi solidi ordinari sono dovute alla forza del legame tra i componenti (atomi o molecole): questi stanno in posizioni fisse attorno alle quali possono al massimo oscillare. Da ciò discende la difficoltà che si incontra per modificare le dimensioni o la forma di un corpo solido e che si traduce nei

grandi valori dei vari moduli elastici (di Young, di rigidità, di compressibilità).

Nei liquidi il legame è meno forte e ciò permette ai componenti di muoversi, restando però praticamente a contatto e, nel complesso, legati. Si spiegano così da una parte l'assenza di forma propria e l'impossibilità di resistere ad uno sforzo di taglio, dall'altra l'esistenza di un volume proprio e l'elevato valore del modulo di compressibilità (vedi anche paragrafi 8.15 e 8.16).

Nei gas le molecole sono in continuo movimento, restando mediamente molto lontane tra loro (la distanza intermolecolare media è molto maggiore delle dimensioni molecolari); durante il moto avvengono urti tra le molecole e tra le molecole e le pareti del contenitore. Le forze intermolecolari decrescono molto rapidamente con la distanza e non sono in grado di tenere le molecole legate. Da queste proprietà seguono l'assenza di forma e di volume proprio, la non resistenza ad uno sforzo di taglio nonché la relativa facilità con cui si riesce a ridurre il volume occupato da un gas.

8.2 Equilibrio statico di un fluido

Studiamo adesso come possa variare in funzione della posizione la pressione all'interno di un fluido in quiete. Ripetiamo la definizione di equilibrio statico: *in un fluido in quiete tutti gli elementi hanno accelerazione e velocità nulla, in un sistema di riferimento inerziale*: le forze agenti devono pertanto avere risultante eguale a zero. Siccome sull'elemento dm di fluido agiscono forze di pressione \mathbf{F}_p e forze di volume \mathbf{F}_V , deve essere $\mathbf{F}_p + \mathbf{F}_V = \mathbf{0}$ e ovviamente è nulla la somma delle componenti lungo qualsiasi asse.

Consideriamo un elemento di fluido, per semplicità di forma cubica come mostrato in figura 8.4; le componenti delle forze di pressione lungo l'asse z , in generale variabili con la posizione, sono:

$$\begin{aligned} p(z) dS - p(z + dz) dS &= dS \left\{ p(z) - \left[p(z) + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right] \right\} = \\ &= -\frac{\partial p}{\partial z} dz dS = -\frac{\partial p}{\partial z} dV \quad ; \end{aligned}$$

dz , dS , dV sono rispettivamente altezza, area di una faccia e volume del cubetto. La componente della forza di volume è data da

$$f_z dm = f_z \rho dV$$

con f_z componente lungo l'asse z della forza per unità di massa, cioè dell'accelerazione (non indicata in figura 8.4).

La condizione di equilibrio si scrive

$$-\frac{\partial p}{\partial z} dV + f_z \rho dV = 0 \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial z} = \rho f_z \quad .$$

Relazioni analoghe si ottengono lungo gli assi x e y per cui la condizione di equilibrio statico di un elemento di fluido è dato da

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho f_x \quad , \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \rho f_y \quad , \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \rho f_z \quad ,$$

che si riassumono nell'unica equazione vettoriale

$$\nabla p = \mathbf{grad} p = \rho \mathbf{f} \quad . \quad (8.3)$$

Se in un fluido in quiete agisce una forza di volume la pressione nel fluido non può essere costante: essa deve variare in accordo con (8.3) per consentire l'equilibrio statico. La forza di volume tende a spostare l'elemento di fluido determinando una reazione del fluido che si manifesta con una variazione della pressione: questa aumenta lungo il verso positivo della direzione della forza così che la risultante delle forze di pressione è opposta alla forza di volume (figura

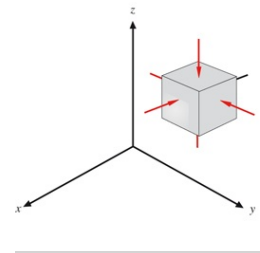


FIGURA 8.4

Equilibrio statico di un fluido

8.5).

La pressione è costante nel fluido solo se $\rho \mathbf{f} = 0$. Ciò si verifica se non agiscono forze di volume oppure quando il valore della densità è così basso da poter considerare trascurabile il prodotto $\rho \mathbf{f}$. Quest'ultimo è il caso che si presenta per i gas, almeno se ci limitiamo a piccoli volumi. In volumi molto grandi invece le variazioni di pressione nel gas, somme di tanti piccoli contributi, possono essere notevoli: si pensi all'atmosfera terrestre.

È interessante confrontare l'esistenza della pressione all'interno di un fluido in quiete con la situazione in un filo teso. In ogni punto del filo teso agisce la tensione T , che può essere evidenziata per esempio tagliando il filo e inserendo una molla che si allunga (paragrafo 2.14). Analogamente, in ogni punto di un fluido agisce la pressione p , misurabile col barometro descritto nel paragrafo 8.1. In entrambi i casi esiste all'interno dei corpi una distribuzione di sforzi interni (tridimensionali nel fluido, unidimensionali nel filo), che rappresenta la reazione del sistema all'applicazione di forze esterne.

Per esempio un liquido contenuto in un recipiente e sottoposto alla forza peso (forza di volume) e alla forza di pressione atmosferica (forza di superficie) viene compresso contro le pareti e la reazione di queste, che è una forza di superficie, si manifesta nel liquido con una ben determinata pressione, variabile all'interno del liquido come calcoleremo nel paragrafo 8.3. Allo stesso modo un gas compresso dentro un cilindro con pistone mobile da forze di superficie sviluppa una reazione alla compressione che è data dalla sua pressione. I due esempi sono mostrati in figura 8.6, in cui sono disegnate le forze applicate al fluido.

Se la forza di volume agente sul fluido è conservativa, da (2.20) ricaviamo, dividendo per la massa,

$$\mathbf{f} = -\nabla E_{p,m}$$

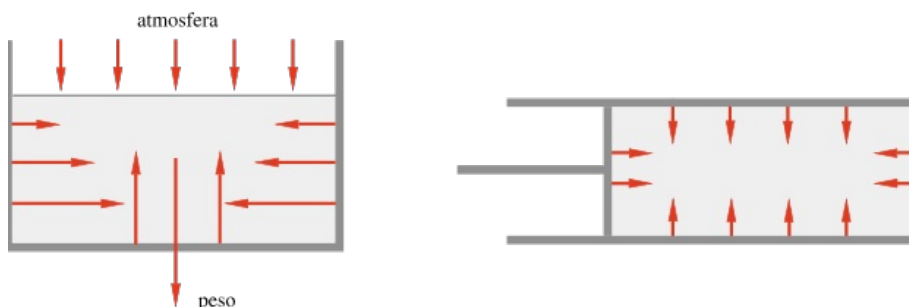


FIGURA 8.6

dove $E_{p,m}$ rappresenta l'energia potenziale per unità di massa. In condizioni di equilibrio statico vale la (8.3) e quindi

$$\nabla p = \rho \mathbf{f} = -\rho \nabla E_{p,m} . \quad (8.4)$$

Il gradiente della pressione ha la stessa direzione e verso opposto del

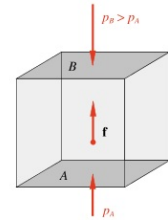


FIGURA 8.5

gradiente dell'energia potenziale (per unità di massa). Le superficie equipotenziali coincidono con le superficie isobariche: in ogni punto di una tale superficie la pressione ha lo stesso valore.

Consideriamo ora due superficie equipotenziali S_1 e S_2 , prossime tra di loro: passando da S_1 a S_2 si hanno le variazioni dp e $dE_{p,m}$ per la pressione e l'energia potenziale, variazioni indipendenti dal punto di partenza su S_1 e di arrivo su S_2 . Tenendo conto della definizione di gradiente (appendice C), si ha

$$|\nabla p| = \left| \frac{dp}{dn} \right| , \quad |\nabla E_{p,m}| = \left| \frac{dE_{p,m}}{dn} \right| ,$$

indicando con dn uno spostamento ortogonale alla superficie. Da (8.4) si ottiene

$$|dp| = \rho |dE_{p,m}| .$$

Poiché le variazioni di pressione e di energia potenziale sono, come detto, le stesse ovunque nel passaggio da S_1 a S_2 , la densità ρ del fluido deve essere costante lungo la superficie S_1 : *una superficie equipotenziale è isobarica e su di essa $\rho = \text{costante}$* . Pertanto in un fluido sottoposto a forze conservative le eventuali variazioni di densità seguono geometricamente quelle di pressione e di energia potenziale.

8.3 Equilibrio in presenza della forza peso

In questo paragrafo applichiamo i risultati generali del paragrafo 8.2 al caso della forza peso, che è una forza di volume conservativa.

Come asse verticale prendiamo l'asse z , orientato verso l'alto; la forza peso è parallela e discorde a questo asse e abbiamo $f_x = f_y = 0, f_z = -g$. Con riferimento a (8.3), la pressione varia solo lungo l'asse z ed è costante in un piano normale all'asse z , che è dunque una superficie isobarica; verifichiamo subito che questa è anche una superficie equipotenziale, in quanto $E_{p,m} = g z$.

Dalla (8.4), essendo

$$(\nabla p)_z = \frac{dp}{dz} \quad \text{e} \quad (\nabla E_{p,m})_z = \frac{dE_{p,m}}{dz} = g \quad ,$$

si ottiene

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \Rightarrow \int_1^2 dp = - \int_{z_1}^{z_2} \rho g dz \quad ;$$

se la densità è costante,

$$p_2 - p_1 = -\rho g (z_2 - z_1) \quad ;$$

questa è la legge con cui varia la pressione in un fluido in equilibrio sotto l'azione della forza di gravità, se appunto $\rho =$ costante in tutto il fluido.

Consideriamo in particolare un liquido in un contenitore (figura 8.7) e sia p_0 la pressione sulla superficie limite del liquido, dove $z_2 = 0$ (e $p_2 = p_0$). Alla profondità $z_1 = -h$ ($h > 0$) in base alla legge di variazione della pressione

$$p_2 - p_1 = p_0 - p(h) = -\rho g (z_2 - z_1) = -\rho g h$$

$$\Rightarrow p(h) = p_0 + \rho g h \quad . \quad (8.5)$$

Questa relazione si chiama *legge di Stevino* e mostra che *in un liquido con $\rho =$ costante la pressione cresce linearmente con la profondità*.

In un bacino d'acqua ($\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$) sottoposto alla pressione atmosferica ($p_0 \cong 1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$) la pressione cresce con la profondità secondo la relazione quantitativa

$$p(h) = (10^5 + 9.8 \cdot 10^3 h) \text{ Pa} \quad ;$$

ogni 10 metri di profondità la pressione aumenta di circa 1 bar.

Sul fondo degli oceani, con $h \cong 10^4 \text{ m}$, si ha una pressione dell'ordine di 10^3 bar. La valutazione non è precisa in quanto si è assunta la densità dell'acqua marina costante con la profondità; tuttavia l'errore che viene commesso è solo di qualche per cento. Il fatto si spiega con l'alto valore del modulo di

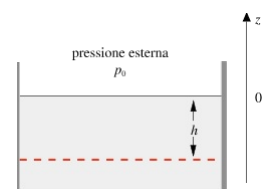


FIGURA 8.7

Legge di Stevino

compressibilità dell'acqua (si veda l'esempio 8.1): anche sotto forti pressioni il volume di una massa d'acqua cambia di molto poco. Questa proprietà è vera in generale per tutti i liquidi e permette di assumere, in prima approssimazione, che la loro densità sia costante.

La legge di Stevino (8.5) può essere ottenuta molto semplicemente calcolando il peso della colonna di liquido alta h :

$$m g = \rho V g = \rho S h g \Rightarrow p = \frac{F}{S} = \rho g h \quad .$$

La pressione alla profondità h è data dalla somma della pressione esercitata dalla colonna di liquido sovrastante e di quella esterna agente sulla superficie libera del liquido. Tuttavia abbiamo preferito ricavare (8.5) a partire da (8.3) e (8.4) per mostrare come la legge di Stevino si inquadri nel contesto più generale dell'equilibrio statico di un fluido.

Abbiamo già rilevato che nel campo della gravità le superficie equipotenziali e quindi isobariche sono piani orizzontali; ricordiamo che lungo di esse la densità deve essere costante. Pertanto *la superficie libera di un liquido in quiete dentro un contenitore è una superficie piana coincidente con una superficie orizzontale*, come disegnato nelle figure 8.6 e 8.7. Possiamo capirlo sia perché nei punti della superficie libera la pressione deve avere ovunque lo stesso valore, pari a quello della pressione esterna, sia pensando al fatto che se una superficie equipotenziale S non fosse parallela alla superficie libera del liquido, lungo S osserveremmo una discontinuità della densità nel passaggio dall'esterno all'interno del liquido. Per la stessa ragione è orizzontale anche la superficie di separazione tra due liquidi non miscibili, come acqua e olio.

La struttura della legge di variazione della pressione nel fluido è $p = p_0 + \Delta p$ con p_0 pressione esterna. Ne segue che ogni cambiamento della pressione esterna dà luogo a un'eguale variazione di p . Questa proprietà è nota come *principio di Pascal*. Se poi, come avviene in un piccolo volume di gas, Δp è molto minore di p_0 , la pressione nel gas è ovunque costante e pari al valore della pressione esterna, di cui segue le eventuali variazioni.

Principio di Pascal

Nel seguito del paragrafo esamineremo alcune interessanti conseguenze delle leggi dell'equilibrio statico in un fluido sottoposto alla forza di gravità.

Vasi comunicanti

Consideriamo un sistema di recipienti in comunicazione tra loro, riempiti dello stesso liquido e aperti nello stesso ambiente. Il liquido nei vari recipienti assume lo stesso livello rispetto al suolo, ovvero le superficie libere appartengono tutte allo stesso piano equipotenziale. Questo risultato esprime *il principio dei vasi comunicanti*. Esso è facilmente ricavabile dalla legge di Stevino, osservando che, in condizioni di quiete, alla stessa profondità le pressioni devono essere identiche. Nella figura 8.8 sono rappresentate in alto la condizione di equilibrio e in basso una situazione di non equilibrio, in cui si

osserva un flusso di liquido fino allo stabilirsi dell'equilibrio.

Paradosso idrostatico

Nella figura 8.9 sono mostrati tre recipienti, aventi la stessa area di base S , ma forme diverse: il primo è un cilindro, il secondo è un tronco di cono con la base superiore di area maggiore di S , il terzo è ancora un tronco di cono, però con la base superiore di area minore di S . Tutti sono riempiti con un liquido di altezza h . Se si misura la forza esercitata sull'area S si trova che essa ha il valore ρghS , eguale nei tre casi, pur essendo evidente che, rispetto al cilindro, nel secondo recipiente c'è una maggiore massa di liquido e nel terzo una minore massa. Il fatto è che le superficie equipotenziali, di equazione $E_{p, m} = gz = \text{costante}$, sono piani orizzontali; su ciascuno di questi piani la pressione è costante, indipendentemente dalla forma del recipiente. In particolare la differenza di pressione tra superficie libera e superficie S è in ogni caso ρgh , qualunque punto di S si consideri; ne segue che la forza è sempre $pS = \rho ghS$. Qualitativamente, nel secondo caso la massa al di fuori della colonna cilindrica preme sulle pareti del cono, non sul fondo, ed è tenuta in equilibrio dalla reazione delle pareti; nel terzo caso le pareti esercitano sulle colonne di liquido di altezza inferiore ad h una pressione che è la reazione alla pressione del liquido. Lasciamo per esercizio la verifica quantitativa.

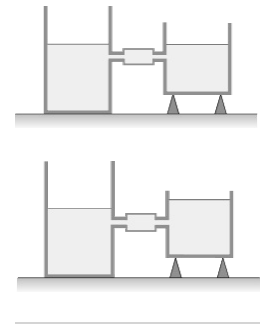


FIGURA 8.8

Manometro ad U

Abbiamo un tubo a forma di U , riempito con un liquido (figura 8.10). Se le pressioni p_1 e p_2 agenti sulle superficie libere sono le stesse, le superficie in base al principio dei vasi comunicanti si trovano allo stesso livello. Se però i due rami comunicano con ambienti a diverse pressioni, con $p_1 > p_2$, si produce un dislivello tra le due superficie libere dato da

$$h = \frac{p_1 - p_2}{\rho g} \quad ,$$

in accordo con la legge di Stevino. Dalla misura di h si ottiene il valore della pressione in un ambiente rispetto, per esempio, a quella atmosferica.

Il tubo ad U costituisce il manometro più semplice. La sensibilità varia in ragione inversa della densità del liquido contenuto nel manometro: minore è la densità del liquido, più piccole sono le differenze di pressione che il manometro è capace di rivelare.

Se il tubo ad U contiene due liquidi diversi non miscibili di densità ρ_1 e ρ_2 e le superficie libere sono a contatto con lo stesso ambiente alla pressione p_0 , esse presentano un dislivello. Indicando con p la pressione alla superficie di separazione tra i due liquidi, si ha in base a (8.5)

$$p = p_0 + \rho_1 g z_1 = p_0 + \rho_2 g z_2$$

(la linea tratteggiata in figura 8.11 è equipotenziale), e quindi

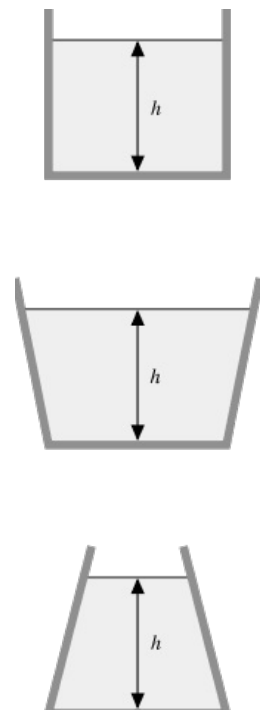


FIGURA 8.9

$$\rho_1 g z_1 = \rho_2 g z_2 \Rightarrow \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{z_2}{z_1} = 1 - \frac{h}{z_1}$$

con $h = z_1 - z_2$ dislivello tra le due superficie libere. Le altezze z_1 e z_2 delle colonne liquide sopra la superficie di separazione sono inversamente proporzionali alle densità.

Su questi risultati è fondato un metodo di misura della densità relativa dei liquidi rispetto a quella di un liquido campione. L'apparato si può facilmente modificare per estendere la misura a liquidi miscibili.

Barometro di Torricelli

Torricelli fu il primo a sostenere che l'atmosfera esercita una pressione e a misurarne il valore con dispositivi simili a quelli della figura 8.12, detti *barometri a mercurio*. Consideriamo prima il manometro ad U con un ramo chiuso e un ramo aperto in un ambiente a pressione atmosferica. Se il riempimento con mercurio è effettuato opportunamente, senza fare entrare aria nella parte chiusa, si osserva che il dislivello h tra le due superficie libere è di circa 76 cm. Poiché nel ramo chiuso agisce solo la pressione dei vapori di mercurio, che è $\sim 10^{-6}$ bar, il dislivello è dovuto solo alla pressione atmosferica che vale dunque $\rho g h$.

Per convenzione il valore di riferimento è quello esercitato da una colonna di mercurio alla temperatura di 0°C , con $h = 0.760 \text{ m}$, $\rho = 13.595 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$, in un luogo dove $g = 9.80665 \text{ m/s}^2$, e risulta

$$P_{\text{atm}} = 1.01325 \cdot 10^5 \text{ Pa} ,$$

valore detto normale.

Se al posto del mercurio utilizzassimo come liquido l'acqua la colonna sarebbe alta 10.33 m ($h' = \rho h / \rho'$, dove i valori con l'apice sono riferiti all'acqua e quelli senza al mercurio).

Pressione atmosferica e sue variazioni

La *pressione atmosferica* è originata dall'attrazione gravitazionale da parte della terra sulla massa di gas che la circonda. Si raggiunge un equilibrio statico che determina una compressione contro la superficie della terra.

La pressione atmosferica diminuisce con l'altezza: basta pensare che è minore il peso della colonna d'aria sovrastante. La decrescita non è lineare con l'altezza poiché la densità dell'aria non è costante. Assumendo l'atmosfera isoterma (il che chiaramente non è), vale la legge di Boyle già citata nel paragrafo 7.5, secondo cui $pV = \text{costante}$ ovvero $p/\rho = \text{costante}$: in queste condizioni la densità è proporzionale alla pressione.

Consideriamo un asse z verticale orientato verso l'alto e con origine al livello del mare, dove densità e pressione valgono ρ_0 e p_0 . Alla quota z , dove la pressione vale p , poniamo $\rho = \rho_0 p / p_0$ in accordo con l'ipotesi fatta e

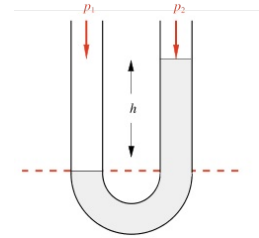


FIGURA 8.10

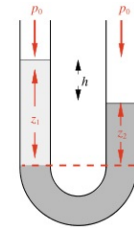


FIGURA 8.11

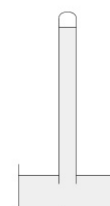
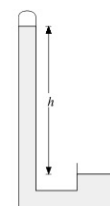


FIGURA 8.12

applichiamo la legge di Stevino a una variazione di quota dz :

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g = -\frac{g \rho_0}{p_0} p \Rightarrow \frac{dp}{p} = -\frac{g \rho_0}{p_0} dz = -\frac{dz}{a}$$

$$\text{con } a = \frac{p_0}{g \rho_0} = \frac{1.013 \cdot 10^5}{9.8 \cdot 1.3} = 7.95 \cdot 10^3 \text{ m} \cong 8 \text{ km. Integrando}$$

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = -\frac{1}{a} \int_0^z dz \Rightarrow \ln \frac{p}{p_0} = -\frac{z}{a} \Rightarrow p = p_0 e^{-z/a} .$$

Nell'atmosfera isoterma la pressione decresce esponenzialmente con l'altezza; il valore della costante a (si noti che anche g è stato assunto costante) è calcolato in corrispondenza a un valore della densità dell'aria a livello del mare alla temperatura di 0°C ; se si usa il valore a 20°C risulta $a \cong 8.6 \text{ km}$. Ad ogni modo la pressione si ridurrebbe a circa $1/3$ del valore di p_0 ad una quota di $8 \div 9 \text{ km}$.

Valori più corretti si hanno da medie fatte su molte misure alle varie quote. Nella figura 8.13 sono rappresentate le variazioni di pressione e temperatura della cosiddetta aria tipo.

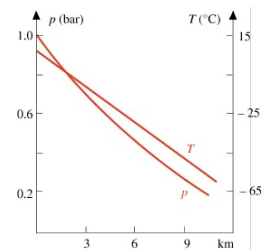


FIGURA 8.13

8.4 Principio di Archimede

In un fluido in equilibrio sotto l'azione della gravità isoliamo idealmente un volume finito di fluido V_0 , di forma qualsiasi. La risultante delle forze di pressione, esercitate dal resto del fluido sulla parte isolata, è eguale ed opposta alla forza peso della stessa. Infatti per la condizione di equilibrio del volume V_0 di fluido

$$\mathbf{F}_p + \mathbf{F}_V = \mathbf{F}_p + m \mathbf{g} = 0 \Rightarrow \mathbf{F}_p = -m \mathbf{g} ,$$

essendo m la massa di fluido contenuta nel volume V_0 , $m = \rho V_0$.

Se ora sostituiamo al volume V_0 di fluido un identico volume di qualsiasi altra sostanza, con massa $m' = \rho' V_0$, la risultante \mathbf{F}_p delle forze di pressione esercitate dal fluido circostante rimane la stessa, mentre varia la forza peso del volume preso in considerazione. Pertanto non sussiste più una condizione di equilibrio e la forza risultante agente su V_0 vale $\mathbf{F}'_V + \mathbf{F}_p$, cioè

$$(m' - m) \mathbf{g} = (\rho' - \rho) V_0 \mathbf{g} .$$

Se $\rho' > \rho$ la forza risultante ha la stessa direzione e verso di \mathbf{g} e quindi il corpo, introdotto al posto del volume V_0 di fluido, scende nel fluido; se invece $\rho' < \rho$ il corpo sale.

In ambedue i casi *il corpo riceve una spinta verso l'alto*, $\mathbf{F}_A = -\rho V_0 \mathbf{g}$, *pari al peso del volume di fluido spostato*. Questo risultato esprime il *principio di Archimede*.

La spinta di Archimede \mathbf{F}_A , in quanto risultante delle forze esterne di pressione applicate a V_0 dal fluido circostante, si deve ritenere applicata nel centro di massa del fluido spostato. Il corpo che occupa il volume V_0 ha, in generale, il centro di massa in una posizione diversa. Si può presentare pertanto, oltre alla spinta, anche un momento risultante.

Lo sviluppo dei concetti esposti è alla base dello studio dell'equilibrio dei corpi sommersi o galleggianti, quali sottomarini, navi, palloni sonda.

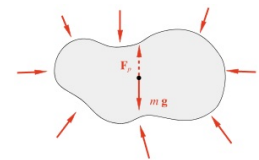


FIGURA 8.14

Esempio 8.2

Un'asta sottile, di lunghezza l , sezione S e densità costante ρ , è incernierata nel suo estremo O alla parete di un recipiente, mentre l'altro estremo è immerso in acqua. L'asta può ruotare liberamente attorno ad un asse orizzontale passante per il punto O , che non è immerso in acqua. Se all'equilibrio la parte di lunghezza d dell'asta è fuori dall'acqua, determinare la densità del materiale di cui è composta l'asta.

Soluzione

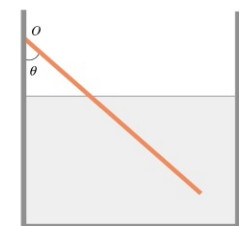


FIGURA 8.15
(Esempio 8.2)

In equilibrio la somma dei momenti agenti sull'asta deve essere nulla. Prendiamo il punto O come polo e indichiamo con θ l'angolo formato dall'asta con la parete.

La forza peso dell'asta, $\rho S l g$, applicata nel centro dell'asta distante $l/2$ da O , ha il momento

$$M = \rho S l g \frac{l}{2} \sin \theta .$$

La spinta di Archimede è pari alla forza peso del liquido spostato, $\rho_0 S(l - d)g$, ed è applicata nel centro della parete sommersa dell'asta, distante $d + \frac{l-d}{2} = \frac{l+d}{2}$

il momento è

$$M_A = \rho_0 S (l - d) g \frac{l + d}{2} \sin \theta .$$

Vettorialmente i due momenti hanno stessa direzione (ortogonale al disegno), verso opposto e modulo eguale. Dall'eguaglianza dei moduli si ricava

$$\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{d^2}{l^2} \right) .$$

Visualizza Soluzione

Esempio 8.3

Un corpo a forma di parallelepipedo, con volume V e densità ρ noti, galleggia su un liquido di densità incognita ρ_l . Quale altra grandezza bisogna misurare per determinare ρ_l ?

Soluzione

La situazione di equilibrio statico è mostrata nella figura 8.16. La forza peso e la spinta di Archimede agenti sul parallelepipedo sono eguali:

$$\rho V g = \rho_l V_s g ;$$

V_s è il volume della parte sommersa, eguale al volume di liquido spostato. Si ricava

$$\rho_t = \rho \frac{V_s}{V} = \rho \frac{h_s}{h}$$

e quindi occorre misurare il valore di V_s o, più facilmente, di h_s , altezza della parte sommersa. Ciò può essere fatto disponendo di un corpo campione su cui è incisa una scala graduata.

Visualizza Soluzione

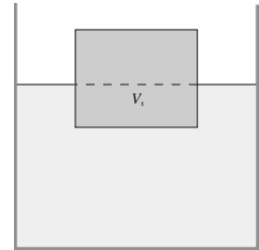


FIGURA 8.16
(Esempio 8.3)

8.5 Liquido in rotazione

Consideriamo un liquido in un recipiente cilindrico posto in rotazione rispetto all'asse verticale z , che coincide con l'asse del cilindro; la velocità angolare ω è costante. Si osserva che dopo un certo tempo tutto il liquido ruota rigidamente insieme al recipiente e che la superficie libera non è più piana, ma concava. Vogliamo determinare la forma della superficie libera.

Ciascun elemento di liquido descrive un'orbita circolare e quindi è sottoposto a una forza radiale, diretta verso l'asse di rotazione, pari a $\rho dV \omega^2 r$, dove r è la distanza dall'asse dell'elemento considerato, di massa $dm = \rho dV$.

Per ricondurci a una situazione di equilibrio statico, che sappiamo trattare, ci poniamo in un sistema di riferimento ruotante con il liquido attorno all'asse z . Tale sistema non è inerziale e dobbiamo quindi considerare anche la forza apparente centrifuga, radiale e diretta verso l'esterno.

In questo sistema un qualsiasi elemento di liquido è in equilibrio statico sotto l'azione delle forze di volume, $dm\mathbf{g}$ e $dm\omega^2 r\mathbf{u}_r$, e delle forze di pressione dovute agli elementi di liquido circostanti; \mathbf{u}_r rappresenta il versore della direzione radiale, orientata verso l'esterno. Osserviamo che

$$dm \omega^2 r \mathbf{u}_r = dm \omega^2 (x \mathbf{u}_x + y \mathbf{u}_y) \quad ,$$

dove x e y sono le coordinate dell'elemento di liquido in un piano ortogonale a z . L'energia potenziale per unità di massa delle forze di volume, entrambe conservative, è data da

$$E_{p,m} = g z - \frac{1}{2} \omega^2 r^2 = g z - \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2) \quad (8.6)$$

e infatti si verifica subito che $-\nabla E_{p,m}$ è la forza per unità di massa di liquido, $\mathbf{g} + \omega^2 r \mathbf{u}_r$.

La superficie libera del liquido è una superficie equipotenziale e la sua equazione è quindi determinata dalla condizione

$$g z - \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2) = \text{costante} \quad .$$

Per determinare il valore della costante osserviamo che sull'asse ($r = 0$ ovvero $x = y = 0$) l'altezza del liquido rispetto al fondo del recipiente è $z = h$; la costante vale pertanto $g h = E_{p,m}(0, 0, h)$ e in definitiva

$$z = h + \frac{\omega^2}{2g} r^2 = h + \frac{\omega^2}{2g} (x^2 + y^2) \quad (8.7)$$

è l'equazione della superficie libera, che risulta essere *un paraboloide di rotazione*.

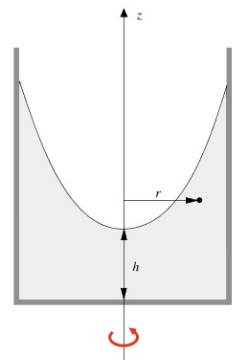


FIGURA 8.17

Il valore di h , altezza del vertice del paraboloido rispetto al fondo, è facilmente calcolabile. Il liquido in quiete ($\omega = 0$) occupa il volume $\pi R^2 d$ con R raggio del cilindro. In rotazione il volume dell'intercapedine cilindrica alta z e compresa tra i raggi r e $r + dr$ è dato da

$$dV = 2 \pi r dr z(r) = 2 \pi r \left(h + \frac{\omega^2}{2g} r^2 \right) dr$$

e il volume totale sotto il paraboloido è

$$V = \int_0^R 2 \pi h r dr + \int_0^R \frac{\pi \omega^2}{g} r^3 dr = \pi R^2 \left(h + \frac{\omega^2 R^2}{4g} \right) .$$

La massa nel processo non cambia; se la densità resta costante, il volume appena calcolato deve essere eguale a $\pi R^2 d$ e si trova

$$h = d - \frac{\omega^2 R^2}{4g} .$$

L'altezza h dipende da ω e la sua misura può essere utilizzata come *un tachimetro per la velocità angolare*. Il massimo valore ω_M misurabile si ha per $h = 0$: $\omega_M = 4gd/R^2$.

Studiamo ora il moto in un sistema di riferimento inerziale; il liquido rispetto a tale sistema non è più in quiete e non possiamo usare (8.4).

La forza agente sull'elemento $dm = \rho dV$ di liquido in rotazione è la risultante della forza peso (forza di volume) e delle forze di superficie e deve essere centripeta, cioè valere $-\rho dV \omega^2 r \mathbf{u}_r$, come abbiamo già rilevato all'inizio del paragrafo. Lungo la direzione verticale le forze agenti sono in equilibrio e quindi

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad , \quad (8.8)$$

come sappiamo da (8.3). La forza radiale, non nulla, è dovuta alle differenze di pressione:

$$\mathbf{F}_r = [p(r) dS - p(r+dr) dS] \mathbf{u}_r = -\frac{\partial p}{\partial r} dr dS \mathbf{u}_r = -\frac{\partial p}{\partial r} dV \mathbf{u}_r ,$$

dove dS rappresenta la superficie dell'elemento, di volume $dV = dr dS$. Ponendo \mathbf{F}_r eguale a $-\rho dV \omega^2 r \mathbf{u}_r$ si ottiene

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho \omega^2 r \quad . \quad (8.9)$$

La pressione dunque cresce radialmente nel liquido in rotazione. La funzione $p(r, z)$, le cui derivate parziali soddisfano (8.8) e (8.9), è

$$p = -\rho g z + \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2 + k \quad ,$$

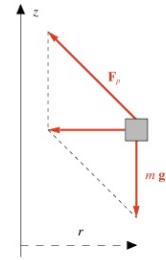


FIGURA 8.18

dove k rappresenta la pressione sul fondo del recipiente e sull'asse di rotazione, cioè per $z = r = 0$. Se p_0 è la pressione esterna agente sulla superficie libera, $k = p(0, 0) = p_0 + \rho g h$. Quindi lungo la superficie libera, che è isobarica alla pressione p_0 , deve essere

$$p_0 = -\rho g z + \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2 + p_0 + \rho g h \Rightarrow z = h + \frac{\omega^2}{2g} r^2$$

che è la (8.7) già ricavata.

L'origine della forza centripeta necessaria alla rotazione del liquido è nella variazione radiale della pressione. Se nel liquido è sospeso un corpuscolo con densità $\rho' \neq \rho$ l'azione della pressione, esercitata dal liquido circostante, è sempre la stessa, però la forza centripeta $\rho V \omega^2 r$ può essere troppo grande o troppo piccola per mantenere il corpuscolo, di massa $\rho' V$, sull'orbita circolare di raggio r . Pertanto il corpuscolo si sposterà verso l'asse di rotazione se $\rho' < \rho$ mentre se ne allontanerà se $\rho' > \rho$.

Su questo risultato, che è un'estensione del principio di Archimede, si basa il *metodo di separazione per centrifugazione di sostanze in sospensione in un liquido*, frequentemente usato in biologia. In appositi dispositivi, detti *ultracentrifughe*, si raggiungono valori di ω dell'ordine di 10^4 rad/s $\cong 10^5$ giri/minuto, riuscendo a separare sostanze con densità poco diversa da quella del liquido (differenze relative dell'ordine di 10^{-2}).

Centrifugazione

8.6 Attrito interno. Viscosità. Fluido ideale

Quando si verifica una condizione di scorrimento relativo tra due elementi di fluido compare lungo l'area di contatto una forza tangenziale di attrito, detta *forza di attrito interno*, con verso sempre contrario a quello della velocità relativa. L'elemento 1 del fluido esercita una forza sull'elemento 2 e viceversa: le due forze sono eguali e contrarie, come mostrato in figura 8.19. Se la velocità v_1 dell'elemento 1 è maggiore di quella v_2 dell'elemento 2, la forza di attrito interno è ritardante per il primo elemento e accelerante per il secondo.

S

Si trova sperimentalmente che il modulo della forza di attrito interno si può esprimere come

$$dF = \eta dS \frac{dv}{dn}, \quad (8.10)$$

dove dS rappresenta l'area di contatto e dv/dn la variazione del modulo della velocità in direzione ortogonale a dS . Il coefficiente η è la *viscosità del fluido* e dipende dal tipo di fluido e dalla temperatura. Nei liquidi η decresce all'aumentare della temperatura, nei gas cresce.

L'unità di misura della viscosità è il kg/ms, però nella pratica si usa l'unità poise (dal nome del fisiologo Poiseuille) e il sottomultiplo centipoise:

$$1 \text{ poise} = 10^{-1} \text{ kg/ms} \quad , \quad 1 \text{ centipoise} = 10^{-2} \text{ poise} = 10^{-3} \text{ kg/ms}.$$

Diamo nella tabella 8.1 alcuni valori della viscosità.

Tabella 8.1 Viscosità		
Fluido	Temperatura (°C)	η (poise)
acqua	0	$1.79 \cdot 10^{-2}$
acqua	20	$1.00 \cdot 10^{-2}$
acqua	100	$0.30 \cdot 10^{-2}$
alcol etilico	20	$1.20 \cdot 10^{-2}$
mercurio	20	$1.55 \cdot 10^{-2}$
sangue	37	0.23
olio per motori	30	2.50
glicerina	20	15.00
vetro	700	$1.00 \cdot 10^{11}$
pece	15	$1.30 \cdot 10^{11}$
aria	20	$1.71 \cdot 10^{-4}$
idrogeno	20	$0.88 \cdot 10^{-4}$

All'attrito interno e a quello tra liquido e pareti del contenitore si riconduce il fenomeno della variazione di forma del liquido in rotazione, discusso nel paragrafo 8.5. All'inizio della rotazione entrano in movimento gli elementi di liquido sul fondo e vicino alle pareti, cioè a contatto con una superficie in moto relativo. In particolare per gli elementi di liquido sul fondo non è inizialmente

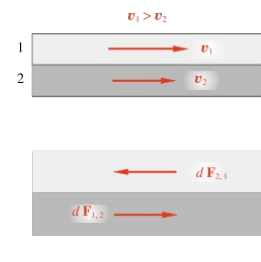


FIGURA 8.19

Forza di attrito interno

Viscosità di un fluido

ancora realizzata la condizione di equilibrio dinamico, ossia non c'è una forza centripeta sufficiente a mantenerli in orbita circolare. Gli elementi si portano verso l'esterno ed il liquido comincia ad accumularsi verso le pareti. Successivamente il moto degli elementi più esterni trascina per attrito interno via via gli elementi più interni, che a loro volta si spostano verso l'esterno. Essendo la velocità angolare costante, alla fine le velocità relative si annullano e si raggiunge l'equilibrio dinamico con la conformazione parabolica vista.

Più precisamente, si trova che tra liquido e pareti non c'è scorrimento. Uno strato molto sottile di liquido, detto *strato limite*, le cui dimensioni sono di pochi diametri molecolari, aderisce alla parete e si muove con questa. Il successivo strato di liquido è trascinato per viscosità e così via. Analogamente, se il liquido si muove rispetto ad una parete ferma, c'è uno strato limite di liquido fermo, rispetto al quale scorre il resto del liquido.

Si chiama *fluido ideale* un fluido in cui $\eta = 0$ e $\rho = \text{costante}$, cioè *un fluido non viscoso e incompressibile*: quest'ultima dizione si riferisce al fatto che se la densità è costante una massa di fluido occupa sempre lo stesso volume, anche se è in movimento. Essendo la viscosità nulla, le forze tra gli elementi fluidi, seppure in moto relativo, sono sempre ortogonali alle superficie di contatto, come avviene in un fluido in quiete.

Fluido ideale

Il fluido ideale è un caso limite, in quanto in un fluido reale è sempre $\eta \neq 0$; si noti che con un fluido ideale non si potrebbe certamente realizzare l'esperienza descritta nel paragrafo 8.5.

Osserviamo infine che in un fluido in equilibrio statico $dv/dn = 0$ e pertanto non ci sono forze tangenziali: le condizioni di equilibrio sono le stesse per un fluido viscoso e uno non viscoso ovvero l'attrito interno non modifica le condizioni di equilibrio statico. È solo in un fluido in movimento che il concetto di viscosità è significativo, come del resto dice la (8.10).

8.7 Moto di un fluido. Regime stazionario. Portata

Consideriamo un fluido in moto, per esempio all'interno di un condotto. Per studiare caratteristiche del moto come la variazione della velocità lungo il condotto e la sua dipendenza dalla pressione, si possono adottare due diverse descrizioni (o visuali). La prima, detta *lagrangiana*, prende in esame un elemento di fluido e ne segue il moto dovuto alle varie forze agenti (di volume e di superficie, inclusa la forza di attrito interno se la viscosità non è trascurabile); si tratta di una descrizione analoga a quella utilizzata per il moto di un punto materiale. L'approccio della seconda descrizione, detta *euleriana*, è diverso: viene fissata l'attenzione su un determinato punto della massa fluida $P(x, y, z)$ e si considera la velocità $\mathbf{v}(x, y, z, t)$ di un elemento fluido che passa nel punto P all'istante t . In generale tale grandezza è variabile nel tempo, cioè i vari elementi che successivamente passano nella posizione considerata P hanno velocità diverse. Se in base alle leggi della meccanica siamo in grado di determinare in tutta la massa del fluido la funzione $\mathbf{v}(x, y, z, t)$ abbiamo una rappresentazione del moto di tutti gli elementi fluidi.

Adottiamo la visuale euleriana e restringiamo il nostro studio al caso in cui la velocità, pur cambiando da punto a punto, sia in ciascun punto indipendente dal tempo, $\mathbf{v}(x, y, z)$. Questa situazione fisica è detta di *regime stazionario*: tutti gli elementi di fluido che passano in istanti diversi in P hanno in quella posizione sempre la stessa velocità. In caso contrario si parla di *regime variabile*. Notiamo che in regime stazionario si vede il vantaggio della visuale euleriana: la mappa delle velocità è immutabile, la variabile tempo è scomparsa. Nella visuale lagrangiana, dovendo seguire il moto del singolo elemento, siamo costretti a conservare la dipendenza esplicita dal tempo.

Tracciamo le linee che in ogni punto hanno direzione e verso della velocità cioè sono tangenti al vettore velocità: tali linee sono dette *linee di corrente*; in regime stazionario esse hanno una configurazione costante nel tempo e coincidono con le traiettorie degli elementi fluidi. Un esempio è mostrato in figura 8.20: se il regime è stazionario il disegno non cambia mai. Le linee di corrente si possono facilmente visualizzare immergendo nel fluido polveri colorate che vengono trasportate dalla corrente. In regime variabile invece le linee di corrente cambiano nel tempo e la traiettoria di un elemento fluido è costituita da una successione di tratti, ciascuno appartenente a una diversa configurazione di linee di corrente.

Tutte le linee di corrente che passano attraverso una generica sezione S individuano un *tubo di flusso*, mostrato in figura 8.21. L'intero condotto, al limite, costituisce un tubo di flusso.

Consideriamo un tubo di flusso di sezione infinitesima dS , ortogonale alle linee di corrente: il prodotto $dq = v dS$, detto *portata del tubo di flusso*, rappresenta tutto il volume di fluido che è passato attraverso dS in un secondo.

Descrizione euleriana

Regime stazionario

Linee di corrente

Tubo di flusso

Tale volume, infatti, ha la base pari a dS e l'altezza v , modulo della velocità, che corrisponde allo spazio percorso da un elemento di fluido in un secondo. Come si desume dalla definizione, la portata si misura in m^3/s .

Il tubo di flusso può cambiare di sezione (figura 8.21), ma se il fluido è incomprimibile, cioè la densità è costante, e si è in condizioni di regime stazionario, cioè la configurazione delle linee di corrente è immutabile, la portata deve essere la stessa attraverso qualsiasi sezione.

Infatti, fissate due qualsiasi sezioni del tubo di flusso e quindi il volume compreso tra queste, la massa ivi contenuta può entrare e uscire solo dalle sezioni, ma non dalle pareti se il regime è stazionario, e non può cambiare se la densità è costante: pertanto la portata attraverso le sezioni è la stessa, il fluido non può localmente né addensarsi né rarefarsi. In conclusione, *in regime stazionario se la densità è costante, è costante la portata di un tubo di flusso infinitesimo: $vdS = costante$; dove la sezione aumenta la velocità diminuisce, mentre se diminuisce la sezione aumenta la velocità*, come sembra ovvio se bisogna smaltire per unità di tempo un numero costante di metri cubi.

Per un tubo di flusso di sezione finita la portata è data da

$$q = \int_S dq = \int_S v dS = v_m S ,$$

se v_m è la *media delle velocità* nei vari punti della sezione (media spaziale e non temporale). Quindi, per un fluido incomprimibile in regime stazionario

$$v_m S = costante \quad . \quad (8.11)$$

Questa legge di proporzionalità inversa tra velocità e sezione è stata scoperta da Leonardo, osservando il moto dei liquidi. Essa è facilmente riscontrabile guardando la corrente di un fiume: la corrente appare più veloce dove il fiume si restringe.

Si trova sperimentalmente che la (8.11) è valida anche per i gas: essi sono cioè incomprimibili nel loro moto in un condotto, almeno finché le velocità non sono elevate (~ 100 m/s).

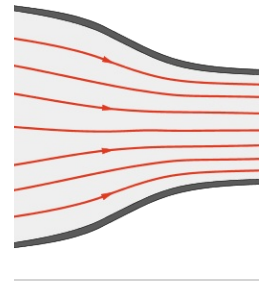


FIGURA 8.20

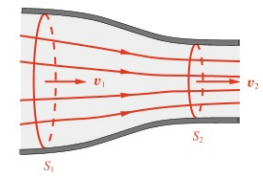


FIGURA 8.21

8.8 Teorema di Bernoulli

Ricaviamo adesso la proprietà fondamentale della dinamica dei fluidi ideali, nota come *teorema di Bernoulli* (1738). Abbiamo un fluido ideale, $\eta = 0$ e

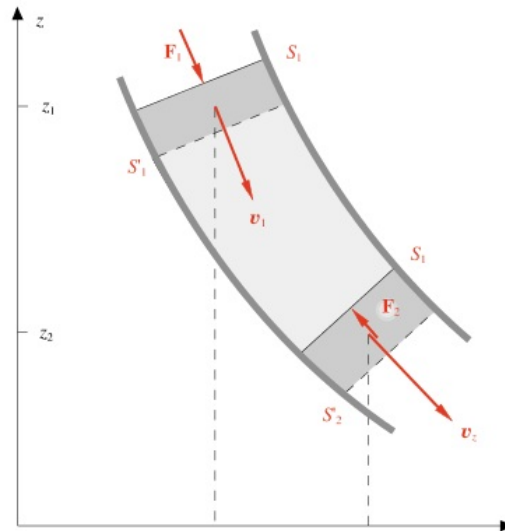


FIGURA 8.22

$\rho = \text{costante}$, che scorre in condizioni di regime stazionario dentro un condotto a sezione variabile. Un volume di fluido, compreso tra le sezioni S_1 e S_2 si sposta tra le sezioni S_1' e S_2' (figura 8.22): sia ds_1 lo spostamento da S_1 a S_1' e ds_2 da S_2 a S_2' . Se il fluido è incomprimibile il volume $dV_1 = S_1 ds_1$ che attraversa la sezione S_1 nel tempo dt è eguale a quello $dV_2 = S_2 ds_2$ che attraversa nello stesso intervallo di tempo la sezione S_2 : $dV_1 = dV_2$.

Vogliamo ricavare la relazione tra velocità e pressione del fluido nelle varie sezioni del condotto. A tal fine utilizziamo il teorema dell'energia (4.18), secondo cui il lavoro delle forze agenti è eguale alla variazione di energia cinetica.

Le forze agenti sul volume di fluido sono la forza peso e le forze di pressione, mentre non ci sono forze di attrito interno dato che $\eta = 0$. Dalla figura 8.22 osserviamo che complessivamente il movimento del volume di fluido equivale a spostare nel volume dV_2 la massa contenuta nel volume dV_1 ; l'energia potenziale del fluido compreso tra S_1' e S_2 rimane invariata, anche se nel tempo gli elementi fluidi che lo compongono sono cambiati. Il lavoro della forza peso è quindi dato da

$$dW = -dE_p = -dm g (z_2 - z_1) = -\rho dV g (z_2 - z_1) ,$$

dove z_1 e z_2 sono le quote dei due volumi eguali dV_1 e dV_2 , di massa dm .

Le forze di pressione dovute alle pareti del condotto danno lavoro nullo in quanto ortogonali allo spostamento ($\eta = 0$), mentre il lavoro di quelle dovute

agli elementi a monte di S_1 e a valle di S_2 è dato da

$$dW_p = \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{s}_1 + \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{s}_2 = p_1 S_1 ds_1 - p_2 S_2 ds_2 = p_1 dV_1 - p_2 dV_2 = (p_1 - p_2) dV \quad .$$

Il calcolo della variazione di energia cinetica, seguendo il ragionamento utilizzato per l'energia potenziale (nel volume compreso tra S'_1 e S_2 non c'è variazione di energia cinetica), fornisce

$$dE_k = \frac{1}{2} dm v_2^2 - \frac{1}{2} dm v_1^2 = \frac{1}{2} \rho dV (v_2^2 - v_1^2) \quad .$$

Pertanto

$$dW + dW_p = -\rho dV g (z_2 - z_1) + (p_1 - p_2) dV = dE_k = \frac{1}{2} \rho dV (v_2^2 - v_1^2)$$

e separando i termini relativi a dV_1 e dV_2

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g z_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g z_2$$

ovvero

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g z = \text{costante} \quad . \quad (8.12)$$

Teorema di Bernoulli

La relazione (8.12), valida per qualsiasi sezione S , esprime il *teorema di Bernoulli*: in un fluido ideale in moto con regime stazionario la somma della pressione, della densità di energia cinetica (energia cinetica per unità di volume) e della densità di energia potenziale (energia potenziale per unità di volume) è costante lungo il condotto, ovvero lungo un qualsiasi tubo di flusso.

Se il condotto è orizzontale $\rho g z$ è costante e quindi la (8.12) si riduce a

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{costante} \quad . \quad (8.13)$$

La pressione e la velocità del fluido cambiano solo se cambia la sezione: dove questa è maggiore la velocità è minore secondo (8.11) e in base a (8.13) maggiore è la pressione; dove la sezione è minore accade il contrario, v aumenta e p diminuisce. Se la sezione è costante, rimangono costanti pressione e velocità: data l'assenza di attrito il moto avviene senza l'azione di una forza, almeno finché il condotto è rettilineo.

Da (8.12) se $v = 0$ si ritrova la legge di Stevino (8.5): $p + \rho g z = \text{costante}$. Il fatto sottolinea che la statica è sempre, come già osservato, un caso particolare della dinamica. Osserviamo inoltre che la pressione misurata in un punto del fluido in quiete è sempre maggiore di quella esistente nel fluido in movimento.

Un'ultima considerazione: nella rappresentazione del moto tramite le linee di corrente, esse risultano più fitte dove la velocità è maggiore, come si vede in

figura 8.20. A tale proprietà qualitativa si può dare un aspetto quantitativo se si assume di misurare la velocità tramite il numero di linee di corrente per unità di sezione. In ogni caso, dall'esame dell'andamento delle linee di corrente si può avere un'idea non solo delle traiettorie, ma anche delle variazioni di velocità e quindi della pressione.

8.9 Applicazioni del teorema di Bernoulli

Le relazioni (8.12) e (8.13) sono state ricavate per il moto in regime stazionario di un fluido ideale. In questo paragrafo vedremo alcune applicazioni, che si riferiscono a situazioni reali: i risultati, calcolati in base al teorema di Bernoulli, sono perciò da considerare casi limite. In un fluido reale occorre spendere lavoro contro gli attriti e quindi, per esempio, a parità di differenza di pressione o di dislivello le variazioni di velocità del fluido sono minori. D'altra parte il teorema di Bernoulli resta pur sempre un utile mezzo di calcolo per fissare i limiti ideali nel comportamento di un fluido in movimento.

Flusso in un tubo a sezione costante

In regime stazionario se la sezione è costante resta costante anche la velocità, in accordo con (8.11). Pertanto il termine che dà la densità di energia cinetica non varia lungo il condotto e la legge (8.12) si scrive, con riferimento a due generiche sezioni S_1 e S_2 ,

$$p_1 + \rho g z_1 = p_2 + \rho g z_2 \quad .$$

In corrispondenza di un dislivello $h = z_2 - z_1$ la variazione di pressione è ρgh , come se il fluido fosse in quiete. Nel condotto della figura 8.23 abbiamo

$$p_1 + \rho g h_1 = p = p_2 + \rho g h_2 \quad ;$$

la pressione è massima nel punto più basso, assunto come riferimento per le quote, e decresce con la quota.

Se vogliamo tramite una pompa far salire un fluido di una quota h con una certa portata $q = Sv$, la pompa deve assicurare la differenza di pressione ρgh , che corrisponde ad una forza ρghS e ad una potenza $\rho ghSv = \rho ghq$. Per far salire l'acqua di 1 m con portata di 1 litro/s la potenza necessaria è

$$P = 10^3 \cdot 9.8 \cdot 1 \cdot 10^{-3} = 9.8 \text{ W} \quad ;$$

per h metri e n litri/s è 9.8 hnW .

Tubo di Venturi

Il *tubo di Venturi* consiste in un condotto orizzontale a sezione variabile e viene utilizzato per misure di velocità e di portata, inserendolo nella conduttura in cui scorre il fluido. Applicando (8.11) e (8.13) si ha

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 \quad , \quad v_1 S_1 = v_2 S_2 \quad ,$$

essendo S_1 e S_2 rispettivamente la sezione della conduttura e della strozzatura. Pertanto

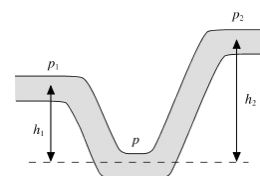


FIGURA 8.23

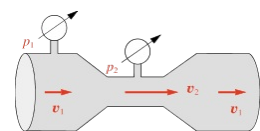


FIGURA 8.24

$$v_2^2 = \frac{2(p_1 - p_2)}{\rho} \frac{S_1^2}{S_1^2 - S_2^2} .$$

Dalla misura della differenza di pressione nelle due sezioni, $\Delta p = p_1 - p_2$, si possono calcolare v_2 e quindi v_1 e risalire al valore della portata.

Bruciatore a gas. Aspiratore a acqua

Nel *bruciatore a gas*, il gas combustibile passa attraverso una strozzatura nel condotto: la velocità aumenta e la pressione diminuisce, portandosi a un valore inferiore a quello della pressione atmosferica; pertanto attraverso l'apertura dall'ambiente esterno fluisce l'aria necessaria per formare la miscela combustibile. La figura 8.25 mostra una sezione del dispositivo. Tramite una regolazione dell'apertura si variano le condizioni di combustione.

Nell'*aspiratore ad acqua*, al posto del gas fluisce l'acqua e l'aria, o altro gas, proviene da un ambiente chiuso in cui si intende ridurre la pressione esistente. La depressione causata dall'aumento di velocità dell'acqua nella strozzatura del condotto aspira l'aria che mescolandosi con l'acqua viene portata via. Alla fine del processo nell'ambiente chiuso c'è una pressione residua pari a quella del vapor d'acqua. Un principio simile è utilizzato negli erogatori di benzina ad arresto automatico. Il liquido che scorre aspira aria; quando il livello nel serbatoio del veicolo tocca la punta dell'erogatore l'aspirazione si blocca e questo fatto provoca lo scatto di una valvola che chiude l'erogatore.

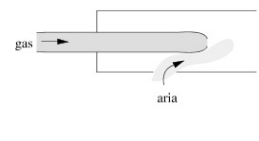


FIGURA 8.25

Paradosso idrodinamico

Consideriamo un condotto in cui fluisce dell'aria; alla fine del condotto viene posto un dischetto. Si osserva che il dischetto è spinto verso il condotto e tende a chiuderlo piuttosto che essere allontanato dal getto fluido, come forse si potrebbe intuitivamente pensare (dovendo il nome di *paradosso*). Il risultato si spiega col teorema di Bernoulli (8.13): se p è la pressione dell'aria che si muove con velocità v e p_{atm} è la pressione esterna dell'aria in quiete, lungo un tubo di flusso che va dall'interno del condotto all'esterno si ha

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 = p_{atm} \Rightarrow p < p_{atm} .$$

Tubo di Pitot

Se un ostacolo viene posto in una corrente fluida le linee di corrente si aprono, ma nel punto di ostacolo (O nella figura 8.27) il fluido è fermo. Nelle sezioni A e B , a sufficiente distanza dall'ostacolo, la pressione e la velocità del fluido sono le stesse, per cui da (8.13) abbiamo

$$p_A + \frac{1}{2} \rho v_A^2 = p_B + \frac{1}{2} \rho v_B^2 = p_O .$$

Pratichiamo due piccoli fori nel tubo di Pitot, in O e in B , per misurare in quelle posizioni le pressioni nel fluido: dalla loro differenza si calcola la velocità

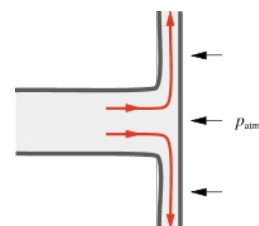


FIGURA 8.26

del fluido relativa al tubo.

Tale sistema viene utilizzato per la *misura della velocità degli aerei*.

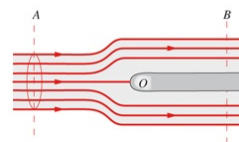


FIGURA 8.27

Teorema di Torricelli

Un recipiente, contenente un liquido di densità ρ , presenta sulla parete un piccolo foro, di sezione trascurabile rispetto alla sezione del recipiente, a distanza h dalla superficie libera (figura 8.28). La pressione nell'ambiente in cui si trova il recipiente è ovunque p_0 . Vogliamo determinare la velocità con cui il liquido esce dal foro (velocità di deflusso).

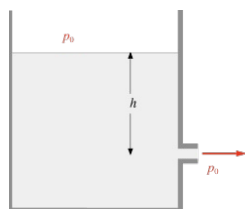


FIGURA 8.28

Dato che il recipiente ha sezione molto grande rispetto al foro il livello scende lentamente e il liquido può essere considerato quasi in quiete sulla superficie libera. Prendiamo un tubo di flusso che parte dalla superficie libera e termina nel foro: lungo di esso, in base al teorema di Bernoulli (8.12), si ha

$$(p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g z)_{\text{sup}} = (p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g z)_{\text{foro}} .$$

Sulla superficie libera $p = p_0$, $v = 0$ e, assumendo il livello del foro come riferimento, $z = h$; all'uscita del foro $p = p_0$ e $z = 0$. Pertanto

$$p_0 + \rho g h = p_0 + \frac{1}{2} \rho v^2 \Rightarrow v = \sqrt{2 g h} .$$

La velocità di efflusso non dipende né da ρ né da p_0 ed è pari a quella che avrebbe il liquido se scendesse in caduta libera da un'altezza h . Tale risultato, valido finché si può trascurare l'attrito interno, venne ricavato da Torricelli molto prima che fosse conosciuto il teorema di Bernoulli.

Esempio 8.4

Un serbatoio è riempito con acqua e olio, che consideriamo liquidi ideali; la densità dell'olio è $\rho_0 = 900 \text{ kg/m}^3$, l'altezza dello strato d'acqua è $h_1 = 1 \text{ m}$, quello dello strato d'olio è $h_2 = 4 \text{ m}$. Determinare la velocità con cui esce inizialmente l'acqua da un piccolo foro sul fondo del serbatoio. La pressione nell'ambiente circostante è ovunque p_0 .

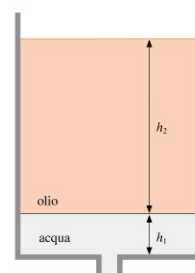


FIGURA 8.29
(Esempio 8.4)

Soluzione

Consideriamo un tubo di flusso nell'acqua, dalla superficie di separazione con l'olio al foro, e applichiamo (8.12) come abbiamo fatto nel teorema di Torricelli. Sulla superficie di separazione $p = p_0 + \rho_0 h_2 g$, $v = 0$, $z = h_1$, al foro $p = p_0$ e $z = 0$, per cui

$$p_0 + (h_1 \rho_a + h_2 \rho_0) g = p_0 + \frac{1}{2} \rho_a v^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2 g}{\rho_a} (h_1 \rho_a + h_2 \rho_0)} = 9.5 \text{ m/s} .$$

Visualizza Soluzione

Nota. Pulsazione vascolare

Come conseguenza di una forma di *arteriosclerosi* sulle pareti delle arterie si vanno accumulando placche, col risultato che la sezione viene ridotta. Per mantenere costante la portata di sangue la velocità di questo deve aumentare (con notevole sforzo per il cuore), ma ciò comporta una diminuzione di pressione nell'arteria, che può essere schiacciata dalla pressione esterna fino a bloccare il flusso sanguigno. Con $v = 0$ la pressione risale e l'arteria si riapre. Si innesca così un processo in cui il flusso nell'arteria varia notevolmente (*pulsazione vascolare*): l'effetto può essere rivelato con uno *stetoscopio*. Nei casi più gravi l'arresto del flusso può provocare forme di *ischemia cerebrale momentanea* (mancanza di flusso sanguigno nel cervello).

8.10 Effetti dinamici. Vortici

Nello studio della meccanica dei fluidi abbiamo ottenuto le proprietà principali applicando le leggi generali della meccanica dei sistemi di punti, sia nel caso di equilibrio statico che di moto.

D'altra parte la natura continua dei fluidi e la loro caratteristica di non avere forma propria hanno indirizzato il nostro studio verso una visione complessiva del moto piuttosto che verso un'analisi del moto di un singolo elemento fluido. Si sono così determinate la pressione e la velocità in funzione della posizione nella massa fluida e si è rappresentato il moto tramite le linee di corrente.

Il quadro generale che segue dalla meccanica dei sistemi di punti rimane però sempre valido e pertanto anche nel moto dei fluidi dobbiamo attenderci gli effetti dinamici usuali. Vediamo alcuni esempi.

a) *Riconsiderazione della legge di Leonardo e del teorema di Bernoulli.*

Nella (8.11) si afferma che la velocità di un elemento di fluido aumenta se la sezione del tubo di flusso diminuisce: ciò vuol dire che l'elemento ha una certa accelerazione e quindi che deve agire una forza; se il condotto è orizzontale questa forza non può essere il peso. Siamo così portati a considerare le forze di pressione, dovute all'interazione con il resto del fluido, come le forze che determinano il moto. Se la sezione è costante e il condotto orizzontale rettilineo, la velocità è costante in modulo, direzione e verso: infatti la pressione è anch'essa costante e non ci sono forze risultanti; è verificato il principio d'inerzia. Invece, nel caso di moto con velocità costante lungo un condotto inclinato, la pressione non può essere costante perché le forze di pressione devono contrastare l'azione della forza peso in modo che la risultante sia nulla e il moto uniforme.

Già con queste semplici considerazioni vediamo, come appena detto, che il modo di ragionare sviluppato per i sistemi discreti di punti continua ad essere valido anche nello studio del moto dei fluidi, tenendo conto delle loro caratteristiche.

b) *Corrente fluida in un condotto curvo.*

Per realizzare il moto curvilineo deve essere applicata al fluido una forza centripeta, esercitata dal condotto, che subisce a sua volta una reazione, come si osserva se il condotto è flessibile o mobile (caso tipico, il mulinello idraulico).

All'interno del fluido l'azione della forza centripeta avviene attraverso una variazione radiale della pressione, che cresce verso l'esterno, cioè verso la parete del condotto più lontana del centro di curvatura.

Un'applicazione notevole di questo tipo di effetti si ha nelle turbine generatrici. Una corrente fluida lambisce le pale della turbina, venendone deviata; per effetto della reazione sulle pale la turbina entra in rotazione. Si ha pertanto un trasferimento di energia dal fluido alla turbina con trasformazione

di lavoro meccanico in energia elettrica.

c) *Conservazione del momento angolare. Vortici.*

Versando un liquido in un recipiente cilindrico con un foro sul fondo si riesce a imprimere alla massa fluida un moto vorticoso, nel senso che le linee di corrente sono spirali che convergono verso l'asse verticale passante per il foro, mentre la superficie libera s'incava ad imbuto verso di questo. Il fenomeno si osserva anche quando viene tolto il tappo dall'orificio di scarico di un qualsiasi recipiente pieno di liquido.

Nell'ipotesi che il liquido sia ideale ($\eta = 0$, $\rho = \text{costante}$) le uniche forze agenti sono le forze di pressione (radiali) e la forza peso (verticale), che hanno momento nullo rispetto all'asse verticale, per cui nel moto di un elemento di liquido si conserva il momento angolare. Se v_{in} è la velocità dell'elemento dm di liquido nell'istante in cui inizia il moto di rotazione, a distanza r_{in} dall'asse, il momento angolare vale $dm v_{in} r_{in}$; quando l'elemento è a distanza r dall'asse deve avere velocità tale che $dm v r = dm v_{in} r_{in}$, per cui

$$v = \frac{v_{in} r_{in}}{r} \Rightarrow \omega = \frac{v}{r} = \frac{\omega_{in} r_{in}^2}{r^2} .$$

La velocità lineare varia in ragione inversa della distanza dall'asse, mentre quella angolare in ragione inversa del quadrato della distanza. Entrambe cioè aumentano man mano che l'elemento di liquido si avvicina all'asse.

Nella massa liquida in rotazione elementi contigui hanno velocità diverse, però se $\eta = 0$ non si originano forze di attrito interno, che determinerebbero una situazione di rotazione rigida, come discusso nel paragrafo 8.5.

Per ricavare la forma della superficie libera utilizziamo il teorema di Bernoulli applicato a un tubo di flusso infinitesimo che sta sulla superficie libera, dove $p = p_{atm} = \text{costante}$: pertanto da (8.12)

$$p_{atm} + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g z = \text{costante} \Rightarrow \frac{v^2}{2g} + z = h ,$$

conglobando nella costante h la pressione p_{atm} e il termine costante ρg . Ne segue

$$z = h - \frac{v^2}{2g} = h - \frac{v_{in}^2 r_{in}^2}{2g} \frac{1}{r^2}$$

come *equazione della superficie libera del vortice* rappresentato in sezione nella figura 8.30.

Quando $r \rightarrow 0$, z tende ad h che rappresenta la quota rispetto al fondo della superficie libera non in rotazione. Per $r \rightarrow \infty$ $z \rightarrow -\infty$, cioè l'elemento non arriva mai sull'asse, dove la sua velocità dovrebbe essere infinita.

La formazione di vortici avviene anche nei liquidi reali, come discuteremo nel paragrafo 8.12, ma il fenomeno è complicato dalla presenza delle forze di

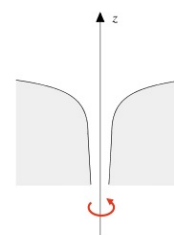


FIGURA 8.30

attrito interno.

8.11 Moto laminare

Trattiamo ora il moto dei *fluidi reali*, iniziando dalla situazione in cui la velocità non è elevata, secondo un criterio che preciseremo nel paragrafo 8.12.

In tali condizioni il *moto* è detto *laminare*: *il regime è stazionario, con le linee di corrente costanti nel tempo* (e che non si intersecano mai).

Il fluido a contatto con le pareti del condotto, che supponiamo cilindrico di raggio R , è fermo. Avvicinandosi all'asse del condotto la velocità aumenta, per cui abbiamo strati cilindrici coassiali di fluido che scorrono l'uno dentro l'altro con velocità diverse (donde il nome di moto laminare). La velocità è massima sull'asse del condotto.

Considerando il condotto orizzontale, lungo l e con una differenza di pressione $p_1 - p_2$ agli estremi, si dimostra: 1) il modulo della velocità varia con il raggio r dello strato cilindrico, ovvero con la distanza dall'asse, secondo la legge

$$v(r) = \frac{p_1 - p_2}{4 \eta l} (R^2 - r^2) \quad ; \quad (8.14)$$

la velocità massima ($r = 0$) vale

$$v_{\max} = (p_1 - p_2) R^2 / 4 \eta l \quad ,$$

mentre per $r = R$, alla parete del condotto, $v = v_{\min} = 0$;

2) la portata del condotto è data dalla *legge di Hagen – Poiseuille*

$$q = \frac{\pi R^4}{8 \eta} \frac{p_1 - p_2}{l} \quad , \quad (8.15)$$

Legge di Hagen-
Poiseuille

che si ottiene integrando (8.14):

$$q = \int_S v(r) dS = \int_0^R v(r) 2 \pi r dr \quad .$$

Posto $q = \pi R^2 v_m$, con v_m velocità media sulla sezione, si ha

$$v_m = \frac{q}{\pi R^2} = \frac{R^2}{8 \eta} \frac{p_1 - p_2}{l} \Rightarrow \frac{p_1 - p_2}{l} = \frac{8 \eta}{R^2} v_m \quad . \quad (8.16)$$

Nel regime laminare la portata, la velocità media e le velocità dei singoli strati cilindrici sono direttamente proporzionali al gradiente di pressione $(p_1 - p_2)/l$. Per mantenere il flusso di fluido nel condotto è necessaria una differenza di pressione ovvero una forza per vincere la resistenza al moto dovuta all'attrito interno: e questo anche se il condotto è orizzontale e a sezione costante. È la stessa situazione incontrata nel moto rettilineo uniforme di un punto materiale

in presenza di attrito radente.

8.12 Moto vorticoso. Numero di Reynolds

La legge di Hagen-Poiseuille è sempre verificata se il raggio del condotto è molto piccolo (*tubi capillari*), mentre per raggi maggiori c'è un valore critico della velocità oltre il quale compaiono vortici nel fluido e si parla di moto turbolento o vorticoso.

I meccanismi che determinano la formazione dei vortici sono legati a notevoli variazioni di velocità ortogonalmente alle linee di corrente e quindi, in un fluido reale, a notevoli forze di attrito interno: ciò si manifesta per correnti fluide che scorrono l'una rispetto all'altra con notevoli differenze di velocità, come mostrato in figura 8.31a. Altre situazioni dovute a presenza di ostacoli o variazioni di forma del condotto sono rappresentate in figura 8.31b e 8.31c.

f

Per un condotto cilindrico Reynolds ha provato sperimentalmente che si ha la *transizione da regime laminare a vorticoso* quando il parametro adimensionale

Numero di Reynolds

$$\mathcal{R} = \frac{\rho v R}{\eta}, \quad (8.17)$$

detto *numero di Reynolds*, ha il valore 1200. La *velocità critica* per la transizione è quindi

$$v_c = 1200 \frac{h}{\rho R}.$$

Per $v < v_c$ vale la (8.15), quando v raggiunge e supera v_c si ha inizialmente una notevole diminuzione della portata, a parità di differenza di pressione ai capi del condotto, e un regime di moto instabile. Aumentando la differenza di pressione si raggiunge di nuovo un flusso stabile in regime vorticoso e si trova che la (8.16) è sostituita dalla

$$\frac{p_1 - p_2}{l} = \frac{k}{R} \frac{\rho v_m^2}{2}, \quad (8.18)$$

dove il coefficiente di proporzionalità k , detto *coefficiente di resistenza*, è costante in un ampio intervallo di \mathcal{R} (da $1.2 \cdot 10^3$ a 10^5), per i normali tubi impiegati nell'uso pratico. *In regime vorticoso il gradiente di pressione necessario per mantenere una certa velocità di efflusso è una funzione quadratica della velocità, invece che lineare come nel regime laminare.*

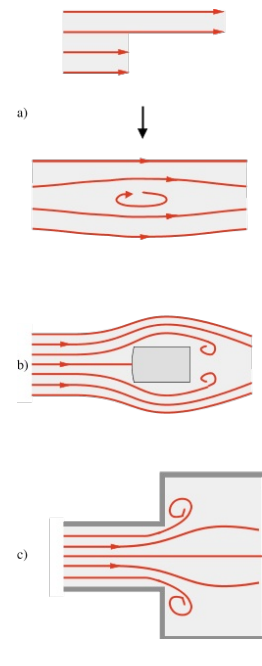


FIGURA 8.31

Nota. Lo sfigmomanometro

Il passaggio da un moto laminare ad uno turbolento per un fluido in moto è alla base del funzionamento dello *sfigmomanometro*, strumento utilizzato per misurare la pressione arteriosa minima e massima.

Un manicotto di gomma viene avvolto attorno ad un braccio del paziente. Immettendo gradualmente aria nel manicotto viene compressa un'arteria radiale. Alla diminuzione della sezione corrisponde un aumento della velocità del sangue fino a che viene raggiunta la velocità critica per la transizione da moto laminare a turbolento. In tali condizioni si rivela, tramite un *fonendoscopio* posto a contatto del braccio, un rumore caratteristico. Aumentando la pressione esterna la circolazione si interrompe e il rumore scompare. Si lascia ora diminuire lentamente la pressione esercitata dal manicotto sfiatando l'aria in esso contenuta. Il valore della pressione, rilevata dalla lettura del manometro collegato, a cui riprende la circolazione e ricompare il rumore dovuto al moto vorticoso, corrisponde alla pressione massima arteriosa, mentre la pressione a cui scompare successivamente il rumore, per il passaggio dal moto vorticoso a quello laminare, si assume come pressione minima arteriosa.

8.13 Moto in un fluido. Resistenza del mezzo

Lo studio del moto di un corpo immerso in un fluido è molto importante per ragioni pratiche. Infatti tutti i moti sulla terra avvengono dentro un fluido, l'aria, o addirittura in presenza di due fluidi, aria e acqua.

L'interazione con il fluido si manifesta attraverso una forza, che si oppone al moto e si chiama *resistenza del mezzo*, il cui effetto dipende dal moto relativo. Si ha lo stesso risultato se il corpo si muove in un fluido in quiete o se il fluido scorre e il corpo è fermo. Quest'ultima situazione è realizzata nelle gallerie a vento in cui si studiano le caratteristiche aereodinamiche dei veicoli.

Consideriamo una sfera immersa in un fluido in moto. Se il fluido è ideale, si ha completa simmetria delle linee di corrente e quindi la stessa pressione a monte e a valle della sfera (figura 8.32a).

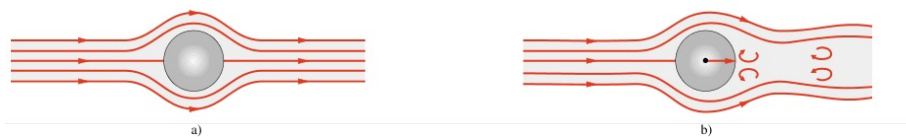


FIGURA 8.32

La sfera pertanto non subisce alcuna spinta e rimane ferma: tale risultato è indicato come *il paradosso di d'Alembert*. Se invece il fluido è reale si forma una scia vorticoso. Come conseguenza la pressione a valle è minore di quella a monte e quindi si manifesta una forza sulla sfera, che viene trascinato dal fluido (figura 8.32b). A velocità relative basse non si formano vortici, però si perde in ogni caso la simmetria delle linee di corrente e compare una spinta sulla sfera.

I parametri che determinano la resistenza del mezzo sono la forma e le dimensioni del corpo in moto nel fluido, in particolare la sezione S , la densità e la viscosità del fluido, la velocità relativa.

L'espressione generale della *resistenza del mezzo* è dato da

$$F_{\text{res}} = \frac{1}{2} c S \rho v^2, \quad (8.19)$$

dove c è un coefficiente adimensionale che dipende dalla forma del corpo, soprattutto dalla forma della parte posteriore più che di quella anteriore. In regime vorticoso c è costante e F_{res} è proporzionale a v^2 , in regime laminare c è funzione dell'inverso della velocità e F_{res} risulta lineare nella velocità: si tratta della forza di attrito viscoso studiata nel paragrafo 2.10.

In particolare per sfere con piccola velocità vale *la legge di Stokes*:

$$F_{\text{res}} = 6 \pi \eta R v. \quad (8.20)$$

Paradosso di
d'Alembert

Resistenza del mezzo

Legge di Stokes

Esempio 8.5

Calcolare la velocità limite di una sfera di raggio R e densità ρ che cade in un fluido di viscosità η e densità ρ_0 .

Soluzione

La sfera che si muove nel fluido in regime laminare è sottoposta alla forza peso, alla spinta di Archimede e alla resistenza del mezzo, che hanno le espressioni, proiettate sull'asse z verticale

$$\frac{4}{3} \pi R^3 \rho g \quad , \quad -\frac{4}{3} \pi R^3 \rho_0 g \quad , \quad -6 \pi \eta R v \quad .$$

Quando la sfera raggiunge la velocità limite la risultante delle tre forze è nulla (equilibrio dinamico) per cui si trova.

$$v_{\text{lim}} = \frac{2}{9} R^2 \frac{\rho - \rho_0}{\eta} g \quad .$$

Dalla misura di v_{lim} si può determinare la viscosità del fluido o il raggio della sfera. Il risultato è vero per sfere solide di piccolo diametro ($R \simeq 1 \text{ mm}$) che cadono in un liquido e anche per gocce di liquido in aria se $R \leq 50 \text{ }\mu\text{m}$.

Visualizza Soluzione

8.14 Effetto Magnus. Portanza

Vediamo ora alcuni effetti dinamici trasversali rispetto alla velocità \mathbf{v} di un corpo in moto in un fluido.

Supponiamo che la sfera considerata nel paragrafo 8.13 oltre a muoversi nel fluido reale ruoti su se stessa. Nel moto di rotazione essa trasporta per attrito una parte di fluido e il risultato è una dissimmetria nelle velocità: risulta $v_A > v_B$ e quindi $p_A < p_B$, per cui c'è una spinta sulla sfera da B verso A , come mostrato in figura 8.33 (in A le velocità del fluido e dei punti superficiali della sfera sono concordi, in B discordi).

A questo fenomeno, detto *effetto Magnus*, sono dovuti, per esempio, i vistosi effetti delle palle tagliate a tennis e a calcio (in particolare nei calci d'angolo e di punizione).

Un altro effetto, ben più importante nella pratica, è quello che si manifesta intorno alle ali degli aeroplani. La forma delle ali è scelta in modo tale da causare una dissimmetria nelle linee di corrente. L'aria è più veloce rispetto all'ala nella parte superiore che nella parte inferiore e quindi la pressione è minore sopra rispetto a sotto. Ne risulta una spinta verso l'alto chiamata *portanza*. È interessante notare che il fenomeno avviene anche in un fluido ideale.

Possiamo allora servirci del teorema di Bernoulli per trovare un'espressione della portanza. Siano p e v i valori di pressione e velocità dell'aria a monte dell'ala, p_1 e $v + \Delta v$ sopra l'ala, p_2 e $v - \Delta v$ sotto l'ala. Deve essere

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 = p_1 + \frac{1}{2} \rho (v + \Delta v)^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho (v - \Delta v)^2$$

da cui si ricava

$$p_2 - p_1 = 2 \rho v \Delta v$$

e moltiplicando per la superficie alare A si ha la portanza

$$F = 2 A \rho v \Delta v \quad .$$

Anche con una lastra inclinata investita da una corrente fluida si ha un fenomeno di portanza, dovuto al formarsi di vortici sulla faccia posteriore. Tale effetto si verifica nel moto di un aquilone.

Effetto Magnus

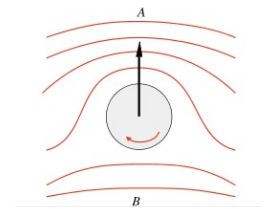


FIGURA 8.33

Portanza di un'ala

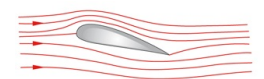


FIGURA 8.34

8.15 Fenomeni di superficie

A livello microscopico i liquidi sono composti di molecole tra cui si esplicano forze, principalmente di origine elettrica, che dipendono fortemente dalla distanza intermolecolare r . Quando r è inferiore a un certo valore r_0 , caratteristico del tipo di molecole, la forza tra due molecole è repulsiva e cresce molto rapidamente al diminuire di r . La distanza r_0 corrisponde praticamente a quella per cui le distribuzioni elettroniche delle molecole iniziano a sovrapporsi e la forza repulsiva sostanzialmente si oppone a questa sovrapposizione; essa è detta a corto raggio, perché si manifesta per piccoli valori di r . Per $r > r_0$ la forza intermolecolare diviene attrattiva e decresce in modulo con la distanza, però con un andamento più lento di quello presentato dalla forza repulsiva.

Una rappresentazione schematica dell'energia potenziale $E_p(r)$ e della forza $F(r)$ dell'interazione intermolecolare è mostrata in figura 8.35; per r_0 si è assunto il valore $3 \cdot 10^{-10}$ m, che è tipico di molecole semplici. In ordinata non sono riportate le diverse unità di misura per $E_p(r)$ e $F(r)$ perché il disegno è solo qualitativo, però l'andamento di $F(r)$ è correttamente quello di $-dE_p/dr$.

Una molecola all'interno del liquido viene attratta da tutte le altre molecole che la circondano, in quanto nella situazione normale è $r > r_0$; si hanno però condizioni di completa simmetria e la forza risultante è in media nulla. Invece, per una molecola prossima alla superficie libera non esiste questa simmetria ed essa risente di una forza diretta verso l'interno del liquido.

Questo risultato indica che l'aumento della superficie libera di un liquido non può avvenire spontaneamente. Per portare una molecola dall'interno del liquido alla superficie bisogna compiere un lavoro contro la forza sopra menzionata ovvero per aumentare di dS la superficie libera del liquido è necessario compiere un lavoro dW e si trova che

$$dW = \tau dS ; \quad (8.21)$$

τ si chiama *tensione superficiale del liquido* e dipende dal tipo di liquido, dal gas che si trova al di sopra della superficie libera, dal solido o liquido con cui il liquido è a contatto e della temperatura; in particolare τ decresce all'aumentare della temperatura.

Se bisogna compiere un lavoro per aumentare la superficie libera, sarà spontaneo il processo opposto; cioè quello legato alla diminuzione della superficie. La superficie libera del liquido tende a contrarsi, assumendo l'estensione minima possibile, compatibilmente con le forze esterne agenti e con le condizioni in cui il liquido stesso si trova.

Questa circostanza è evidenziata sperimentalmente utilizzando delle pellicole liquide che si possono ottenere estraendo da un liquido, per esempio

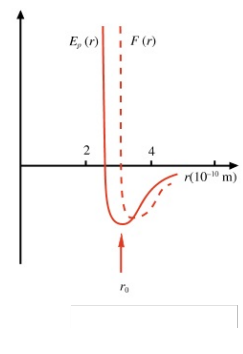
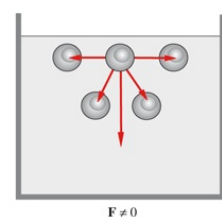
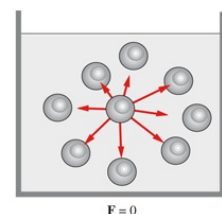


FIGURA 8.35

Tensione superficiale



acqua saponata, un piccolo telaio rettangolare metallico, che fa da supporto alla pellicola. Se il lato AB del telaio è mobile (figura 8.37) si osserva, disponendo il sistema in un piano orizzontale, che il lato AB tende a spostarsi verso il lato opposto CD che è fisso. Ciò indica che lungo il contorno della lamina liquida agiscono delle forze tangenziali ad essa che ne determinano la progressiva contrazione. Lungo i tre lati rigidi del telaio queste forze non sono ovviamente evidenziabili. Un'altra situazione di contrazione è quella di una goccia di liquido che, in assenza di altre forze esterne, tende ad assumere la forma sferica, cioè la forma che a parità di volume ha la minima superficie.

Ritornando al concetto di tensione superficiale ammettiamo, in analogia con la tensione di un filo o la pressione di un fluido, che in ogni punto della superficie di un liquido esista una forza tangenziale di tensione. Se si separa idealmente con un taglio la superficie, lungo il taglio agiscono due forze, dovute agli elementi a destra e a sinistra del taglio; ciascuna è data da

$$dF = \tau ds ; \quad (8.22)$$

se ds è la lunghezza del taglio.

Le due definizioni di tensione superficiale, tramite il lavoro (8.21) per aumentare la superficie libera del liquido o tramite il concetto di forza tangenziale (8.22), sono equivalenti. Infatti se si aumenta la superficie spostando ds della quantità dx (figura 8.38) si compie il lavoro

$$dW = dF dx = \frac{dF}{ds} ds dx = \frac{dF}{ds} dS$$

e quindi, secondo (8.21), $dF/ds = \tau$, che è la (8.22). In conclusione

$$\tau = \frac{dW}{dS} = \frac{dF}{ds} .$$

In tabella 8.2 sono riportati i valori della tensione superficiale per vari liquidi nella situazione in cui al di sopra del liquido vi sia aria o un altro fluido. Sono anche riportati valori di τ a diverse temperature per evidenziare la dipendenza della tensione superficiale dalla temperatura. Si osservi anche come τ diminuisca se come mezzo a contatto si sostituisce all'aria un liquido non miscibile. L'unità di misura della tensione superficiale è il N/m ($= J/m^2$).

Uno strumento usato per la misura di τ è lo *stalagmometro*, che si basa sulla caduta di gocce da un tubicino. La goccia in uscita dal tubicino è trattenuta dalla tensione superficiale agente lungo la linea $l = 2\pi r$, se r è il raggio del tubicino (figura 8.39); ricordando che la tensione superficiale è una forza per unità di lunghezza, la forza totale vale $l\tau = 2\pi r\tau$ ed è verticale. Il distacco della goccia avviene quando essa ha raggiunto una dimensione tale che il suo peso eguagli la forza dovuta alla tensione superficiale, cioè quando $mg = 2\pi r\tau$; questa relazione consente la misura di τ .

FIGURA 8.36

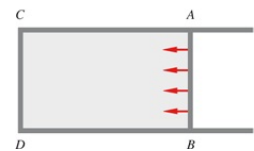


FIGURA 8.37

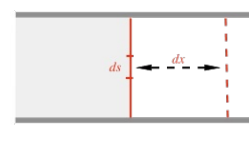


FIGURA 8.38

Tabella 8.2 Tensione superficiale

Liquido	Mezzo a contatto	T (°C)	τ (N/m)
alcool etilico	aria	0	$23.5 \cdot 10^{-3}$
alcool etilico	aria	20	$22.3 \cdot 10^{-3}$
alcool etilico	aria	70	$17.3 \cdot 10^{-3}$
acqua	aria	20	$75.6 \cdot 10^{-3}$
acqua	aria	90	$62.9 \cdot 10^{-3}$
acqua	benzene	20	$35.0 \cdot 10^{-3}$
acqua	etere etilico	20	$20.7 \cdot 10^{-3}$
benzene	aria	20	$28.9 \cdot 10^{-3}$
etere etilico	aria	20	$16.8 \cdot 10^{-3}$
glicerina	aria	20	$65.0 \cdot 10^{-3}$
mercurio	aria	20	$52.0 \cdot 10^{-2}$
mercurio	acqua	20	$37.5 \cdot 10^{-2}$
mercurio	benzene	20	$35.7 \cdot 10^{-2}$
olio d'oliva	aria	20	$34.0 \cdot 10^{-3}$

Stalagmometro

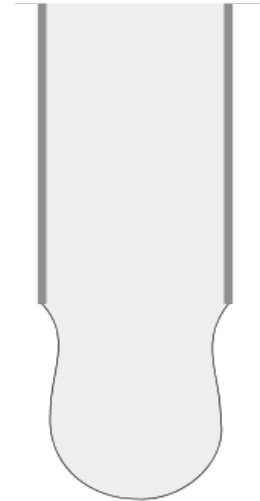


FIGURA 8.39

Studiamo ora il caso di una superficie libera non piana. Le forze molecolari, che danno origine alla tensione superficiale, determinano una forza di pressione sull'elemento dS di superficie, diretta verso il centro di curvatura della superficie stessa.

Consideriamo una lamina liquida sferica di raggio R , per esempio una bolla di sapone. La tensione superficiale agente sulla lamina tende a farla contrarre: per l'equilibrio deve agire all'interno della bolla una pressione p_i del gas contenuto maggiore della pressione esterna p_o . Vogliamo calcolare $p_i - p_o$ in funzione di τ .

Per un aumento dR del raggio R della bolla il lavoro della forza di pressione è

$$dW = (p_i - p_o) S dR = (p_i - p_o) dV = 4 \pi (p_i - p_o) R^2 dR$$

essendo dV la variazione di volume della bolla. A questo aumento si oppone la tensione superficiale, con un lavoro

$$dW_\tau = -2 \tau dS = -2 \tau d(4 \pi R^2) = -16 \pi \tau R dR ,$$

dove il fattore 2 compare perché la bolla ha due facce. La condizione di equilibrio corrisponde a lavoro totale nullo e da $dW + dW_\tau = 0$ si ottiene

$$p_i - p_o = \frac{4 \tau}{R} .$$

L'eccesso di pressione interna rispetto a quella esterna, necessario per mantenere la bolla in equilibrio, è direttamente proporzionale alla tensione superficiale e inversamente al raggio della bolla.

Nel caso di una superficie sferica che delimita una massa liquida (figura 8.40) la pressione dovuta all'azione della tensione superficiale, tenuto conto che c'è una sola superficie invece delle due della bolla, è

$$p_r = \frac{2\tau}{R} .$$

(8.23)

Questo cioè è l'eccesso di pressione che c'è nella parte interna rispetto a quella esterna a causa della curvatura, positivo nel caso *a*, negativo nel caso *b*.

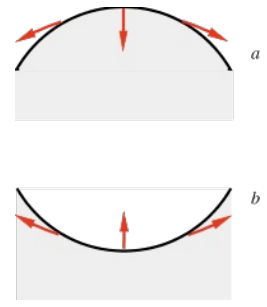


FIGURA 8.40

8.16 Forze di coesione e adesione. Fenomeni di capillarità

Abbiamo visto nel paragrafo 8.15 che tra le molecole di un liquido esiste un'interazione le cui proprietà in funzione della distanza sono rappresentate nella figura 8.34. Nella situazione ordinaria la distanza intermolecolare è tale che le molecole sono praticamente a contatto e quindi si capisce perché i liquidi siano in sostanza incompressibili: se si cerca di fare avvicinare le molecole si sviluppano forze repulsive molto elevate. D'altra parte anche l'allontanamento delle molecole, cioè la separazione di parti di liquido, richiede una forza per vincere l'attrazione molecolare.

Si parla pertanto di *forze di coesione in un liquido*, forze che essendo debolmente attrattive riescono a tenere legate le molecole, ma non riescono a mantenerle in posizione fissa, come avviene invece nei solidi: un liquido perciò ha volume proprio, ma potendo le sue parti scorrere con estrema facilità le une rispetto alle altre non ha forma propria. Sulla superficie libera le forze di coesione danno luogo ai fenomeni di tensione superficiale che, per così dire, tengono il liquido in compressione anche in assenza di forze esterne.

Forze di coesione

La presenza di un mezzo a contatto con la superficie libera modifica, sempre per via di interazioni molecolari, le proprietà di tensione superficiale, poco se si tratta di un gas e in modo notevole se si tratta di un altro liquido non miscibile, come abbiamo notato commentando i dati della tabella 8.2.

Una situazione ancora diversa si ha in presenza di un ulteriore mezzo, che può essere la parete solida del contenitore. La massa di liquido dello strato superficiale in prossimità della parete è soggetta, trascurando la presenza del gas, a due forze: F_{coes} , dovuta alle forze di coesione del liquido, e F_{ades} , dovuta alle *forze di adesione*, cioè alle forze tra le molecole del solido e quelle del liquido. F_{coes} è diretta verso l'interno del liquido, F_{ades} verso l'interno del solido. In condizioni di equilibrio la superficie libera del liquido è ortogonale alla risultante delle forze agenti (se ci fosse una componente tangente non potrebbe esserci equilibrio); si possono allora avere i due casi rappresentati in figura 8.41, che mostra, in sezione, la zona di contatto liquido-solido.

a) *L'adesione predomina sulla coesione, la superficie libera a contatto con la parete è incurvata verso l'alto e si dice che il liquido bagna la parete.*

Forze di adesione

b) *La coesione predomina sull'adesione, la superficie è incurvata verso il basso, il liquido non bagna la parete.*

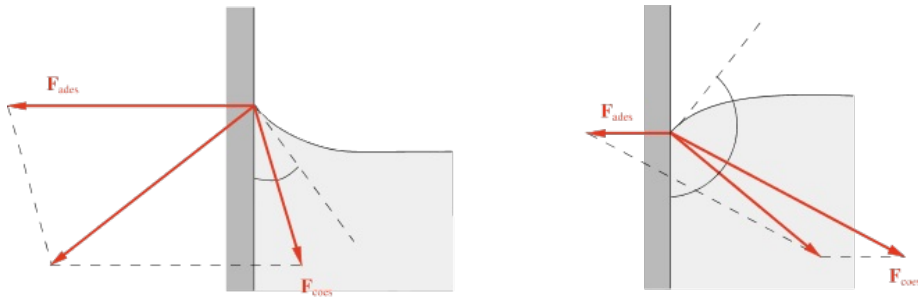


FIGURA 8.41

L'angolo di contatto α , formato dalla parete con la tangente alla superficie libera nel punto di contatto, risulta acuto nel primo caso e ottuso nel secondo.

Ragioni di simmetria geometrica fanno prevedere che \mathbf{F}_{ades} sia sempre ortogonale alla parete e che \mathbf{F}_{coes} sia diretta lungo la bisettrice dell'angolo α ; nel caso limite $\alpha = \pi / 2$ che separa i liquidi che bagnano la parete da quelli che non la bagnano, la risultante è parallela alla parete, \mathbf{F}_{coes} forma un angolo di 45° con la parete e si trova subito che $\mathbf{F}_{coes} = 2 \mathbf{F}_{ades}$. Questa relazione chiarisce che:

- | | | |
|------------|-----------|--|
| il caso a) | si ha per | $\mathbf{F}_{coes} < \sqrt{2} \mathbf{F}_{ades}$, |
| il caso b) | per | $\mathbf{F}_{coes} > \sqrt{2} \mathbf{F}_{ades}$. |

Angolo di contatto

Capillarità

Un'altra classe di fenomeni legati alla tensione superficiale sono i *fenomeni di capillarità*, che si manifestano quando il liquido è in parte limitato da pareti solide molto prossime tra loro, come avviene per un liquido contenuto in un tubicino a sezione interna molto piccola, detto *tubo capillare* (raggio dell'ordine di 0.5 mm).

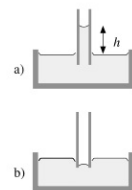


FIGURA 8.42

Immaginiamo per esempio un tubo capillare di vetro in un recipiente pieno di liquido; in contrasto col principio dei vasi comunicanti (paragrafo 8.3) si osserva che il livello della superficie libera del liquido nel capillare è diverso da quello nel resto del recipiente e precisamente è *maggiore se il liquido bagna le pareti* (come fa l'acqua), mentre è *minore se il liquido non bagna le pareti* (come fa il mercurio); la situazione è mostrata in figura 8.42.

Il fenomeno si spiega osservando che la superficie libera nel capillare è approssimativamente sferica, con la concavità verso l'alto per liquidi come l'acqua (menisco concavo, figura 8.42a) e verso il basso per liquidi come il mercurio (menisco convesso, figura 8.42b). Siamo allora nelle condizioni di validità di (8.23), cioè la pressione agente sulla superficie libera nel capillare è la pressione atmosferica p_0 più il contributo $2\tau/R$. Questo termine si somma a p_0 nel caso di *menisco convesso*, che è il caso della figura 8.40a: la pressione effettiva è maggiore nel capillare e il livello è più basso. Invece per il *menisco concavo* il termine dovuto alla tensione superficiale è opposto a p_0 (figura 8.40b), la pressione effettiva è minore, il livello si alza.

Se h è il dislivello dovuto al fenomeno di capillarità, ad essa corrisponde la

pressione ρgh e quindi deve essere

$$\frac{2\tau}{R} = \rho gh .$$

Il raggio di curvatura R del menisco è legato al raggio R' del capillare dalla relazione $R' = R \cos \alpha$ dove α è l'angolo di contatto (in figura 8.43 sono mostrati i due casi possibili). La relazione precedente diventa

$$h = \frac{2\tau \cos \alpha}{\rho g R'} .$$

In particolari condizioni, in cui il liquido bagna completamente il capillare, $\alpha = 0$ e

$$h = \frac{2\tau}{\rho g R'} .$$

Questa relazione è detta *legge di Jurin*; si vede come dalla misura dei dislivelli capillari si possa determinare il valore della tensione superficiale.

Con un capillare di raggio $R' = 0.5 \text{ mm}$ in acqua ($\tau = 75.6 \cdot 10^{-3} \text{ N/m}$) si ha un innalzamento di circa 31 mm. L'effetto è tanto maggiore quanto minore è il raggio.

L'acqua sale per capillarità attraverso corpi porosi, come la terracotta e speciali tipi di carta o la terra non arata, che inaridisce perché una volta in superficie l'acqua evapora. La circolazione della linfa nelle piante è in parte dovuta a fenomeni di capillarità.

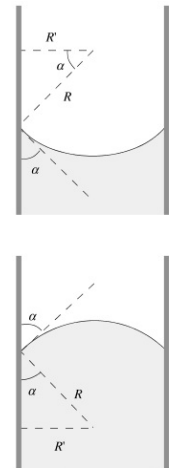


FIGURA 8.43