

# Elementi di Topologia Algebrica

LORENZO MONTANA

28 Febbraio 2023

Sono riportati in queste dispense i risultati del corso di Elementi di Topologia Algebrica dell'Anno Accademico 2022/2023 tenuto dal Professor G. F. Callegaro all'Università di Matematica di Pisa.

Le note si basano pesantemente sulle lezioni, ma sono state completate qua e là attingendo alla bibliografia consigliata dal Professore:

- A. Hatcher, Algebraic Topology, 2002
- T. tom Dieck, Algebraic Topology, EMS, 2008
- W. Massey, Singular Homology Theory, Springer, 1980

Per eventuali correzioni potete contattarmi per mail all'indirizzo [l.montana@studenti.unipi.it](mailto:l.montana@studenti.unipi.it)

# Contents

<b>1</b>	<b>Complessi Algebrici</b>	<b>3</b>
1.1	Successioni Esatte . . . . .	3
1.2	Omotopia di Complessi di Catene . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Omologia Singolare</b>	<b>5</b>
2.1	Primi Conti . . . . .	6
2.2	Omologia Ridotta . . . . .	7
2.3	Mappe Omotope e Omotopia di Catene . . . . .	7
2.4	Successione di Mayer-Vietoris . . . . .	9
2.4.1	Conseguenze del Teorema di Mayer-Vietoris . . . . .	9
2.5	Legame tra Primo Gruppo di Omologia e Gruppo Fondamentale . . . . .	11
2.6	Suddivisioni Baricentriche . . . . .	12
2.6.1	Ricoprimenti e Simpletti $\mathcal{U}$ -piccoli . . . . .	14
2.7	Omologia Relativa . . . . .	15
2.7.1	Teorema Escissione . . . . .	15
2.7.2	Teorema di Jordan-Brouwer . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Omologia di Grafi</b>	<b>20</b>
<b>4</b>	<b>Omologia di Superfici Compatte</b>	<b>23</b>
<b>5</b>	<b>Complessi CW</b>	<b>25</b>
5.1	Omologia di Complessi CW . . . . .	26
5.1.1	Omologia di $\mathbb{C}P^n$ . . . . .	30
5.1.2	Omologia di $\mathbb{R}P^n$ . . . . .	30
<b>6</b>	<b>Omologia e Co-omologia a Coefficienti in un Modulo</b>	<b>32</b>
6.1	Funtori Tor e Ext . . . . .	33
6.2	Coefficienti Universali . . . . .	35
6.3	Omologia e Co-omologia Relativa . . . . .	37
6.4	Mayer-Vietoris a Coefficienti in $G$ . . . . .	37
<b>7</b>	<b>Prodotto CUP (<math>\smile</math>)</b>	<b>38</b>
7.1	Teorema di Eilenberg-Zilber . . . . .	38
7.2	Formula di Kunneth . . . . .	40
7.3	Approssimazione Diagonale e Prodotto CUP . . . . .	41
7.3.1	In Co-omologia Relativa . . . . .	42
<b>8</b>	<b>Omologia di Varietà</b>	<b>45</b>
<b>9</b>	<b>Prodotto CAP (<math>\frown</math>)</b>	<b>48</b>
9.1	Caso Relativo . . . . .	49
<b>10</b>	<b>Co-omologia a Supporto Compatto</b>	<b>50</b>
10.1	Teorema della Dualità di Poincaré . . . . .	52
10.1.1	Anello di Co-omologia di $\mathbb{C}P^n$ e $\mathbb{R}P^n$ . . . . .	54
<b>11</b>	<b>Gruppi di Omotopia</b>	<b>55</b>
11.1	Fibrazioni . . . . .	57
11.2	Gruppi di Omotopia Relativa . . . . .	57
11.3	Teorema di Escissione in Omotopia . . . . .	60
11.4	Isomorfismo di Freudenthal . . . . .	61
<b>12</b>	<b>Omotopia di Complessi CW</b>	<b>63</b>
12.1	Teorema di Approssimazione Cellulare . . . . .	65
12.2	Teorema di Whitehead . . . . .	67
12.3	Teorema di Approssimazione CW . . . . .	67
12.4	Teorema di Hurewicz . . . . .	69
<b>13</b>	<b>Invariante di Hopf</b>	<b>71</b>
13.1	Costruzione dell'invariante $\mathcal{H}(f)$ . . . . .	72

# 1 Complessi Algebrici

Sia  $R$  un anello commutativo con unità, e sia  $\mathcal{M}_R^{\mathbb{Z}}$  la categoria di  $R$ -moduli graduati:  $M$  oggetto di  $\mathcal{M}_R^{\mathbb{Z}}$  è una famiglia  $\{M_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  di  $R$ -moduli, e un morfismo  $\varphi : M \rightarrow M'$  di grado  $p$  è una famiglia di morfismi di  $R$ -moduli  $\varphi_n : M_n \rightarrow M'_{n+p}$ .

**Definizione 1** Un *complesso di catene*  $C = \{C_n, \partial_n\}$  su  $R$  è un oggetto di  $\mathcal{M}_R^{\mathbb{Z}}$  con un morfismo  $\partial$  di grado  $-1$  e tale che  $\partial^2 = 0$ , o in altre parole  $Im(\partial_{n+1}) \subseteq \ker(\partial_n)$ . L'omomorfismo  $\partial$  è detto *mappa di bordo* o anche *differenziale*.

$$\dots \xleftarrow{\partial_{n-1}} C_{n-1} \xleftarrow{\partial_n} C_n \xleftarrow{\partial_{n+1}} C_{n+1} \xleftarrow{\partial_{n+2}} \dots$$

**Definizione 2** Un morfismo  $\varphi$  di complessi di catene è un morfismo  $\varphi : C \rightarrow D$  nella categoria  $\mathcal{M}_R^{\mathbb{Z}}$  di grado 0 e tale che sia commutativo il diagramma

$$\begin{array}{ccc} C_n & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1} \\ \varphi_n \downarrow & & \downarrow \varphi_{n-1} \\ D_n & \xrightarrow{\partial'_n} & D_{n-1} \end{array}$$

**Definizione 3** Dato un complesso di catene  $C = \{C_n, \partial_n\}$ , l'*omologia* di  $C$  è  $H_\bullet(C) = \{H_n(C)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  con  $H_n(C) = \ker(\partial_n) / Im(\partial_{n+1})$ .  $H_n(C)$  è detto  $n$ -simo gruppo di omologia di  $C$ .

**Fatto 1.1** Un morfismo di catene  $\varphi : C \rightarrow D$  induce un morfismo di grado 0 tra  $R$ -moduli graduati  $H(\varphi) : H_\bullet(C) \rightarrow H_\bullet(D)$  (ciò discende dalla proprietà  $\partial^2 = 0$  e che  $\varphi$  commuta con  $\partial$ ). Dunque  $H$  è un funtore (covariante) dalla categoria dei complessi di catene su  $R$  alla categoria degli  $R$ -moduli graduati.

**Definizione 4** i. Gli elementi di  $C_n$  sono detti  $n$ -catene

ii. Gli elementi di  $Z_n(C) := \ker(\partial_n)$  sono detti  $n$ -cicli

iii. Gli elementi di  $B_n(C) := Im(\partial_{n+1})$  sono detti  $n$ -bordi

**Definizione 5** Se due  $n$ -cicli rappresentano la stessa classe in  $H_n(C)$  diciamo che sono omologhi. Per  $c \in Z_n(C)$  indichiamo con  $[c]$  la sua classe in  $H_n(C)$ .

**Osservazione.** Se per qualche  $n \in \mathbb{Z}$  sostituisco  $\partial_n$  con  $-\partial_n$  ottengo un nuovo complesso di catene, ma il complesso originale e quello nuovo hanno stessa omologia.

**Definizione 6** Un *complesso di co-catene*  $C = \{C^n, \partial^n\}$  è un oggetto di  $\mathcal{M}_R^{\mathbb{Z}}$  con un morfismo  $\partial$  di grado 1 e tale che  $\partial^2 = 0$ . Si definiscono anche *co-bordi*, *co-cicli*, la *co-omologia*, *classi di co-omologia*.

## 1.1 Successioni Esatte

**Definizione 7** Siano  $A, B, C$  complessi di catene,  $\varphi : A \rightarrow B$ ,  $\psi : B \rightarrow C$  morfismi. Una successione

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \longrightarrow 0$$

si dice *esatta corta* se per ogni  $n \in \mathbb{Z}$  si ha che è esatta corta la successione

$$0 \longrightarrow A_n \xrightarrow{\varphi_n} B_n \xrightarrow{\psi_n} C_n \longrightarrow 0$$

cioè per ogni  $n \in \mathbb{Z}$  vale  $Im(\varphi_n) \not\subseteq \ker(\psi_n)$ .

**Teorema 1.2** Data una successione esatta corta di complessi di catene  $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \longrightarrow 0$  esiste  $\omega : H_\bullet(C) \rightarrow H_\bullet(A)$  morfismo (detto *di connessione*) di grado  $-1$  tale che è esatta la successione

$$\dots \xrightarrow{\omega_{n+1}} H_n(A) \xrightarrow{\varphi_n} H_n(B) \xrightarrow{\psi_n} H_n(C) \xrightarrow{\omega_n} H_{n-1}(A) \xrightarrow{\varphi_{n-1}} H_{n-1}(B) \xrightarrow{\psi_{n-1}} \dots$$

*Dimostrazione.* Si tratta di fare diagram chasing sul seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & \longrightarrow & A_n & \xrightarrow{\varphi_n} & B_n & \xrightarrow{\psi_n} & C_n & \longrightarrow & 0 \\
 & & \partial \downarrow & & \partial \downarrow & & \partial \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & A_{n-1} & \xrightarrow{\varphi_{n-1}} & B_{n-1} & \xrightarrow{\psi_{n-1}} & C_{n-1} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \partial \downarrow & & \partial \downarrow & & \partial \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & A_{n-2} & \xrightarrow{\varphi_{n-2}} & B_{n-2} & \xrightarrow{\psi_{n-2}} & C_{n-2} & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

Sia  $\gamma \in Z_n(C)$  un ciclo (cioè  $\partial\gamma = 0$ ), vogliamo definire  $\omega([\gamma])$ . Per esattezza  $\psi_n$  è suriettiva, dunque esiste  $\beta \in B_n$  tale che  $\psi_n(\beta) = \gamma$ . Per commutatività  $\psi_n(\partial\beta) = \partial\gamma = 0$ , cioè  $\beta \in \ker(\psi_n) = \text{Im}(\varphi_n)$ . Dunque esiste  $\alpha \in A_{n-1}$  tale che  $\varphi_{n-1}(\alpha) = \partial\beta$ , da cui per commutatività abbiamo che

$$\varphi_{n-2}(\partial\alpha) = \partial\varphi_{n-1}(\alpha) = \partial^2\beta = 0$$

cioè  $\alpha \in Z_{n-1}(A)$ . Pongo  $\omega([\gamma]) = [\alpha]$ .

Bisognerebbe verificare che la definizione non dipende dalle scelte di  $\gamma$  e  $\beta$  nelle rispettive classi, e poi che la successione così ottenuta è esatta. Per il momento non riportiamo queste verifiche.  $\square$

**Osservazione.** Date due successioni esatte corte e morfismi  $f, g, h$

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\
 & & f \downarrow & & g \downarrow & & h \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

tali che i quadrati commutino, otteniamo il seguente diagramma in omologia, in cui in particolare anche il quadrato rosso è commutativo:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \dots & \longrightarrow & H_n(A) & \longrightarrow & H_n(B) & \longrightarrow & H_n(C) & \xrightarrow{\omega} & H_{n-1}(A) & \longrightarrow & \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 \dots & \longrightarrow & H_n(A') & \longrightarrow & H_n(B') & \longrightarrow & H_n(C') & \xrightarrow{\omega} & H_{n-1}(A') & \longrightarrow & \dots
 \end{array}$$

cioè l'omomorfismo di connessione  $\omega$  è naturale.

## 1.2 Omotopia di Complessi di Catene

Consideriamo il seguente problema: dati due morfismi di complessi di catene  $\varphi, \psi : C \rightarrow D$ , vogliamo condizioni sotto le quali questi inducono la stessa mappa in omologia.

**Definizione 8** Un'omotopia  $s$  tra due morfismi  $\varphi, \psi : (C, \partial) \rightarrow (D, \partial')$  è un morfismo  $s : C \rightarrow D$  di grado 1 tale per cui  $\varphi - \psi = \partial's + s\partial$ , cioè per ogni  $n \in \mathbb{Z}$  si ha  $\varphi_n - \psi_n = \partial'_{n+1}s_n + s_{n-1}\partial_n$ , cioè commuta

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \dots & \longrightarrow & C_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & C_n & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1} & \longrightarrow & \dots \\
 & & \varphi_{n+1} - \psi_{n+1} \downarrow & \swarrow s_n & \varphi_n - \psi_n \downarrow & \swarrow s_{n-1} & \varphi_{n-1} - \psi_{n-1} \downarrow & & \\
 \dots & \longrightarrow & D_{n+1} & \xrightarrow{\partial'_{n+1}} & D_n & \xrightarrow{\partial'_n} & D_{n-1} & \longrightarrow & \dots
 \end{array}$$

**Proposizione 1.3**  $\varphi, \psi : C \rightarrow D$  morfismi di complessi omotopi inducono la stessa mappa in omologia:

$$H(\varphi) = H(\psi) : H(C) \rightarrow H(D)$$

*Dimostrazione.* Dato un ciclo  $z \in Z_n(C)$  (dunque  $\partial z = 0$ ) abbiamo

$$(\varphi - \psi)(z) = \partial s(z) + s(\partial z) = \partial s(z)$$

L'uguaglianza provata dice che la differenza tra  $\varphi(z)$  e  $\psi(z)$  è un bordo, cioè i due sono omologhi.  $\square$

**Osservazione.** Il viceversa della Proposizione 1.3 non vale.

**Definizione 9** Un'omotopia tra 0 e  $Id$  è detta *contrazione*. Se una tale omotopia esiste, allora si ha  $H_n(C) = 0$  per ogni  $n$  e  $C$  è detto *complesso esatto*.

## 2 Omologia Singolare

**Definizione 10** L' $n$ -simpleso standard è  $\Delta^n = \{(t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : t_i \geq 0, \sum t_i = 1\}$ .

Notazione:  $[n] = \{0, 1, \dots, n\}$ .

Una  $\alpha : [m] \rightarrow [n]$  debolmente crescente induce  $\Delta(\alpha) : \Delta^m \rightarrow \Delta^n$  data da  $\sum_{i=0}^m t_i e_i \mapsto \sum_{i=0}^m t_i e_{\alpha(i)}$ . Vale che  $\Delta(\alpha)\Delta(\beta) = \Delta(\alpha\beta)$ ,  $\Delta(Id) = Id$ , dunque  $\Delta$  è un funtore.

Sia  $\delta_i^n : [n-1] \rightarrow [n]$  crescente, iniettiva e che "salta"  $i$ .

**Fatto 2.1** Per ogni  $i < j$  si ha  $\delta_j^{n+1}\delta_i^n = \delta_i^{n+1}\delta_{j-1}^n$ .

Siano anche  $d_i^n = \Delta(\delta_i^n)$ . Dal Fatto 2.1 e poiché  $\Delta$  è un funtore segue:

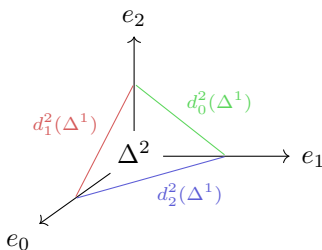
**Fatto 2.2** Per ogni  $i < j$  si ha  $d_j^{n+1}d_i^n = d_i^{n+1}d_{j-1}^n$ .

**Osservazione.** Per come sono definite, le  $d_i^n$  sono l'inclusione dell' $(n-1)$ -simpleso nell' $i$ -esima faccia dell' $(n+1)$ -simpleso.

**Definizione 11** Un  $n$ -simpleso singolare di uno spazio topologico  $X$  è una mappa  $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$ . La  $i$ -esima faccia di  $\sigma$  è la mappa  $\sigma \circ d_i^n : \Delta^{n-1} \rightarrow X$ .

**Definizione 12** Chiamiamo  $C_n(X)$  il gruppo abeliano libero generato dagli  $n$ -simplessi singolari su  $X$ . Un  $x \in C_n(X)$ , detto  $n$ -catena singolare di  $X$ , è  $x = \sum_{\sigma} n_{\sigma} \sigma$  con  $n_{\sigma} \in \mathbb{Z}$  nulli eccetto al più un numero finito. Definiamo la mappa di bordo  $\partial_q : C_q(X) \rightarrow C_{q-1}(X)$  data da  $\sigma \mapsto \sum_{i=0}^q (-1)^i \sigma \circ d_i^q$ .

**Esempio 1** Consideriamo il caso del 2-simpleso



allora il bordo di una certa  $\sigma \in C_2(X)$ , cioè  $\sigma : \Delta^2 \rightarrow X$ , è  $\partial_2 \sigma = \sigma \circ d_0^2 - \sigma \circ d_1^2 + \sigma \circ d_2^2$  cioè la somma a segno alterno di  $\sigma$  ristretta ai lati.

**Osservazione.**  $\partial_0$  è la mappa nulla.

**Fatto 2.3**  $\partial^2 = 0$  (risultato che si ottiene usando la definizione di  $\partial$  e il Fatto 2.2).

**Definizione 13** Il complesso di catene  $(C_*(X), \partial) = \{C_n(X), \partial_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  è detto complesso delle catene singolari di  $X$ . Indichiamo  $H_n(X)$  l' $n$ -simo gruppo di omologia di  $(C_*(X), \partial)$ .

Una mappa  $f : X \rightarrow Y$  tra spazi topologici induce un morfismo di complessi

$$f_{\#} = C(f) : C_q(X) \rightarrow C_q(Y) \\ \sigma \mapsto f\sigma$$

Inoltre, come visto nel Fatto 1.1,  $f_{\#}$  induce un omomorfismo in omologia  $f_* = H(f) : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$ . Dunque si è mostrato che  $H$  è un funtore tra  $Top$  e  $Ab$ .

**Definizione 14** Data  $i : A \hookrightarrow X$  inclusione e la sua mappa indotta  $i_{\#} : C_n(A) \hookrightarrow C_n(X)$ , definiamo  $C_n(X, A) = \text{coker}(i_{\#})$ <sup>1</sup>.

**Osservazione.**  $C_n(X, A)$  è sempre un gruppo abeliano libero, con base data da classi di  $n$ -simplessi singolari  $\sigma$  tali che  $\text{Im}(\sigma) \not\subseteq A$ .

La mappa  $\partial$  di  $C(X)$  induce un morfismo di complessi  $\partial'$  su  $C_n(X, A)$ .

**Definizione 15** I gruppi di omologia di  $C_n(X, A)$  si indicano  $H_n(X, A)$  e si dicono *gruppi di omologia relativa* alla coppia  $(X, A)$ .

<sup>1</sup>Si ricorda che dato un morfismo  $f : M \rightarrow M'$  tra  $R$ -moduli  $\text{coker}(f) := M'/f(M)$ .

Dati  $X, Y$  spazi topologici,  $A \subseteq X$ ,  $B \subseteq Y$  e  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  (cioè  $f(A) \subseteq B$ ), si ha una mappa indotta  $f_{\#} : C_n(X, A) \rightarrow C_n(Y, B)$ , e quindi anche una mappa  $f_* : H_n(X, A) \rightarrow H_n(Y, B)$  in omologia. Si è dunque mostrato che  $H$  (omologia relativa) è un funtore da  $Top(2)$  a  $Ab$  (dove  $Top(2)$  è la categoria delle coppie di spazi topologici).

Osserviamo che per una coppia  $(X, A)$  le mappa di inclusione  $C(A) \hookrightarrow C(X)$  e di proiezione al quoziente  $C(X) \rightarrow C(X, A)$  per come sono definite inducono la successione esatta corta

$$0 \longrightarrow C(A) \hookrightarrow C(X) \longrightarrow C(X, A) \longrightarrow 0$$

**Teorema 2.4** Data una coppia  $(X, A)$ , è esatta la successione lunga

$$\dots \longrightarrow H_n(A) \longrightarrow H_n(X) \longrightarrow H_n(X, A) \xrightarrow{\omega} H_{n-1}(A) \longrightarrow \dots$$

*Dimostrazione.* La tesi segue immediatamente dal Teorema 1.2 applicato alla successione esatta corta riportata sopra.  $\square$

**Osservazione.** Più in generale: per una tripla  $B \subseteq A \subseteq X$  abbiamo la successione esatta corta indotta da inclusioni e proiezioni

$$0 \longrightarrow C(A, B) \hookrightarrow C(X, B) \longrightarrow C(X, A) \longrightarrow 0$$

allora abbiamo in omologia la successione esatta lunga

$$\dots \longrightarrow H_n(A, B) \longrightarrow H_n(X, B) \longrightarrow H_n(X, A) \xrightarrow{\omega} H_{n-1}(A, B) \longrightarrow \dots$$

Inoltre per  $B = \emptyset$  ritroviamo l'enunciato del Teorema 2.4.

**Osservazione.** L'omomorfismo di connessione è naturale, cioè se si ha un'altra coppia  $(Y, B)$  e mappe  $(X, A) \rightarrow (Y, B)$  allora è commutativo il diagramma

$$\begin{array}{cccccccc} \dots & \longrightarrow & H_n(A) & \longrightarrow & H_n(X) & \longrightarrow & H_n(X, A) & \longrightarrow & H_{n-1}(A) & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \dots & \longrightarrow & H_n(B) & \longrightarrow & H_n(Y) & \longrightarrow & H_n(Y, B) & \longrightarrow & H_{n-1}(B) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

e lo stesso si ha nel caso di triple invece che coppie.

## 2.1 Primi Conti

In generale sarà impossibile svolgere in maniera diretta i conti, quindi trattiamo un caso facile, e poi diamo qualche strumento per i casi meno banali.

• Sia  $X = \{p\}$ . Per ogni  $n \in \mathbb{N}$ ,  $C_n(X)$  è il gruppo libero generato dagli  $n$ -simplessi singolari  $\Delta^n \rightarrow X$ , ma ce ne è uno solo, essendo il codominio un punto. Allora  $C_n(X) = \mathbb{Z}$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ .

Inoltre,  $\partial_{2n}$  è un isomorfismo per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , mentre  $\partial_{2n+1}$  è la mappa nulla per ogni  $n \in \mathbb{N}$  (questi due fatti seguono subito usando la definizione di bordo), dunque il complesso di catene  $C(X)$  è della forma

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & \xleftarrow{\partial_0=0} & C_0(X) & \xleftarrow{\partial_1=0} & C_1(X) & \xleftarrow{\partial_2=Id} & C_2(X) & \xleftarrow{\partial_3=0} & C_3(X) & \xleftarrow{\partial_4=Id} & \dots \\ & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \\ & & \mathbb{Z} & & \mathbb{Z} & & \mathbb{Z} & & \mathbb{Z} & & \end{array}$$

$$\text{dunque } H_n(X) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } n = 0 \\ 0 & \text{se } n > 0 \end{cases}.$$

• Additività: se  $X = \bigsqcup_{\alpha \in A} X_\alpha$  è la scrittura di  $X$  come unione delle sue componenti connesse per archi, allora si ha che  $H_n(X) = \bigoplus_{\alpha \in A} H_n(X_\alpha)$ , e analogamente  $H_n(X, A) = \bigoplus_{\alpha \in A} H_n(X_\alpha, A \cap X_\alpha)$  (questo perché i simplessi sono mappe continue, dunque non possono “saltare” da una componente connessa ad un'altra. Segue subito quanto detto).

## 2.2 Omologia Ridotta

Abbiamo visto che anche nel caso più semplice in cui  $X$  sia un punto, in omologia abbiamo  $H_0(X) = \mathbb{Z}$  che “conta” le componenti connesse per archi di  $X$ . Vorremmo però una struttura più semplice.

**Definizione 16** Sia  $X \neq \emptyset$ . Il *complesso delle catene singolari aumentato* è

$$\dots \longrightarrow C_2(X) \xrightarrow{\partial_2} C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

dove  $\varepsilon$  è la *mappa di aumentazione* definita da  $\varepsilon(\sum_{\sigma} n_{\sigma}\sigma) = \sum_{\sigma} n_{\sigma}$ . L'*omologia ridotta* è l'omologia del complesso aumentato, la indichiamo con  $\tilde{H}_n(X)$ .

**Fatto 2.5**  $\tilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z} = H_0(X)$ , e  $\tilde{H}_n(X) = H_n(X)$  per ogni  $n > 0$ .

**Osservazione.** Per una coppia, l'omologia ridotta e omologia “normale” coincidono.

## 2.3 Mappe Omotope e Omotopia di Catene

Notazione: in tutte le dispense, a meno che venga detto diversamente,  $I$  indicherà l'intervallo  $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ . Ricordiamo che due mappe  $f, g : X \rightarrow Y$  (continue) si dicono omotope se esiste  $F : X \times I \rightarrow Y$  (continua) tale che  $f(x) = F(x, 0)$  e  $g(x) = F(x, 1)$ .

**Cone Construction:** sia  $X$  contraibile per deformazione su  $x_0 \in X$  e sia  $\varepsilon : C_{\bullet}(X) \rightarrow C_{\bullet}(X)$  morfismo di complessi di grado 0 con  $\varepsilon_n = 0$  per ogni  $n > 0$ , e  $\varepsilon_0(\sum n_{\sigma}\sigma) = (\sum n_{\sigma})\sigma_0$ , dove  $\sigma_0 : \Delta^0 \rightarrow \{x_0\}$ .

Data  $h : X \times I \rightarrow X$  omotopia che realizza la contrazione su  $x_0$ , vogliamo costruire un'omotopia di catene  $s = \{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tra  $\varepsilon = \{\varepsilon_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  e  $Id_{C_{\bullet}(X)} = \{Id_{C_n(X)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ :

$$\begin{array}{ccccccccccc} \dots & \longrightarrow & C_n(X) & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1}(X) & \xrightarrow{\partial_{n-1}} & \dots & \xrightarrow{\partial_2} & C_1(X) & \xrightarrow{\partial_1} & C_0(X) & \xrightarrow{\partial_0} & 0 \\ & & \downarrow Id_n, \varepsilon_n & & \downarrow Id_{n-1}, \varepsilon_{n-1} & & & & \downarrow Id_1, \varepsilon_1 & & \downarrow Id_0, \varepsilon_0 & & \\ \dots & \longrightarrow & C_n(X) & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1}(X) & \xrightarrow{\partial_{n-1}} & \dots & \xrightarrow{\partial_2} & C_1(X) & \xrightarrow{\partial_1} & C_0(X) & \xrightarrow{\partial_0} & 0 \end{array}$$

(Red arrows labeled  $s_{n-1}, s_{n-2}, \dots, s_1, s_0$  connect the two rows of complexes.)

Consideriamo la mappa  $q : \Delta^{n-1} \times I \rightarrow \Delta^n$  che proietta al quoziente la faccia  $\Delta^{n-1} \times \{1\}$  su un punto, “generando” un nuovo vertice.

Dato un  $(n-1)$ -simplex singolare  $\sigma : \Delta^{n-1} \rightarrow X$  abbiamo che esiste un'unica  $s(\sigma) := s\sigma : \Delta^n \rightarrow X$  (dato che  $q$  è una mappa quoziente) che fa commutare il diagramma

$$\begin{array}{ccc} \Delta^{n-1} \times I & \xrightarrow{q} & \Delta^n \\ \sigma \times Id \downarrow & & \downarrow s\sigma \\ X \times I & \xrightarrow{h} & X \end{array}$$

cioè  $h \circ (\sigma \times Id) = s\sigma \circ q$ . Inoltre vale  $s\sigma \circ d_0^n = \sigma$ , e per  $i > 0$  vale  $s\sigma \circ d_i^n = s(\sigma \circ d_{i-1}^{n-1})$ . Allora

$$\begin{aligned} n > 1 : \partial_n(s\sigma) &= s\sigma \circ d_0^n - \sum_{i=1}^n (-1)^i s\sigma \circ d_i^n = \sigma - s(\partial_{n-1}\sigma) \implies \partial_n(s\sigma) + s(\partial_{n-1}\sigma) = \sigma - 0 = (Id_n - \varepsilon_n)\sigma \\ n = 1 : \partial_1(s\sigma) &= \sigma - \sigma_0 \implies \partial_1(s\sigma) + s(\partial_0\sigma) = \sigma - \sigma_0 = (Id_0 - \varepsilon_0)\sigma \end{aligned}$$

dunque  $\partial s + s\partial = Id - \varepsilon$ , cioè  $s$  è un'omotopia di catene da  $Id$  a  $\varepsilon$ . In particolare, dalla Proposizione 1.3 e da quanto visto segue che:

**Proposizione 2.6** Se  $X$  è contraibile, allora  $H_0(X) = \mathbb{Z}$  e  $H_n(X) = 0$  per ogni  $n > 0$ .

Vale in effetti un risultato più generale, per il quale si usa il seguente Lemma:

**Lemma 2.7** Siano  $\eta_0, \eta_1 : X \rightarrow X \times I$  date da  $\eta_i(x) = (x, i)$ , e siano  $(\eta_0)_{\#}$  e  $(\eta_1)_{\#}$  le relative mappe indotte sui complessi di catene. Esiste un'omotopia di catene naturale<sup>2</sup> tra  $(\eta_0)_{\#}$  e  $(\eta_1)_{\#}$ .

*Dimostrazione.* Vogliamo costruire un morfismo di catene  $S_n^X : C_n(X) \rightarrow C_{n+1}(X \times I)$  tale che:

- (1)  $\partial S_n^X + S_{n-1}^X \partial = (\eta_1^X)_{\#} - (\eta_0^X)_{\#}$
- (2) sia naturale, cioè se  $f : X \rightarrow Y$  allora è commutativo

$$\begin{array}{ccc} C_n(X) & \xrightarrow{S_n^X} & C_{n+1}(X \times I) \\ f_{\#} \downarrow & & \downarrow (f \times Id)_{\#} \\ C_n(Y) & \xrightarrow{S_n^Y} & C_{n+1}(Y \times I) \end{array}$$

<sup>2</sup>cioè se ci sono mappe continue, l'omotopia commuta con le mappe indotte.

Se costruiamo un'omotopia del genere sui semplici, sapendo come agisce su  $\iota_n : \Delta^n \xrightarrow{Id} \Delta^n$  elemento di  $C_n(\Delta^n)$ , per naturalità si ottiene su tutto  $C_n(X)$  (basta usare  $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$  al posto della  $f$  sopra):

$$\begin{array}{ccc} C_n(\Delta^n) & \xrightarrow{S_n^{\Delta^n}} & C_{n+1}(\Delta^n \times I) \\ \sigma_{\#} \downarrow & & \downarrow (\sigma \times Id)_{\#} \\ C_n(X) & \xrightarrow{S_n^X} & C_{n+1}(X \times I) \end{array}$$

Costruiamo per induzione  $S_n^{\Delta^n}$  che rispetti (1) e (2), da cui come detto segue la tesi.

*Passo Base:*  $n = 0$ , consideriamo  $S_0 : C_0(X) \rightarrow C_1(X \times I)$  che manda lo 0-simplesso  $\sigma : \Delta^0 \rightarrow \{x\}$  nell'1-simplesso  $S_0\sigma : \Delta^1 \rightarrow X \times I$ . Ma allora  $(\sigma \times Id)_{\#}$  (è uno 0-simplesso, dunque  $\partial\sigma = 0$ ):

$$\partial(S_0\sigma) + S_0(\partial\sigma) = \partial(S_0\sigma) \stackrel{\text{def}}{=} (S_0\sigma)d_0 - (S_0\sigma)d_1 = \eta_1^X\sigma - \eta_0^X\sigma$$

dove l'ultima uguaglianza si ottiene semplicemente osservando che rispettivamente  $(S_0\sigma)d_0 = \eta_1^X\sigma$  e  $(S_0\sigma)d_1 = \eta_0^X\sigma$  usando le definizioni delle applicazioni coinvolte. Dunque in particolare  $S_0$  rispetta (1). Dalla definizioni segue direttamente anche che  $S_0$  è naturale, cioè rispetta (2).

*Passo induttivo:* sia definita  $S_k$  che rispetta (1) e (2) per  $k < n$ . Vogliamo costruire  $S_n\iota_n \in C_{n+1}(\Delta^n \times I)$ , cioè una  $S_n\iota_n : \Delta^{n+1} \rightarrow \Delta^n \times I$ , che soddisfi

$$\partial(S_n\iota_n) = \eta_1^{\Delta^n}\iota_n - \eta_0^{\Delta^n}\iota_n - S_{n-1}^{\Delta^n}\partial\iota_n$$

Mostriamo che il membro di destra è un ciclo, cioè che applicando  $\partial$  ottengo 0:

$$\begin{aligned} \partial(\eta_1^{\Delta^n}(\iota_n) - \eta_0^{\Delta^n}(\iota_n) - S_{n-1}^{\Delta^n}\partial\iota_n) &= \eta_1^{\Delta^{n-1}}(\partial\iota_n) - \eta_0^{\Delta^{n-1}}(\partial\iota_n) - \partial S_{n-1}^{\Delta^n}(\partial\iota_n) \stackrel{hp.ind.}{=} \\ &= \eta_1^{\Delta^{n-1}}(\partial\iota_n) - \eta_0^{\Delta^{n-1}}(\partial\iota_n) - (\eta_1^{\Delta^{n-1}}(\partial\iota_n) - \eta_0^{\Delta^{n-1}}(\partial\iota_n) - S_{n-2}^{\Delta^n}\partial\partial\iota_n) = 0 \end{aligned}$$

inoltre poiché  $\Delta^n \times I$  è contraibile si ha  $H_n(\Delta^n \times I) = 0$  (siamo nelle ipotesi  $n > 0$ ), cioè ogni  $n$ -ciclo è anche  $n$ -bordo, quindi esiste  $a \in C_{n+1}(\Delta^n \times I)$  tale che  $\partial a = \eta_1^{\Delta^n}(\iota_n) - \eta_0^{\Delta^n}(\iota_n) - S_{n-1}^{\Delta^n}\partial\iota_n$ . Poniamo dunque  $S_n(\iota_n) = a$ , e in generale per  $\sigma : \Delta^n \rightarrow \Delta^n \times I$  poniamo  $S_n(\sigma) = (\sigma \times Id)_{\#}a$ . Ora:

$$\begin{aligned} \partial S_n(\sigma) &= \partial(\sigma \times Id)_{\#}a = (\sigma \times Id)_{\#}\partial a = (\sigma \times Id)_{\#}(\eta_1^{\Delta^n}(\iota_n) - \eta_0^{\Delta^n}(\iota_n) - S_{n-1}^{\Delta^n}\partial\iota_n) = \\ &= \eta_1^{\Delta^n}\sigma_{\#\iota_n} - \eta_0^{\Delta^n}\sigma_{\#\iota_n} - S_{n-1}^{\Delta^n}\sigma_{\#}\partial\iota_n = \eta_1^{\Delta^n}\sigma - \eta_0^{\Delta^n}\sigma - S_{n-1}^{\Delta^n}\partial\sigma \end{aligned}$$

cioè  $S_n$  rispetta (1). Infine:

$$(f \times Id)_{\#}S_n\sigma = (f \times Id)_{\#}(\sigma \times Id)_{\#}a = ((f \circ \sigma) \times Id)_{\#}a = S_n(f\sigma) = S_n f_{\#}\sigma$$

cioè  $S_n$  rispetta (2). □

**Teorema 2.8** Mappe omotope inducono morfismi di catene omotopi.

*Dimostrazione.* Siano  $\eta_0, \eta_1 : X \rightarrow X \times I$  date da  $\eta_i(x) = (x, i)$ , e siano  $(\eta_0)_{\#}$  e  $(\eta_1)_{\#}$  le relative mappe indotte sui complessi di catene. Siano inoltre  $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$  mappe omotope tramite un'omotopia  $h$ . In maniera ovvia è commutativo il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f_0} & Y \\ \eta_0^X \searrow & & \nearrow \\ & X \times I & \xrightarrow{h} \\ \eta_1^X \nearrow & & \searrow \\ X & \xrightarrow{f_1} & Y \end{array}$$

Per mostrare che  $f_0$  e  $f_1$  inducono morfismi di catene omotopi basta mostrare che  $(\eta_0^X)_{\#}$  e  $(\eta_1^X)_{\#}$  sono omotopi come morfismi  $C(X) \rightarrow C(X \times I)$ . La tesi segue dunque direttamente dal Lemma 2.7. □

Mettendo insieme i risultati della Proposizione 1.3 e del Teorema 2.8 abbiamo:

**Corollario 2.9** Mappe omotope inducono la stessa mappa in omologia. In particolare, l'omologia è un invariante omotopico.

**Corollario 2.10** Se esiste  $f : X \rightarrow Y$  equivalenza omotopica, allora  $H(X)$  è isomorfo a  $H(Y)$ .



## 2.4 Successione di Mayer-Vietoris

Consideriamo uno spazio  $X$  che si decompone in  $X = A \cup B$ . Ci sono le mappe indotte dalle inclusioni:

$$\begin{aligned} i_* : H(A \cap B) &\rightarrow H(A), & j_* : H(A \cap B) &\rightarrow H(B) \\ k_* : H(A) &\rightarrow H(X), & l_* : H(B) &\rightarrow H(X) \end{aligned}$$

e possiamo considerare le mappe

$$\begin{array}{ccc} \varphi : H(A \cap B) & \rightarrow & H(A) \oplus H(B) & \psi : H(A) \oplus H(B) & \rightarrow & H(X) \\ x & \mapsto & (i_*(x), j_*(x)) & (u, v) & \mapsto & k_*(u) - l_*(v) \end{array}$$

**Teorema 2.11** (Mayer-Vietoris) Siano  $A, B \subseteq X$  tali che  $X = \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$ . Allora esiste un omomorfismo  $\Delta : H(X) \rightarrow H(A \cap B)$  naturale di grado  $-1$  tale che la seguente successione è esatta:

$$\dots \xrightarrow{\Delta_{n+1}} H_n(A \cap B) \xrightarrow{\varphi_n} H_n(A) \oplus H_n(B) \xrightarrow{\psi_n} H_n(X) \xrightarrow{\Delta_n} H_{n-1}(A \cap B) \xrightarrow{\varphi_{n-1}} \dots$$

Inoltre se  $A \cap B \neq \emptyset$  allora la successione è esatta anche in omologia ridotta.

*Dimostrazione.* Per la seguente dimostrazione si fa uso di risultati che si vedranno più avanti (in particolare la Proposizione 2.25 e il Teorema 2.29).

Consideriamo  $\mathcal{U} = \{A, B\}$ . Vale  $C^{\mathcal{U}}(X) = C(A) + C(B)$  (con la somma che non è diretta). Possiamo allora considerare la successione

$$0 \longrightarrow C(A \cap B) \longrightarrow C(A) \oplus C(B) \longrightarrow C^{\mathcal{U}}(X) = C(A) + C(B) \longrightarrow 0$$

che per l'uguaglianza detta è esatta (il nucleo della seconda mappa è proprio  $C(A \cap B)$ ). Segue la successione esatta lunga in omologia

$$\dots \longrightarrow H_n(A \cap B) \longrightarrow H_n(A) \oplus H_n(B) \longrightarrow H_n^{\mathcal{U}}(X) \longrightarrow H_{n-1}(A \cap B) \longrightarrow \dots$$

per il Teorema 2.29 si ha  $H_n^{\mathcal{U}}(X) \simeq H_n(X)$ , cioè abbiamo la successione esatta

$$\dots \longrightarrow H_n(A \cap B) \longrightarrow H_n(A) \oplus H_n(B) \longrightarrow H_n(X) \longrightarrow H_{n-1}(A \cap B) \longrightarrow \dots$$

che è la tesi. In particolare si è trovato che  $\Delta$  è naturale, visto che l'isomorfismo tra  $H_n^{\mathcal{U}}(X)$  e  $H_n(X)$  è indotto dalla suddivisione baricentrica  $\mathcal{B}$ , che è naturale.  $\square$

**Fatto 2.12** Il Teorema 2.11 (Mayer-Vietoris) ha il seguente enunciato in omologia relativa:

Siano  $Y \subseteq X$ ,  $X = \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$ ,  $Y = \overset{\circ}{C} \cup \overset{\circ}{D}$  con  $C \subseteq A$ ,  $D \subseteq B$ . Allora esiste  $\Delta : H(X, Y) \rightarrow H(A \cap B, C \cap D)$  omomorfismo di grado  $-1$  tale che la seguente successione è esatta:

$$\dots \xrightarrow{\Delta_{n+1}} H_n(A \cap B, C \cap D) \xrightarrow{\varphi_n} H_n(A, C) \oplus H_n(B, D) \xrightarrow{\psi_n} H_n(X, Y) \xrightarrow{\Delta_n} H_{n-1}(A \cap B, C \cap D) \xrightarrow{\varphi_{n-1}} \dots$$

La dimostrazione del Fatto 2.12 è analoga a quella del Teorema 2.11 (Mayer-Vietoris), usando gli analoghi risultati nel caso dell'omologia relativa.

### 2.4.1 Conseguenze del Teorema di Mayer-Vietoris

Riportiamo qua alcuni risultati che seguono dal Teorema 2.11 (Mayer-Vietoris):

**Teorema 2.13** (Omologia delle Sfere)  $\tilde{H}_i(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & i = n \\ 0 & i \neq n \end{cases}$ , cioè per  $n > 0$   $H_i(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & i = 0 \vee i = n \\ 0 & i \neq 0 \wedge i \neq n \end{cases}$

*Dimostrazione.* Facciamo un'induzione:

*Passo Base:* per  $n = 0$ ,  $S^0 = \{1, -1\}$ , dunque  $C_i(S^0) = \mathbb{Z}^2$  per ogni  $i \in \mathbb{N}$ . In particolare ogni  $i$ -simplexso singolare è un simplexso costante. Si verifica facilmente che  $\partial_i$  è un isomorfismo se  $i$  pari ed è invece la mappa nulla se  $i$  dispari. Passando all'omologia si ottiene la tesi.

*Passo induttivo:* siano  $P, Q$  punti distinti di  $S^{n+1}$ ,  $A = S^{n+1} \setminus \{P\}$  e  $B = S^{n+1} \setminus \{Q\}$ . Allora ovviamente  $S^{n+1} = \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$ . Vale inoltre  $A \simeq \mathbb{R}^{n+1} \simeq B$  e  $A \cap B \simeq \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \sim S^n$ , dunque  $\tilde{H}_i(A) = 0 = \tilde{H}_i(B)$

per ogni  $i$ , e per ipotesi induttiva  $\tilde{H}_i(A \cap B) = \tilde{H}_i(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & i = n \\ 0 & i \neq n \end{cases}$ . Utilizzando il Teorema 2.11 (Mayer-Vietoris), è esatta la successione

$$\dots \longrightarrow \tilde{H}_{i+1}(A) \oplus \tilde{H}_{i+1}(B) \longrightarrow \tilde{H}_{i+1}(S^{n+1}) \longrightarrow \tilde{H}_i(A \cap B) \longrightarrow \tilde{H}_i(A) \oplus \tilde{H}_i(B) \longrightarrow \dots$$

e il primo e l'ultimo termine sono nulli per quanto detto. Dunque  $\tilde{H}_{i+1}(S^{n+1}) = \tilde{H}_i(A \cap B) = \tilde{H}_i(S^n)$ .  $\square$

**Corollario 2.14**  $S^n$  non è contraibile a un punto.

**Proposizione 2.15**  $D^{n+1}$  non si può retrarre su  $S^n$ .

*Dimostrazione.* Se si potesse retrarre  $D^{n+1}$  su  $S^n$ , diciamo con una retrazione  $r$ , avremmo

$$S^n \begin{array}{c} \xrightarrow{i} D^{n+1} \xrightarrow{r} S^n \\ \searrow \text{Id} \nearrow \end{array}$$

da cui in omologia:

$$\mathbb{Z} \begin{array}{c} \xrightarrow{i_*} 0 \xrightarrow{r_*} \mathbb{Z} \\ \searrow \text{Id} \nearrow \end{array}$$

che è assurdo (ovviamente non si può fattorizzare  $\text{Id} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  passando da 0).  $\square$

**Proposizione 2.16** Sia  $n \geq 1$ . Allora  $H_i(D^n, S^{n-1}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & i = n \\ 0 & i \neq n \end{cases}$ .

*Dimostrazione.* Usiamo la successione esatta della coppia in omologia ridotta:

$$\dots \longrightarrow \tilde{H}_i(D^n) \longrightarrow H_i(D^n, S^{n-1}) \longrightarrow \tilde{H}_{i-1}(S^{n-1}) \longrightarrow \tilde{H}_{i-1}(D^n) \longrightarrow \dots$$

ed essendo che il primo e l'ultimo elemento sono 0 ( $D^n$  è contraibile), per esattezza abbiamo che  $H_i(D^n, S^{n-1}) \simeq \tilde{H}_{i-1}(S^{n-1})$ , che dà la tesi usando il Teorema 2.13 (Omologia delle Sfere).  $\square$

**Teorema 2.17** (Punto Fisso di Brouwer)  $f : D^n \rightarrow D^n$  continua ha almeno un punto fisso.

*Dimostrazione.* Se fosse  $f(x) \neq x$  per ogni  $x \in D^n$ , ne deduciamo la retrazione di  $D^n$  su  $S^{n-1}$  data da

$$\{r(x)\} = \{f(x) + t(x - f(x))\} \cap \partial D^n$$

assurdo per la Proposizione 2.15.  $\square$

**Definizione 17** Data  $f : S^n \rightarrow S^n$  esiste un unico  $d \in \mathbb{Z}$  tale che la mappa indotta in omologia

$$f_* : \underbrace{H_n(S^n)}_{\mathbb{Z}} \rightarrow \underbrace{H_n(S^n)}_{\mathbb{Z}}$$

è la moltiplicazione per  $d$ . Tale  $d$  è detto *grado* di  $f$ .

**Fatto 2.18** 1.  $f_1, f_2 : S^n \rightarrow S^n$  omotope hanno stesso grado.

2. Il grado della composizione di mappe è il prodotto dei gradi.

3. Data  $f : S^n \rightarrow S^n$ ,  $f$  e  $\Sigma f$  (sospensione<sup>3</sup> di  $f$ ) hanno stesso grado.

4.  $\text{Id} : S^n \rightarrow S^n$  ha grado 1,  $f : S^n \rightarrow S^n$  costante ha grado 0,  $f : S^0 \rightarrow S^0$  ha grado 0, 1 oppure  $-1$ .

5.  $v : S^n \rightarrow S^n$  riflessione rispetto ad un iperpiano per l'origine ha grado  $-1$ .

6. la mappa antipodale  $S^n \rightarrow S^n$  ha grado  $(-1)^{n+1}$ .

7.  $f : S^n \rightarrow S^n$  senza punti fissi ha grado  $(-1)^{n+1}$ .

**Teorema 2.19**  $S^n$  ammette un campo tangente (cioè  $f(x) \cdot x = 0$  per ogni  $x$ ) mai nullo  $\iff n$  è dispari.

*Dimostrazione.* Per  $n$  dispari basta considerare il campo  $(x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto (x_2, -x_1, \dots, x_{n+1}, -x_n)$ . Se invece  $n$  pari, supponiamo per assurdo che esista un campo vettoriale tangente mai nullo. Considero allora  $h : S^n \times I \rightarrow S^n$  data da  $h(x, t) = \frac{x + tv(x)}{\|x + tv(x)\|}$ , omotopia tra  $h_0 = \text{Id}_{S^n}$  e  $h_1$  mappa senza punti fissi. Ma  $\text{Id}_{S^n}$  ha grado 1,  $h_1$  ha grado  $(-1)^{n+1} = -1$ , assurdo.  $\square$

<sup>3</sup>La sospensione di  $X$  spazio topologico è  $\Sigma X = X \times I / \sim$ , dove  $(x, 0) \sim (x', 0)$  e  $(x, 1) \sim (x', 1)$  per ogni  $x, x' \in X$ . La sospensione di una mappa  $f \in \Sigma f : \Sigma X \rightarrow \Sigma Y$  data da  $\Sigma f([(x, t)]) = [(f(x), t)]$ . Osservare che  $\Sigma S^n = S^{n+1}$ .

## 2.5 Legame tra Primo Gruppo di Omologia e Gruppo Fondamentale

Ricordiamo che l'1-simplesso standard è  $\Delta^1 = \{(t_0, t_1) \in \mathbb{R}^2 : t_0, t_1 \geq 0, t_0 + t_1 = 1\}$ , e dato uno spazio topologico  $X$  un 1-simplesso singolare è una mappa  $\sigma : \Delta^1 \rightarrow X$ . Ogni coppia in  $\Delta^1$  è univocamente identificata dal primo valore, quindi in maniera ovvia  $\Delta^1 \simeq [0, 1]$ . Possiamo identificare un 1-simplesso singolare  $\sigma$  con il cammino  $I \xrightarrow{\gamma} X$   
 $t \mapsto \sigma(t, 1-t)$ , e possiamo identificare il cammino inverso  $\gamma^-$  con  $\sigma^-(t_0, t_1) = \sigma(t_1, t_0)$ . Rimane definita anche la nozione di “giunzione di 1-simplessi singolari”, che si costruisce nel seguente modo: dati  $\sigma, \tau$  tali che  $\sigma(0, 1) = \tau(1, 0)$ , si pone

$$(\sigma * \tau)(t_0, t_1) = \begin{cases} \sigma(2t_0 - 1, 2t_1) & \text{se } t_1 \leq \frac{1}{2} \\ \tau(2t_0, 2t_1 - 1) & \text{se } t_1 \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Dati due 1-simplessi singolari  $\sigma, \tau$  con  $\sigma(0, 1) = \tau(1, 0)$ , consideriamo la mappa

$$\omega : \Delta^2 \rightarrow X \\ (t_0, t_1, t_2) \mapsto (\sigma * \tau)(t_0 + \frac{t_1}{2}, \frac{t_1}{2} + t_2)$$

**Fatto 2.20** Vale che<sup>4</sup>  $\partial\omega = \sigma - \sigma * \tau + \tau$ , cioè in omologia  $[\sigma * \tau] = [\sigma] + [\tau]$ .

Costruiamo una mappa  $\pi_1(X, x_0) \rightarrow H_1(X)$ : dato  $\gamma : I \rightarrow X$  tale che  $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$ , possiamo associargli l'1-simplesso  $\sigma_\gamma : \Delta^1 \rightarrow X$   
 $(t, 1-t) \mapsto \gamma(t)$ . Allora rimane definita una mappa

$$h' : \pi_1(X, x_0) \rightarrow C_1(X) \\ \gamma \mapsto \sigma_\gamma$$

**Fatto 2.21** Tramite la mappa appena definita  $\gamma_1 * \gamma_2 \xrightarrow{h'} \sigma_{\gamma_1} * \sigma_{\gamma_2}$ .

**Proposizione 2.22** Cammini omotopi a estremi fissi vanno tramite  $h'$  in simplessi singolari omologhi.

*Dimostrazione.* Data  $K : \Delta^1 \times I \rightarrow X$  omotopia a estremi fissi tra due cammini  $k_0 = K(\cdot, 0)$  e  $k_1 = K(\cdot, 1)$ , questa si fattorizza tramite la mappa

$$Q : \Delta^1 \times I \rightarrow \Delta^2 \\ (t_0, t_1, t) \mapsto (t_0, t_1(1-t), t_1 t)$$

che contrae uno dei lati costanti di  $K$  in un unico punto:

$$\begin{array}{ccc} \cdot & \xrightarrow{k_1} & \cdot \\ x_0 \Big| & & \Big| x_0 \\ \cdot & \xrightarrow{k_0} & \cdot \end{array} \xrightarrow{Q} \begin{array}{ccc} \cdot & & \cdot \\ \cdot & \xrightarrow{k_1} & \cdot \\ \cdot & \xrightarrow{k_0} & \cdot \end{array}$$

Ciò induce una  $\sigma : \Delta^2 \rightarrow X$  che rende commutativo il diagramma

$$\begin{array}{ccc} \Delta^1 \times I & \xrightarrow{K} & X \\ Q \downarrow & \nearrow \sigma & \\ \Delta^2 & & \end{array}$$

inoltre  $\partial\sigma = x_0 - k_0 + k_1$ , dunque in omologia, poiché  $[x_0]$  è la classe banale<sup>5</sup>, otteniamo  $[k_0] = [k_1]$ .  $\square$

Dunque la mappa  $h'$  sopra definita manda loop omotopi nello stesso elemento di  $H_1$ , vale a dire che  $h'$  è una ben definita mappa  $\pi_1 \rightarrow H_1$ . Inoltre, dal Fatto 2.21 segue che  $h'$  è anche un omomorfismo. Infine, poiché  $H_1$  è un gruppo abeliano, sappiamo che  $h'$  si fattorizza su  $\pi_1^{Ab}$ , cioè esiste un omomorfismo  $h : \pi_1(X, x_0)^{Ab} \rightarrow H_1(X)$  tale che sia commutativo il diagramma

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{h'} & H_1(X) \\ Ab \downarrow & \nearrow h & \\ \pi_1(X, x_0)^{Ab} & & \end{array}$$

<sup>4</sup>Si tratta di usare le definizioni delle mappe  $d_i$ , di  $\sigma * \tau$  e sfruttare che  $t_0 + t_1 + t_2 = 1$ .

<sup>5</sup>1-simplessi banali sono bordi

**Teorema 2.23** Se  $X$  è connesso per archi allora  $h$  è un isomorfismo, cioè  $H_1(X) \simeq \pi_1(X, x_0)^{Ab}$ .

*Dimostrazione.* Mostriamo che  $h$  ha un'inversa sinistra: per ogni  $x \in X$  sia  $u_x$  cammino da  $x_0$  a  $x$ . Dato  $\sigma : \Delta^1 \rightarrow X$  e detti  $\sigma_0 = \sigma(0, 1)$ ,  $\sigma_1 = \sigma(1, 0)$ , associamo a  $\sigma$  il loop  $u_{\sigma_0} * \sigma * u_{\sigma_1}^- \in \pi_1(X, x_0)$ . Estendiamo per linearità ad un omomorfismo  $l' : C_1(X) \rightarrow \pi_1(X, x_0)^{Ab}$ . Mostriamo che  $l'$  passa al quoziente (rispetto ai bordi): sia  $\tau : \Delta^2 \rightarrow X$  con facce  $\tau_i = \tau \circ d_i$ ,  $i = 0, 1, 2$ . Poiché  $\Delta^2$  è contraibile,  $\tau_1$  è omotopo a  $\tau_2 * \tau_0$ . Allora

$$l'(\tau_2) + l'(\tau_0) = l'(\tau_2 + \tau_0) = l'(\tau_2 * \tau_0) = l'(\tau_1)$$

cioè  $l'(\partial\tau) = l'(\tau_0) - l'(\tau_1) + l'(\tau_2) = 0$  e  $l'$  passa al quoziente:

$$\begin{array}{ccc} C_1(X) & \xrightarrow{l'} & \pi_1(X, x_0)^{Ab} \\ \downarrow & & \nearrow l'' \\ C_1(X)/B_1(X) & & \end{array}$$

Poiché  $H_1(X) = Z_1(X)/B_1(X) \subseteq C_1(X)/B_1(X)$  è indotta anche una  $l : H_1(X) \rightarrow \pi_1(X, x_0)^{Ab}$ . Per costruzione,  $l \circ h = Id_{\pi_1(X, x_0)^{Ab}}$ .

Per concludere basta dunque mostrare che  $h$  è suriettiva: fissiamo un ciclo  $\sum_{i=1}^n a_i \sigma_i \in Z_1(X)$ . Poiché è un ciclo  $\sum_{i=1}^n a_i ((\sigma_i)_1 - (\sigma_i)_0) = 0$ , dunque in particolare anche  $\sum_{i=1}^n a_i ([u_{(\sigma_i)_0}] - [u_{(\sigma_i)_1}]) = 0$ , allora

$$\sum_{i=1}^n a_i [\sigma_i] = \sum_{i=1}^n a_i ([u_{\sigma_{i0}}] + [\sigma_i] - [u_{\sigma_{i1}}]) = \sum_{i=1}^n a_i [u_{\sigma_{i0}} * \sigma_i * u_{\sigma_{i1}}^-] \in \text{Im}(h)$$

□

## 2.6 Suddivisioni Baricentriche

Lavoriamo, in questa sezione, su  $\mathbb{R}^n$ .

**Definizione 18** Sia  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  convesso e  $v_0, \dots, v_p \in D$ . Un *simplexso singolare affine* di vertici  $v_0, \dots, v_p$  è una mappa della forma

$$\begin{array}{ccc} \Delta^p & \rightarrow & D \\ \sum \lambda_i e_i & \mapsto & \sum \lambda_i v_i \end{array}$$

Indichiamo  $\sigma$  con  $[v_0, \dots, v_p]$ .

Notazione:  $[v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_p]$  è il  $p-1$ -simplexso affine ottenuto omettendo il vertice  $i$ .

**Osservazione.**  $\partial[v_0, \dots, v_p] = \sum_{i=0}^n (-1)^i [v_0, \dots, v_p] \circ d_i = \sum_{i=0}^n (-1)^i [v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_p]$ .

Sia  $D$  convesso. Per ogni  $v \in D$  abbiamo un'omotopia di contrazione  $\begin{array}{ccc} D \times I & \rightarrow & D \\ x & \mapsto & (1-t)x + tv \end{array}$  che induce (per la Cone Construction) un'omotopia di catene tra  $Id$  e  $\varepsilon$ <sup>6</sup>:

$$\begin{array}{ccc} C_p(D) & \rightarrow & C_{p+1}(D) \\ \sigma & \mapsto & v\sigma \end{array}$$

dove si è posto, per  $\sigma = [v_0, \dots, v_p]$ ,

$$v\sigma := [v, v_0, \dots, v_p] \in C_{p+1}(D) \quad (1)$$

**Fatto 2.24** Per  $\sigma \in C_p(X)$  vale che  $\partial(v\sigma) = \begin{cases} \sigma - \varepsilon(\sigma)[v] & \text{se } p = 0 \\ \sigma - v \cdot \partial(\sigma) & \text{se } p > 0 \end{cases}$ .

**Definizione 19** Il *baricentro* di  $\sigma = [v_0, \dots, v_p]$  è  $\sigma^\beta = \frac{1}{p+1} \sum v_i$ . Inoltre, definiamo induttivamente la *mappa di suddivisione baricentrica*

$$\mathcal{B}_p(X) = \mathcal{B}_p : C_p(X) \rightarrow C_p(X)$$

che manda il  $p$ -simplexso  $\sigma : \Delta^p \rightarrow X$  in  $\mathcal{B}_p(\sigma) = \sigma_{\#} \mathcal{B}_p(\iota_p)$ , dove

$$\mathcal{B}_p(\iota_p) = \begin{cases} \iota_0 & p = 0 \\ \iota_p^\beta \mathcal{B}_{p-1}(\partial \iota_p) & p > 0 \end{cases}$$

(dove  $\iota_p$  è l'identità di  $\Delta^p$ ).

<sup>6</sup>Si ricorda che  $\varepsilon$  è il morfismo di complessi dato da  $\varepsilon_n = 0$  per  $n > 0$ ,  $C_0(X) \ni \sum n_\sigma \sigma \xrightarrow{\varepsilon_0} (\sum n_\sigma)[v]$  dove, secondo la notazione introdotta,  $[v]$  è lo 0-simplexso  $1 \mapsto v$ .

**Proposizione 2.25**  $\mathcal{B}_p$  è una mappa di catene naturale che è omotopa all'identità.

*Dimostrazione.* Naturalità: dalle definizioni si ha

$$f_{\#}\mathcal{B}_p(\sigma) = f_{\#}\sigma_{\#}\mathcal{B}_p(\iota_p) = (f\sigma)_{\#}\mathcal{B}_p(\iota_p) = \mathcal{B}_p(f\sigma) = \mathcal{B}_p(f_{\#}\sigma)$$

Mappa di catene: facciamo un'induzione. *Passo base:* per  $p = 1$  abbiamo (usiamo il Fatto 2.24)

$$\partial\mathcal{B}_1(\iota_1) = \partial(\iota_1^{\beta} \cdot \mathcal{B}_0(\partial\iota_1)) = \mathcal{B}_0(\partial\iota_1) - \iota_1^{\beta} \partial\mathcal{B}_0(\partial\iota_1) = \mathcal{B}_0(\partial\iota_1)$$

*Passo Induttivo:* usando il Fatto 2.24 e l'ipotesi induttiva

$$\partial\mathcal{B}_p(\iota_p) = \partial(\iota_p^{\beta} \cdot \mathcal{B}_{p-1}(\partial\iota_p)) \stackrel{F.2.24}{=} \mathcal{B}_{p-1}(\partial\iota_p) - \iota_p^{\beta} \cdot \partial\mathcal{B}_{p-1}(\partial\iota_p) = \mathcal{B}_{p-1}(\partial\iota_p) - \iota_p^{\beta} \cdot \mathcal{B}_{p-2}(\partial^2\iota_p) = \mathcal{B}_{p-1}(\partial\iota_p)$$

da cui, usando la naturalità, si ottiene  $\partial\mathcal{B}(\sigma) = \mathcal{B}(\partial\sigma)$  per  $\sigma$  simpleso generico.

Per dimostrare che sia omotopa all'identità facciamo uso di un risultato più generale (Teorema 2.26) che useremo anche più avanti.  $\square$

Sia  $\mathcal{C}$  una categoria,  $\mathcal{CH}_+$  la categoria dei complessi di catene singolari di gruppi abeliani  $(C_n, d_n)$ , con  $C_n = 0$  per  $n < 0$ .

**Definizione 20** Un funtore  $F_* : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{CH}_+$  si dice *libero* se per ogni  $n \in \mathbb{N}$  esiste una famiglia  $\{(B_{n,j}, b_{n,j}) : j \in J(n)\}$  di oggetti  $B_{n,j}$  di  $\mathcal{C}$  (detti *modelli*) e oggetti  $b_{n,j} \in F_n(B_{n,j})$  tali che per ogni  $X$  oggetto di  $\mathcal{C}$  una base di  $F_n(X)$  (come gruppo abeliano libero) è data da

$$\{F_n(f)(b_{n,j}) : j \in J(n), f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B_{n,j}, X)\}$$

**Esempio 2** Catene singolari:  $\mathcal{C} = \text{Top}$ ,  $F_n = C_n$ ,  $B_n = \Delta^n$ ,  $b_n = \iota_n \in C_n(\Delta^n)$ . Una base di  $C_n(X)$  è

$$\{\sigma : \sigma = \sigma_{\#}\iota_n = C_n(\sigma)(\iota_n) \text{ } n\text{-simpleso singolare}\}$$

**Definizione 21** Un funtore  $G_* : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{CH}_+$  si dice *aciclico* rispetto alla famiglia di modelli  $\{B_{n,j}\}_{j \in J(n)}$  se  $H_n(G_*(B_{n,j})) = 0$  per ogni  $n > 0$  e ogni modello  $B_{n,j}$ .

**Definizione 22** Date  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  categorie e  $F, G$  funtori covarianti  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ , una trasformazione naturale tra  $F$  e  $G$  è una funzione  $\varphi$  dagli oggetti di  $\mathcal{C}$  ai morfismi di  $\mathcal{D}$  tale che per ogni  $f : X \rightarrow Y$  morfismo di  $\mathcal{C}$  è commutativo il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{F(f)} & F(Y) \\ \varphi(X) \downarrow & & \downarrow \varphi(Y) \\ G(X) & \xrightarrow{G(f)} & G(Y) \end{array}$$

Nel caso in cui  $F$  e  $G$  siano controvarianti, cambia il verso delle mappe orizzontali.

**Teorema 2.26** Siano  $F_*, G_* : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{CH}_+$  funtori rispettivamente libero e aciclico rispetto alla famiglia di modelli di  $F_*$ . Allora:

1. per ogni trasformazione naturale  $\bar{\varphi} : H_0 \circ F_* \rightarrow H_0 \circ G_*$  esiste una trasformazione naturale  $\varphi_* : F_* \rightarrow G_*$  che induce  $\bar{\varphi}$
2. due trasformazioni naturali  $\varphi, \psi$  con questa proprietà (di indurre  $\bar{\varphi}$ ) sono omotope.

*Dimostrazione.* Osserviamo che  $\varphi_n, \psi_n$  sono determinate dalle loro immagini su  $F_n(f)(b_{n,j})$  (sono base). Procediamo induttivamente. *Passo Base:*  $\varphi_0$  è determinata se per ogni  $b_{0,j}$  scegliamo un  $\varphi(b_{0,j})$  che rappresenti la classe di omologia di  $\bar{\varphi}(b_{0,j}) \in H_0(G(B_{0,j}))$ .

*Passo Induttivo:* sia  $\varphi_i : F_i \rightarrow G_i$  trasformazione naturale che commuta con le mappe di bordo:

$$d_i^G \circ \varphi_i = \varphi_{i-1} \circ d_i^F \quad \text{per } 0 < i < n \quad (2)$$

Consideriamo  $\varphi_{n-1}d_n^F(b_{n,j}) \in G_{n-1}(B_{n-1,j})$ : per  $n = 1$  questa è la classe nulla, in quanto  $\varphi_0$  è definita per mandare a 0 tutti i bordi. Per  $n > 1$  invece si ha

$$d_{n-1}^G(\varphi_{n-1}d_n^F(b_{n,j})) = (d_{n-1}^G\varphi_{n-1})d_n^F(b_{n,j}) \stackrel{(2)}{=} \varphi_{n-2}d_{n-1}^F d_n^F(b_{n,j}) = 0$$

cioè  $\varphi_{n-1}d_n^F(b_{n,j})$  è un ciclo. Ma  $G$  è aciclico, cioè  $H_{n-1}(G_*(B_{n,j})) = 0$ , cioè  $\varphi_{n-1}d_n^F(b_{n,j})$  è anche un bordo, dunque esiste  $g_{n,j} \in G_n(B_{n,j})$  tale che  $d_n^G(g_{n,j}) = \varphi_{n-1}d_n^F(b_{n,j})$ . Poniamo allora  $\varphi_n(b_{n,j}) = g_{n,j}$ . Segue come voluto che

$$d_n^G \circ \varphi_n = \varphi_{n-1} \circ d_n^F \quad (3)$$

(per costruzione vale sui  $b_{n,j}$ , per naturalità vale ovunque). Si è dunque definito  $\varphi$  a partire da  $\bar{\varphi}$ . Resta dunque da mostrare che due trasformazioni  $\varphi, \psi$  che inducono  $\bar{\varphi}$  sono omotope. Costruiamo l'omotopia per induzione: siano  $\varphi_n, \psi_n$  costruite come sopra.

*Passo Base:* poiché  $\varphi_0(b_{0,j})$  e  $\psi_0(b_{0,j})$  sono nella stessa classe (inducono la stessa mappa  $\bar{\varphi}$  in omologia) esiste un  $c_{1,j} \in G_1(B_{0,j})$  tale che

$$\varphi_0(b_{0,j}) - \psi_0(b_{0,j}) = d_1^G(c_{1,j})$$

Definiamo allora  $S_0 : F_0 \rightarrow G_1$  data da  $S_0(b_{0,j}) = c_{1,j}$ , e per naturalità  $S_0$  è definita su tutto  $F_0$ .

*Passo Induttivo:* supponiamo ora di aver già definito  $S_i : F_i \rightarrow G_{i+1}$  per  $0 \leq i < n$  tale che

$$d_{i+1}^G S_i + S_{i-1} d_i^F = \psi_i - \varphi_i$$

Allora abbiamo (usiamo l'equazione (3) e la relazione appena scritta con  $i = n - 1$ )

$$d_n^G(\psi_n - \varphi_n - S_{n-1} d_n^F) = \psi_{n-1} d_n^F - \varphi_{n-1} d_n^F - (\psi_{n-1} d_n^F - \varphi_{n-1} d_n^F - S_{n-1} d_{n-1}^F d_n^F) = 0$$

e poiché  $G$  è aciclico esiste  $c_{n+1,j} \in G_{n+1}(B_{n,j})$  tale che  $d_{n+1}^G c_{n+1,j} = (\psi_n - \varphi_n - S_{n-1} d_n^F)(b_{n,j})$ , e possiamo definire  $S_n : F_n \rightarrow G_{n+1}$ ,  $S_n(b_{n,j}) = c_{n+1,j}$ . Segue  $d_{n+1}^G S_n + S_{n-1} d_n^F = \psi_n - \varphi_n$ .  $\square$

Prendendo  $F_* = G_* = C_n$  catene singolari, abbiamo che  $\varphi = Id$ ,  $\psi = \mathcal{B}$  inducono  $\bar{\varphi} = Id$  su  $H_0$ . Allora per il Teorema 2.26 (punto 2.)  $\mathcal{B}$  è omotopa all'identità, che è quello che ci mancava di mostrare per concludere la dimostrazione della Proposizione 2.25.

### 2.6.1 Ricoprimenti e Semplessi $\mathcal{U}$ -piccoli

Sia  $\mathcal{U}$  una famiglia di sottoinsiemi di  $X$  le cui parti interne ricoprono  $X$ .

**Definizione 23** Un simpleso singolare  $\sigma : \Delta^p \rightarrow X$  si dice  $\mathcal{U}$ -piccolo se ha immagine contenuta in un elemento di  $\mathcal{U}$ . Indichiamo con  $C_n^{\mathcal{U}}(X)$  il sottogruppo di  $C_n(X)$  generato dai simplessi singolari  $\mathcal{U}$ -piccoli.

**Osservazione.** Il bordo del complesso  $C(X)$  manda  $C_n^{\mathcal{U}}(X)$  in  $C_{n-1}^{\mathcal{U}}(X)$ , cioè i gruppi  $C_n^{\mathcal{U}}(X)$  formano un complesso di catene. Ne segue che è ben definita l'omologia  $H^{\mathcal{U}}(X)$ .

**Lemma 2.27** Sia  $\Delta = [v_0, \dots, v_p]$  un simpleso affine. Allora il diametro di ogni simpleso di  $\mathcal{B}(\Delta)$  è al più  $\frac{p}{p+1} \text{diam}(\Delta)$ .

*Dimostrazione.* Facciamo un'induzione. *Passo Base:* per  $p = 0$  non c'è niente da dimostrare.

*Passo Induttivo:* sia  $\Delta'$  un simpleso di  $\mathcal{B}(\Delta)$ , dunque in particolare un vertice di  $\Delta'$  è  $b$ . Chiamiamo  $w_1, \dots, w_p$  gli altri vertici. Ci sono due possibilità:

- i. Lo spigolo più lungo di  $\Delta'$  non contiene  $b$ , cioè è contenuto in una faccia  $D$  di  $\Delta$ . Ma allora è uno spigolo di un simpleso della suddivisione di  $D$ , dunque sfruttando l'ipotesi induttiva

$$\text{diam}(\Delta') \leq \frac{p-1}{p} \text{diam}(D)$$

Inoltre  $\frac{p-1}{p} \leq \frac{p}{p+1}$  e  $\text{diam}(D) \leq \text{diam}(\Delta)$ , allora  $\text{diam}(\Delta') \leq \frac{p}{p+1} \text{diam}(\Delta)$ .

- ii. Lo spigolo più lungo di  $\Delta'$  contiene  $b$ , senza perdita di generalità sia tale spigolo  $\overline{bw_1}$ . Necessariamente  $w_1$  deve essere un vertice di  $\Delta$ , altrimenti non sarebbe alla massima distanza dal baricentro  $b$ . Detta dunque  $\Delta^1$  la faccia di  $\Delta$  che non contiene  $w_1$  e detto  $b^1$  il suo baricentro, si ha  $b = \frac{1}{p+1} w_1 + \frac{p}{p+1} b^1$ , da cui

$$\text{diam}(\Delta') = \|\overline{bw_1}\| \leq \frac{p}{p+1} \|\overline{b^1 w_1}\| \leq \frac{p}{p+1} \text{diam}(\Delta)$$

Si è dunque concluso in entrambi i casi.  $\square$

**Lemma 2.28** Dato  $\mathcal{U}$  ricoprimento di  $X$  e  $\sigma : \Delta^p \rightarrow X$  simpleso singolare esiste  $k \in \mathbb{N}$  tale che ogni simpleso singolare di  $\mathcal{B}^k(\sigma)$  ha immagine contenuta in un elemento di  $\mathcal{U}$ .

*Dimostrazione.*  $\{\sigma^{-1}(\overset{\circ}{U}) : U \in \mathcal{U}\}$  è un ricoprimento aperto di  $\Delta^p$ , sia  $\varepsilon > 0$  il suo numero di Lebesgue. Allora basta scegliere  $k$  tale che  $\frac{p^k}{(p+1)^k} \cdot \text{diam}([e_0, \dots, e_p]) < \varepsilon$ , poi si ottiene la tesi dal Lemma 2.27.  $\square$

**Teorema 2.29** L'inclusione  $C^{\mathcal{U}}(X) \hookrightarrow C(X)$  induce un isomorfismo in omologia.

*Dimostrazione. Iniettività:* sia  $a \in C_i^{\mathcal{U}}(X)$  un ciclo (dunque  $\partial a = 0$ ) tale che  $[a] \mapsto [a] = [0] \in H_i(X)$ , quindi esiste  $b \in C_{i+1}(X)$  tale che  $\partial b = a$  (altrimenti  $[a] \neq [0]$  in  $H_i(X)$ , contro quanto ipotizzato). Per il Lemma 2.28 esiste  $k \in \mathbb{N}$  tale che  $\mathcal{B}^k(b) \in C_{i+1}^{\mathcal{U}}(X)$ . Sia  $T_k$  l'omotopia tra  $\mathcal{B}^k$  e  $Id$  (che esiste per la Proposizione 2.25). Dunque abbiamo che

$$\mathcal{B}^k(b) - b = T_k(\partial b) + \partial T_k(b) = T_k(a) + \partial T_k(b)$$

e prendendo il bordo  $\partial \mathcal{B}^k(b) - \partial b = \partial T_k(a) + \partial^2 T_k(b)$ , cioè

$$\partial \mathcal{B}^k(b) - a = \partial T_k(a) \implies a = \partial \mathcal{B}^k(b) - \partial T_k(a)$$

cioè  $a$  è differenza di bordi di elementi  $\mathcal{U}$ -piccoli (il primo lo è per costruzione, il secondo perché  $a$  lo è e  $T_k$  è naturale), cioè era  $[a] = [0] \in H_i^{\mathcal{U}}(X)$  e quindi la mappa è iniettiva.

*Suriettività:* sia  $a \in Z_n(C)$ , per il Lemma 2.28 esiste  $k \in \mathbb{N}$  tale  $B^k(a) \in C_n^{\mathcal{U}}(X)$ . Allora

$$B^k(a) - a = T_k(\partial a) + \partial T_k(a) = \partial T_k(a)$$

cioè  $B^k(a)$  è omologo ad  $a$ , dunque  $[B^k(a)] \mapsto [a]$  e la mappa è suriettiva.  $\square$

Useremo il seguente risultato, che dovrebbe essere stato visto in altri corsi:

**Lemma 2.30** (Lemma dei Cinque) Dato un diagramma commutativo di gruppi abeliani

$$\begin{array}{ccccccccc} A_1 & \longrightarrow & A_2 & \longrightarrow & A_3 & \longrightarrow & A_4 & \longrightarrow & A_5 \\ f_1 \downarrow & & f_2 \downarrow & & f_3 \downarrow & & f_4 \downarrow & & f_5 \downarrow \\ B_1 & \longrightarrow & B_2 & \longrightarrow & B_3 & \longrightarrow & B_4 & \longrightarrow & B_5 \end{array}$$

con le righe esatte,  $f_1$  suriettiva,  $f_5$  iniettiva,  $f_2$  e  $f_4$  isomorfismi, si ha che anche  $f_3$  è un isomorfismo.

**Teorema 2.31** L'inclusione  $i : C^{\mathcal{U}}(X, A) \hookrightarrow C(X, A)$  induce un isomorfismo in omologia.

*Dimostrazione.* Consideriamo il seguente diagramma commutativo tra successioni esatte:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & C^{\mathcal{U} \cap A}(A) & \longrightarrow & C^{\mathcal{U}}(X) & \longrightarrow & C^{\mathcal{U}}(X, A) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & C(A) & \longrightarrow & C(X) & \longrightarrow & C(X, A) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

dove  $\mathcal{U} \cap A = \{U \cap A : U \in \mathcal{U}\}$ . Segue il diagramma di successioni esatte lunghe in omologia

$$\begin{array}{ccccccccccc} \dots & \longrightarrow & H_n^{\mathcal{U} \cap A}(A) & \longrightarrow & H_n^{\mathcal{U}}(X) & \longrightarrow & H_n^{\mathcal{U}}(X, A) & \longrightarrow & H_{n-1}^{\mathcal{U} \cap A}(A) & \longrightarrow & H_{n-1}^{\mathcal{U}}(X) & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \dots & \longrightarrow & H_n(A) & \longrightarrow & H_n(X) & \longrightarrow & H_n(X, A) & \longrightarrow & H_{n-1}(A) & \longrightarrow & H_{n-1}(X) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Ne segue dal Lemma 2.30 (Lemma dei Cinque) che la mappa verticale in mezzo è un isomorfismo, dato che le altre mappe sono isomorfismi per il Teorema 2.29.  $\square$

## 2.7 Omologia Relativa

### 2.7.1 Teorema Escissione

**Definizione 24** Due mappe  $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  sono omotope come mappe di coppie se l'omotopia  $F$  tra  $f$  e  $g$  rispetta  $F(A \times I) \subseteq B$ .

**Teorema 2.32** Siano  $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  omotope come mappe di coppie. Allora  $f$  e  $g$  inducono lo stesso omomorfismo in omologia.

*Dimostrazione.* Usiamo la seguente variante del Lemma 2.30 (Lemma dei Cinque): dato un diagramma commutativo di successioni esatte

$$\begin{array}{ccccccccc} A_1 & \longrightarrow & A_2 & \longrightarrow & A_3 & \longrightarrow & A_4 & \longrightarrow & A_5 \\ f_1 \downarrow & & f_2 \downarrow & & f_3 \downarrow & & f_4 \downarrow & & f_5 \downarrow \\ B_1 & \longrightarrow & B_2 & \longrightarrow & B_3 & \longrightarrow & B_4 & \longrightarrow & B_5 \end{array}$$

tale che le mappe  $f_1, f_2, f_4, f_5$  sono la mappa nulla, si ha che anche  $f_3$  è la mappa nulla. Nel nostro caso, abbiamo (usiamo il Corollario 2.9):

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & H_n(A) & \longrightarrow & H_n(X) & \longrightarrow & H_n(X, A) \longrightarrow \dots \\ & & \downarrow f_* - g_* = 0 & & \downarrow f_* - g_* = 0 & & \downarrow f_* - g_* \\ \dots & \longrightarrow & H_n(B) & \longrightarrow & H_n(Y) & \longrightarrow & H_n(Y, B) \longrightarrow \dots \end{array}$$

per cui  $f_* - g_* : H_n(X, A) \rightarrow H_n(Y, B)$  è la mappa nulla, cioè  $f_* = g_*$ .  $\square$

Vogliamo capire cosa misura l'omologia relativa  $H(X, A)$ . In un certo senso è legata a  $X \setminus A$  e  $X/A$ .

**Teorema 2.33** (di Escissione) Sia  $(X, A)$  coppia,  $W \subseteq A$  tale che  $\overline{W} \subseteq \overset{\circ}{A}$ . Allora la mappa di inclusione  $(X \setminus W, A \setminus W) \hookrightarrow (X, A)$  induce un isomorfismo in omologia.

*Dimostrazione.* Consideriamo  $\mathcal{U} = \{A, X \setminus W\}$ , per cui  $\overset{\circ}{A} \cup (X \setminus W) = X$ . In particolare allora si ha  $C^{\mathcal{U}}(X) = C(A) + C(X \setminus W)$  (dove la somma non è diretta). Consideriamo il diagramma dato dalle inclusioni e il corrispettivo diagramma in omologia:

$$\begin{array}{ccc} C(X \setminus W, A \setminus W) & \longrightarrow & C(X, A) \\ & \searrow & \uparrow \\ & & C^{\mathcal{U}}(X, A) \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{ccc} H_n(X \setminus W, A \setminus W) & \longrightarrow & H_n(X, A) \\ & \searrow f & \uparrow \simeq \\ & & H_n^{\mathcal{U}}(X, A) \end{array}$$

dove la mappa verticale in omologia è un isomorfismo per il Teorema 2.31. Per concludere dunque basta provare che  $f$  è un isomorfismo. Ricordiamo che  $\mathcal{U} = \{A, X \setminus W\}$ , dunque  $\mathcal{U} \cap A = A$ . Si ha:

$$\begin{aligned} C_n^{\mathcal{U}}(X, A) &= C_n^{\mathcal{U}}(X)/C_n^{\mathcal{U} \cap A}(A) = (C_n(X \setminus W) + C_n(A))/C_n(A) = C_n(X \setminus W)/C_n(A) \cap C_n(X \setminus W) = \\ &= C_n(X \setminus W)/C_n(A \setminus W) = C_n(X \setminus W, A \setminus W) \end{aligned}$$

e passando al quoziente si trova l'isomorfismo cercato in omologia.  $\square$

**Definizione 25** Una coppia di spazi  $(X, A)$  con  $A$  chiuso di  $X$  si dice *buona coppia* se  $A$  è retratto di deformazione di un qualche suo intorno in  $X$ .

**Teorema 2.34** Data  $(X, A)$  buona coppia, la proiezione al quoziente  $(X, A) \rightarrow (X/A, A/A)$  induce un isomorfismo in omologia.

*Dimostrazione.* Sia  $V$  un intorno di  $A$  in  $X$  che si retrae per deformazione su  $A$ . Consideriamo il seguente diagramma (con le mappe orizzontali tutte indotte dalle inclusioni):

$$\begin{array}{ccccc} H_n(X, A) & \xrightarrow{f_1} & H_n(X, V) & \xleftarrow{f_2} & H_n(X \setminus A, V \setminus A) \\ \downarrow q_* & & \downarrow q'_* & & \downarrow f_3 = q''_* \\ H_n(X/A, A/A) & \xrightarrow{f_5} & H_n(X/A, V/A) & \xleftarrow{f_4} & H_n(X \setminus A/A, V \setminus A/A) \end{array}$$

vogliamo mostrare che la mappa verticale a sinistra è un isomorfismo. Per commutatività basta mostrare che le mappe  $f_i$  sono isomorfismi per  $i = 1, \dots, 5$ .

Le mappe  $f_2, f_4$  sono isomorfismi per il Teorema 2.33 (di Escissione), inoltre si ha  $f_3 = Id$  dato che  $H_n(X \setminus A/A, V \setminus A/A) = H_n(X \setminus A, V \setminus A)$ .

Mostriamo che  $f_1$  è isomorfismo: consideriamo la successione esatta lunga della tripla  $(X, V, A)$ :

$$\dots \longrightarrow H_n(V, A) \longrightarrow H_n(X, A) \xrightarrow{f_1} H_n(X, V) \longrightarrow H_{n-1}(V, A) \longrightarrow \dots$$

Il primo termine e l'ultimo termine sono nulli perché  $V$  si retrae per deformazione su  $A$ , per cui la mappa  $f_1$  è un isomorfismo per esattezza.

La verifica per  $f_5$  è analoga, lavorando sulla tripla  $(X/A, V/A, A/A)$ . Si è dunque concluso.  $\square$

**Osservazione.**  $H(X, \{p\}) \simeq \tilde{H}(X)$ , ma non è naturale.

Nel caso in cui non si abbia una buona coppia sfruttiamo la seguente costruzione:

**Definizione 26** Il cono di uno spazio  $X$  è  $C(X) = X \times I/X \times \{0\}$ . Si ha l'inclusione  $\begin{array}{l} X \hookrightarrow CX \\ x \mapsto (x, 1) \end{array}$ .



Data una coppia  $(X, A)$  possiamo considerare  $X \cup CA$ . Vale:

**Corollario 2.35**  $\tilde{H}(X \cup CA) \simeq H(X, A)$ .

*Dimostrazione.* Sia  $P = [A \times \{0\}]$  la punta di  $CA$ . Sappiamo che vale  $\tilde{H}_n(X \cup CA) \simeq \tilde{H}_n(X \cup CA, \{P\})$ ; poiché  $CA$  si retrae per deformazione su  $P$  si ha

$$\tilde{H}_n(X \cup CA, \{P\}) \simeq H_n(X \cup CA, CA)$$

e per il Teorema 2.33 (di Escissione)

$$H_n(X \cup CA, CA) \simeq H_n(X \cup CA \setminus \{P\}, CA \setminus \{P\})$$

Infine, poiché  $CA \setminus \{P\}$  si retrae su  $A$  e  $X \cup CA \setminus \{P\}$  si retrae su  $X$  abbiamo

$$H_n(X \cup CA \setminus \{P\}, CA \setminus \{P\}) \simeq H_n(X, A)$$

La catena di isomorfismi dà la tesi.  $\square$

## 2.7.2 Teorema di Jordan-Brouwer

Consideriamo una curva semplice chiusa  $\alpha$  in  $\mathbb{R}^2$  (cioè  $\alpha$  è un loop di  $\mathbb{R}^2$  omeomorfo a  $S^1$ ), allora  $\mathbb{R}^2 \setminus \text{traccia}(\alpha)$  è unione di due componenti connesse per archi che hanno  $\alpha$  come bordo (topologico). Vogliamo generalizzare questa costruzione.

**Proposizione 2.36** Sia  $(X, A)$  coppia di spazi topologici. Vale:

1. Dato  $u \in H_n(X, A)$  esiste  $(C, D)$  coppia compatta e esiste  $u' \in H_n(C, D)$  tale che  $i_*(u') = u$  (dove  $i_*$  è la mappa indotta dall'inclusione  $i : (C, D) \hookrightarrow (X, A)$ ).
2. Sia  $(C, D) \subseteq (X, A)$  coppia compatta,  $v \in H_n(C, D)$  con  $i_*(v) = 0$ . Allora esiste una coppia compatta  $(C', D') \subseteq (X, A)$  con  $(C, D) \subseteq (C', D')$  e tale che, detta  $j : (C, D) \hookrightarrow (C', D')$ ,  $j_*(v) = 0$ .

*Dimostrazione.* Ricordiamo che ogni catena ha supporto compatto, infatti è combinazione intera finita di semplici singolari, e questi hanno immagine compatta dato che sono continui e con dominio compatto.

1. La classe  $u$  è rappresentata da un ciclo  $\alpha' \in C_n(X, A)$ , il quale a sua volta è rappresentato da un  $\alpha \in C_n(X)$ . Prendiamo  $C = \text{supp}(\alpha)$  e  $D = \text{supp}(\partial\alpha)$ . Allora  $\alpha \in H_n(C, D)$  e  $u = i_*(\alpha)$ .
2. La classe  $v$  è rappresentata da un  $\beta' \in C_n(C, D)$ , il quale a sua volta è rappresentato da un  $\beta \in C_n(C)$ . Poiché  $0 = i_*(v) = [\beta] \in H_n(X, A)$ ,  $\beta$  è un bordo in  $C_n(X, A)$ , dunque esiste  $\gamma \in C_{n+1}(X, A)$  tale che  $\partial\gamma = \beta$  in  $C_n(X, A)$ . Prendiamo allora  $C' = C \cup \text{supp}(\gamma)$ ,  $D' = D \cup \text{supp}(\partial\gamma - \beta)$ .

$\square$

**Lemma 2.37** Sia  $Y \subseteq S^n$  con  $Y \simeq D^k$  con  $0 \leq k \leq n$ . Allora  $\tilde{H}_i(S^n \setminus Y) = 0$  per ogni  $i$ .

*Dimostrazione.* Facciamo un'induzione su  $k$ . *Passo Base:* per  $k = 0$  si ha che  $Y$  è un punto, per cui  $S^n \setminus Y \simeq \mathbb{R}^n$ , da cui la tesi passando all'omologia.

*Passo Induttivo:* identifichiamo  $Y$  con il cubo  $k$ -dimensionale  $I^k$  (che è omeomorfo al disco  $k$ -dimensionale). Consideriamo dunque  $I_+^k = \{x \in I^k : x_k \geq \frac{1}{2}\}$  e  $I_-^k = \{x \in I^k : x_k \leq \frac{1}{2}\}$ , che sono tali che  $I_+^k \cup I_-^k = I^k$  e  $I_+^k \cap I_-^k \simeq I^{k-1}$ . Consideriamo gli insiemi

$$\begin{cases} A = S^n \setminus I_+^k \\ B = S^n \setminus I_-^k \end{cases} \quad \text{che danno} \quad \begin{cases} \mathring{A} \cup \mathring{B} = S^n \setminus (I_+^k \cap I_-^k) = S^n \setminus I^{k-1} \\ A \cap B = S^n \setminus (I_+^k \cup I_-^k) = S^n \setminus I^k \end{cases}$$

Scriviamo la successione di Mayer-Vietoris per  $X = S^n \setminus I^{k-1}$ :

$$\tilde{H}_{i+1}(S^n \setminus I^{k-1}) \longrightarrow \tilde{H}_i(S^n \setminus I^k) \longrightarrow \tilde{H}_i(S^n \setminus I_+^k) \oplus \tilde{H}_i(S^n \setminus I_-^k) \longrightarrow \tilde{H}_i(S^n \setminus I^{k-1})$$

con il primo e l'ultimo termine che sono nulli per ipotesi induttiva, da cui per esattezza abbiamo che  $\varphi = (i_0, i_1) : \tilde{H}_i(S^n \setminus I^k) \rightarrow \tilde{H}_i(S^n \setminus I_+^k) \oplus \tilde{H}_i(S^n \setminus I_-^k)$  è un isomorfismo. Supponiamo per assurdo che  $\tilde{H}_i(S^n \setminus I^k) \neq 0$ . Sia dunque  $a_0 \in \tilde{H}_i(S^n \setminus I^k) \setminus \{0\}$ , per cui  $\varphi(a_0) = (i_0, i_1)(a_0) \neq 0$ , supponiamo senza perdita di generalità  $i_0(a_0) =: a_1 \neq 0$ . Iteriamo allora la costruzione appena fatta: dividiamo  $I_+^k$  in due parti,  $I_{++}^k$  e  $I_{+-}^k$  che ricoprono  $I_+^k$  e che hanno intersezione omeomorfa a  $I^{k-1}$ . Costruiamo  $A', B'$  come sopra e scriviamo la successione di Mayer-Vietoris, ottenendo (sfruttando ancora l'ipotesi induttiva)

che  $(i_{00}, i_{11}) : \tilde{H}_i(S^n \setminus I_+^k) \rightarrow \tilde{H}_i(S^n \setminus I_{++}^k) \oplus \tilde{H}_i(S^n \setminus I_{+-}^k)$  è un isomorfismo, e possiamo supporre senza perdita di generalità  $i_{00}(a_1) =: a_2 \neq 0$ . Continuando ad iterare, costruiamo una successione  $Y \supseteq Y' \supseteq \dots \supseteq Y^{(m)} \supseteq \dots$  con gli  $Y^{(m)}$  omeomorfi a  $I^k$  e con  $\bigcap_m Y^{(m)} = Y^\infty \simeq I^{k-1}$ , e abbiamo anche una successione  $a_m$  di elementi ognuno nel corrispettivo  $\tilde{H}_i(S^n \setminus Y^{(m)})$  non nulli e che vengono mandati nell'elemento successivo da  $i_{m0}$ <sup>7</sup>. Abbiamo dunque:

$$\begin{array}{ccccccc} \tilde{H}_i(S^n \setminus Y) & \longrightarrow & \tilde{H}_i(S^n \setminus Y') & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \tilde{H}_i(S^n \setminus Y^{(m)}) & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \tilde{H}_i(S^n \setminus Y^\infty) = 0 \\ a_0 & \xrightarrow{i_0} & a_1 & \xrightarrow{i_{00}} & \dots & \xrightarrow{\quad} & a_m & \xrightarrow{i_{m0}} & \dots & & \end{array}$$

Sia ora  $j^{(m)} : \tilde{H}_i(S^n \setminus Y^{(m)}) \rightarrow \tilde{H}_i(S^n \setminus Y^\infty)$  la mappa nulla (il gruppo in arrivo è nullo). Per la Proposizione 2.36, esiste  $C$  compatto,  $C \subseteq S^n \setminus Y$ , e esiste  $a'_0 \in \tilde{H}_i(C)$  tale che  $a'_0 \mapsto a_0$ . Inoltre, ancora per Proposizione 2.36, esiste  $C'$  compatto tale che  $C \subseteq C' \subseteq S^n \setminus Y^\infty$  e  $a'_0 \mapsto 0 \in \tilde{H}_i(C')$ . Poiché  $C' \subseteq S^n \setminus Y^\infty = \bigcup_m (S^n \setminus Y^{(m)})$  che è unione numerabile crescente di aperti, per compattezza esiste  $M \in \mathbb{N}$  tale che  $C' \subseteq S^n \setminus Y^{(M)}$ . Consideriamo allora il seguente diagramma, dato dalle inclusioni, e il diagramma commutativo indotto in omologia:

$$\begin{array}{ccc} C \longleftarrow C' & & \tilde{H}_i(C) \xrightarrow{\quad} \tilde{H}_i(C') \\ \downarrow & \implies & \downarrow \\ S^n \setminus Y \longleftarrow S^n \setminus Y^{(M)} & & \tilde{H}_i(S^n \setminus Y) \xrightarrow{\quad} \tilde{H}_i(S^n \setminus Y^{(M)}) \end{array}$$

Ora, tramite il percorso rosso  $a_0$  va in  $a_M \neq 0$ , mentre tramite il percorso blu  $a_0$  va in 0, assurdo. Dunque deve essere  $\tilde{H}_i(S^n \setminus Y) = 0$ .  $\square$

Possiamo ora dimostrare il seguente Teorema, che dà l'omologia di sfere a cui è stato tolto qualcosa omeomorfo ad una sfera di dimensione più bassa:

**Teorema 2.38** Sia  $K \subseteq S^n$ ,  $K \simeq S^k$  con  $0 \leq k \leq n-1$ . Allora  $\tilde{H}_i(S^n \setminus K) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } i = n - k - 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$ .

*Dimostrazione.* Facciamo un'induzione su  $k$ .

*Passo Base:* per  $k = 0$  abbiamo che  $K$  è una coppia di punti, dunque  $S^n \setminus K \simeq \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \sim S^{n-1}$ , dunque si conclude per quanto è noto sull'omologia delle sfere (Teorema 2.13).

*Passo Induttivo:* scomponiamo  $K$  in  $K = K_1 \cup K_2$  con  $K_1, K_2$  omeomorfi al disco  $D^k$  e tali che si abbia  $K_1 \cap K_2 \simeq S^{k-1}$ . Vogliamo studiare l'omologia di  $S^n \setminus K$ , usiamo il Teorema 2.11 (Mayer-Vietoris): prendiamo  $A = S^n \setminus K_1$ ,  $B = S^n \setminus K_2$  dunque  $S^n \setminus K = A \cap B$ . La successione esatta si scrive:

$$\tilde{H}_i(A) \oplus \tilde{H}_i(B) \longrightarrow \tilde{H}_i(A \cup B) \longrightarrow \tilde{H}_{i-1}(A \cap B) \longrightarrow \tilde{H}_{i-1}(A) \oplus \tilde{H}_{i-1}(B)$$

Per il Lemma 2.37  $A$  e  $B$  hanno omologia banale. Allora sostituendo abbiamo:

$$0 \longrightarrow \tilde{H}_i(S^n \setminus (K_1 \cap K_2)) \longrightarrow \tilde{H}_{i-1}(S^n \setminus (K_1 \cup K_2)) \longrightarrow 0$$

per cui, essendo  $K_1 \cap K_2 \simeq S^{k-1}$  e  $K_1 \cup K_2 \simeq S^k$  per esattezza abbiamo un isomorfismo

$$\tilde{H}_i(S^n \setminus S^{k-1}) \simeq \tilde{H}_{i-1}(S^n \setminus S^k)$$

che dà la tesi per ipotesi induttiva.  $\square$

Dal Teorema 2.38 segue:

**Teorema 2.39** (di Jordan-Brouwer) Un sottoinsieme  $A \subseteq S^n$  tale che  $A \simeq S^{n-1}$  sconnette  $S^n$  in due componenti connesse per archi.

*Dimostrazione.* Dal Teorema 2.38 abbiamo che  $\tilde{H}_i(S^n \setminus A) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } i = 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$ , da cui  $H_0(S^n \setminus A) = \mathbb{Z}^2$ , cioè  $S^n \setminus A$  ha due componenti connesse. Poiché  $A$  è chiuso,  $S^n \setminus A$  è aperto. Inoltre è localmente connesso per archi, dunque le sue componenti connesse coincidono con le sue componenti connesse per archi.  $\square$

<sup>7</sup>Stiamo qui supponendo, senza perdita di generalità e per semplificare la notazione, che ad ogni iterazione sia l'inclusione rispetto alla prima coordinata, indicata  $i_{m0}$  alla  $m$ -esima iterazione, a mandare l'elemento  $a_m \neq 0$  in qualcosa di non nullo.

**Proposizione 2.40** Se  $A \subseteq S^n$  con  $A \simeq S^{n-1}$ , allora  $A$  è il bordo di ciascuna delle due componenti connesse per archi di  $S^n \setminus A$ .

*Dimostrazione.*  $S^n \setminus A$  è localmente connesso per archi, dunque ogni sua componente connessa è un aperto di  $S^n \setminus A$  e dunque anche di  $S^n$  ( $S^n \setminus A$  è un aperto di  $S^n$ ). In particolare, il bordo delle componenti connesse di  $S^n \setminus A$  è tutto contenuto in  $A$ . Mostriamo che tutti i punti di  $A$  sono elementi di bordo delle componenti connesse, questo conclude la dimostrazione.

Siano  $C_0, C_1$  le componenti connesse di  $S^n \setminus A$  (sono due per il Teorema 2.39 (di Jordan-Brouwer)). Mostriamo che per ogni  $a \in A$  e per ogni  $N$  intorno di  $a$  si ha  $N \cap C_i \neq \emptyset$ . Poiché  $N \cap A$  è intorno di  $a$  in  $A \simeq S^{n-1}$  possiamo decomporre  $A = A_1 \cup A_2$  con

$$A_1, A_2 \simeq I^{k-1}, \quad A_1 \cap A_2 \simeq S^{n-2}, \quad A_2 \subseteq N \cap A$$

Per il Lemma 2.37 ( $A_1 \simeq I^{k-1}$ )  $S^n \setminus A_1$  è connesso quindi connesso per archi. Fissiamo  $p_0 \in C_0, p_1 \in C_1$  e  $f : I \rightarrow S^n \setminus A_1$  arco con  $f(0) = p_0, f(1) = p_1$ . Poiché  $A$  sconnette,  $f(I) \cap A \neq \emptyset$ , e  $f(I) \cap A_1 = \emptyset$ , dunque necessariamente  $f(I) \cap A_2 \neq \emptyset$ . Quindi  $f^{-1}(A_2) \subseteq I$  è non vuoto ed è compatto, quindi ha minimo  $t_0$  e massimo  $t_1$ . In particolare  $f(t) \in C_0$  per  $t < t_0, f(t) \in C_1$  per  $t > t_1$ .

D'altra parte  $A_2 \subseteq N$  per costruzione, dunque l'aperto  $f^{-1}(N)$  contiene  $t_0$  e  $t_1$ . Ma allora esiste  $\varepsilon > 0$  tale che  $f(t) \in N \cap C_0$  per  $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0), f(t) \in N \cap C_1$  per  $t \in (t_1, t_1 + \varepsilon)$ , cioè  $N \cap C_i \neq \emptyset$ .  $\square$

**Teorema 2.41** (di Invarianza del Dominio) Siano  $U, V \subseteq S^n$  omeomorfi. Allora  $U$  aperto  $\iff V$  aperto.

*Dimostrazione.* Supponiamo che  $U$  sia aperto, nell'altro caso è uguale. Sia  $h : U \rightarrow V$  omeomorfismo,  $x \in U$  e  $N \subseteq U$  intorno di  $x$ , con  $N \simeq D^n$  e  $\partial N \simeq S^{n-1}, y = h(x)$ .  $N' = h(N)$  è intorno chiuso di  $y$  in  $V$  con bordo  $\partial N' = h(\partial N)$ . Per il Lemma 2.37  $S^n \setminus N'$  è connesso, e per il Teorema 2.39 (di Jordan-Brouwer)  $S^n \setminus \partial N'$  ha due componenti connesse, che sono  $N' \setminus \partial N'$  e  $S^n \setminus N'$ <sup>8</sup>. In particolare  $N' \setminus \partial N'$  è intorno aperto di  $y$  in  $V$ , cioè  $y$  è interno a  $V$ , quindi  $V$  è aperto.  $\square$

**Corollario 2.42**  $A, B \subseteq S^n, h : A \rightarrow B$  omeomorfismo  $\implies h(\overset{\circ}{A}) = \overset{\circ}{B}$  e  $h(\partial A) = (\partial B)$ .

Non lo dimostriamo, ma vale anche il seguente:

**Teorema 2.43** (di Schoenflies)  $J \subseteq S^2, J \simeq S^1$ . Allora esiste un omeomorfismo di  $S^2$  che manda  $J$  nell'equatore.

**Fatto 2.44** Il Teorema 2.43 non vale in dimensione più alta (vedi Alexander horned sphere).

---

<sup>8</sup>Le due componenti connesse sono proprio loro perché sono due insiemi disgiunti, connessi e ricoprono  $S^n$ .

### 3 Omologia di Grafi

**Definizione 27** Un *grafo regolare finito* (in breve *grafo*) è una coppia  $(X, X^0)$  con  $X$  Hausdorff,  $X^0 \subseteq X$  finito, detto *insieme dei vertici*, tale che

1.  $X \setminus X^0$  è unione finita di aperti disgiunti  $e_1, \dots, e_k$ , detti *lati*, che sono omeomorfi ad intervalli aperti
2.  $\bar{e}_i \setminus e_i$ , in breve  $\partial e_i$ , è un insieme di due vertici distinti, e  $(\bar{e}_i, e_i) \simeq ([0, 1], (0, 1))$ .

**Osservazione.** Un grafo è un compatto, e si può sempre immergere in  $\mathbb{R}^3$ .

**Osservazione.** Dato un grafo  $(X, X^0)$ , possiamo “suddividerlo” aggiungendo vertici.

Per studiare l’omologia di  $X$  con  $(X, X^0)$  grafo, studiamo prima l’omologia della coppia  $(X, X^0)$ .

**Osservazione.**  $(\bar{e}, \partial e) \simeq (D^1, S^0)$ , dunque dalla Proposizione 2.16:  $H_i(\bar{e}, \partial e) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } i = 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$ .

**Teorema 3.1** Sia  $(X, X^0)$  un grafo di lati  $e_1, \dots, e_k$ . Allora l’inclusione  $(\bar{e}_i, \partial e_i) \hookrightarrow (X, X^0)$  induce un omomorfismo iniettivo in omologia. Inoltre  $H_p(X, X^0) = \bigoplus_{i=1}^k H_p(\bar{e}_i, \partial e_i)$ .

*Dimostrazione.* Identifico  $\bar{e}_i$  con  $[0, 1]$ ,  $a_i \in \bar{e}_i$  con  $\frac{1}{2} \in [0, 1]$  e  $d_i \subseteq \bar{e}_i$  con  $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}] \subseteq [0, 1]$ . Siano inoltre  $D = \bigcup_i d_i$  e  $A = \{a_1, \dots, a_k\}$ . Abbiamo il seguente diagramma dato dalle inclusioni:

$$\begin{array}{ccccc} (D, D \setminus A) & \longrightarrow & (X, X \setminus A) & \longleftarrow & (X, X^0) \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ (d_i, d_i \setminus \{a_i\}) & \longrightarrow & (\bar{e}_i, \bar{e}_i \setminus \{a_i\}) & \longleftarrow & (\bar{e}_i, \partial \bar{e}_i) \end{array}$$

che induce il seguente diagramma commutativo in omologia:

$$\begin{array}{ccccc} H_p(D, D \setminus A) & \xrightarrow{1} & H_p(X, X \setminus A) & \xleftarrow{2} & H_p(X, X^0) \\ \uparrow 5 & & \uparrow & & \uparrow \\ H_p(d_i, d_i \setminus \{a_i\}) & \xrightarrow{3} & H_p(\bar{e}_i, \bar{e}_i \setminus \{a_i\}) & \xleftarrow{4} & H_p(\bar{e}_i, \partial \bar{e}_i) \end{array}$$

Le frecce orizzontali sono tutte isomorfismi, infatti: 2,4 lo sono perché  $X^0$  e  $\partial \bar{e}_i$  sono retratti di deformazione rispettivamente di  $X \setminus A$  e  $\bar{e}_i \setminus \{a_i\}$ ; 1,3 lo sono per il Teorema 2.33 (di Escissione).

Infine,  $D$  è sconnesso,  $(D, D \setminus A) = \bigsqcup_{i=1}^k (d_i, d_i \setminus \{a_i\})$ , per cui  $H_p(D, D \setminus A) = \bigoplus_{i=1}^k H_p(d_i, d_i \setminus \{a_i\})$  e la mappa 5 dà le inclusioni (omomorfismi iniettivi) degli addendi nella somma diretta. Segue la tesi per commutatività.  $\square$

Mettendo insieme i risultati dell’Osservazione precedente e del Teorema 3.1 abbiamo

$$H_i(X, X^0) = \begin{cases} \mathbb{Z}^k & \text{se } i = 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove, secondo la notazione introdotta all’inizio,  $k$  è il numero di lati del grafo.

Siamo interessati allo studio di  $H_1(X)$ . Abbiamo la successione esatta

$$0 = H_1(X^0) \longrightarrow H_1(X) \xrightarrow{j_*} H_1(X, X^0) \xrightarrow{\partial_*} H_0(X^0) \xrightarrow{i_*} H_0(X) \longrightarrow 0$$

con  $H_0(X)$ ,  $H_0(X^0)$  e  $H_1(X, X^0)$  gruppi liberi, sfruttiamolo per ottenere informazioni su  $H_1(X)$ .

**Fatto 3.2** Sottogruppi di gruppi abeliani liberi sono ancora gruppi abeliani liberi. Inoltre, data una successione esatta corta di gruppi abeliani liberi, esiste una sezione  $s$

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \xleftarrow{s} C \longrightarrow 0$$

e il gruppo centrale si fattorizza:  $B \simeq A \oplus C$ .

**Fatto 3.3** Dal Fatto 3.2 segue che data una successione esatta di gruppi abeliani liberi, la somma a segno alterno dei ranghi è nulla (e la cosa si generalizza per una successione finita lunga a piacere).

**Definizione 28** Dato un grafo  $(X, X^0)$ , la sua *caratteristica di Eulero* è la differenza tra il numero dei vertici e il numero di lati:  $\chi(X, X^0) = \#vertici - \#lati$ .

**Teorema 3.4** Dato un grafo  $(X, X^0)$ , si ha che  $H_q(X) = 0$  per ogni  $q > 1$ , e  $H_1(X)$  è un gruppo abeliano libero tale che  $\text{rk}(H_0(X)) - \text{rk}(H_1(X)) = \chi(X, X^0)$ .

*Dimostrazione.* Consideriamo la successione esatta

$$0 = H_1(X^0) \longrightarrow H_1(X) \xrightarrow{j_*} H_1(X, X^0) \xrightarrow{\partial_*} H_0(X^0) \xrightarrow{i_*} H_0(X) \longrightarrow 0$$

Per esattezza  $H_1(X)$  si inietta in  $H_1(X, X^0)$  che è abeliano libero, quindi  $H_1(X)$  è abeliano libero. Allora, dal Fatto 3.3, sappiamo che la somma a segni alterni dei ranghi dei gruppi della successione è nulla, cioè

$$\text{rk}(H_1(X)) - \text{rk}(H_1(X, X^0)) + \text{rk}(H_0(X^0)) - \text{rk}(H_0(X)) = 0$$

Si è visto che:  $\begin{cases} \text{rk}(H_1(X, X^0)) = \#lati \\ \text{rk}(H_0(X^0)) = \#vertici \end{cases}$ , dunque la relazione precedente si riscrive

$$\#vertici - \#lati = \text{rk}(H_0(X)) - \text{rk}(H_1(X))$$

che è la tesi. □

Torniamo alla successione della coppia  $(X, X^0)$ :

$$0 \longrightarrow H_1(X) \xrightarrow{j_*} H_1(X, X^0) \xrightarrow{\partial_*} H_0(X^0) \xrightarrow{i_*} H_0(X) \longrightarrow 0$$

si è visto che  $H_1(X, X^0) = \mathbb{Z}^{\#lati}$ ,  $H_0(X^0) = \mathbb{Z}^{\#vertici}$ ,  $H_0(X) = \mathbb{Z}^{\#cc}$  di  $X$ .

A volte è utile studiare esplicitamente la mappa  $\partial_* : H_1(X, X^0) \rightarrow H_0(X^0)$ , infatti per esattezza, essendo  $j_*$  iniettiva,  $H_1(X) \simeq \text{Im}(j_*) = \ker \partial_*$ . Per farlo, cerchiamo delle basi dei gruppi (abeliani liberi) coinvolti. Siano  $e_1, \dots, e_k$  i lati,  $v_1, \dots, v_m$  i vertici.

Con abuso di notazione, indichiamo con  $v_i$  anche il generatore di  $H_0(X^0)$  che sia immagine del generatore di  $H_0(\{v_i\})$  tale che  $\varepsilon(v_i) = 1$ . Dunque  $\{v_1, \dots, v_m\}$  è una base di  $H_0(X^0)$ .

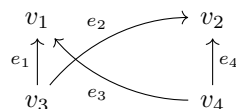
Per prendere una base di  $H_0(X, X^0)$  non si può fare una scelta altrettanto naturale. Comunque, per quanto detto nel Teorema 3.1, è sufficiente prendere un generatore per ogni  $H_1(\bar{e}_i, \partial e_i)$ . Questa scelta è tanto naturale quanto scegliere un generatore di  $\tilde{H}_0(\partial e_i)$ , infatti abbiamo

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \tilde{H}_0(\partial e_i) & \longrightarrow & H_0(\partial e_i) & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \\ & & \swarrow \partial_1(\simeq) & & \uparrow \partial_* & & \\ & & & & H_1(\bar{e}_i, \partial e_i) & & \end{array}$$

**Osservazione.** Abbiamo  $\tilde{H}_0(\partial e_i) = \mathbb{Z} = H_1(\bar{e}_i, \partial e_i)$ ,  $H_0(\partial e_i) = \mathbb{Z}^2$ .

Possiamo allora fare la scelta ordinando i lati: dato un ordine totale  $>$  sull'insieme dei vertici, per un lato  $e_i$  con  $\partial e_i = \{v_\alpha, v_\beta\}$  con  $v_\beta > v_\alpha$ , prendiamo come generatore di  $H_1(\bar{e}_i, \partial e_i)$  l'elemento (abuso di notazione)  $e_i$  tale che  $\partial_* e_i = v_\beta - v_\alpha$  (cioè si è presa l'orientazione da  $v_\beta$  a  $v_\alpha$ ). Fissata una scelta, possiamo descrivere  $\partial_*$  tramite una matrice. Resta da trovare una base del nucleo per determinare  $H_1(X)$ .

**Esempio 3** Consideriamo il seguente grafo:



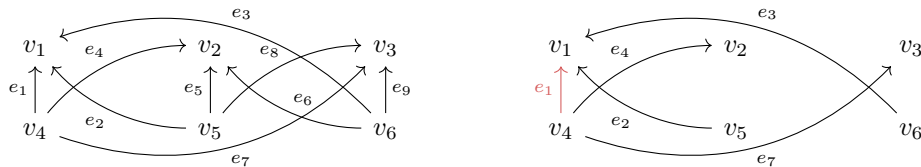
dunque:  $\partial_* e_1 = v_3 - v_1$ ,  $\partial_* e_2 = v_3 - v_2$ ,  $\partial_* e_3 = v_4 - v_1$  e  $\partial_* e_4 = v_4 - v_2$ . Otteniamo la rappresentazione

$$\partial_* \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{in questa rappresentazione gli } e_i \text{ sono i vettori della base canonica}).$$

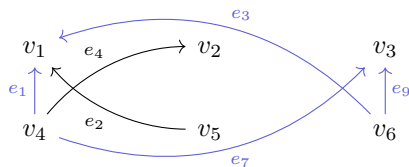
Abbiamo inoltre che  $z = e_1 - e_2 - e_3 + e_4$  genera il nucleo. Una base di  $H_1(X, X^0)$  è data da  $\{z, e_2, e_3, e_4\}$ .

In generale, per studiare  $\ker \partial_*$  si hanno molte strade. Per ogni componente connessa del grafo possiamo scegliere un albero massimale (dunque in generale una foresta massimale<sup>9</sup>). Per fare ciò, possiamo ad esempio usare l'ordine lessicografico per ordinare i lati (identifico ogni lato con la coppia dei suoi vertici), e, a partire da un lato, aggiungo lati secondo l'ordinamento, scartando quelli che formano cicli<sup>10</sup>. Allora per avere una base di  $\ker \partial_*$ , per ogni lato  $e$  che non è nella foresta massimale ottenuta consideriamo l'unico cammino chiuso senza ripetizioni che crea un ciclo e passa dall'albero e dal lato in questione  $e$ .

**Esempio 4** Consideriamo il seguente grafo, e un suo albero massimale (ottenuto partendo dal lato  $e_1$ ):



Prendiamo dunque un lato che non è nell'albero massimale, tipo  $e_9$ . Per definizione di albero massimale, sappiamo che aggiungendo  $e_9$  si crea un ciclo, prendiamo quello senza ripetizioni:



e otteniamo che l'elemento  $e_9 - e_7 + e_1 - e_3$  è in  $\ker \partial_*$  (dove i segni sono determinati dal verso con cui vogliamo percorrere i lati<sup>11</sup>, in modo da ottenere una combinazione dei vertici che è nulla). Ripetendo il procedimento per ogni lato che non è nella foresta massimale (che in questo caso corrisponde con l'albero massimale dato che il grafo è connesso) otteniamo una base di  $\ker \partial_*$ .

Ci poniamo ora il seguente problema: data una mappa  $f : X \rightarrow Y$  continua tra grafi  $(X, X^0), (Y, Y^0)$ , come studiamo l'omomorfismo indotto in omologia?

Facciamo delle ipotesi di comodo, che in generale non sono vere per mappe generiche tra grafi, ma che a meno di omotopia e di aggiungere vertici invece lo sono. Supponiamo dunque:

- i.  $f(X^0) \subseteq Y^0$
- ii. i lati vengono mandati da  $f$  in lati oppure in vertici, cioè  $f(\bar{e}_i) = \bar{e}_j'$  oppure  $f(\bar{e}_i) \in Y^0$ .

**Fatto 3.5** Sotto le ipotesi precedenti, una  $f : X \rightarrow Y$  tra grafi induce  $f_* : H_1(X, X^0) \rightarrow H_1(Y, Y^0)$  tale che  $f_*(e_i) = \begin{cases} e_j' & \text{se } f \text{ mappa omeomorficamente } e_i \mapsto e_j' \text{ e preserva l'orientamento} \\ -e_j' & \text{se } f \text{ mappa omeomorficamente } e_i \mapsto e_j' \text{ e non preserva l'orientamento} \\ 0 & \text{se } f \text{ manda } e_i \text{ in un vertice} \end{cases}$

**Esempio 5** Consideriamo il grafo  $S^1 \subseteq \mathbb{C}$  e la mappa  $f : S^1 \rightarrow S^1$  data da  $z \mapsto z^3$ . Allora la mappa  $f_* : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  è la moltiplicazione per 3, come si vede considerando i vertici corrispondenti alle radici seste dell'unità in partenza e i vertici corrispondenti a  $\pm 1$  in arrivo.

<sup>9</sup>Un albero è un sottoinsieme del grafo nel quale non si può immergere  $S^1$ , una foresta è un insieme di alberi tali per cui aggiungendo un nuovo lato introduco un ciclo.

<sup>10</sup>Possono esserci lati che hanno stessi vertici, in tal caso basta fare scelta arbitraria per ordinarli.

<sup>11</sup>Se il verso è discorde dall'orientamento del lato in questione prendiamo il segno  $-$ .

## 4 Omologia di Superfici Compatte

Ci interessiamo adesso al calcolo dell'omologia di alcune superfici compatte, motivati dal seguente:

**Fatto 4.1** Ogni superficie chiusa, compatta e orientabile è somma connessa di un certo numero di tori. Ogni superficie chiusa, compatta e non orientabile è somma connessa di un certo numero di tori e di  $\mathbb{RP}^2$ .

Grazie al Fatto 4.1 avremo così (in potenza) un modo di determinare l'omologia di tutte le superfici compatte.

### Omologia del Toro

Consideriamo il toro  $T = S^1 \times S^1$ , e mostriamo che  $H_n(T) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } n = 0, 2 \\ \mathbb{Z}^2 & \text{se } n = 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$ .

Usiamo il Teorema di Mayer-Vietoris. Sia  $T = S^1 \times S^1$  e siano  $P, Q$  punti distinti del primo  $S^1$ . Considero  $A = (S^1 \setminus \{P\}) \times S^1$  e  $B = (S^1 \setminus \{Q\}) \times S^1$ . Vale che  $\mathring{A} \cup \mathring{B} = T$ ,  $A \sim S^1 \sim B$ ,  $A \cap B \sim S^1 \sqcup S^1$ . Ancora con Mayer-Vietoris si mostra facilmente che per ogni  $n \in \mathbb{N}$  si ha

$$H_n(S^1 \sqcup S^1) = H_n(S^1) \oplus H_n(S^1) = \begin{cases} \mathbb{Z}^2 & \text{se } n = 0, 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (4)$$

Per  $n \geq 3$  si ha la successione

$$\dots \longrightarrow H_n(A \cap B) \longrightarrow H_n(A) \oplus H_n(B) \longrightarrow H_n(T) \longrightarrow H_{n-1}(A \cap B) \longrightarrow \dots$$

dove il primo e l'ultimo termine sono nulli (per quanto detto nell'equazione 4), dunque per esattezza abbiamo  $H_n(T) \simeq H_n(A) \oplus H_n(B) = 0$  per ogni  $n \geq 3$ .

$T$  è connesso per archi, dunque

$$H_0(T) = \mathbb{Z} \quad \text{e} \quad H_1(T) \simeq \pi_1(T)^{Ab} = \mathbb{Z}^2$$

Studio dunque il resto della successione:

$$0 \longrightarrow \tilde{H}_2(T) \xrightarrow{\Delta_2} \tilde{H}_1(A \cap B) \xrightarrow{\varphi_1} \tilde{H}_1(A) \oplus \tilde{H}_1(B) \xrightarrow{\psi_1} \tilde{H}_1(T) \xrightarrow{\Delta_1} \tilde{H}_0(A \cap B) \xrightarrow{\varphi_1} 0$$

che riscrivendo i termini già noti è

$$0 \longrightarrow \tilde{H}_2(T) \xrightarrow{\Delta_2} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\varphi_1} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\psi_1} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\Delta_1} \mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi_1} 0$$

Ora, usando l'esattezza della successione e il primo Teorema di omomorfismo:

$$\mathbb{Z} = \text{Im}(\Delta_1) \simeq \mathbb{Z}^2 / \ker(\Delta_1)$$

dunque

$$\mathbb{Z} \simeq \ker(\Delta_1) = \text{Im}(\psi_1) \simeq \mathbb{Z}^2 / \ker(\psi_1) = \mathbb{Z}^2 / \text{Im}(\varphi_1)$$

da cui

$$\mathbb{Z} \simeq \text{Im}(\varphi_1) \simeq \mathbb{Z}^2 / \ker(\varphi_1) = \mathbb{Z}^2 / \text{Im}(\Delta_2)$$

e quindi per l'iniettività di  $\Delta_2$

$$\mathbb{Z} \simeq \text{Im}(\Delta_2) \simeq H_2(T)$$

### Omologia del Piano Proiettivo Reale

Sia ora  $X = \mathbb{RP}^2 = D^2 / \sim$  con  $\sim$  che identifica i punti antipodali di  $\partial D^2 = S^1$ . Abbiamo la mappa di identificazione

$$f : (D^2, \partial D^2) \rightarrow (X, X^1) \quad \text{con } X^1 = \partial D^2 / \sim$$

e la sua restrizione al bordo,  $f_1 : \partial D^2 \rightarrow X^1$ , è 2-1 come mappa  $S^1 \rightarrow S^1$ . La mappa indotta in omologia  $f_* : H_i(D^2, \partial D^2) \rightarrow H_i(X, X^1)$  è isomorfismo, infatti, detti  $D_\varepsilon^2$  il disco di raggio  $0 < \varepsilon < 1$  e  $e$  il centro di  $D^2$ , abbiamo il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccccc} H_i(D^2, \partial D^2) & \xrightarrow{(1)} & H_i(D^2, D^2 \setminus \{e\}) & \xleftarrow{(2)} & H_i(D_\varepsilon^2, D_\varepsilon^2 \setminus \{e\}) \\ f_* \downarrow & & & & \downarrow (5) \\ H_i(X, X^1) & \xrightarrow{(3)} & H_i(X, X \setminus \{e\}) & \xleftarrow{(4)} & H_i(f(D_\varepsilon^2), f(D_\varepsilon^2) \setminus \{e\}) \end{array}$$

Le mappe (1) e (3) sono isomorfismi perché  $D^2 \setminus \{e\}$  si retrae per deformazione su  $\partial D^2$  e  $X \setminus \{e\}$  si retrae per deformazione su  $X^1$ . Inoltre le mappe (2) e (4) sono isomorfismi per escissione, e (5) è isomorfismo perché è indotta dalla restrizione di  $f$  che è un omeomorfismo. Dunque  $f_*$  isomorfismo, come voluto. Ma allora abbiamo il seguente diagramma, dato dalle successioni delle coppie:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 = H_2(X^1) & \longrightarrow & H_2(X) & \longrightarrow & H_2(X, X^1) & \xrightarrow{(4)} & \overbrace{H_1(X^1)}^{\mathbb{Z}} & \longrightarrow & H_1(X) & \longrightarrow & \overbrace{H_1(X, X^1)}^{H_1(D^2, \partial D^2)=0} = 0 \\
 & & & & \uparrow (2) f_* & & \uparrow f_*^1 (3) & & & & \\
 0 = H_2(D^2) & \longrightarrow & \underbrace{H_2(D^2, \partial D^2)}_{\mathbb{Z}} & \xrightarrow{(1)} & \underbrace{H_1(\partial D^2)}_{\mathbb{Z}} & \longrightarrow & H_1(D^2) = 0 & & & & 
 \end{array}$$

Dove (1) è isomorfismo per esattezza, (2) è isomorfismo per quanto provato sopra, (3) è la moltiplicazione per 2 (perché come detto  $f^1$  è mappa 2-1). Ma allora  $H_2(X, X^1) = \mathbb{Z}$  e la mappa (4) è per commutatività la moltiplicazione per  $\pm 2$ .

Segue per esattezza che  $H_2(X) = \ker(4) = 0$ ,  $H_1(X) = \text{coker}(4) = \mathbb{Z}_2$ . Inoltre  $H_0(X) = \mathbb{Z}$ . Si verifica immediatamente tramite la successione della coppia che  $H_i(X) = 0$  per  $i > 2$ .



## 5 Complessi CW

Notazione:  $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$  è il disco unitario  $n$ -dimensionale chiuso,  $U^n = \overset{\circ}{D}^n$  è il disco unitario  $n$ -dimensionale aperto,  $S^{n-1} = \partial D^n$  è la sfera unitaria  $n$ -dimensionale.

Consideriamo spazi topologici ottenuti incollando dischi  $D^n$  tra loro:

Sia  $X^*$  spazio di Hausdorff,  $X \subseteq X^*$  tale che  $X^* \setminus X = \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} e_\lambda^n$  con gli  $e_\lambda^n$  aperti e omeomorfi a  $U^n$  per ogni  $\lambda \in \Lambda$ .

**Definizione 29** Gli  $e_\lambda^n$  si chiamano  $n$ -celle.

Inoltre, siano gli  $e_\lambda^n$  "attaccati" a  $X$  con una *mapa caratteristica*, cioè esiste una famiglia di funzioni  $f_\lambda : D^n \rightarrow \overline{e_\lambda^n}$  tali che  $f_\lambda|_{U^n} : U^n \rightarrow e_\lambda^n$  omeomorfismo e tali che  $f_\lambda(\partial D^n) \subseteq X$ .

Se le celle sono in numero finito, è chiaro quale sia la topologia di  $X^*$ . Altrimenti, dotiamo  $X^*$  della topologia debole associata alla famiglia  $\{f_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ <sup>12</sup>.

**Definizione 30** Un *complesso CW* è uno spazio di Hausdorff  $X$  ottenuto come unione di  $X^0 \subseteq X^1 \subseteq \dots$  tali che:

- i.  $X^0$  è discreto
- ii. Per ogni  $n \in \mathbb{N}$ ,  $X^n$  si ottiene da  $X^{n-1}$  incollando  $n$ -celle;  $X^n$  è detto  $n$ -scheletro
- iii.  $X = \bigcup_n X^n$
- iv.  $X$  e  $X^n$  sono dotati della topologia debole:  $A \subseteq X$  (oppure  $A \subseteq X^n$ ) è chiuso se e solo se per ogni  $\lambda$  e per ogni  $n$   $f_\lambda^{-1}(A \cap \overline{e_\lambda^n})$  è chiuso.

Inoltre, per ogni  $n \in \mathbb{N}$ ,  $X^n$  si chiama  $n$ -scheletro.

**Osservazione.** I complessi sono detti CW perché stiamo dotando lo spazio della topologia debole (*weak*).

**Teorema 5.1** Se  $X^*$  è ottenuto da  $X$  incollando  $n$ -celle  $\{e_\lambda^n\}_{\lambda \in \Lambda}$ , allora  $H_i(X^*, X) = 0$  per  $i \neq n$ .

Per ogni  $\lambda \in \Lambda$  si ha che  $f_\lambda$  induce un omomorfismo iniettivo  $H_n(D^n, S^{n-1}) \rightarrow H_n(X^*, X)$ .

Inoltre  $H_n(X^*, X) = \bigoplus_{\lambda} \text{Im} f_{\lambda*}$ .

*Dimostrazione.* La dimostrazione è del tutto analoga a quella del Teorema 3.1. □

**Corollario 5.2** Se  $X^*$  è ottenuto da  $X$  incollando  $n$ -celle, l'inclusione  $X \hookrightarrow X^*$  induce in omologia  $H_i(X) \rightarrow H_i(X^*)$  che è un isomorfismo eccetto al più per  $i = n, n-1$ . Si ha inoltre la successione esatta

$$0 \longrightarrow H_n(X) \longrightarrow H_n(X^*) \longrightarrow H_n(X^*, X) \longrightarrow H_{n-1}(X) \longrightarrow H_{n-1}(X^*) \longrightarrow 0$$

*Dimostrazione.* La tesi si ottiene subito considerando la successione esatta della coppia  $(X^*, X)$  e usando il Teorema 5.1. □

**Osservazione.** Date coppie  $(X^*, X)$  e  $(Y^*, Y)$ , con  $X^*$  e  $Y^*$  ottenuti attaccando  $n$ -celle rispettivamente a  $X$  e  $Y$ , e  $f : (X^*, X) \rightarrow (Y^*, Y)$ , allora abbiamo il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & H_n(X) & \longrightarrow & H_n(X^*) & \longrightarrow & H_n(X^*, X) & \longrightarrow & H_{n-1}(X) & \longrightarrow & H_{n-1}(X^*) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & H_n(Y) & \longrightarrow & H_n(Y^*) & \longrightarrow & H_n(Y^*, Y) & \longrightarrow & H_{n-1}(Y) & \longrightarrow & H_{n-1}(Y^*) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Esempi di Complessi CW:

- i.  $S^n$ , ad esempio come una 0-cella e una  $n$ -cella
- ii. Grafi, si usano 0-celle e 1-celle
- iii. Superfici compatte
- iv. Prodotto di complessi CW
- v. Spazi Proiettivi
- vi.  $\mathbb{P}^\infty \mathbb{K} = \bigcup_n \mathbb{P}^n \mathbb{K}$  per  $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ , o anche  $S^\infty = \bigcup_n S^n$

<sup>12</sup>Cioè  $C \subseteq X^*$  è chiuso se e solo se ha preimmagine chiusa rispetto a ogni  $f_\lambda$ .

**Osservazione.** In generale un complesso CW non ha un modo unico di essere espresso come incollamento di celle. Basta pensare ai grafi, in cui si possono aggiungere vertici (0-celle) a piacere.

Proprietà dei complessi CW:

- (1) Un complesso CW è paracompatto<sup>13</sup>, in particolare dunque anche normale.
- (2) Un complesso CW è localmente contraibile.
- (3) Un compatto in un complesso CW interseca un numero finito di celle.
- (4) Una funzione definita su un complesso CW è continua se e solo se sono continue le restrizioni alle celle chiuse.

Dalla proprietà (3) si ha il seguente risultato, importante:

**Proposizione 5.3** La chiusura di una cella di un complesso CW interseca un numero finito di celle.

*Dimostrazione.* Basta osservare che la chiusura di celle è un compatto (in quanto omeomorfa a  $D^n$ ) e usare la proprietà (3).  $\square$

**Definizione 31** Per  $X$  complesso CW, un sottocomplesso è  $A \subseteq X$  tale che se  $e_\lambda^n \cap A \neq \emptyset$  allora  $\overline{e_\lambda^n} \subseteq A$ .

**Osservazione.** Ad esempio, gli  $n$ -scheletri sono sottocomplessi.

**Definizione 32** Una mappa  $f : X \rightarrow Y$  tra complessi CW si dice cellulare se  $f(X^n) \subseteq Y^n$  per ogni  $n$ .

Vale il seguente Teorema, che dimostreremo più avanti:

**Teorema 5.4** Ogni mappa tra complessi CW è omotopa ad una mappa cellulare.

## 5.1 Omologia di Complessi CW

Si è detto che un complesso CW è uno spazio topologico. Per dire che uno spazio topologico è un complesso CW, bisogna esibire un famiglia  $K = \{K^n\}$  di  $n$ -scheletri. Tuttavia, non c'è motivo che sia unica la famiglia di  $n$ -scheletri che dà allo spazio topologico la struttura di complesso CW. Vogliamo dunque studiare se (e nel caso quali) relazioni ci sono tra l'omologia di uno spazio topologico dotato e non di struttura di complesso CW.

Notazione: per semplicità a volte potrebbe tornare utile considerare  $K = \{K^n\}$  indicizzato su  $\mathbb{Z}$  invece che su  $\mathbb{N}$ , in tal caso poniamo  $K^n = 0$  per  $n < 0$ .

**Osservazione.** Poiché  $K^n$  è ottenuto da  $K^{n-1}$  incollando  $n$ -celle  $\{e_\lambda^n\}_{\lambda \in \Lambda_n}$ , si ha (Teorema 5.1)

$$H_i(K^n, K^{n-1}) = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq n \\ \mathbb{Z}^{\oplus |\Lambda_n|} & \text{se } i = n \end{cases} \quad (5)$$

**Lemma 5.5**  $H_i(K^n) = 0$  per ogni  $i > n$ .

*Dimostrazione.* Facciamo un'induzione. *Passo base:* per  $n = 0$  è ovvio ( $K^0$  è discreto).

*Passo Induttivo:* sia  $n > 0$ ,  $i > n$ . Dalla successione della coppia abbiamo

$$H_i(K^{n-1}) \longrightarrow H_i(K^n) \longrightarrow H_i(K^n, K^{n-1})$$

con il primo termine che è nullo per ipotesi induttiva, e l'ultimo termine che è nullo per quanto osservato sopra. Per esattezza di ottiene dunque  $H_i(K^n) = 0$ .  $\square$

Dato  $K$  complesso CW, vogliamo costruire un complesso algebrico a lui associato.

**Osservazione.** In questo momento, stiamo identificando  $X$  con  $K$ , cioè allo spazio  $X$  stiamo dando una fissata famiglia di  $n$ -scheletri.

**Definizione 33** Il *complesso delle catene cellulari* è  $(C(K), d) = \{C_n(K), d_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , in cui

$$C_n(K) = H_n(K^n, K^{n-1})$$

e  $d_n : C_n(K) \rightarrow C_{n-1}(K)$  è data dalla composizione

$$H_n(K^n, K^{n-1}) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(K^{n-1}) \xrightarrow{j_{n-1}} H_{n-1}(K^{n-1}, K^{n-2})$$

$\xrightarrow{d_n}$

dove  $\partial_*$  è l'omomorfismo di connessione della successione della coppia  $(K^n, K^{n-1})$ , e  $j_{n-1}$  è l'omomorfismo indotto dalla proiezione, tratto dalla successione della coppia  $(K^{n-1}, K^{n-2})$ .

<sup>13</sup>Cioè ogni ricoprimento aperto ammette un raffinamento localmente finito.

**Osservazione.**  $d^2 = 0$ , infatti componendo  $d_n$  e  $d_{n-1}$  si ottiene che  $d^2$  è composizione di 4 mappe, le cui due centrali sono due omomorfismi consecutivi della successione esatta della coppia  $(K^{n-1}, K^{n-2})$ , dunque hanno composizione nulla, e anche globalmente la composizione è nulla.

**Osservazione.** Scrivendo la successione esatta lunga della tripla  $(K^n, K^{n-1}, K^{n-2})$  si può verificare che la mappa  $d_n$  coincide con l'omomorfismo di connessione  $H_n(K^n, K^{n-1}) \rightarrow H_{n-1}(K^{n-1}, K^{n-2})$ .

**Definizione 34** i. Gli elementi di  $Z_n(K) := \ker(d_n)$  sono detti *n-cicli*

ii. Gli elementi di  $B_n(K) := \text{Im}(d_{n+1})$  sono detti *n-bordi*

iii.  $H_n(K) = Z_n(K)/B_n(K)$  è detta *omologia cellulare*

In seguito  $X, K$  indicano lo stesso spazio topologico, con  $K$  dotato della struttura di complesso CW.

**Teorema 5.6** Consideriamo le mappe

$$k_n : H_n(K^n) \rightarrow H_n(X) \quad j_n : H_n(K^n) \rightarrow H_n(K^n, K^{n-1}) = C_n(K)$$

dove  $k_n$  è la mappa indotta dall'inclusione  $K^n \hookrightarrow X$  e  $j_n$  è tratta dalla successione della coppia. Si ha:

a.  $k_n$  è suriettiva   b.  $j_n$  è iniettiva   c.  $\text{Im}(j_n) = Z_n(K)$    d.  $\ker(k_n) = j_n^{-1}(B_n(K))$ .

Segue inoltre che la composizione

$$H_n(X) \xleftarrow{k_n} H_n(K^n) \xrightarrow{j_n} H_n(K^n, K^{n-1})$$

induce un isomorfismo  $\theta_n : H_n(X) \rightarrow H_n(K)$ .

*Dimostrazione.* Dalla successione della coppia  $(K^n, K^{n-1})$ , per  $i \neq n, n-1$  si ha

$$0 \xrightarrow{T.5.1} H_{i+1}(K^n, K^{n-1}) \longrightarrow H_i(K^{n-1}) \longrightarrow H_i(K^n) \longrightarrow H_i(K^n, K^{n-1}) \xrightarrow{T.5.1} 0$$

Dunque per  $i \neq n, n-1$  per esattezza abbiamo  $H_i(K^{n-1}) \simeq H_i(K^n)$ . Abbiamo dunque:

$$\begin{array}{ccccccc} H_i(K^{i+1}) & \xrightarrow{\simeq} & H_i(K^{i+2}) & \xrightarrow{\simeq} & H_i(K^{i+3}) & \xrightarrow{\simeq} & \dots \\ & \searrow k_{i+1} & \downarrow k_{i+2} & \swarrow k_{i+3} & & & \\ & & H_i(X) & & & & \end{array}$$

• se  $X$  ha dimensione finita, cioè esiste  $N \in \mathbb{N}$  tale che  $K^m = K^N$  per  $m \geq N$ , allora  $k_{N+n} = Id$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , da cui per commutatività  $k_{i+1}$  è un isomorfismo (tutti i  $k_{i+n}$  lo sono).

• se  $X$  non ha dimensione finita, dico che ancora  $k_{i+1}$  è isomorfismo, infatti: ogni classe di omologia e ogni bordo hanno supporto compatto, e ogni compatto interseca un numero finito di celle. Allora scelto  $\alpha \in H_i(X)$  esiste  $N \in \mathbb{N}$  tale che  $\alpha \in \text{Im}(k_N)$ , per cui, usando gli isomorfismi in orizzontale,  $\alpha \in \text{Im}(k_{i+1})$ . Preso un  $\beta \in \ker(k_{i+1})$ , esiste  $M \in \mathbb{N}$  tale che  $\beta$  è nullo in  $H_i(K^M)$ , e usando gli isomorfismi orizzontali si ottiene  $\beta = 0 \in H_i(K^{i+1})$ .

Si è dunque provato che  $k_{i+1} : H_i(K^{i+1}) \rightarrow H_i(X)$  è isomorfismo.

Consideriamo ora la seguente successione esatta, a cui abbiamo aggiunto qualche "pezzo":

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & H_n(K^n) & \xrightarrow{j_n} & H_n(K^n, K^{n-1}) & \xrightarrow{\partial_*} & H_{n-1}(K^{n-1}) & \xrightarrow{i_n} & H_{n-1}(K^n) & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \searrow d_n & & \downarrow j_{n-1} & \searrow k_{n-1} & \downarrow \simeq k_n & & \\ & & & & & & H_{n-1}(K^{n-1}, K^{n-2}) & & H_{n-1}(X) & & \end{array}$$

dove il primo termine della successione è  $H_n(K^{n-1})$ , nullo per il Lemma 5.5, e l'ultimo termine della successione è  $H_{n-1}(K^n, K^{n-1})$ , nullo per il Teorema 5.1.

a. Per esattezza  $i_n$  è suriettiva. Inoltre, per la commutatività dell'ultimo triangolo, ricaviamo che  $k_{n-1}$  è suriettiva e  $\ker(k_{n-1}) = \ker(i_n)$ .

b. Per esattezza  $j_n$  è iniettiva.

c. Poiché  $d_n = j_{n-1} \circ \partial_*$  e  $j_{n-1}$  è iniettiva,  $Z_n(K) \stackrel{\text{def}}{=} \ker(d_n) = \ker(\partial_*) = \text{Im}(j_n)$  per esattezza.

d.  $\ker(k_{n-1}) \stackrel{\text{a.}}{=} \ker(i_n) = \text{Im}(\partial_*) = j_{n-1}^{-1}(\text{Im}(d_n)) = j_{n-1}^{-1}(B_{n-1}(K))$ . □

**Corollario 5.7** L'omologia cellulare coincide con l'omologia singolare, indipendentemente dalla struttura di complesso CW di cui dotiamo lo spazio topologico in questione.

Conseguenze:

1. Se  $X$  è un complesso CW di dimensione  $n$ , allora  $H_i(X) = 0$  per ogni  $i > n$ .
2. Se  $X$  complesso CW ha un numero finito di  $n$ -celle, allora  $H_n(X)$  è finitamente generato.
3. Se  $X$  è un complesso CW senza  $n$ -celle, allora  $H_n(X) = 0$ .

**Definizione 35** Se  $X$  spazio topologico con struttura  $K = \{K_n\}$  di complesso CW finito, e  $\alpha_n$  è il numero di  $n$ -celle, allora la *caratteristica di Eulero* è  $\chi(K) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \alpha_n$ .

**Osservazione.**  $C_n(K) = H_n(K^n, K^{n-1}) = \mathbb{Z}^{\#n\text{-celle}}$ , cioè  $\text{rk}(C_n(K)) = \alpha_n$ .

Ci occupiamo ora di dimostrare che, almeno nel caso finito-dimensionale,  $\chi(K)$  non dipende da  $K$ , cioè la caratteristica di Eulero di uno spazio non dipende dalla struttura di complesso CW del quale lo dotiamo. Per farlo, necessitiamo di fare prima altre considerazioni:

**Definizione 36** Dato un gruppo abeliano  $G$ , un insieme  $X \subseteq G$  si dice *linearmente indipendente* se soddisfa le condizioni di lineare indipendenza a coefficienti interi.

**Definizione 37** Il *rango* di un gruppo abeliano  $G$  è il massimo delle cardinalità dei sottoinsiemi linearmente indipendenti. Lo indichiamo con  $\text{rk}(G)$ .

Proprietà:

- (1) Dati  $A, B$  gruppi abeliani, se  $A \subseteq B$  oppure se  $A$  è quoziente di  $B$  si ha  $\text{rk}(A) \leq \text{rk}(B)$ .
- (2) Data una successione esatta corta  $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$  di gruppi abeliani, la somma a segno alterno dei ranghi è nulla, o in altre parole  $\text{rk}(A) + \text{rk}(C) = \text{rk}(B)$ .

Per dimostrare che  $\chi(K)$  non dipende da  $K$  basta mostrare il seguente:

**Lemma 5.8** Se  $K$  è una struttura di complesso CW finito su  $X$ , allora

$$\chi(K) \stackrel{\text{def}}{=} \sum (-1)^n \text{rk}(C_n(K)) = \sum (-1)^n \text{rk}(H_n(X))$$

*Dimostrazione.* Per ipotesi  $K$  è struttura di CW complesso finito, dunque esiste  $n \in \mathbb{N}$  tale che il complesso cellulare è

$$C_n(K) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(K) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots \xrightarrow{\partial_1} C_0(K) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

Mostriamo la tesi per induzione su  $n$  (dimensione del complesso CW).

*Passo Base* ( $n = 1$ ): consideriamo le due successioni

$$0 \longrightarrow B_0 \hookrightarrow C_0 = Z_0 \longrightarrow H_0(C) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow H_1(C) \hookrightarrow C_1 \xrightarrow{\partial} B_0 \longrightarrow 0$$

La prima è esatta perché  $C_0 = Z_0$ , per cui  $H_0(C)$  è esattamente il quoziente di  $C_0$  e  $B_0$ ; anche la seconda è esatta, infatti:  $n = 1$ , quindi  $B_1 = 0$ , cioè  $H_1(C) = Z_1(C)$ , che si inietta in  $C_1$ , e tramite la mappa di bordo (che ha come immagine  $B_0$ ) va a 0, che è l'esattezza.

Per la Proprietà (2) riportata sopra abbiamo  $\text{rk}(B_0) + \text{rk}(H_0(C)) = \text{rk}(C_0)$ ,  $\text{rk}(H_1(C)) + \text{rk}(B_0) = \text{rk}(C_1)$  da cui facendo le differenze otteniamo la tesi:

$$\text{rk}(C_0) - \text{rk}(C_1) = \text{rk}(H_0(C)) - \text{rk}(H_1(C))$$

*Passo Induttivo:* considero il complesso  $C'$  ottenuto dal complesso  $C$  eliminando  $C_n(K)$ . Abbiamo le due successioni esatte (la verifica che siano esatte è analoga a quella già fatta nel caso  $n = 1$ )

$$0 \longrightarrow H_n(C) \hookrightarrow C_n \xrightarrow{\partial} B_{n-1} \longrightarrow 0 \quad (a)$$

$$0 \longrightarrow B_{n-1} \hookrightarrow Z_{n-1} \longrightarrow H_{n-1}(C) \longrightarrow 0 \quad (b)$$

Per costruzione di  $C'$  abbiamo

$$H_i(C') = H_i(C) \text{ per ogni } i \leq n-2, \quad H_{n-1}(C') = Z_{n-1}(C) \quad (c)$$

Allora, sfruttando ancora la Proprietà (2):

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^n (-1)^i \text{rk}(C_i) &= \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \text{rk}(C'_i) + (-1)^n \text{rk}(C_n) \stackrel{(a)}{=} \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \text{rk}(C'_i) + (-1)^n (\text{rk}(H_n(C)) + \text{rk}(B_{n-1})) = \\
&\stackrel{\text{hp.ind.}}{=} \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \text{rk}(H_i(C')) + (-1)^n (\text{rk}(H_n(C)) + \text{rk}(B_{n-1})) = \\
&\stackrel{(b),(c)}{=} \sum_{i=0}^{n-2} (-1)^i \text{rk}(H_i(C')) + (-1)^{n-1} (\text{rk}(B_{n-1}) + \text{rk}(H_{n-1}(C))) + (-1)^n (\text{rk}(H_n(C)) + \text{rk}(B_{n-1})) = \\
&\stackrel{(c)}{=} \sum_{i=0}^n (-1)^i \text{rk}(H_i(C))
\end{aligned}$$

□

**Osservazione.** Sia  $f : X \rightarrow Y$  mappa cellulare tra spazi dotati di struttura di complessi CW:  $K = \{K^n\}$  per  $X$  e  $L = \{L^n\}$  per  $Y$ , dunque  $f(K^n) \subseteq L^n$  per ogni  $n$ . A partire dalle successioni esatte delle coppie, abbiamo il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{cccccccc}
0 & \longrightarrow & H_n(K^n) & \longrightarrow & H_n(K^n, K^{n-1}) & \longrightarrow & H_{n-1}(K^{n-1}) & \longrightarrow & H_{n-1}(K^n) & \longrightarrow & 0 \\
& & f_n \downarrow & & \varphi_n \downarrow & & f_{n-1} \downarrow & & f_n \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & H_n(L^n) & \longrightarrow & H_n(L^n, L^{n-1}) & \longrightarrow & H_{n-1}(L^{n-1}) & \longrightarrow & H_{n-1}(L^n) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

dove  $f_n$  e  $\varphi_n$  sono le mappe indotte da  $f$ . Dalla definizione di  $d_n$  segue anche la commutatività del seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc}
C_n(K) & \xrightarrow{\varphi_n} & C_n(L) \\
d_n \downarrow & & \downarrow d_n \\
C_{n-1}(K) & \xrightarrow{\varphi_{n-1}} & C_{n-1}(L)
\end{array}$$

per cui le  $\varphi_n$  inducono omomorfismi  $\varphi_* : H_n(K) \rightarrow H_n(L)$ .

**Teorema 5.9** Sia  $\theta_n$  l'isomorfismo visto nel Teorema 5.6 tra omologia singolare e omologia cellulare, siano  $f_n, \varphi_n$  mappe come sopra indotte da  $f : X \rightarrow Y$  mappa cellulare. Allora commuta il diagramma

$$\begin{array}{ccc}
H_n(X) & \xrightarrow{\theta_n} & H_n(K) \\
f_* \downarrow & & \downarrow \varphi_* \\
H_n(Y) & \xrightarrow{\theta'_n} & H_n(L)
\end{array}$$

*Dimostrazione.* La tesi segue dalla commutatività del diagramma

$$\begin{array}{ccccc}
H_n(X) & \xleftarrow{k_n} & H_n(K^n) & \xrightarrow{j_n} & H_n(K^n, K^{n-1}) \\
f_* \downarrow & & \downarrow f_n & & \downarrow \varphi_* \\
H_n(Y) & \xleftarrow{k'_n} & H_n(L^n) & \xrightarrow{j'_n} & H_n(L^n, L^{n-1})
\end{array}$$

e dalla definizione di  $\theta_n$ . □

Vediamo ora come calcolare i differenziali  $d_n$  e le mappe  $\varphi_n$ : sia  $X$  ottenuto da  $A$  attaccando  $n$ -celle  $\{e_\lambda^n\}_{\lambda \in \Lambda}$ . Si è visto che c'è un isomorfismo  $\Phi : \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} H_n(D^n, S^{n-1}) \rightarrow H_n(X, A)$ . Vogliamo studiare la sua inversa. Fissiamo una cella  $e = e_{\lambda_0}^n$ : l'inclusione  $(X, A) \hookrightarrow (X, X \setminus e)$  induce in omologia un omomorfismo  $p_n^* : H_n(X, A) \rightarrow H_n(X, X \setminus e)$ , inoltre abbiamo l'isomorfismo di escissione  $H_n(X, X \setminus e) \rightarrow H_n(D^n, S^{n-1})$ . Allora la composizione delle due mappe descritte  $H_n(X, A) \rightarrow H_n(X, X \setminus e) \rightarrow H_n(D^n, S^{n-1})$  dà l'inversa di  $\Phi$  sulla componente relativa a  $e$ .

Dato  $X$  spazio topologico dotato di struttura  $K = \{K^n\}$  di complesso CW, il morfismo di connessione della successione della tripla  $(K^n, K^{n-1}, K^{n-2})$  è

$$\bigoplus_{\lambda} H_n(D_\lambda^n, S_\lambda^{n-1}) \xrightarrow{\Phi} H_n(K^n, K^{n-1}) \xrightarrow{d_n} H_{n-1}(K^{n-1}, K^{n-2}) \xrightarrow{\Phi} \bigoplus_{\mu} H_{n-1}(D_\mu^{n-1}, S_\mu^{n-2})$$

dunque tramite l'isomorfismo  $\Phi$  corrisponde ad una matrice (in quanto è mappa  $\mathbb{Z}^{\oplus \lambda} \rightarrow \mathbb{Z}^{\oplus \mu}$ ) di mappe  $m(\lambda, \mu) : H_n(D_\lambda^n, S_\lambda^{n-1}) \rightarrow H_{n-1}(D_\mu^{n-1}, S_\mu^{n-2})$ . Consideriamo la composizione

$$S_\lambda^{n-1} \xrightarrow{f^\lambda} K^{n-1} \longrightarrow K^{n-1}/(K^{n-1} \setminus e_\mu^{n-1}) = D_\mu^{n-1}/S_\mu^{n-2} \xrightarrow{\sim} S^{n-1}$$

$L^{\lambda, \mu}$

dove  $f^\lambda$  è la mappa di incollamento della  $n$ -cella  $e_\lambda^n$  ristretta al bordo. La mappa  $L^{\lambda, \mu}$ , in quanto è una mappa  $S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ , ha un grado.

**Definizione 38** Il grado della mappa  $L^{\lambda, \mu}$ , indicato con  $d(\lambda, \mu)$ , si chiama *numero di incidenza* della coppia di celle  $\lambda, \mu$ .

**Osservazione.** Si è già visto il caso  $n = 1$  (grafi), in cui il numero di incidenza è  $\pm 1$  oppure 0.

**Proposizione 5.10** Il seguente diagramma commuta:

$$\begin{array}{ccc} H_n(D_\lambda^n, S_\lambda^{n-1}) & \xrightarrow{m(\lambda, \mu)} & H_{n-1}(D_\mu^{n-1}, S_\mu^{n-2}) \\ \partial \downarrow & & \downarrow p_* \\ \tilde{H}_{n-1}(S_\lambda^{n-1}) & \xrightarrow{L^{\lambda, \mu}} & \tilde{H}_{n-1}(D_\mu^{n-1}/S_\mu^{n-2}) \end{array}$$

( $\partial$  è il morfismo di connessione della successione della coppia,  $p_*$  la mappa indotta dalla proiezione al quoziente).

*Dimostrazione.* La tesi segue dalla commutatività del seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccccccc} H_n(K^n, K^{n-1}) & \xrightarrow{\partial} & H_{n-1}(K^{n-1}) & \xrightarrow{j_{n-1}} & H_{n-1}(K^{n-1}, K^{n-2}) & \xrightarrow{p_*} & \tilde{H}_{n-1}(K^{n-1}/K^{n-2}) \\ \Phi_\lambda \uparrow & & \uparrow f_*^\lambda & & \downarrow p_*^\mu & & \downarrow \\ H_n(D_\lambda^n, S_\lambda^{n-1}) & \xrightarrow{\partial} & \tilde{H}_{n-1}(S^{n-1}) & \xrightarrow{L^{\lambda, \mu}} & H_{n-1}(K^{n-1}, K^{n-1} \setminus e_\mu^{n-1}) & \longrightarrow & \tilde{H}_{n-1}(K^{n-1}/(K^{n-1} \setminus e_\mu^{n-1})) \\ & \searrow m(\lambda, \mu) & & \downarrow \text{escissione} & & & \downarrow \Phi_\mu \\ & & & H_{n-1}(D_\mu^{n-1}, S_\mu^{n-2}) & \xrightarrow{p_*} & & \tilde{H}_{n-1}(D_\mu^{n-1}/S_\mu^{n-2}) \end{array}$$

□

**Osservazione.** La definizione di numero di incidenza usa la mappa caratteristica che dà l'incollamento della cella e usa una equivalenza omotopica tra  $D^n/S^{n-1}$  e  $S^n$ . Queste mappe non sono intrinseche nella struttura di complesso CW di cui lo spazio è dotato, quindi i numeri di incidenza non sono completamente determinati dalla struttura che diamo a  $X$ . Tuttavia scelte diverse possono al più portare ad un cambio di segno.

### 5.1.1 Omologia di $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$

**Teorema 5.11** Per ogni  $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  si ha  $H_i(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & i \leq n \text{ e } 2|i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$ .

*Dimostrazione.* Osserviamo che il proiettivo complesso è dato dall'unione di  $2k$ -celle per  $k = 0, 1, \dots, n$ , per cui il suo complesso cellulare è

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{d_{2n}=0} 0 \xrightarrow{d_{2n-1}=0} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \dots \xrightarrow{d_2=0} \mathbb{Z} \xrightarrow{d_1=0} 0 \xrightarrow{0} \mathbb{Z}$$

ed ha tutte le mappe di bordo nulle. Ma allora i cicli sono sempre tutto e i bordi sempre banali, cioè l'omologia coincide con il complesso. Si ha quindi la tesi. □

### 5.1.2 Omologia di $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$

Consideriamo  $S^n$  ottenuta come unione di coppie  $i$ -celle per  $i = 0, 1, \dots, n$ . In particolare il complesso cellulare associato è

$$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{d_n} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{d_{n-1}} \dots \xrightarrow{d_2} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{d_0} 0$$

infatti  $C_i^{CW}(S^n) = H_i(S^i, S^{i-1}) = H_i(D_+^i, S^{i-1}) \oplus H_i(D_-^i, S^{i-1}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ .

La mappa antipodale  $S^n \xrightarrow{\alpha} S^n$  si restringe sull'equatore, dando la mappa antipodale in dimensione diminita di 1, inoltre è un omeomorfismo. Allora<sup>14</sup>, se  $x^i$  genera  $H_i(D_+^i, S^{i-1})$ ,  $\alpha_*x^i$  genera  $H_i(D_-^i, S^{i-1})$ .

**Lemma 5.12**  $d_i(x^i) = \pm(\alpha_*x^{i-1} + (-1)^ix^{i-1})$ .

*Dimostrazione.* Ricordiamo che  $d_i$  è la composizione

$$H_i(S^i, S^{i-1}) \xrightarrow{\partial_i} H_{i-1}(S^{i-1}) \xrightarrow{j_{i-1}} H_{i-1}(S^{i-1}, S^{i-2})$$

e che la mappa  $\alpha_*$  commuta con  $\partial_i$  e con  $j_{i-1}$ , inoltre ha grado  $(-1)^i$  come mappa  $S^{i-1} \rightarrow S^{i-1}$ . Ne segue:

$$d_i \circ \alpha_* = j_{i-1} \circ \partial_i \circ \alpha_* = j_{i-1} \circ \alpha_* \circ \partial_i = (-1)^i j_{i-1} \circ \partial_i = (-1)^i d_i$$

dunque si ha  $\alpha_*x^i + (-1)^{i+1}x^i \in \ker(d_i)$ .

Per il Teorema 5.6  $j_{i-1}$  è iniettiva, dunque  $\ker(d_i) = \ker(\partial_i)$ , e dalla successione della coppia  $(S^i, S^{i-1})$  si vede che  $\ker(\partial_i)$  (e quindi anche  $\ker(d_i)$ ) ha rango 1 per  $i = 1, \dots, n-1$ . In particolare ne segue che  $d_ix^i \neq 0$  per ogni  $i$ , perché altrimenti

$$d_i(\alpha_*x^i) = (-1)^i d_i(x^i) = 0 \implies \text{rk}(\ker(d_i)) = 2 \quad \zeta$$

Ne segue che  $\ker(d_{i-1}) = \text{Im}(d_i)$  è generato da  $d_i(x^i)$ .

Osserviamo che anche  $\alpha_*x^{i-1} + (-1)^ix^{i-1}$  genera  $\ker(d_{i-1})$ , infatti:

$$d_{i-1}(ax^{i-1} + b\alpha_*x^{i-1}) = 0 \stackrel{d_{i-1}\alpha_* = (-1)^{i-1}d_{i-1}}{\implies} (a + (-1)^{i-1}b)d_{i-1}x^{i-1} = 0$$

ma  $d_{i-1}(x^{i-1}) \neq 0$ , quindi  $a = (-1)^ib$ , cioè  $ax^{i-1} + b\alpha_*x^{i-1}$  è multiplo di  $\alpha_*x^{i-1} + (-1)^ix^{i-1}$ . Ma allora i due generatori sono uguali a meno del segno:  $d_{i+1}(x^{i+1}) = \pm(\alpha_*x^i + (-1)^{i+1}x^i)$ .  $\square$

Vedendo  $\mathbb{R}P^n$  come unione di una  $i$ -cella per  $i = 0, \dots, n$ , abbiamo allora che la proiezione al quoziente da  $S^n$  a  $\mathbb{R}P^n$  agisce mandando omeomorficamente ogni coppia di  $i$ -celle di  $S^n$  nell'unica  $i$ -cella di  $\mathbb{R}P^n$ .

**Teorema 5.13** Il complesso algebrico associato a  $\mathbb{R}P^n$  è

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{1+(-1)^n} \mathbb{Z} \xrightarrow{1+(-1)^{n-1}} \dots \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

$$\text{per cui } H_q(\mathbb{R}P^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & q = 0 \\ \mathbb{Z}_2 & 0 < q < n \text{ e } 2 \nmid q \\ 0 & 2|q \text{ oppure } q > n \end{cases}, H_n(\mathbb{R}P^n) = \begin{cases} 0 & 2|n \\ \mathbb{Z} & 2 \nmid n \end{cases}.$$

*Dimostrazione.* Consideriamo la mappa di proiezione  $\pi : S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$  che identifica i punti antipodali. Il complesso cellulare di  $S^n$  è

$$C_i^{CW}(S^n) = H_i(S^i, S^{i-1}) \simeq H_i(D_+^i, S^{i-1}) \oplus H_i(D_-^i, S^{i-1}) = \langle x^i \rangle \oplus \langle \alpha_*x^i \rangle$$

Invece, il complesso cellulare di  $\mathbb{R}P^n$  è

$$C_i^{CW}(\mathbb{R}P^n) = H_i(D^i, S^{i-1}) = \langle y^i \rangle$$

e possiamo scegliere il generatore  $y^i$  in modo che  $\pi(x^i) = y^i = \pi(\alpha_*x^i)$ . Ma allora

$$d_i y^i = d_i(\pi(x^i)) = \pi(d_i x^i) \stackrel{L.5.12}{=} \pm \pi(\alpha_*x^{i-1} + (-1)^ix^{i-1}) = \pm(1 + (-1)^i)y^{i-1}$$

dunque il complesso algebrico è esattamente quello indicato nell'enunciato. Segue anche immediatamente che i gruppi di omologia sono quelli dell'enunciato.  $\square$

**Osservazione.** Il proiettivo reale è il primo esempio in cui incontriamo uno spazio con gruppi di omologia non banali e finiti.

<sup>14</sup>La funtorialità di  $H$  dà che  $\alpha$  omeomorfismo implica  $\alpha_*$  isomorfismo.

## 6 Omologia e Co-omologia a Coefficienti in un Modulo

Siano  $A, B$  moduli su un anello  $R$ :  $A \otimes_R B$  è il modulo generato dagli elementi  $a \otimes b$  con  $a \in A, b \in B$  e con relazioni  $r(a \otimes b) = (ra) \otimes b = a \otimes (rb)$ ,  $a_1 \otimes b + a_2 \otimes b = (a_1 + a_2) \otimes b$  e  $a \otimes b_1 + a \otimes b_2 = a \otimes (b_1 + b_2)$ .

Sia  $C_\bullet = (C_n, \partial_n)$  un complesso di catene di gruppi abeliani liberi, ad esempio  $C_\bullet = C_\bullet(X)$  il complesso delle catene singolari,  $G$  un gruppo abeliano (o un anello). Dalla successione del complesso, tensorizzando per  $G$  si ha il complesso  $C_\bullet \otimes G$ :

$$\dots \longrightarrow C_{i+1} \otimes G \xrightarrow{\partial \otimes Id_G} C_i \otimes G \xrightarrow{\partial \otimes Id_G} C_{i-1} \otimes G \longrightarrow \dots$$

**Definizione 39** Dato  $X$  spazio topologico, l'omologia singolare a coefficienti in  $G$  di  $X$  è

$$H_\bullet(X; G) := H_\bullet(C_\bullet(X) \otimes G)$$

Dunque a  $X$  associamo  $C_\bullet(X; G)$  e  $H_\bullet(X; G)$ , e alla coppia  $(X, A)$  associamo  $C_\bullet(X, A; G)$  e  $H_\bullet(X, A; G)$ , e quello definito è un funtore covariante.

**Osservazione.** Possiamo considerare anche l'associazione  $G \mapsto H_\bullet(X; G)$ , ed è un funtore covariante.

**Osservazione.**  $H_n(X; \mathbb{Z}) = H_n(X)$ .

Consideriamo ora  $A, B, C$  gruppi abeliani che formano una successione esatta corta:

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

Abbiamo i due seguenti risultati:

**Lemma 6.1** Anche la seguente successione è esatta:

$$A \otimes G \longrightarrow B \otimes G \longrightarrow C \otimes G \longrightarrow 0$$

**Lemma 6.2** Supponiamo  $C$  gruppo libero. Allora anche la seguente successione è esatta:

$$0 \longrightarrow A \otimes G \longrightarrow B \otimes G \longrightarrow C \otimes G \longrightarrow 0$$

*Dimostrazione.* Basta mostrare che esiste una sezione  $s : C \rightarrow B$ , da cui  $B = A \oplus s(C)$ , per cui si ha  $B \otimes G = (A \otimes G) \oplus (C \otimes G)$ . Una tale  $s$  esiste perché  $C$  libero.  $\square$

Rifacciamo la costruzione usando il funtore  $Hom(-, G)$  invece che  $- \otimes G$ :

Sia  $C_\bullet = (C_n, \partial_n)$  complesso di catene di gruppi abeliani liberi, ad esempio  $C_\bullet = C_\bullet(X)$  il complesso delle catene singolari,  $G$  gruppo abeliano (o un anello). Dalla successione del complesso, usando  $Hom(-, G)$ :

$$\dots \longleftarrow Hom(C_{n+1}, G) \xleftarrow{\delta^n} Hom(C_n, G) \xleftarrow{\delta^{n-1}} Hom(C_{n-1}, G) \longleftarrow \dots$$

dove per  $\varphi \in Hom(C_{n-1}, G)$  si definisce  $\delta^{n-1}(\varphi) := (-1)^n \varphi \circ \partial_n$ .

**Definizione 40** Dato  $X$  spazio topologico, la co-omologia singolare a coefficienti in  $G$  di  $X$  è

$$H^i(X; G) = \ker \delta^i / \text{Im} \delta^{i-1} = H_i(Hom(C_\bullet(X), G))$$

Notazione:  $\ker \delta^n = Z^n$  sono gli  $n$ -cocicli,  $\text{Im} \delta^{n-1} = B^n$  sono gli  $n$ -cobordi.

Come sopra, a  $X$  associamo  $C^\bullet(X; G)$  e  $H^\bullet(X; G)$ , alla coppia  $(X, A)$  associamo  $C^\bullet(X, A; G)$  e  $H^\bullet(X, A; G)$ , ed è un funtore controvariante.

**Osservazione.** Possiamo considerare l'associazione  $G \mapsto H^\bullet(X; G)$ , e questo è un funtore covariante.

Consideriamo ora  $A, B, C$  gruppi abeliani che formano una successione esatta corta:

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

Abbiamo i due seguenti risultati:

**Lemma 6.3** Anche la seguente successione è esatta:

$$0 \longrightarrow Hom(C, G) \longrightarrow Hom(B, G) \longrightarrow Hom(A, G)$$

**Lemma 6.4** Supponiamo  $C$  gruppo libero. Allora anche la seguente successione è esatta:

$$0 \longrightarrow Hom(C, G) \longrightarrow Hom(B, G) \longrightarrow Hom(A, G) \longrightarrow 0$$

*Dimostrazione.* Basta mostrare che esiste una sezione  $s : C \rightarrow B$ , da cui  $B \simeq A \oplus C$ , per cui si ha  $Hom(B, G) = Hom(A, G) \oplus Hom(C, G)$ . Una tale  $s$  esiste perché  $C$  libero.  $\square$

**Osservazione.** Tutto quanto detto in termini di gruppi/ $\mathbb{Z}$  si ridice in termini di moduli/PID.



## 6.1 Funtori Tor e Ext

Consideriamo  $R$  PID,  $A$  un  $R$ -modulo. Nella categoria degli  $R$ -moduli abbiamo:

**Definizione 41** Una successione esatta corta

$$0 \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

è una risoluzione libera di  $A$  se  $F_0$  è libero.

**Esempio 6** (Risoluzione Libera Standard) Consideriamo  $F(A)$  l' $R$ -modulo libero generato da elementi di  $A$ , e la mappa  $F(A) \rightarrow A$  data da  $\sum n_a[a] \mapsto \sum n_a a$ . Sia  $K(A)$  il nucleo della mappa descritta. Allora è esatta la successione corta

$$0 \longrightarrow K(A) \longrightarrow F(A) \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

ed è detta *risoluzione libera standard* di  $A$  come  $R$ -modulo.

**Definizione 42** Dato  $G$  un  $R$ -modulo, definiamo  $Tor(A, G) := \ker \left( K(A) \otimes G \xrightarrow{i \otimes Id_G} F(A) \otimes G \right)$ , dove  $i$  è l'inclusione di  $K(A)$  in  $F(A)$ .

**Lemma 6.5** Dato  $f : A \rightarrow A'$  omomorfismo e due risoluzioni libere (righe del diagramma), esistono mappe  $f_0, f_1$  tali che il seguente diagramma sia commutativo:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & F_1 & \xrightarrow{i} & F_0 & \xrightarrow{p} & A & \longrightarrow & 0 \\ & & f_1 \downarrow & & f_0 \downarrow & & f \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & F'_1 & \xrightarrow{i'} & F'_0 & \xrightarrow{p'} & A' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Inoltre, se  $f'_0, f'_1$  sono un'altra coppia di omomorfismi che fa commutare, allora esiste  $s : F_0 \rightarrow F'_1$  tale che  $f_0 - f'_0 = i' \circ s$ ,  $f_1 - f'_1 = s \circ i$ .

*Dimostrazione.* Cominciamo definendo una  $f_0$  che faccia commutare:  $F_0$  è  $R$ -modulo libero, siano  $x_i$  de suoi generatori; poniamo, fissando una scelta,  $f_0(x_i) \in (p')^{-1}(fp(x_i))$ , e estendiamo a omomorfismo. Per commutatività e esattezza si ha

$$p' \circ f_0 \circ i = f \circ p \circ i = 0$$

dunque esiste un'unica  $f_1$  che faccia commutare il diagramma:  $(f_0 \circ i)(y_i) \in \ker(p') = \text{Im}(i')$ , dunque possiamo definire ( $i'$  iniettiva per esattezza)  $f_1(y_i) = (i')^{-1}(f_0 \circ i(y_i))$ .

Supponiamo ora che anche  $f'_0, f'_1$  facciano commutare il diagramma. Allora, per commutatività, si ha

$$p'(f_0 - f'_0) = p'f_0 - p'f'_0 = fp - fp = 0$$

cioè  $\text{Im}(f_0 - f'_0) \subseteq \ker(p') = \text{Im}(i')$ , dunque esiste  $s : F_0 \rightarrow F'_1$  tale che  $i's = f_0 - f'_0$ . Inoltre,

$$i'(f_1 - f'_1) = (f_0 - f'_0)i = i'si$$

ed essendo  $i'$  iniettiva si ha  $f_1 - f'_1 = si$ . □

Dunque, usando il Lemma 6.5, abbiamo

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & K(A) & \xrightarrow{i} & F(A) & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0 \\ & & f_1 \downarrow & \swarrow s & f_0 \downarrow & & Id \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & F_1 & \xrightarrow{i'} & F_0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0 \\ & & g_1 \downarrow & \swarrow s' & g_0 \downarrow & & Id \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & K(A) & \xrightarrow{i} & F(A) & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

e  $Tor(A; G) = \ker(i \otimes Id_G)$ . Potremmo definire  $\underline{Tor}(A; G) = \ker(i' \otimes Id_G)$ , e avere

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & K(A) & \xrightarrow{i} & F(A) & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0 \\ & & g_1 \circ f_1 \downarrow & & g_0 \circ f_0 \downarrow & & Id \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & K(A) & \xrightarrow{i} & F(A) & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Per il Lemma 6.5 si ha che  $g_i \circ f_i$  sono omotope all'identità, e in omologia avremmo dunque l'identità. Scambiando i ruoli otteniamo l'identità anche nell'altro verso di composizione. Dunque si è mostrato:

**Proposizione 6.6** Il funtore  $Tor(A; G)$  è naturalmente isomorfo a  $\ker(F_1 \otimes G \rightarrow F_0 \otimes G)$  per qualsiasi risoluzione libera.

Proprietà:

1. Se  $A$  è abeliano libero allora  $Tor(A; G) = 0$ .
2.  $Tor(\mathbb{Z}_n; G) = \{g \in G : ng = 0\}$ .
3. Se  $G$  libero da torsione allora  $Tor(\mathbb{Z}_n; G) = 0$ .
4.  $Tor(\mathbb{Z}_n; \mathbb{Z}_m) = \mathbb{Z}_d$  con  $d = \text{MCD}(n, m)$ .
5.  $Tor(A_1 \oplus A_2; G) = Tor(A_1; G) \oplus Tor(A_2; G)$ .

Diamo una definizione alternativa di  $Tor$ :

**Definizione 43** Sia  $0 \longrightarrow Q_1 \xrightarrow{i} Q_0 \longrightarrow G \longrightarrow 0$  una risoluzione libera di  $G$ . Poniamo  $Tor'(A; G) = \ker(A \otimes Q_1 \xrightarrow{Id_A \otimes i} A \otimes Q_0)$

**Proposizione 6.7**  $Tor'(A; G) = Tor(A; G)$ .

*Dimostrazione.* Consideriamo risoluzioni libere  $0 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0$  e  $0 \longrightarrow Q_1 \longrightarrow Q_0 \longrightarrow G \longrightarrow 0$ , da cui deduciamo il diagramma

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & Tor(A; G) \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & P_1 \otimes Q_1 & \longrightarrow & P_1 \otimes Q_0 & \longrightarrow & P_1 \otimes G \longrightarrow 0 \\
 & & \alpha \downarrow & & \beta \downarrow & & \gamma \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & P_0 \otimes Q_1 & \longrightarrow & P_0 \otimes Q_0 & \longrightarrow & P_0 \otimes G \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 Tor'(A; G) & \longrightarrow & A \otimes Q_1 & \longrightarrow & A \otimes Q_0 & \longrightarrow & A \otimes G \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

(osservare che si possono mettere gli zeri perché si sta tensorizzando per gruppi liberi).

Considerando il pezzo di diagramma dato dalle prime due righe: vedendo le colonne come complesso, applicando il Lemma del Serpente otteniamo la successione esatta lunga

$$0 = \ker \alpha \longrightarrow 0 = \ker \beta \longrightarrow \ker \gamma \longrightarrow \text{coker} \alpha \longrightarrow \text{coker} \beta \longrightarrow \text{coker} \gamma \longrightarrow$$

da cui:

$$Tor(A; G) = \ker \gamma = \ker(\text{coker} \alpha \rightarrow \text{coker} \beta) = \ker(A \otimes Q_1 \rightarrow A \otimes Q_0) = Tor'(A; G)$$

□

Allora è ben definito  $Tor(A; B) = A * B = B * A$ .

**Definizione 44** Data la risoluzione libera standard di  $A$ , definiamo

$$Ext(A; G) := \text{coker} \left( i^* : Hom(F(A), G) \rightarrow Hom(K(A), G) \right)$$

Come per  $Tor$ , si dimostra che  $Ext(A; G)$  non dipende dalla risoluzione libera che si usa. Proprietà:

1. Se  $A$  è abeliano libero allora  $Ext(A; G) = 0$ .
2.  $Ext(\mathbb{Z}_n; B) = B/nB$ .
3.  $Ext(\mathbb{Z}_n; B) = 0$  per  $B = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ .
4.  $Ext(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m) = \mathbb{Z}_d$  con  $d = \text{MCD}(n, m)$ .
5.  $Ext(A_1 \oplus A_2; G) = Ext(A_1; G) \oplus Ext(A_2; G)$ .

## 6.2 Coefficienti Universali

**Teorema 6.8** (dei Coefficienti Universali per l'Omologia)

Sia  $(C, \partial)$  complesso di catene di moduli liberi. Allora si ha la seguente successione esatta:

$$0 \longrightarrow H_n(C) \otimes G \xrightarrow{\alpha} H_n(C \otimes G) \longrightarrow \text{Tor}(H_{n-1}(C); G) \longrightarrow 0$$

che è naturale e spezza, in particolare  $H_n(C \otimes G) \simeq (H_n(C) \otimes G) \oplus \text{Tor}(H_{n-1}(C); G)$ .

Inoltre  $\alpha$  agisce nel seguente modo:  $[z] \otimes g \xrightarrow{\alpha} [z \otimes g]$ .

*Dimostrazione.* Consideriamo la successione esatta  $0 \longrightarrow Z_n \longrightarrow C_n \xrightarrow{\partial} B_{n-1} \longrightarrow 0$ :

Per ipotesi  $C$  è complesso di catene di moduli liberi, dunque  $Z_n, B_n$  sono liberi per ogni  $n \in N$ . In particolare, tensorizzando per  $G$ , per il Lemma 6.2 otteniamo ancora una successione esatta:

$$0 \longrightarrow Z_n \otimes G \longrightarrow C_n \otimes G \longrightarrow B_{n-1} \otimes G \longrightarrow 0$$

Osserviamo che la successione di partenza spezza, perché  $B_{n-1}$  libero, e dunque anche la seconda spezza. Consideriamo tutte le successioni al variare di  $n \in N$ , e otteniamo la successione di complessi

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 \downarrow & & \partial \otimes Id_G \downarrow & & \downarrow 0 \\ 0 & \longrightarrow & Z_n \otimes G & \longrightarrow & C_n \otimes G & \longrightarrow & B_{n-1} \otimes G \longrightarrow 0 \\ & & \partial \otimes Id_G = 0 \downarrow & & \partial \otimes Id_G \downarrow & & \downarrow 0 = \partial \otimes Id_G \\ 0 & \longrightarrow & Z_{n-1} \otimes G & \longrightarrow & C_{n-1} \otimes G & \longrightarrow & B_{n-2} \otimes G \longrightarrow 0 \\ & & 0 \downarrow & & \partial \otimes Id_G \downarrow & & \downarrow 0 \end{array}$$

da cui segue una successione lunga in omologia. In particolare, essendo le colonne di sinistra e di destra aventi solo mappe nulle, in omologia gli elementi di tali colonne rimangono invariati. Si ottiene dunque

$$\dots \longrightarrow B_n \otimes G \xrightarrow{\varphi_n} Z_n \otimes G \xrightarrow{\alpha} H_n(C \otimes G) \longrightarrow B_{n-1} \otimes G \xrightarrow{\varphi_{n-1}} Z_{n-1} \otimes G \longrightarrow \dots$$

e si verifica che i morfismi di connessione  $\varphi_n$  sono esattamente  $i_n \otimes Id_G$ , dove  $i_n : B_n \hookrightarrow Z_n$  è l'inclusione. Dalla successione esatta lunga si ottiene la seguente successione esatta corta:

$$0 \longrightarrow \text{coker}(\varphi_n) \xrightarrow{\alpha} H_n(C \otimes G) \longrightarrow \text{ker}(\varphi_{n-1}) \longrightarrow 0$$

Consideriamo la successione esatta  $0 \longrightarrow B_n \xrightarrow{i_n} Z_n \longrightarrow H_n(C) \longrightarrow 0$ , e osserviamo che è una risoluzione libera di  $H_n(C)$ , per cui tensorizzando si ottiene la successione esatta

$$0 \longrightarrow \text{Tor}(H_n(C); G) \longrightarrow B_n \otimes G \xrightarrow{i_n \otimes Id_G} Z_n \otimes G \longrightarrow H_n(C) \otimes G \longrightarrow 0$$

e si ha  $\text{coker}(\varphi_n) = \text{coker}(i_n \otimes Id_G) = H_n(C) \otimes G$ ,  $\text{ker}(\varphi_{n-1}) = \text{ker}(i_{n-1} \otimes Id_G) = \text{Tor}(H_{n-1}(C); G)$ . Sostituendo quanto trovato nella successione lunga si ottiene la successione

$$0 \longrightarrow H_n(C) \otimes G \xrightarrow{\alpha} H_n(C \otimes G) \longrightarrow \text{Tor}(H_{n-1}(C); G) \longrightarrow 0$$

e  $\alpha$  agisce proprio come descritto nell'enunciato.

Resta da verificare che la successione spezzi: sia  $r : C_n \rightarrow Z_n$  proiezione che faccia spezzare la successione

$$0 \longrightarrow Z_n \xleftarrow[r]{\quad} C_n \longrightarrow B_{n-1} \longrightarrow 0$$

La composizione

$$Z_n(C \otimes G) \hookrightarrow C_n \otimes G \xrightarrow{r \otimes Id_G} Z_n \otimes G \longrightarrow H_n(C) \otimes G = \text{coker}(i \otimes Id_G)$$

manda i bordi  $B_n(C \otimes G)$  a 0 ( $r \otimes Id_G$  ci manda già  $B_n \otimes G$ ), quindi è indotta al quoziente una  $\rho : H_n(C \otimes G) \rightarrow H_n(C) \otimes G$  tale che  $\rho\alpha = Id$ , cioè  $\rho$  spezza la successione.

La naturalità segue dalla naturalità dei morfismi di connessione.  $\square$

**Teorema 6.9** (dei Coefficienti Universali per la Co-omologia)

Sia  $(C., \partial)$  complesso di catene di moduli liberi. Allora si ha la seguente successione esatta

$$0 \longrightarrow \text{Ext}(H_{n-1}(C.); G) \longrightarrow H^n(C., G) \xrightarrow{\alpha} \text{Hom}(H_n(C.), G) \longrightarrow 0$$

che è naturale rispetto a morfismi di catene e rispetto a morfismi di moduli, e che spezza in modo naturale rispetto a  $G$  ma non rispetto a  $C$ . Inoltre  $\alpha$  agisce nel seguente modo:  $\alpha(\varphi)[c] = \varphi(c)$ .

*Dimostrazione.* Lavoriamo come fatto nella dimostrazione precedente: abbiamo la successione esatta

$$0 \longrightarrow Z_n \xrightleftharpoons[r]{\delta} C_n \longrightarrow B_{n-1} \longrightarrow 0$$

da cui deduciamo, per il Lemma 6.4, la successione esatta

$$0 \longleftarrow \text{Hom}(Z_n, G) \longleftarrow \text{Hom}(C_n, G) \longleftarrow \text{Hom}(B_{n-1}, G) \longleftarrow 0$$

e considerando tutte le successioni al variare di  $n \in N$  otteniamo una successione esatta di complessi:

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 \uparrow & & 0 \uparrow & & 0 \uparrow \\ 0 & \longleftarrow & \text{Hom}(Z_n, G) & \longleftarrow & \text{Hom}(C_n, G) & \longleftarrow & \text{Hom}(B_{n-1}, G) \longleftarrow 0 \\ & & \delta=0 \uparrow & & \delta \uparrow & & \uparrow_{0=\delta} \\ 0 & \longleftarrow & \text{Hom}(Z_{n-1}, G) & \longleftarrow & \text{Hom}(C_{n-1}, G) & \longleftarrow & \text{Hom}(B_{n-2}, G) \longleftarrow 0 \\ & & 0 \uparrow & & 0 \uparrow & & \uparrow_0 \end{array}$$

dalla quale si deduce la successione esatta lunga

$$\text{Hom}(B_n, G) \xleftarrow{d^n} \text{Hom}(Z_n, G) \longleftarrow H^n(C.; G) \longleftarrow \text{Hom}(B_{n-1}, G) \xleftarrow{d^{n-1}} \text{Hom}(Z_{n-1}, G)$$

e si verifica che  $d^n$  è l'omomorfismo indotto dall'inclusione  $i_n : B_n \hookrightarrow Z_n$ . Dalla successione esatta lunga si ricava la successione esatta

$$0 \longleftarrow \ker(d^n) \longleftarrow H^n(C.; G) \longleftarrow \text{coker}(d^{n-1}) \longleftarrow 0$$

Consideriamo la successione esatta  $0 \longrightarrow B_n \xrightarrow{i_n} Z_n \longrightarrow H_n(C.) \longrightarrow 0$ , che è anche risoluzione libera di  $H_n(C.)$ , dalla quale si ricava la successione esatta

$$0 \longleftarrow \text{Ext}(H_n(C.); G) \longleftarrow \text{Hom}(B_n, G) \xleftarrow{d^n} \text{Hom}(Z_n, G) \longleftarrow \text{Hom}(H_n(C.), G) \longleftarrow 0$$

Ma allora  $\ker(d^n) = \text{Hom}(H_n(C.), G)$ ,  $\text{coker}(d^n) = \text{Ext}(H_n(C.); G)$ , per cui la successione diventa (ricordarsi che nella successione si ha  $\text{coker}(d^{n-1})$ )

$$0 \longleftarrow \text{Hom}(H_n(C.), G) \longleftarrow H^n(C.; G) \longleftarrow \text{Ext}(H_{n-1}(C.); G) \longleftarrow 0$$

che è la successione dell'enunciato.

Rimane da trattare lo spezzamento della successione: data  $r : C_n \rightarrow Z_n$  proiezione che spezza, abbiamo

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & Z^n(\text{Hom}(C., G)) & \longrightarrow & \text{Hom}(C_n, G) & \xrightarrow{\delta} & \text{Hom}(C_{n+1}, G) \\ & & & & r^* \uparrow & & \uparrow_{\partial^*} \\ 0 & \longrightarrow & \text{Hom}(H_n(C.), G) & \longrightarrow & \text{Hom}(Z_n, G) & \xrightarrow{i^*} & \text{Hom}(B_n, G) \end{array}$$

e dato  $\varphi \in \ker(i^*)$  si trova che  $r^*(\varphi) \in \ker(\delta)$ . Ma allora è indotta una mappa

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(H_n(C.), G) & \rightarrow & H^n(C.; G) \\ \varphi & \mapsto & \varphi \circ r \end{array}$$

e questa fa spezzare la successione. Osservare che lo spezzamento dipende dalla scelta di  $r$ , e quindi non è naturale.  $\square$

**Corollario 6.10** Se  $H_{n-1}(C_\bullet)$  è libero,  $\alpha : H^n(C_\bullet, G) \rightarrow \text{Hom}(H_n(C_\bullet), G)$  è isomorfismo.

Possiamo adattare il Teorema 6.9 al caso in cui il complesso  $C$  sia di co-catene:

**Corollario 6.11** Sia  $(C^\bullet, \delta)$  complesso di cocatene di  $R$ -moduli liberi. Allora si ha la seguente successione esatta che spezza:

$$0 \longrightarrow H^n(C^\bullet) \otimes G \longrightarrow H^n(C^\bullet \otimes G) \longrightarrow \text{Tor}(H^{n+1}(C^\bullet), G) \longrightarrow 0$$

**Corollario 6.12** Se  $(C_\bullet, \partial)$  complesso di catene di  $R$ -moduli liberi,  $G$   $R$ -modulo finitamente generato, allora si ha la seguente successione esatta:

$$0 \longrightarrow H^n(C_\bullet) \otimes G \longrightarrow H^n(C_\bullet; G) \longrightarrow \text{Tor}(H^{n+1}(C_\bullet), G) \longrightarrow 0$$

*Dimostrazione.* Poiché  $G$  è finitamente generato, si ha  $\text{Hom}(C_n, R) \otimes G \simeq \text{Hom}(C_n, G)$ , dunque è sufficiente usare il Corollario 6.11.  $\square$

### 6.3 Omologia e Co-omologia Relativa

Data una coppia  $(X, A)$ , si ha la successione esatta che spezza  $(C_n(X, A)$  libero)

$$0 \longrightarrow C_n(A) \longrightarrow C_n(X) \xrightarrow{\quad} C_n(X, A) \longrightarrow 0$$

$\xleftarrow{\quad s \quad}$

e tensorizzando si ottiene

$$0 \longrightarrow C_n(A; G) \longrightarrow C_n(X; G) \longrightarrow C_n(X, A; G) \longrightarrow 0$$

da cui si ottiene la successione esatta lunga in omologia a coefficienti in  $G$ . Analogamente, dato lo spezzamento, si ha la successione esatta corta anche applicando il funtore  $\text{Hom}$ :

$$0 \longleftarrow C^n(A; G) \longleftarrow C^n(X; G) \longleftarrow C^n(X, A; G) \longleftarrow 0$$

e quindi anche in co-omologia vale la successione esatta lunga della coppia.

### 6.4 Mayer-Vietoris a Coefficienti in $G$

Consideriamo ora la seguente (successione esatta di gruppi liberi):

$$0 \longrightarrow C_n^{\mathcal{U}}(X) \xrightarrow{i} C_n(X) \longrightarrow C_n(X)/C_n^{\mathcal{U}}(X) \longrightarrow 0$$

Se poi passiamo alla successione esatta lunga in omologia, sfruttando  $H_n^{\mathcal{U}}(X) \xrightarrow{i_*} H_n(X)$ , abbiamo che  $H_n(C_n(X)/C_n^{\mathcal{U}}(X)) = 0$ , allora tensorizzando o applicando  $\text{Hom}$  si ha che Mayer-Vietoris si applica anche per l'omologia e la co-omologia a coefficienti in un gruppo  $G$ . Esplicitamente, Mayer-Vietoris si scrive:

1. In omologia:

$$\longrightarrow H_n(A \cap B; G) \longrightarrow H_n(A; G) \oplus H_n(B; G) \longrightarrow H_n(X; G) \longrightarrow H_{n-1}(A \cap B; G) \longrightarrow$$

2. In co-omologia:

$$\longleftarrow H^n(A \cap B; G) \longleftarrow H^n(A; G) \oplus H^n(B; G) \longleftarrow H^n(X; G) \longleftarrow H^{n-1}(A \cap B; G) \longleftarrow$$

Esempi:  $H^i(S^n; G) = \begin{cases} G & i = 0, n \\ 0 & i \neq 0, n \end{cases}$ ,  $H^i(\mathbb{C}P^n; G) = \begin{cases} G & i \leq n, 2|i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$ ,  $H^i(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & i \leq n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$ .

## 7 Prodotto CUP ( $\smile$ )

Sia  $A$  anello commutativo. Vogliamo definire una mappa  $A$ -bilineare  $H^i(X; A) \times H^j(X; A) \xrightarrow{\smile} H^{i+j}(X; A)$  che renda  $H^\bullet(X; A) = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} H^i(X; A)$  un anello graduato con prodotto graded-commutative, cioè dati  $a \in H^i(X; A)$ ,  $b \in H^j(X; A)$  e posti  $|a| = i$ ,  $|b| = j$  (grado), si ha  $a \smile b = (-1)^{|a||b|} b \smile a$ .

### 7.1 Teorema di Eilenberg-Zilber

Dati  $(C_\bullet, d_C)$  e  $(D_\bullet, d_D)$  complessi di catene, il complesso  $C_\bullet \otimes D_\bullet$  è il dato di  $(C_\bullet \otimes D_\bullet)_n = \bigoplus_{p+q=n} C_p \otimes D_q$  e  $d_n : (C_\bullet \otimes D_\bullet)_n \rightarrow (C_\bullet \otimes D_\bullet)_{n-1}$  dato da  $d_n(\alpha \otimes \beta) = d_C(\alpha) \otimes \beta + (-1)^{|\alpha|} \alpha \otimes d_D(\beta)$ .

**Definizione 45** Un complesso  $(C_\bullet, d)$  è *contraibile* se  $H_\bullet(C_\bullet) = 0$ . Equivalentemente,  $Id$  omotopa a 0.

**Proposizione 7.1** Dati  $C_\bullet, D_\bullet$  complessi algebrici di cui uno è contraibile,  $C_\bullet \otimes D_\bullet$  è contraibile.

*Dimostrazione.* Siano  $(C_\bullet, d_C)$ ,  $(D_\bullet, d_D)$  complessi come da ipotesi, supponiamo senza perdita di generalità che  $C_\bullet$  sia contraibile. Allora esiste  $k : C_\bullet \rightarrow C_\bullet$  omomorfismo di grado +1 omotopia tra  $Id_C$  e 0, cioè  $Id_C = d_C k + k d_C$ . Consideriamo il complesso  $(C_\bullet \otimes D_\bullet, d)$  e la seguente mappa:

$$\begin{aligned} \tilde{k} : (C_\bullet \otimes D_\bullet)_n &\rightarrow (C_\bullet \otimes D_\bullet)_{n+1} \\ \alpha \otimes \beta &\mapsto k(\alpha) \otimes \beta \end{aligned}$$

Sia  $\alpha \in C_p$ ,  $\beta \in D_{n-p}$ . Allora:

$$\begin{aligned} d\tilde{k}(\alpha \otimes \beta) &= d(k(\alpha) \otimes \beta) = d_C k(\alpha) \otimes \beta + (-1)^{p+1} k(\alpha) \otimes d_D(\beta) \\ \tilde{k}d(\alpha \otimes \beta) &= \tilde{k}(d_C(\alpha) \otimes \beta + (-1)^p \alpha \otimes d_D(\beta)) = k d_C(\alpha) \otimes \beta + (-1)^p k(\alpha) \otimes d_D(\beta) \end{aligned}$$

e sommando le due equazioni si ottiene

$$(d\tilde{k} + \tilde{k}d)(\alpha \otimes \beta) = (d_C k(\alpha) + k d_C(\alpha)) \otimes \beta = \alpha \otimes \beta$$

cioè  $\tilde{k}$  è omotopia tra  $Id$  e 0, cioè  $C_\bullet \otimes D_\bullet$  è contraibile.  $\square$

**Corollario 7.2** 1. Se  $X$  è contraibile,  $\widetilde{C_\bullet(X)} \otimes \widetilde{C_\bullet(Y)}$  è contraibile.

2. Se uno tra  $X$  e  $Y$  è contraibile allora  $\widetilde{C_\bullet(X)} \otimes \widetilde{C_\bullet(Y)}$  è contraibile.

3. Se  $X$  e  $Y$  sono contraibili, allora  $C_\bullet(X) \otimes C_\bullet(Y)$  è aciclico<sup>15</sup>.

*Dimostrazione.* Le affermazioni 1. e 2. seguono dalla Proposizione 7.1. Dimostriamo 3.: per prima cosa osserviamo che essendo  $X$  e  $Y$  contraibili il complesso  $\widetilde{C_\bullet(X)} \oplus \widetilde{C_\bullet(Y)}$  è aciclico, infatti: consideriamo la successione esatta corta di complessi<sup>16</sup>

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}[-1] & \longrightarrow & \widetilde{C_\bullet(X)} \oplus \widetilde{C_\bullet(Y)} & \longrightarrow & \widetilde{C_\bullet(X)} \otimes \widetilde{C_\bullet(Y)} & \longrightarrow & 0 \\ & & 1 & \longmapsto & (1, -1) & & & & \end{array}$$

che possiamo vedere più esplicitamente espandendola come segue:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & C_1(X) \oplus C_1(Y) & \longrightarrow & C_1(X) \otimes C_1(Y) & \longrightarrow & 0 \\ \partial \downarrow & & \partial \downarrow & & \partial \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & C_0(X) \oplus C_0(Y) & \longrightarrow & C_0(X) \otimes C_0(Y) & \longrightarrow & 0 \\ \partial \downarrow & & \varepsilon \downarrow \quad \downarrow \varepsilon' & & \downarrow \varepsilon + \varepsilon' & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

La successione esatta lunga in omologia che se ne ricava dà esattamente l'aciclicità di  $\widetilde{C_\bullet(X)} \otimes \widetilde{C_\bullet(Y)}$ . Consideriamo ora la seguente successione di complessi:

$$0 \longrightarrow \widetilde{C_\bullet(X)} \otimes \widetilde{C_\bullet(Y)}[1] \longrightarrow \widetilde{C_\bullet(X)} \otimes \widetilde{C_\bullet(Y)} \longrightarrow \widetilde{C_\bullet(X)} \otimes \widetilde{C_\bullet(Y)} \longrightarrow 0$$

<sup>15</sup>Cioè ha omologia banale in grado  $> 0$ .

<sup>16</sup>Usiamo la seguente notazione: se  $D$  è un complesso,  $D[k]$  è il complesso ottenuto aumentando tutti i gradi di  $k$ . Nella successione,  $\mathbb{Z}$  è il complesso con  $\mathbb{Z}$  in grado 0 e nullo altrove, quindi  $\mathbb{Z}[-1]$  è il complesso con  $\mathbb{Z}$  in grado  $-1$  e nullo altrove.

mostriamo che è esatta e questo dà la tesi, infatti: essendo  $\widetilde{C}_\bullet(X) \otimes \widetilde{C}_\bullet(Y)$  contraibile, passando alla successione esatta lunga in omologia si trova che

$$H_i(C_\bullet(X) \otimes C_\bullet(Y)) \simeq H_{n-1}(C_\bullet(X) \oplus \widetilde{C}_\bullet(Y)[1]) = H_n(C_\bullet(X) \oplus \widetilde{C}_\bullet(Y))$$

cioè il complesso  $C_\bullet(X) \otimes C_\bullet(Y)$  è aciclico. Mostriamo dunque l'esattezza della successione. Abbiamo:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & C_1(X) \otimes C_1(Y) & & & \dots & 2 \\
 & \swarrow & & \swarrow & \searrow & & \swarrow & \\
 & & C_1(X) \otimes C_0(Y) & & C_0(X) \otimes C_1(Y) & & & 1 \\
 & \swarrow & & \swarrow & \searrow & & \swarrow & \\
 C_1(X) & & & C_0(X) \otimes C_0(Y) & & & C_1(Y) & 0 \\
 & \swarrow & & \swarrow & \searrow & & \swarrow & \\
 & & C_0(X) & & C_0(Y) & & & -1 \\
 & & \searrow & & \swarrow & & & \\
 & & & \mathbb{Z} & & & & -2
 \end{array}$$

$\epsilon$  (red arrow from  $C_0(X)$  to  $\mathbb{Z}$ ) and  $\epsilon'$  (red arrow from  $C_0(Y)$  to  $\mathbb{Z}$ )

(sulla destra ci sono i gradi<sup>17</sup>). Raggruppando in somma diretta orizzontalmente otteniamo il complesso  $\widetilde{C}_\bullet(X) \otimes \widetilde{C}_\bullet(Y)$ , proiettare su  $C_\bullet(X) \otimes C_\bullet(Y)$  equivale a mandare a 0 la parte di diagramma in rosso, e raggruppando la parte in rosso in somma diretta orizzontalmente otteniamo esattamente il complesso  $C_\bullet(X) \oplus C_\bullet(Y)$ . Questo mostra l'esattezza della successione, che come detto conclude.  $\square$

**Teorema 7.3** (Eilenberg-Zilber) Per  $X, Y$  spazi topologici, la mappa naturale

$$\begin{array}{ccc}
 EZ_0 : C_0(X \times Y) & \rightarrow & C_0(X) \otimes C_0(Y) \\
 (p, q) & \mapsto & p \otimes q
 \end{array}$$

si estende a morfismo di complessi  $EZ : C_\bullet(X \times Y) \rightarrow C_\bullet(X) \otimes C_\bullet(Y)$  che induce un isomorfismo in omologia.

*Dimostrazione.* Vogliamo usare il Teorema 2.26 per funtori liberi e aciclici:  $C_\bullet(X) \otimes C_\bullet(Y)$  e  $C_\bullet(X \times Y)$  sono funtori  $Top \times Top \rightarrow \mathcal{CH}_+$  (categoria dei complessi di catene), e coincidono in grado 0 tramite  $EZ_0$ . Per  $(C_\bullet(-) \otimes C_\bullet(-))_n$  usiamo come base gli spazi  $(\Delta^k, \Delta^{n-k})$  e elementi  $Id \times Id$ . In questo modo il funtore è libero e aciclico (i  $\Delta^i$  sono contraibili, si applica dunque il Corollario 7.2).

Per  $C_n(- \times -)$  usiamo come base gli spazi  $\Delta^n \times \Delta^n$ , con elemento la mappa diagonale  $\Delta^n \rightarrow \Delta^n \times \Delta^n$ . In questo modo il funtore è libero e aciclico ( $\Delta^n \times \Delta^n$  contraibile).

Dunque, per il Teorema 2.26,  $EZ_0$  e la sua inversa  $Q_0$  si estendono a morfismi naturali

$$EZ : C_\bullet(X \times Y) \rightarrow C_\bullet(X) \otimes C_\bullet(Y), \quad Q : C_\bullet(X) \otimes C_\bullet(Y) \rightarrow C_\bullet(X \times Y)$$

Inoltre,  $EZ \circ Q$ ,  $Q \circ EZ$  sono morfismi naturali che in grado 0 sono l'identità. Ma allora, sempre per il Teorema 2.26, le due composizioni sono omotope all'identità. Dunque passando all'omologia le composizioni sono l'identità, cioè i morfismi indotti in omologia da  $EZ$  e da  $Q$  sono isomorfismi.  $\square$

**Teorema 7.4** (Eilenberg-Zilber relativo) Per trasformazioni naturali  $EZ, Q$  come sopra e coppie  $(X, A)$ ,  $(Y, B)$  abbiamo il seguente diagramma commutativo con righe esatte:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & C_\bullet(A) \otimes C_\bullet(Y) + C_\bullet(X) \otimes C_\bullet(B) & \longrightarrow & C_\bullet(X) \otimes C_\bullet(Y) & \longrightarrow & C_\bullet(X, A) \otimes C_\bullet(Y, B) & \longrightarrow & 0 \\
 & & Q' \downarrow \uparrow EZ' & & Q \downarrow \uparrow EZ & & Q'' \downarrow \uparrow EZ'' & & \\
 0 & \longrightarrow & C_\bullet(A \times Y) + C_\bullet(X \times B) & \longrightarrow & C_\bullet(X \times Y) & \longrightarrow & C_\bullet(X \times Y) / C_\bullet(A \times Y) + C_\bullet(X \times B) & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

e tutte le mappe verticali inducono isomorfismi in omologia.

*Dimostrazione.* Per naturalità le mappe  $EZ$  e  $Q$  si restringono bene, cioè  $EZ(C_\bullet(A) \otimes C_\bullet(Y)) \subseteq C_\bullet(A \times Y)$ , e analogo con  $Q$ . In particolare  $EZ', Q'$  sono indotte dalla restrizione di  $EZ$  e  $Q$ ,  $EZ'', Q''$  sono quelle indotte dal passaggio al quoziente.

Ancora per naturalità l'omotopia tra  $EZ \circ Q$  e  $Id$  manda  $C_\bullet(A) \otimes C_\bullet(Y) + C_\bullet(X) \otimes C_\bullet(B)$  in sé e l'omotopia tra  $Q \circ EZ$  e  $Id$  manda  $C_\bullet(A \times Y) + C_\bullet(X \times B)$  in sé, dunque abbiamo che anche le mappe di sinistra inducono isomorfismi in omologia. Si conclude per il Lemma dei 5 (sappiamo già che le mappe centrali inducono isomorfismi).  $\square$

<sup>17</sup>Osservare che  $C_2(X)$  è in grado 1 perché in effetti sarebbe  $C_2(X) \otimes \mathbb{Z}$ , con  $\mathbb{Z}$  in grado  $-1$ . Analogamente per gli altri.





- Fatto 7.6** 1. Se  $C, D$  complessi di  $R$ -moduli,  $\varphi : C \rightarrow D$  morfismo di complessi che induce un isomorfismo in omologia, allora  $\varphi^* : Hom(D, R) \rightarrow Hom(C, R)$  induce un isomorfismo in co-omologia.
2. (Formula di Kunnetth in Co-omologia) Siano  $C, D$  complessi di  $R$ -moduli liberi, con almeno uno tra  $H^*(C; R)$  e  $H^*(D; R)$  finitamente generato in ogni grado. Allora si ha la successione esatta corta

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{i+j=n} H^i(C; R) \otimes H^j(D; R) \longrightarrow H^n(C \otimes D; R) \longrightarrow \bigoplus_{i+j=n+1} H^i(C; R) * H^j(D; R) \longrightarrow 0$$

Analogamente a quanto visto in omologia, usando  $C = C.(X)$ ,  $D = C.(Y)$  e Eilenberg-Zilber, anche in co-omologia si ha

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \bigoplus_{i+j=n} H^i(C; R) \otimes H^j(D; R) & \longrightarrow & H^n(C \otimes D; R) & \longrightarrow & \bigoplus_{i+j=n+1} H^i(C; R) * H^j(D; R) \longrightarrow 0 \\ & & & & \simeq \downarrow EZ & & \\ & & & & H^n(C \times D; R) & & \end{array}$$

e per spazi con co-omologia libera si ha l'isomorfismo

$$\bigoplus_{i+j=n} H^i(X) \otimes H^j(Y) \xrightarrow{\cong} H^n(X \times Y)$$

**Teorema 7.7** Sia  $R$  PID, uno tra  $H_*(X, A; R)$  e  $H_*(Y, B; R)$  finitamente generato in ogni grado. Se le coppie sono tali che valga Mayer-Vietoris per  $A \times Y$ ,  $X \times B$ , allora si ha la successione esatta corta naturale

$$\begin{array}{ccccccc} \bigoplus_{i+j=n} H^i(X, A; R) \otimes H^j(Y, B; R) & \longrightarrow & H^n((X, A) \times (Y, B); R) & \longrightarrow & \bigoplus_{i+j=n-1} H^i(X, A; R) * H^j(Y, B; R) \\ \uparrow & & & & \downarrow \\ 0 & & & & 0 \end{array}$$

*Dimostrazione.* La dimostrazione è analoga a quella del Teorema 7.5 (formula di Kunnetth), usando il complesso delle cocatene. L'unica cosa aggiuntiva è verificare che valga

$$Hom(C, R) \otimes H^n(D; R) \simeq Hom(C, H^n(D; R))$$

e questo è vero se  $H^n(D; R)$  è finitamente generato, che è vero per ipotesi.  $\square$

Stiamo dunque collegando prodotto in co-omologia con prodotto tensoriale. Costruiamo esplicitamente  $\Delta : C(X) \rightarrow C(X) \otimes C(X)$ .

### 7.3 Approssimazione Diagonale e Prodotto CUP

La mappa diagonale  $X \xrightarrow{\Delta} X \times X$ ,  $x \mapsto (x, x)$  induce sul complesso delle catene singolari una mappa  $C.(X) \rightarrow C.(X \times X)$ . Tramite il morfismo di Eilenberg-Zilber abbiamo dunque

$$\begin{array}{ccc} C.(X) & \xrightarrow{\Delta} & C.(X \times X) \\ & \searrow \tilde{\Delta} & \downarrow EZ \\ & & C.(X) \otimes C.(X) \end{array}$$

Nel Teorema 7.3 (Eilenberg-Zilber) si ha l'esistenza dei morfismi  $EZ, Q$  che però rimangono impliciti. Vogliamo però definire un'approssimazione diagonale esplicita  $\tilde{\Delta} : C.(X) \rightarrow C.(X) \otimes C.(X)$ .

**Osservazione.** Analogamente a come si fa nella dimostrazione del Teorema 7.3 (Eilenberg-Zilber), si mostra che due qualsiasi omomorfismi  $C.(X) \rightarrow C.(X) \otimes C.(X)$  che in grado 0 sono  $x \mapsto x \otimes x$  sono omotopi.

Siano ora  $p, q \leq n$ , e consideriamo le due seguenti mappe affini:

$$\begin{array}{ccc} a_p : \Delta^p & \rightarrow & \Delta^n \\ e_i & \mapsto & e_i \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{ccc} b_q : \Delta^q & \rightarrow & \Delta^n \\ e_i & \mapsto & e_{n-q+i} \end{array}$$

Dato  $\sigma \in C_n(X)$  un  $n$ -simpleso definiamo  $\sigma_p^1 = \sigma \circ a_p \in C_p(X)$  e  $\sigma_q^2 = \sigma \circ b_q \in C_q(X)$ .  
 Definiamo  $\tilde{\Delta} : C_*(X) \rightarrow C_*(X) \otimes C_*(X)$  nel seguente modo: per  $\sigma$  in  $C_n(X)$  poniamo

$$\tilde{\Delta}\sigma = \sum_{p+q=n} \sigma_p^1 \otimes \sigma_q^2$$

poi per linearità estendiamo a tutto  $C_*(X)$ .

In grado 0 si ha  $\tilde{\Delta} = EZ_0 \circ \Delta$ , dunque per verificare che è un'approssimazione della diagonale basta verificare che sia un morfismo di complessi: sono conti, consigliato farli una volta nella vita. Quella costruita è l'approssimazione diagonale di *Alexander-Whitney*

Dato  $R$  PID abbiamo che sulle cocatene è indotta da  $\tilde{\Delta}$  la mappa *cup-product*:

$$\begin{array}{ccc} C^p(X; R) \otimes C^q(X; R) & \rightarrow & C^{p+q}(X; R) \\ (\varphi \otimes \psi) & \mapsto & \varphi \smile \psi \end{array}$$

data da:  $(\sigma : \Delta^{p+q} \rightarrow X) \xrightarrow{\varphi \smile \psi} (-1)^{pq} \varphi(\sigma_p^1) \psi(\sigma_q^2) \in R$ . Esplicitamente:

$$(\varphi \smile \psi)(\sigma) = (-1)^{|\varphi| \cdot |\psi|} \varphi(\sigma_{[e_0, \dots, e_p]}) \psi(\sigma_{[e_p, \dots, e_{p+q}]})$$

**Proposizione 7.8** La mappa cup è morfismo di catene:  $\delta(\varphi \smile \psi) = \delta\varphi \smile \psi + (-1)^{|\varphi|} \varphi \smile \delta\psi$ .

*Dimostrazione.* La dimostrazione è lasciata al volenteroso lettore che ha voglia di fare i conti. In alternativa, è presente una nota sulla pagina e-learning del corso (A.A. 2022/2023).  $\square$

Ne segue che la mappa cup-product passa alla co-omologia, dando quindi

$$\begin{array}{ccc} H^p(X; R) \otimes H^q(X; R) & \rightarrow & H^{p+q}(X; R) \\ [\varphi] \otimes [\psi] & \mapsto & [\varphi \smile \psi] \end{array}$$

**Proposizione 7.9** Il prodotto cup è commutativo a meno del segno.

*Dimostrazione.* Sia  $\bar{\sigma} := \sigma_{[e_n, e_{n-1}, \dots, e_1]}$ . Consideriamo la mappa

$$\rho : C_n(X) \rightarrow C_n(X) \quad \text{data da} \quad \sigma \mapsto (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \bar{\sigma}$$

La mappa  $\rho$  è naturalmente omotopa all'identità, perché è un morfismo di complessi che coincide con l'identità in grado 0 (si usa il Teorema 2.26 sui funtori liberi e aciclici). In co-omologia abbiamo

$$\rho^* \varphi \smile \rho^* \psi = (-1)^{|\varphi| \cdot |\psi|} \rho^*(\psi \smile \varphi)$$

infatti: è immediato verificare che l'uguaglianza valga a meno del segno, e che il segno sia proprio quello discende valutando il segno complessivo dei due membri: sia  $|\varphi| = p$ ,  $|\psi| = q$ , allora:

Il membro di sinistra ha segno

$$(-1)^{\frac{p(p+1)}{2}} \cdot (-1)^{\frac{q(q+1)}{2}} = (-1)^{\frac{p^2+p+q^2+q}{2}}$$

Il membro di destra ha segno

$$(-1)^{pq} \cdot (-1)^{\frac{(p+q)(p+q+1)}{2}} = (-1)^{\frac{p^2+p+q^2+q+4pq}{2}}$$

I due esponenti differiscono di un termine pari, per cui il segno è lo stesso.

Come detto,  $\rho$  è omotopa all'identità, dunque si ha

$$\varphi \smile \psi = (-1)^{|\varphi| \cdot |\psi|} \psi \smile \varphi$$

che è la tesi.  $\square$

### 7.3.1 In Co-omologia Relativa

In co-omologia relativa abbiamo:

$$\begin{array}{ccc} H^*(X, A) \otimes H^*(X, B) & \longrightarrow & H^*(X \times X, X \times B \cup A \times X) \\ & \searrow \smile & \downarrow \Delta \\ & & H^*(X, A \cup B) \end{array}$$

con la mappa orizzontale data dalla formula di Kunnetth in co-omologia relativa (Teorema 7.7). Osservare che si va da coppie  $(X, \underline{A})$ ,  $(X, \underline{B})$  alla coppia  $(X, \underline{A \cup B})$ .

**Osservazione.** Supponiamo  $X = \bigcup_{i=1}^n A_i$ . Consideriamo la successione della coppia in co-omologia:

$$\dots \longrightarrow H^\bullet(X, A_i) \longrightarrow H^\bullet(X) \longrightarrow H^\bullet(A_i) \longrightarrow \dots$$

Siano  $a_i \in \ker(H^\bullet(X) \rightarrow H^\bullet(A_i))$  e siano  $b_i \in H^\bullet(X, A_i)$  tali che  $b_i \mapsto a_i$  (tali  $b_i$  esistono per esattezza). Allora  $a_1 \smile a_2 \smile \dots \smile a_n = 0$ , infatti è immagine di  $b_1 \smile \dots \smile b_n \in H^\bullet(X, \bigcup A_i) = H^\bullet(X, X) = 0$ .

**Esempio 7** 1. Il proiettivo complesso  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$  è unione di  $n+1$  aperti affini  $U_0, \dots, U_n$  omeomorfi a  $\mathbb{C}^n$ , che è contraibile. Consideriamo allora la successione della coppia  $(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, U_i)$ :

$$\dots \longrightarrow H^{>0}(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, U_i) \longrightarrow H^{>0}(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) \xrightarrow{\varphi_i} \underbrace{H^{>0}(U_i)}_{H^{>0}(\mathbb{C}^n)=0} \longrightarrow \dots$$

dunque ogni classe  $a \in H^{>0}(\mathbb{C}\mathbb{P}^n)$  è in  $\ker(\varphi_i)$  per ogni  $i$ . Allora prese  $n+1$  classi  $a_0, \dots, a_n$  in grado  $> 0$ , possiamo vedere  $a_i \in \ker(\varphi_i)$ , e quindi per l'osservazione precedente si ha  $a_0 \smile \dots \smile a_n = 0$ . Si è dunque provato che il prodotto di  $n+1$  classi qualsiasi in grado  $> 0$  è nullo.

Avremmo potuto ottenere lo stesso risultato osservando che il prodotto di  $n+1$  classi in grado  $> 0$  è una classe in grado  $\geq 2n+2$ , ed essendo  $H^i(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) = 0$  per  $i > 2n$  si ha che tale prodotto è nullo.

2. La sfera  $S^n$  è unione di due aperti omeomorfi a  $\mathbb{R}^n$ , che è contraibile. Allora in modo del tutto analogo a quanto appena visto con  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$  si ha che il prodotto di due classi in grado  $> 0$  è nullo.

3. La sospensione  $\Sigma X$  di  $X$  spazio topologico è unione di due coni, che sono contraibili. Allora, come per  $S^n$ , il prodotto di due classi in grado  $> 0$  è nullo.

Vedremo con strumenti che svilupperemo:

**Teorema 7.10**  $H^\bullet(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[x]/(x^{n+1})$ , con  $x$  un generatore di  $H^2(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ . Inoltre  $H^\bullet(\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[x]$ .

**Teorema 7.11**  $H^\bullet(\mathbb{R}\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[x]/(x^{n+1})$  con  $x$  generatore di  $H^1(\mathbb{R}\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$ . Inoltre  $H^\bullet(\mathbb{R}\mathbb{P}^\infty, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[x]$ , con  $x$  generatore di  $H^1(\mathbb{R}\mathbb{P}^\infty, \mathbb{Z}_2)$ .

Una conseguenza del Teorema 7.11 è:

**Teorema 7.12** (Borsuk-Ulam) Non esistono mappe  $S^n \rightarrow S^{n-1}$  continue e dispari.

*Dimostrazione.* Mostriamo che vale la tesi per  $n \geq 3$ , e questo sarà sufficiente, infatti, se esistesse una  $f : S^2 \rightarrow S^1$  dispari, possiamo considerare  $\tilde{\Sigma}f : \Sigma S^2 = S^3 \rightarrow S^2 = \Sigma S^1$  data da  $(p, t) \mapsto (f(p), -t)$ , e questa sarebbe una mappa dispari  $S^3 \rightarrow S^2$ , assurdo.

Sia dunque  $n \geq 3$ , e supponiamo per assurdo che esista  $f : S^n \rightarrow S^{n-1}$  continua e dispari. Poiché  $f$  è dispari, induce al quoziente<sup>18</sup> una  $\bar{f} : \mathbb{R}\mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1}$ , che a sua volta indurrà una mappa a livello di  $\pi_1$ :

$$\bar{f}_\# : \underbrace{\pi_1(\mathbb{R}\mathbb{P}^n, x_0)}_{\mathbb{Z}_2} \rightarrow \underbrace{\pi_1(\mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1}, x'_0)}_{\mathbb{Z}_2}$$

ed entrambi i gruppi sono  $\mathbb{Z}_2$  perché stiamo supponendo  $n \geq 3$ . Affermiamo che  $\bar{f}_\#$  è un isomorfismo: sia  $\gamma \in \pi_1(\mathbb{R}\mathbb{P}^n, x_0)$  un generatore, e sia  $\tilde{\gamma}$  un suo sollevamento su  $S^n$  che abbia estremi  $\tilde{x}_0$  e  $-\tilde{x}_0$ . Il cammino  $\tilde{\gamma}$  viene mappato tramite  $f$  sul cammino  $f(\tilde{\gamma})$ , che ha estremi  $f(\tilde{x}_0)$  e  $-f(\tilde{x}_0)$  (perché  $f$  dispari). Allora  $f(\tilde{\gamma})$  passa al quoziente su  $\mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1}$ , e genera  $\pi_1(\mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1}, x'_0)$ , cioè  $\bar{f}_\#$  è isomorfismo.

Possiamo allora passare all'omologia, e otteniamo che la mappa indotta  $\bar{f}_*$  è un isomorfismo:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\mathbb{R}\mathbb{P}^n, x_0) & \xrightarrow{\bar{f}_\#(\simeq)} & \pi_1(\mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1}, x'_0) \\ \simeq \downarrow & & \downarrow \simeq \\ H_1(\mathbb{R}\mathbb{P}^n) & \xrightarrow{\bar{f}_*} & H_1(\mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1}) \end{array}$$

Ma allora, per il Teorema 6.9 (dei Coefficienti Universali in Co-omologia)  $\bar{f}$  induce un isomorfismo in co-omologia (indichiamo con  $x$  e  $y$  i generatori dei rispettivi gruppi):

$$\bar{f}^* : \begin{array}{ccc} H^1(\mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1}; \mathbb{Z}_2) & \rightarrow & H^1(\mathbb{R}\mathbb{P}^n; \mathbb{Z}_2) \\ x & \mapsto & y \end{array}$$

<sup>18</sup>Qui, come anche più avanti, stiamo sottintendendo che vediamo  $S^n$  come rivestimento universale (di grado 2) di  $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ .

Dunque a livello di anelli di co-omologia si ha:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Z}_2[x]/(x^n) & \xrightarrow{T.7.11} & H^\bullet(\mathbb{RP}^{n-1}; \mathbb{Z}_2) & \rightarrow & H^\bullet(\mathbb{RP}^n; \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{T.7.11} & \mathbb{Z}_2[y]/(y^{n+1}) \\ & & x & \mapsto & y & & \\ & & 0 = x^n & \mapsto & y^n \neq 0 & & \end{array}$$

che è assurdo. Non esiste dunque  $f : S^n \rightarrow S^{n-1}$  dispari. □

**Corollario 7.13** Data  $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  continua e tale che  $f(-x) = -f(x)$ , esiste  $x_0$  tale che  $f(x_0) = 0$ .

*Dimostrazione.* Se  $f$  non avesse zeri allora  $\frac{f(x)}{\|f(x)\|}$  sarebbe mappa  $S^n \rightarrow S^{n-1}$  dispari, assurdo. □

**Corollario 7.14** Data  $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  continua, esiste  $x_0$  tale che  $f(x_0) = f(-x_0)$ .

*Dimostrazione.* Se fosse  $f(x) \neq f(-x)$  per ogni  $x \in S^n$  allora  $f(x) - f(-x)$  sarebbe mappa  $S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  dispari e mai nulla. □

## 8 Omologia di Varietà

**Definizione 46** Una  $n$ -varietà topologica è uno spazio di Hausdorff localmente omeomorfo a  $\mathbb{R}^n$ .

Esempi di varietà: aperti di  $\mathbb{R}^n$ ,  $S^n$ ,  $\mathbb{R}P^n$ , somme connesse di superfici compatte, prodotto di varietà.

**Fatto 8.1** Una  $n$ -varietà  $X$  si può dotare di struttura di CW complesso  $n$ -dimensionale.

**Corollario 8.2** Se  $X$  è  $n$ -varietà allora  $H_i(X) = 0$  per  $i > n$ ; se  $X$  compatta allora  $H_i(X)$  è finitamente generato per ogni  $i$ .

**Definizione 47** Un'orientazione su una  $n$ -varietà  $M$  è una funzione  $\mu$  che ad ogni  $x \in M$  associa una classe (orientazione locale)  $\mu_x \in H_n(M, M \setminus \{x\})$  che genera<sup>19</sup>, soggetta alla seguente condizione di continuità: per ogni  $x \in M$  esistono  $N$  intorno compatto di  $x$  e una classe  $\mu_N \in H_n(M, M \setminus N)$  tale che  $\mu_N$  si restringe a  $\mu_y$  per ogni  $y \in N$ :

$$\begin{aligned} H_n(M, M \setminus N) &\rightarrow H_n(M, M \setminus \{y\}) \\ \mu_N &\mapsto \mu_y \end{aligned}$$

**Osservazione.** Si potrebbe definire tutto analogamente a coefficienti in un gruppo abeliano libero  $G$ :  $\mu_x \in H_n(M, M \setminus \{x\}; G) = G$  un generatore. In particolare, per  $G = \mathbb{Z}_2$  non c'è da fare la scelta di un generatore, e dunque si ottiene che tutte le varietà ammettono orientazione a coefficienti in  $\mathbb{Z}_2$ .

**Definizione 48** Una  $n$ -varietà che ammette un'orientazione si dice *orientabile*. Una varietà orientabile munita di un'orientazione si dice varietà *orientata*.

**Osservazione.** Per un'orientazione di una  $n$ -varietà  $M$ , sarebbe auspicabile avere un'unica classe globale  $\mu_M$  che si restringe bene su ogni  $x \in M$ . Questo in generale però non è possibile: ad esempio, se  $M$  non è compatta,  $\mu$  si restringe a 0 fuori dal supporto (un compatto) di un suo rappresentante, dunque non si può avere un'unica classe globale.

Data una  $n$ -varietà  $M$ , un compatto  $K \subseteq M$  e  $x \in M$ , definiamo la mappa di restrizione:

$$\rho_x : H_i(M, M \setminus K) \rightarrow H_i(M, M \setminus \{x\})$$

**Lemma 8.3** Sia  $M$  una  $n$ -varietà,  $G$  un gruppo abeliano. Allora:

1. per ogni compatto  $K \subseteq M$  si ha  $H_i(M, M \setminus K) = 0$  per ogni  $i > n$
2. Se  $u \in H_n(M, M \setminus K; G)$  e  $\rho_x(u) = 0$  per ogni  $x \in K$  allora  $u = 0$ .

*Dimostrazione.* Procediamo per passi, aumentando la generalità della varietà per la quale si dimostra la tesi ad ogni passo.

- 1)  $M = \mathbb{R}^n$ ,  $K$  convesso: per convessità, per ogni  $x \in K$  si ha che  $\{x\}$  è retratto di deformazione di  $K$ . Ma allora  $\rho_x : H_i(M, M \setminus K) \rightarrow H_i(M, M \setminus \{x\})$  è isomorfismo. Seguono 1. e 2.
- 2)  $M = \mathbb{R}^n$  e  $K = K_1 \cup K_2$ , con 1. e 2. che valgono per  $K_1$ ,  $K_2$  e  $K_1 \cap K_2$ : usiamo il Fatto 2.12 (Mayer-Vietoris in omologia relativa) e otteniamo ( $i > n$ ):

$$\dots \longrightarrow H_{i+1}(M, M \setminus K_1 \cap K_2) \longrightarrow H_i(M, M \setminus K) \xrightarrow{\alpha} H_i(M, M \setminus K_1) \oplus H_i(M, M \setminus K_2) \longrightarrow \dots$$

e per ipotesi il primo e il terzo termine sono nulli. Allora è nullo anche il secondo, cioè vale 1. anche per  $K$ . Per mostrare 2.: consideriamo la successione riportata sopra per  $i = n$  (in particolare il primo termine è ancora nullo e  $\alpha$  è iniettiva):

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & H_n(M, M \setminus K) & \xrightarrow{\alpha} & H_n(M, M \setminus K_1) \oplus H_n(M, M \setminus K_2) & \longrightarrow & \dots \\ & & & & \rho_x \downarrow & & & & \\ & & & & H_n(M, M \setminus \{x\}) & \longleftarrow & & & \end{array}$$

Sia  $u \in H_n(M, M \setminus K)$  tale che  $\rho_x(u) = 0$  per ogni  $x \in K$ . Ma allora, per commutatività, anche  $\alpha(u) = (u_{K_1}, u_{K_2})$  si restringe a zero per ogni  $x \in K$ . Per  $K_1$ ,  $K_2$  vale 2. per ipotesi, dunque  $(u_{K_1}, u_{K_2}) = (0, 0)$ , e  $\alpha$  è iniettiva, quindi  $u = 0$ , cioè vale 2. per  $K$ .

<sup>19</sup>Per escissione si può restringersi ad un intorno aperto di  $x$  omeomorfo a  $\mathbb{R}^n$ , cioè  $H_n(M, M \setminus \{x\}) \simeq H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) = \mathbb{Z}$ .

- 3)  $M = \mathbb{R}^n$ ,  $K$  unione finita di compatti convessi: la tesi segue immediatamente dai punti 1) e 2) per induzione sul numero di compatti convessi che compongono  $K$ , sfruttando che intersezione finita di compatti e convessi è compatta e convessa.
- 4)  $M = \mathbb{R}^n$ ,  $K$  compatto qualsiasi: dato  $u \in H_i(M, M \setminus K)$  esistono  $N$  aperto con  $K \subseteq N$  e un  $u' \in H_i(M, M \setminus N)$  tali che  $u' \mapsto u$ <sup>20</sup>. Per compattezza, esistono  $\{B_1, \dots, B_r\}$  palle chiuse,  $B_j \subseteq N$  e che ricoprono  $K$  (senza perdita di generalità  $B_j \cap K \neq \emptyset$ ). Abbiamo allora il seguente diagramma commutativo di mappe di restrizione:

$$\begin{array}{ccc} H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus N) & \xrightarrow{l_*} & H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{j=1}^r B_j) \\ & \searrow k_* & \downarrow j_* \\ & & H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus K) \end{array}$$

Osserviamo che per  $i > n$  per il punto 3) si ha  $H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{j=1}^r B_j) \stackrel{*}{=} 0$ , e per commutatività allora

$$u = k_*(u') = j_*(l_*(u')) \stackrel{*}{=} j_*(0) = 0 \implies \text{vale 1.}$$

Per mostrare 2.: sia ora  $i = n$ , e siano  $u \in H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus K)$  tale che  $\rho_x(u) = 0$  per ogni  $x \in K$ ,  $u' \in H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus N)$  tale che  $k_*(u') = u$ ,  $u'' = l_*(u') \in H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{j=1}^r B_j)$ .

Per il punto 3) la tesi 2. vale per  $\bigcup_{j=1}^r B_j$ , dunque se mostriamo che  $\rho_y(u'') = 0$  per ogni  $y \in \bigcup_{j=1}^r B_j$  si ha  $u'' = 0$ , e quindi  $u = j_*(u'') = 0$ , cioè vale 2. anche per  $K$  e si è concluso. Mostriamo dunque  $\rho_y(u'') = 0$  per ogni  $y \in \bigcup_{j=1}^r B_j$ : sia  $y \in B_j$ , e sia  $x \in B_j \cap K$ . Abbiamo il seguente diagramma commutativo, dato dalle restrizioni ( $\gamma$  e  $\theta$  isomorfismi perché indotti da equivalenza omotopica):

$$\begin{array}{ccccc} H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{i=1}^r B_i) & \xrightarrow{\varphi} & H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B_j) & & \\ \downarrow j_* & \searrow \rho_y & \swarrow \simeq & \swarrow \simeq & \downarrow \theta \\ H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus K) & & H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{y\}) & \xrightarrow{\gamma} & H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{x\}) \\ & \searrow \rho_x & & & \end{array}$$

Per commutatività si ha  $0 = \rho_x(u) = \rho_x(j_*(u'')) = \theta(\varphi(u'')) \stackrel{\theta \text{ iso}}{\iff} \varphi(u'') = 0$ . Ma allora, ancora per commutatività,  $\rho_y(u'') = \gamma(\varphi(u'')) = 0$ , come voluto. Come detto questo conclude.

- 5)  $M$  qualsiasi,  $K \subseteq U$  aperto,  $U \simeq \mathbb{R}^n$ : per escissione  $H_i(M, M \setminus K) \simeq H_i(U, U \setminus K) \simeq H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus K')$  con  $K'$  immagine di  $K$  tramite l'omeomorfismo  $U \simeq \mathbb{R}^n$ . Dal punto 4) si conclude.
- 6)  $M$  qualsiasi,  $K$  qualsiasi: possiamo decomporre  $K = K_1 \cup \dots \cup K_r$  con  $K_i \subseteq U_i \simeq \mathbb{R}^n$ . Segue le tesi per induzione, usando i punti 2) e 5).

□

**Teorema 8.4** Sia  $M$  una  $n$ -varietà orientabile con orientazione  $\mu$ , allora per ogni compatto  $K \subseteq M$  esiste un'unica classe  $\mu_K \in H_n(M, M \setminus K)$  tale che  $\rho_x(\mu_K) = \mu_x$  per ogni  $x \in K$ .

*Dimostrazione.* Unicità: siano  $\mu_K, \mu'_K$  che si restringono a  $\mu_x$  per ogni  $x \in K$ . Allora  $\mu_K - \mu'_K$  si restringe a 0 per ogni  $x \in K$ . Per il Lemma 8.3, punto 2., segue  $\mu_K - \mu'_K = 0$ .

Esistenza:

- 1) Se  $K$  è contenuto in un intorno sufficientemente piccolo di qualche punto, l'esistenza della classe  $\mu_K$  segue dalla condizione di continuità dell'orientazione.
- 2) Se  $K = K_1 \cup K_2$ , con esistenza di classi  $\mu_{K_1} \in H_n(M, M \setminus K_1)$  e  $\mu_{K_2} \in H_n(M, M \setminus K_2)$  tali per cui valga la tesi: osserviamo innanzitutto che esiste anche una classe  $\mu_{K_1 \cap K_2}$  per restrizione di  $\mu_{K_1}$  (o di  $\mu_{K_2}$ , tanto si ha unicità). Usiamo il Fatto 2.12 (Mayer-Vietoris in omologia relativa):

$$\begin{array}{ccccc} \dots & \longrightarrow & 0 \stackrel{L.8.3}{=} H_{n+1}(M, M \setminus K_1 \cap K_2) & \xrightarrow{\Delta} & H_n(M, M \setminus K) \\ & & & \swarrow \varphi & \\ & & H_n(M, M \setminus K_1) \oplus H_n(M, M \setminus K_2) & \xrightarrow{\psi} & H_n(M, M \setminus K_1 \cap K_2) \longrightarrow \dots \end{array}$$

<sup>20</sup>Classi di omologia sono a supporto compatto, quindi esiste  $(X, A) \subseteq (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus K)$  coppia compatta e  $v \in H_i(X, A)$  tale che  $v \mapsto u$ . Allora basta prendere l'aperto  $N = \mathbb{R}^n \setminus A$ .

Poiché  $\mu_{K_1}$  e  $\mu_{K_2}$  si restringono entrambe a  $\mu_{K_1 \cap K_2}$  si ha<sup>21</sup>  $\psi(\mu_{K_1}, \mu_{K_2}) = 0$ , e quindi per esattezza esiste  $\mu_K \in H_n(M, M \setminus K)$  tale che  $\varphi(\mu_K) = (\mu_{K_1}, \mu_{K_2})$ . Per costruzione allora  $\mu_K$  si restringe bene per ogni  $x \in K$ .

A questo punto basta osservare che un qualsiasi compatto  $K$  si può esprimere come unione finita di compatti  $K_1 \cup \dots \cup K_r$  contenuti in intorni sufficientemente piccoli affinché si abbia esistenza di classi  $\mu_{K_i} \in H_n(M, M \setminus K_i)$  che si restringano bene. Allora si conclude per induzione usando il punto 2).  $\square$

**Definizione 49** Una classe  $\mu_K$  che si restringe bene su ogni punto  $x \in K$  è detta classe fondamentale.

In particolare dunque se  $M$  varietà è compatta allora esiste una classe fondamentale globale. Inoltre:

**Corollario 8.5** Sia  $M$  una  $n$ -varietà. Allora  $H_i(M) = 0$  per  $i > n$ .

*Dimostrazione.* Se  $M$  è compatta allora la tesi segue dal Lemma 8.3 punto 1. con  $K = M$ .

Sia dunque ora  $M$  non compatta. Sia  $u \in H_i(M)$  ( $i > n$ ), essa ha supporto in  $K$  compatto, possiamo prendere  $B_1, \dots, B_r \subseteq \mathbb{R}^n$  palle aperte tali che

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^r B_j$$

dunque esiste  $u' \in H_i(\bigcup_{j=1}^r B_j)$  tale che  $u' \mapsto u$ . Mostriamo che  $H_i(\bigcup_{j=1}^r B_j) = 0$ , e questo conclude. Possiamo vedere  $\mathbb{R}^n \subseteq S^n$  e  $B_j = S^n \setminus K_j$  per qualche compatto  $K_j \subseteq S^n$ . Abbiamo ( $i > n$ ):

$$0 \stackrel{L.8.3}{=} H_{i+1}(S^n, S^n \setminus K_j) \longrightarrow \underbrace{H_i(S^n \setminus K_j)}_{\simeq H_i(B_j)} \longrightarrow H_i(S^n) = 0$$

dunque  $H_i(B_j) = 0$ , ma allora per induzione su  $r$  usando Mayer-Vietoris si trova  $H_i(\bigcup_{j=1}^r B_j) = 0$ . Come detto questo conclude.  $\square$

**Teorema 8.6** Sia  $M$  una  $n$ -varietà qualsiasi (anche non orientabile). Per ogni compatto  $K \subseteq M$  esiste un'unica  $\mu_K \in H_n(M, M \setminus K; \mathbb{Z}_2)$  e tale che  $\mu_K \mapsto \mu_x$  per ogni  $x \in K$ .

*Dimostrazione.* Si fa in modo analogo a quella del Teorema 8.4, usando l'omologia a coefficienti in  $\mathbb{Z}_2$ .  $\square$

Esempi di superfici orientabili:  $S^n$ , aperti di superfici orientabili,  $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$  se e solo se  $n$  dispari,  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ .

---

<sup>21</sup>Si ricorda che la mappa  $\psi$  è data da  $\psi(a, b) = i_*(a) - j_*(b)$ , dove  $i_*$ ,  $j_*$  sono le mappe indotte dalle inclusioni. Nel nostro caso come detto  $i_*(\mu_{K_1}) = \mu_{K_1 \cap K_2} = j_*(\mu_{K_2})$ .

## 9 Prodotto CAP ( $\frown$ )

Consideriamo  $C^\bullet(X) = \text{Hom}(C_\bullet(X), \mathbb{Z})$ . Abbiamo una naturale mappa di valutazione:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : C^i(X) \times C_i(X) \rightarrow \mathbb{Z}$$

La vediamo come morfismo di complessi nel seguente modo: pensiamo  $C^\bullet(X)$  come complesso di catene, rinominando il grado:  $\overline{C}_i(X) = C^{-i}(X)$ , e prendiamo come differenziale  $\overline{d}_i : \overline{C}_i \rightarrow \overline{C}_{i-1}$  dato da  $\overline{d}_i = d^i$ . Se con questa convenzione pensiamo  $C^\bullet(X)$  come complesso di catene, allora  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  induce una mappa di complessi  $\varepsilon : C^\bullet(X) \otimes C_\bullet(X) \rightarrow Z_\bullet$  dove il complesso in arrivo  $Z_\bullet$  è quello che ha  $\mathbb{Z}$  in grado 0 e il gruppo nullo negli altri gradi. Dunque la mappa è

$$\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} C^i(X) \otimes C_{i+n}(X) = (C^\bullet(X) \otimes C_\bullet(X))_n \xrightarrow{\varepsilon_n} Z_n = \begin{cases} \mathbb{Z} & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases} \quad \text{con} \quad \varepsilon_n = \begin{cases} \bigoplus_i \langle \cdot, \cdot \rangle & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

**Lemma 9.1**  $\varepsilon$  è un morfismo di complessi.

*Dimostrazione.* Vogliamo mostrare per ogni  $n \in \mathbb{Z}$  che è commutativo il diagramma

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} C^i \otimes C_{i+n} & \xrightarrow{\varepsilon_n} & Z_n \\ d \downarrow & & \downarrow d' \\ \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} C^i \otimes C_{i+n-1} & \xrightarrow{\varepsilon_{n-1}} & Z_{n-1} \end{array}$$

Per  $n \neq 1$  le composizioni sono nulle<sup>22</sup>, dunque la commutatività è ovvia.

Mostriamo la commutatività per  $n = 1$ : prendiamo  $f \in C^i(X)$  e  $\alpha \in C_{i+1}(X)$ , per cui  $f \otimes \alpha$  è un elemento di grado 1 di  $C^\bullet(X) \otimes C_\bullet(X)$ . Per definizione di differenziale di tensore di complessi abbiamo

$$d(f \otimes \alpha) = df \otimes \alpha + (-1)^i f \otimes d\alpha$$

da cui, sfruttando la definizione di differenziale di cocatene, si ricava

$$\varepsilon_0(d(f \otimes \alpha)) = \langle df, \alpha \rangle + (-1)^i \langle f, d\alpha \rangle = (-1)^{i+1} f(d\alpha) + (-1)^i f(d\alpha) = 0$$

cioè si è verificato che  $\varepsilon_0 \circ d = 0 \stackrel{\varepsilon_1=0}{=} d' \circ \varepsilon_1$ . □

Consideriamo ora la seguente composizione:

$$C^\bullet(X) \otimes C_\bullet(X) \xrightarrow{1 \otimes \tilde{\Delta}} C^\bullet(X) \otimes C_\bullet(X) \otimes C_\bullet(X) \xrightarrow{\varepsilon \otimes 1} Z_\bullet \otimes C_\bullet(X) \simeq C_\bullet(X)$$

dove  $\tilde{\Delta}$  è la mappa data dalla composizione

$$C_\bullet(X) \xrightarrow{\Delta} C_\bullet(X \times X) \xrightarrow{EZ} C_\bullet(X) \otimes C_\bullet(X)$$

Questo è un morfismo di complessi, che in omologia induce

$$\begin{array}{ccccc} H^i(X) \otimes H_n(X) & \longrightarrow & H_{n-i}(C^\bullet(X) \otimes C_\bullet(X)) & \longrightarrow & H_{n-i}(X) \\ a \otimes b & & \longmapsto & & a \frown b \end{array}$$

**Definizione 50** Quella sopra descritta è detta *prodotto cap*.

**Osservazione.** La mappa  $\frown$  non dipende dalla scelta dell'omomorfismo  $EZ$ , perché come visto tutte le possibili scelte sono omotope e dunque inducono la stessa mappa in omologia.

In particolare dunque possiamo usare la "parente" dell'approssimazione diagonale di Alexander-Whitney

$$\tilde{\Delta}\sigma = \sum_{p+q=n} \sigma_p^2 \otimes \sigma_q^1$$

per ottenere una formula esplicita per  $\frown$ : per  $\varphi \in C^p(X)$  e  $\sigma : \Delta^{p+q} \rightarrow X$  una  $(p+q)$ -catena singolare:

$$\varphi \frown \sigma = (-1)^{pq} \varphi(\sigma_p^2) \sigma_q^1 = (-1)^{pq} \varphi(\sigma_{|[e_q, \dots, e_{q+p}]}) \cdot \sigma_{|[e_0, \dots, e_q]}$$

<sup>22</sup>Per  $n \neq 0, 1$  le mappe orizzontali sono nulle. Per  $n = 0$  si ha  $\varepsilon_{n-1} = 0$  e  $d' = 0$ .



## 9.1 Caso Relativo

Nel caso relativo la mappa  $\tilde{\Delta}$  è  $C_*(X, A \cup B) \rightarrow C_*(X, A) \otimes C_*(X, B)$ , dunque la mappa  $\smile$  indotta è

$$H^i(X, A) \otimes H_n(X, A \cup B) \xrightarrow{\smile} H_{n-i}(X, B)$$

Tensorizzando per  $C_*(X, B)$  la successione esatta della coppia  $(X, A)$  si trova la successione esatta

$$0 \longrightarrow C_*(A) \otimes C_*(X, B) \longrightarrow C_*(X) \otimes C_*(X, B) \longrightarrow C_*(X, A) \otimes C_*(X, B) \longrightarrow 0$$

e possiamo considerarla all'interno del seguente diagramma

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & C_*(A) \otimes C_*(X, B) & \longrightarrow & C_*(X) \otimes C_*(X, B) & \longrightarrow & C_*(X, A) \otimes C_*(X, B) & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow EZ & & \uparrow EZ & & \uparrow EZ & & \\ 0 & \longrightarrow & C_*(A \times (X, B)) & \longrightarrow & C_*(X \times (X, B)) & \longrightarrow & C_*((X, A) \times (X, B)) & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow \Delta & & \uparrow \Delta & & \uparrow \Delta & & \\ 0 & \longrightarrow & C_*(A) & \longrightarrow & C_*(X) & \longrightarrow & C_*(X, A) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

**Osservazione.**  $\langle \cdot, \cdot \rangle : C^i(X) \otimes C_i(X) \rightarrow \mathbb{Z}$  induce  $H^i(X) \otimes H_i(X) \rightarrow \mathbb{Z}$  per ogni  $i$ .

**Proposizione 9.2** Se  $\alpha \in H^{n-i}(X)$ ,  $\beta \in H^i(X)$  e  $\gamma \in H_n(X)$  allora vale la seguente formula:

$$\langle \alpha, \beta \smile \gamma \rangle = \langle \alpha \smile \beta, \gamma \rangle$$

*Dimostrazione.* Si fa un calcolo diretto, sfruttando le definizioni. Riprendiamo le notazioni usate nella sezione 7.3; siano  $p = |\alpha|$ ,  $q = |\beta|$ :

$$\langle \alpha \smile \beta, \gamma \rangle = (-1)^{pq} \alpha(\gamma_p^1) \beta(\gamma_q^2) = \alpha((-1)^{pq} \beta(\gamma_q^2) \gamma_p^1) = \alpha(\beta \smile \gamma) = \langle \alpha, \beta \smile \gamma \rangle$$

□

## 10 Co-omologia a Supporto Compatto

Ricordiamo che data una coppia di spazi  $(X, A)$ , dalla successione della coppia si ha

$$C^n(X, A; G) = \ker(C^n(X; G) \rightarrow C^n(A; G))$$

**Definizione 51** Diciamo che  $u \in C^\bullet(X; G)$  è a supporto compatto se esiste  $K \subseteq X$  compatto tale che  $u \in \ker(C^n(X; G) \rightarrow C^n(X \setminus K; G))$ , cioè se  $u \in C^n(X, X \setminus K; G)$ .

**Osservazione.** Se  $X$  è compatto la definizione è banale.

**Definizione 52** Indichiamo con  $C_C^n(X; G)$  l'insieme delle  $n$ -cocatene a supporto compatto.

**Osservazione.**  $C_C^\bullet(X; G)$  è un complesso di cocatene, infatti se  $u \in C_C^n(X; G)$ , cioè esiste  $K \subseteq X$  compatto tale che  $u \in \ker(C^n(X; G) \rightarrow C^n(X \setminus K; G))$ , per commutatività del seguente diagramma

$$\begin{array}{ccc} C^n(X; G) & \longrightarrow & C^n(X \setminus K; G) \\ \delta \downarrow & & \downarrow \delta \\ C^{n+1}(X; G) & \longrightarrow & C^{n+1}(X \setminus K; G) \end{array}$$

si ha  $\delta u \in \ker(C^{n+1}(X; G) \rightarrow C^{n+1}(X \setminus K; G)) = C_C^{n+1}(X; G)$ .

**Definizione 53**  $H_C^\bullet(X; G) = H^\bullet(C_C^\bullet(X; G))$  è la co-omologia delle cocatene a supporto compatto.

**Osservazione.** Se  $X$  è compatto, allora co-omologia e co-omologia a supporto compatto coincidono.

La co-omologia a supporto compatto è un invariante topologico, ma non è invariante omotopico. Diamo allora una definizione alternativa. Ci occorrerà fare un po' di lavoro preliminare.

**Definizione 54**  $(\Lambda, \leq)$  poset è un insieme diretto se  $\forall \alpha, \beta \in \Lambda$  esiste  $\gamma \in \Lambda$  tale che  $\alpha \leq \gamma$  e  $\beta \leq \gamma$ .

**Definizione 55** Un sistema diretto di gruppi abeliani indicizzato su  $(\Lambda, \leq)$  insieme diretto è il dato di  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  gruppi abeliani e  $\{\varphi_{\alpha\beta} : A_\alpha \rightarrow A_\beta\}_{\alpha \leq \beta}$  morfismi tali che se  $\alpha \leq \beta \leq \gamma$  allora  $\varphi_{\beta\gamma} \circ \varphi_{\alpha\beta} = \varphi_{\alpha\gamma}$  e per ogni  $\alpha \in \Lambda$  si ha  $\varphi_{\alpha\alpha} = Id_{A_\alpha}$ .

**Definizione 56** Il limite diretto (o colimite) del sistema diretto di gruppi abeliani  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  è

$$\varinjlim A_\alpha = \bigoplus_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha / \langle a_\alpha - \varphi_{\alpha\beta}(a_\alpha) \rangle_{\alpha \leq \beta}$$

**Osservazione.** Ogni elemento in  $\varinjlim A_\alpha$  ha un rappresentante in  $\bigoplus_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$  che vive in un unico termine.

Infatti, dato un  $\sum_{i=1}^n a_{\alpha_i} \in \varinjlim A_\alpha$ , è sufficiente prendere  $\gamma \in \Lambda$  tale che  $\alpha_i \leq \gamma$  per ogni  $i$ , e si ha  $\sum_{i=1}^n a_{\alpha_i} = \sum_{i=1}^n \varphi_{\alpha_i\gamma}(a_{\alpha_i})$  e  $\varphi_{\alpha_i\gamma}(a_{\alpha_i}) \in A_\gamma$  per ogni  $i$ .

**Lemma 10.1** Siano  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ ,  $\{B_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ ,  $\{C_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  sistemi diretti indicizzati su  $\Lambda$ . Se per ogni  $\alpha \in \Lambda$  è esatta la successione

$$0 \longrightarrow A_\alpha \longrightarrow B_\alpha \longrightarrow C_\alpha \longrightarrow 0$$

e per ogni  $\beta \in \Lambda$  con  $\alpha \leq \beta$  è commutativo il diagramma

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A_\alpha & \longrightarrow & B_\alpha & \longrightarrow & C_\alpha \longrightarrow 0 \\ & & \varphi_{\alpha\beta}^A \downarrow & & \varphi_{\alpha\beta}^B \downarrow & & \downarrow \varphi_{\alpha\beta}^C \\ 0 & \longrightarrow & A_\beta & \longrightarrow & B_\beta & \longrightarrow & C_\beta \longrightarrow 0 \end{array}$$

allora è esatta anche la successione

$$0 \longrightarrow \varinjlim A_\alpha \longrightarrow \varinjlim B_\alpha \longrightarrow \varinjlim C_\alpha \longrightarrow 0$$

**Corollario 10.2** Il limite diretto di successioni esatte lunghe è esatto

*Dimostrazione.* Data una successione esatta lunga

$$\dots \longrightarrow A_{n-1,\alpha} \xrightarrow{t_{n-1,\alpha}} A_{n,\alpha} \xrightarrow{t_{n,\alpha}} A_{n+1,\alpha} \longrightarrow \dots$$

possiamo ricondurci alla successione esatta corta

$$0 \longrightarrow \underbrace{\ker(t_{n,\alpha})}_{=\text{coker}(t_{n-1,\alpha})} \hookrightarrow A_{n,\alpha} \xrightarrow{t_{n,\alpha}} \underbrace{\text{coker}(t_{n,\alpha})}_{=\ker(t_{n+1,\alpha})} \longrightarrow 0$$

e a questo punto è sufficiente usare il Lemma 10.1 per avere la tesi passando al limite.  $\square$

Consideriamo ora  $\Lambda = \{K \subseteq X : K \text{ compatto}\}$  dotato della relazione d'ordine parziale di inclusione. Allora  $(\Lambda, \leq)$  è un insieme diretto (unione finita di compatti è compatto). Osserviamo inoltre che  $\{C^i(X, X \setminus K; G)\}_{K \in \Lambda}$  è un sistema diretto di gruppi abeliani indicizzato su  $\Lambda$ , infatti se  $K \subseteq L$  allora si ha la mappa suriettiva  $C^i(X \setminus K) \rightarrow C^i(X \setminus L)$  (mappa duale dell'inclusione iniettiva  $C_i(X \setminus L) \rightarrow C_i(X \setminus K)$ ), e quindi l'omomorfismo indotto

$$\varphi_{KL} : C^i(X, X \setminus K; G) \rightarrow C^i(X, X \setminus L; G)$$

è iniettivo. Ma allora, visto che queste mappe sono iniettive, si ha

$$C_C^i(X; G) = \bigcup_{K \text{ cpt}} C^i(X, X \setminus K; G) = \varinjlim C^i(X, X \setminus K)$$

e la costruzione è compatibile con i differenziali.

**Proposizione 10.3** La co-omologia commuta con il limite diretto.

*Dimostrazione.* Consideriamo la successione esatta corta

$$0 \longrightarrow \text{Im}(d_K^{i-1}) \longrightarrow \ker(d_K^i) \longrightarrow H^i(X, X \setminus K; G) \longrightarrow 0$$

dove  $d_K^i$  è la mappa di bordo del complesso  $C^*(X, X \setminus K; G)$ . Dal Lemma 10.1 segue

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \varinjlim \text{Im}(d_K^{i-1}) & \longrightarrow & \varinjlim \ker(d_K^i) & \longrightarrow & \varinjlim H^i(X, X \setminus K; G) \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & \text{Im}(d_{\text{lim}}^{i-1}) & \longrightarrow & \ker(d_{\text{lim}}^i) & \longrightarrow & H^i(\varinjlim C_C^i(X; G)) \longrightarrow 0 \end{array}$$

da cui la tesi. □

**Osservazione.** In particolare si ha  $H_C^i(X; G) = \varinjlim H^i(X, X \setminus K; G)$ .

**Teorema 10.4** (Mayer-Vietoris a supporto compatto) Sia  $X = U \cup V$  con  $U, V$  aperti. Allora abbiamo la successione esatta

$$\dots \longrightarrow H_C^i(U \cap V) \longrightarrow H_C^i(U) \oplus H_C^i(V) \longrightarrow H_C^i(X) \longrightarrow H_C^{i+1}(U \cap V) \longrightarrow \dots$$

*Dimostrazione.* Per  $K$  e  $L$  compatti,  $K \subseteq U$  e  $L \subseteq V$ , si ha la successione esatta lunga (vedi Sezione 6.4, Mayer-Vietoris a coefficienti in  $G$ )

$$\longrightarrow H^i(X, X \setminus (K \cap L)) \longrightarrow H^i(X, X \setminus K) \oplus H^i(X, X \setminus L) \longrightarrow H^i(X, X \setminus (K \cup L)) \longrightarrow$$

Fissiamo  $K$  e facciamo il limite diretto su  $L \subseteq V$  compatto. Otteniamo così la successione esatta lunga

$$\varinjlim_L H^i(X, X \setminus (K \cap L)) \longrightarrow H^i(X, X \setminus K) \oplus \varinjlim_L H^i(X, X \setminus L) \longrightarrow \varinjlim_L H^i(X, X \setminus (K \cup L))$$

Adesso facciamo il limite diretto su  $K \subseteq U$  compatto. Di nuovo otteniamo una successione esatta lunga

$$\varinjlim_{K,L} H^i(X, X \setminus (K \cap L)) \longrightarrow \varinjlim_K H^i(X, X \setminus K) \oplus \varinjlim_L H^i(X, X \setminus L) \longrightarrow \varinjlim_{K,L} H^i(X, X \setminus (K \cup L))$$

che possiamo riscrivere, sfruttando l'isomorfismo di escissione, nel seguente modo:

$$\varinjlim_{K,L} H^i(U \cap V, (U \cap V) \setminus (K \cap L)) \longrightarrow \varinjlim_K H^i(U, U \setminus K) \oplus \varinjlim_L H^i(V, V \setminus L) \longrightarrow \varinjlim_{K,L} H^i(X, X \setminus (K \cup L))$$

Osserviamo ora che al variare di  $K \subseteq U$  e  $L \subseteq V$  compatti,  $K \cap L$  descrive tutti i compatti di  $U \cap V$ , per cui si ha  $\varinjlim_{K,L} H^i(U \cap V, (U \cap V) \setminus (K \cap L)) = H_C^i(U \cap V)$ , e analogamente per gli altri termini. Dunque la successione si riscrive

$$\dots \longrightarrow H_C^i(U \cap V) \longrightarrow H_C^i(U) \oplus H_C^i(V) \longrightarrow H_C^i(X) \longrightarrow \dots$$

che è la successione esatta cercata. □

## 10.1 Teorema della Dualità di Poincaré

Torniamo sulla questione dell'orientazione di varietà.

**Osservazione.** Se  $M$  è  $n$ -varietà orientata, per ogni  $K \subseteq M$  compatto esiste (per il Teorema 8.4) una classe fondamentale  $\mu_K \in H_n(M, M \setminus K)$ . Inoltre, se  $K \subseteq L$  allora  $\mu_L$  si restringe a  $\mu_K$ .

**Osservazione.** Il prodotto cap, insieme alla classe fondamentale  $\mu_K$ , inducono l'omomorfismo

$$\begin{array}{ccc} \rho_K : H^i(M, M \setminus K) & \rightarrow & H_{n-i}(M) \\ \alpha & \mapsto & \alpha \frown \mu_K \end{array}$$

che si comporta bene con le inclusioni, infatti per l'osservazione precedente per  $K \subseteq L$  si ha il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} H^i(M, M \setminus K) & & \\ \downarrow & \searrow \rho_K & \\ H^i(M, M \setminus L) & \xrightarrow{\rho_L} & H_{n-i}(M) \end{array}$$

Dunque se prendiamo il limite diretto sui compatti di  $X$  otteniamo un omomorfismo

$$\rho_M : H_C^i(M) \rightarrow H_{n-i}(M)$$

che su ogni termine del limite sui compatti agisce facendo il prodotto cap con l'opportuna classe fondamentale. Moralmnte è come fare il prodotto cap con una classe fondamentale globale (che non esiste!).

**Teorema 10.5** (Dualità di Poincaré) Sia  $M$   $n$ -varietà orientata. Allora l'omomorfismo

$$\rho_M : H_C^i(M; G) \rightarrow H_{n-i}(M; G)$$

è isomorfismo per ogni  $i$ .

*Dimostrazione.* Procediamo per passi:

1)  $M = \mathbb{R}^n$ : supponiamo inoltre per questo caso  $G = \mathbb{Z}$ . Sia  $B_m := \overline{B}(0, m)$  per  $m \in \mathbb{N}$ . Osserviamo che  $\{B_m\}_{m \in \mathbb{N}}$  è cofinale nell'insieme dei compatti<sup>23</sup> di  $\mathbb{R}^n$ , per cui si ha

$$H_C^i(\mathbb{R}^n) = \lim_{K \text{ cpt}} H^i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus K) = \lim_m H^i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B_m)$$

Osserviamo inoltre che le coppie  $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B_m)$  e  $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B_{m+1})$  sono omotopicamente equivalenti, dunque l'omomorfismo  $H^i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B_m) \rightarrow H^i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B_{m+1})$  è un isomorfismo, cioè ogni termine della successione  $H^i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B_m)$  è costante, e quindi passando al limite si ha

$$H_C^i(\mathbb{R}^n) = H^i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B_m) \stackrel{\text{coeff. univ.}}{\simeq} \text{Hom}(H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B), \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & i = n \\ 0 & i \neq n \end{cases}$$

e questo dimostra  $H_C^i(\mathbb{R}^n) \simeq H_{n-i}(\mathbb{R}^n)$  per ogni  $i$ , e resta solo da mostrare che l'isomorfismo sia proprio  $\rho_M$ . Poiché per  $i \neq n$  i gruppi sono banali, basta dimostrarlo solo per  $i = n$ :

$$\rho_M : H_C^n(\mathbb{R}^n) \rightarrow H_0(\mathbb{R}^n)$$

e dato che i termini della successione sono costanti, basta verificare che è isomorfismo la mappa

$$\frown \mu_B : H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B) \rightarrow H_0(\mathbb{R}^n)$$

dove  $B$  è una generica palla chiusa centrata nell'origine e  $\mu_B$  è generatore di  $H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B) = \mathbb{Z}$ . Per il Teorema 6.9 (dei Coefficienti Universali in Co-omologia) abbiamo

$$H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B) \simeq \text{Hom}(H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B), \mathbb{Z})$$

e dunque possiamo considerare  $\mu_B^* \in H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B)$  classe "duale" di  $\mu_B$ , cioè tale che  $\langle \mu_B^*, \mu_B \rangle = 1$ . Sia inoltre  $\alpha = Id$  generatore di  $H^0(\mathbb{R}^n) = \text{Hom}(H_0(\mathbb{R}^n), \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ . Per la Proposizione 9.2 si ha

$$\alpha(\rho_M(\mu_B^*)) = \alpha(\mu_B^* \frown \mu_B) = \langle \alpha, \mu_B^* \frown \mu_B \rangle \stackrel{P.9.2}{=} \langle \alpha \smile \mu_B^*, \mu_B \rangle = \langle \mu_B^*, \mu_B \rangle = 1 \quad \text{generatore}$$

e  $\alpha$  è un isomorfismo, allora anche  $\rho_M(\mu_B^*)$  è generatore, dunque  $\rho_M$  isomorfismo come voluto.

<sup>23</sup>Cioè per ogni  $K$  compatto esiste  $m \in \mathbb{N}$  tale che  $K \subseteq B_m$

2)  $M = U \cup V$  con  $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$  aperti tali per cui valga la tesi per  $U, V$  e  $U \cap V$ : consideriamo le successioni di Mayer-Vietoris in omologia e in co-omologia a supporto compatto. Otteniamo il seguente diagramma commutativo<sup>24</sup>:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & H_C^{i-1}(M) & \longrightarrow & H_C^i(U \cap V) & \longrightarrow & H_C^i(U) \oplus H_C^i(V) & \longrightarrow & H_C^i(M) & \longrightarrow & \dots \\ & & \rho_M \downarrow & & \rho_{U \cap V} \downarrow & & \rho_U \oplus \rho_V \downarrow & & \rho_M \downarrow & & \\ \dots & \longrightarrow & H_{n-i-1}(M) & \longrightarrow & H_{n-i}(U \cap V) & \longrightarrow & H_{n-i}(U) \oplus H_{n-i}(V) & \longrightarrow & H_{n-i}(M) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

In particolare, poiché  $\rho_{U \cap V}, \rho_U, \rho_V$  sono isomorfismi, anche  $\rho_M$  lo è.

3)  $M$  unione crescente di aperti  $U_j$  tali per cui valga la tesi su ogni  $U_j$ : abbiamo i sistemi diretti

$$\begin{array}{ccccc} H_C^i(U_1) & \longrightarrow & H_C^i(U_2) & \longrightarrow & \dots \\ \rho_{U_1} \downarrow & & \downarrow \rho_{U_2} & & \\ H_{n-i}(U_1) & \longrightarrow & H_{n-i}(U_2) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

ed il diagramma è commutativo (non è ovvio che lo sia, tralasciamo però la verifica). Inoltre per argomenti di compattezza (ogni compatto è contenuto in qualche  $U_j$ ) si hanno i seguenti limiti:

$$\lim_j H_{n-i}(U_j) = H_{n-i}(M) \quad \lim_j H_C^i(U_j) = H_C^i(M)$$

Quindi per commutatività del diagramma sopra e poiché tutti i  $\rho_{U_j}$  sono isomorfismi si trova che  $\rho_M$  è isomorfismo.

4)  $M$  aperto di  $\mathbb{R}^n$ : se  $M$  è convessa allora è omeomorfa ad  $\mathbb{R}^n$ , quindi si usa il punto 1). Altrimenti,  $M$  si può scrivere come unione numerabile di palle aperte  $B_i$ . Basta allora considerare  $U_j = \bigcup_{i=1}^j B_i$  e usare il punto 3) (la tesi vale sugli  $U_j$  usando i punti 1) e 2) e procedendo per induzione).

5)  $M$  varietà qualsiasi: consideriamo l'insieme degli aperti di  $M$  per i quali valga la tesi<sup>25</sup>. Per il Lemma di Zorn (il punto 3) ci assicura che valgano le ipotesi) esiste  $V$  elemento massimale. Se  $V = M$  allora abbiamo concluso, se invece  $V \neq M$  consideriamo  $B \subseteq M$  con  $B \simeq \mathbb{R}^n$  e  $B \not\subseteq V$ . Ma allora la tesi vale per  $V, B$  e per il punto 4) vale anche per  $B \cap V$ , quindi per il punto 2) vale anche per  $V \cup B$ , assurdo (per massimalità di  $V$ ).

□

**Teorema 10.6** (Dualità di Poincaré modulo 2) Sia  $M$   $n$ -varietà qualsiasi. L'orientazione<sup>26</sup> modulo 2 permette di definire la mappa

$$\rho_2 : H_C^i(M; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_{n-i}(M; \mathbb{Z}_2)$$

che è isomorfismo per ogni  $i$ .

*Dimostrazione.* La dimostrazione è identica a quella del Teorema precedente, facendo tutto modulo 2. □

Dunque abbiamo

$$\begin{array}{ccc} H_C^i(M) \otimes H^{n-i}(M) & \rightarrow & \mathbb{Z} \\ (\alpha \otimes \beta) & \mapsto & \langle \beta, \rho_M(\alpha) \rangle \end{array}$$

e se  $M$  è compatta allora esiste una classe fondamentale  $\mu_M$  che dà un'orientazione globale. Ma allora in tal caso abbiamo

$$\langle \beta, \rho_M(\alpha) \rangle = \begin{cases} \beta(\alpha \frown \mu_M) \\ \langle \beta, \alpha \frown \mu_M \rangle = \langle \alpha \smile \beta, \mu_M \rangle = (\alpha \smile \beta)(\mu_M) \end{cases}$$

**Definizione 57** Dati  $A, B$   $R$ -moduli, un omomorfismo  $A \otimes B \rightarrow R$  è una dualità se induce isomorfismi

$$A \rightarrow \text{Hom}_R(B, R)$$

$$B \rightarrow \text{Hom}_R(A, R)$$

<sup>24</sup>Il quadrato centrale e il quadrato di destra commutano perché le mappe sono quelle date dalle inclusioni. Si verifica che anche il quadrato di sinistra commuta (la verifica è presente sull'Hatcher per chi fosse interessato).

<sup>25</sup>L'insieme è non vuoto perché per il punto 1) almeno tutti gli aperti di  $M$  omeomorfi a  $\mathbb{R}^n$  ne fanno parte

<sup>26</sup>Unica perché siamo a coefficienti su  $\mathbb{Z}_2$ .

**Proposizione 10.7** Sia  $M$  varietà compatta, orientata (a meno di passare a  $R = \mathbb{Z}_2$ ) e connessa. Allora il prodotto cup

$$\begin{aligned} H^i(M; R) \otimes H^{n-i}(M; R) &\rightarrow R \\ \alpha \otimes \beta &\mapsto \langle \alpha \smile \beta, \mu_M \rangle \end{aligned}$$

è una dualità per  $R$  campo oppure per  $R = \mathbb{Z}$  modulo la torsione di  $H^\bullet(M; \mathbb{Z})$ .

*Dimostrazione.* L'omomorfismo  $H^{n-i}(M; R) \xrightarrow{h} \text{Hom}(H_{n-i}(M; R), R)$  del Teorema 6.9 (Coefficienti Universali in Co-omologia) è isomorfismo per  $R$  campo o per  $R = \mathbb{Z}$  a meno della torsione di  $H^\bullet(M; \mathbb{Z})$ . Consideriamo ora la mappa  $D$  indotta al duale da  $\rho_M : H_C^i(M; R) \rightarrow H_{n-i}(M; R)$ , cioè la mappa

$$\text{Hom}(H_{n-i}(M; R), R) \xrightarrow{D} \text{Hom}(H_C^i(M; R), R) \stackrel{M \text{ cpt}}{=} \text{Hom}(H^i(M; R), R)$$

Questa è un isomorfismo, in quanto è indotta da  $\rho_M$  che lo è. Allora è isomorfismo anche la composizione

$$H^{n-i}(M; R) \xrightarrow{D \circ h} \text{Hom}(H^i(M; R), R)$$

che è data da  $Dh(\psi)(\varphi) = \psi(\varphi \frown \mu_B) = (\varphi \smile \psi)\mu_B$ .

Inoltre per la commutatività a meno del segno di  $\smile$  si ha che anche la mappa

$$H^i(M; R) \xrightarrow{G} \text{Hom}(H^{n-i}(M; R), R)$$

data da  $G(\varphi)(\psi) = \psi(\varphi \frown \mu_M) = (\varphi \smile \psi)(\mu_M)$  è isomorfismo.  $\square$

### 10.1.1 Anello di Co-omologia di $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ e $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$

**Teorema 10.8**  $H^\bullet(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[x]/(x^{n+1})$  con  $x$  generatore di  $H^2(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, \mathbb{Z})$

*Dimostrazione.* Sia  $x \in H^2(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$  un generatore; mostriamo per induzione su  $n$  che per ogni  $i \leq n$  l'elemento  $x^i = x \smile \dots \smile x$  genera  $H^{2i}(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, \mathbb{Z})$  (e questo conclude):

*Passo Base*  $n = 1$ : tutto ovvio (i gruppi successivi a  $H^2(\mathbb{C}\mathbb{P}^1, \mathbb{Z})$  sono nulli).

*Passo Induttivo:*  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$  è complesso CW ottenuto incollando una  $2i$ -cella per  $i = 0, \dots, n$ . In particolare  $\mathbb{C}\mathbb{P}^{n+1} = \mathbb{C}\mathbb{P}^n \cup (2n+2)$ -cella. Consideriamo l'inclusione  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n \xrightarrow{i} \mathbb{C}\mathbb{P}^{n+1}$ . La mappa indotta

$$i^* : H^i(\mathbb{C}\mathbb{P}^{n+1}) \rightarrow H^i(\mathbb{C}\mathbb{P}^n)$$

è isomorfismo per  $i \leq 2n$ , dato che  $H^i(\mathbb{C}\mathbb{P}^{n+1}, \mathbb{C}\mathbb{P}^n) \stackrel{\text{coeff. univ.}}{=} \begin{cases} \mathbb{Z} & i = 2n+2 \\ 0 & i \neq 2n+2 \end{cases}$  e quindi dalla successione della coppia si ha ( $i \leq 2n$ ):

$$0 = H^i(\mathbb{C}\mathbb{P}^{n+1}, \mathbb{C}\mathbb{P}^n) \longrightarrow H^i(\mathbb{C}\mathbb{P}^{n+1}) \xrightarrow{i^*} H^i(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) \longrightarrow H^{i+1}(\mathbb{C}\mathbb{P}^{n+1}, \mathbb{C}\mathbb{P}^n) = 0$$

cioè come voluto  $i^*$  è isomorfismo.

Dunque abbiamo:

$$\begin{aligned} H^\bullet(\mathbb{C}\mathbb{P}^{n+1}) &\xrightarrow{i^*} H^\bullet(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) \\ x &\mapsto i^*(x) \\ x^k &\mapsto i^*(x^k) = (i^*(x))^k \end{aligned}$$

e per ipotesi induttiva  $(i^*(x))^k$  genera  $H^{2k}(\mathbb{C}\mathbb{P}^n)$  per  $k \leq n$ , dunque  $x^k$  genera  $H^{2k}(\mathbb{C}\mathbb{P}^{n+1})$  per  $k \leq n$ . Per la Proposizione 10.7 il prodotto cup è una dualità

$$\begin{aligned} H^i(\mathbb{C}\mathbb{P}^{n+1}) \otimes H^{2n+2-i}(\mathbb{C}\mathbb{P}^{n+1}) &\rightarrow H^{2n+2}(\mathbb{C}\mathbb{P}^{n+1}) = \mathbb{Z} \\ (\alpha \otimes \beta) &\mapsto \alpha \smile \beta \end{aligned}$$

In particolare, per  $i = 2$  troviamo che  $(x \otimes x^n) \mapsto x \smile x^n = x^{n+1}$  genera  $H^{2n+2}(\mathbb{C}\mathbb{P}^{n+1})$ .  $\square$

**Corollario 10.9**  $H^\bullet(\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[x]$  con  $x \in H^2(\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty)$  generatore.

Allo stesso modo si dimostra:

**Teorema 10.10**  $H^\bullet(\mathbb{R}\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[x]/(x^{n+1})$  con  $x \in H^1(\mathbb{R}\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$  generatore. Inoltre  $H^\bullet(\mathbb{R}\mathbb{P}^\infty, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[x]$ , con  $x \in H^1(\mathbb{R}\mathbb{P}^\infty, \mathbb{Z}_2)$  generatore.

## 11 Gruppi di Omotopia

Consideriamo in questa sezione la categoria  $Top^0$  degli spazi puntati, in particolare ci restringiamo agli spazi Hausdorff.

In generale, a meno che venga detto diversamente,  $I$  indica l'intervallo  $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ .

**Definizione 58**  $[(X, x_0), (Y, y_0)] = \{\text{classi di omotopia di mappe (puntate)}\}$ .

**Osservazione.** Più in generale, dati  $A \subseteq X$  e  $B \subseteq Y$ ,  $[(X, A), (Y, B)]$  è l'insieme delle classi di omotopia di mappe  $f : X \rightarrow Y$  tali che  $f(A) \subseteq B$ , dove le omotopie mandano  $A$  in  $B$  ad ogni tempo.

**Definizione 59**  $SX$  è la sospensione ridotta di  $X$ , cioè  $SX = X \times I / (X \times \partial I \cup \{x_0\} \times I)$ .

**Osservazione.** Sotto alcune ipotesi su  $X$  (ad esempio  $X$  complesso CW) si ha che la sospensione  $\Sigma X$ <sup>27</sup> e la sospensione ridotta  $SX$  sono omotopicamente equivalenti.

Sia  $*$   $\in S^n$  un punto base. Allora

**Definizione 60**  $\pi_n(X, x_0) = [(S^n, *), (X, x_0)] =: [S^n, X]^0$  è l' $n$ -esimo gruppo di omotopia di  $X$ .

**Osservazione.**  $\pi_0(X, x_0)$  è l'insieme delle componenti connesse per archi di  $X$ ;  $\pi_1(X, x_0)$  è il gruppo fondamentale.

Vogliamo dotare  $\pi_n(X, x_0)$  di una struttura di gruppo anche per  $n \geq 2$ .

**Definizione 61** Il "prodotto smash" di  $(X, x_0)$  e  $(Y, y_0)$  è  $X \wedge Y = X \times Y / (X \times \{y_0\} \cup \{x_0\} \times Y)$ .

**Osservazione.** Date due mappe puntate  $f : X \rightarrow X'$ ,  $g : Y \rightarrow Y'$ , queste inducono una mappa  $f \wedge g : X \wedge Y \rightarrow X' \wedge Y'$  (data da  $[x, y] \mapsto [f(x), g(y)]$ ).

Preso il cubo unitario  $I^n$ , consideriamo lo spazio  $I^n / \partial I^n$  con punto base  $[\partial I^n]$ .

**Lemma 11.1**  $I^n / \partial I^n \simeq S^n$ .

*Dimostrazione.* Per  $n = 1$   $I^1 / \partial I^1 \simeq S^1$ . Per  $n = 2$ :  $I^2 / \partial I^2 = I / \partial I \wedge I / \partial I = S^1 \wedge S^1$  e vedendo  $S^1$  come compattificazione di  $\mathbb{R}$  si ha  $S^1 \wedge S^1 = (\mathbb{R} \cup \infty) \wedge (\mathbb{R} \cup \infty) = \mathbb{R}^2 \cup \infty \simeq S^2$ .

Il caso generale si fa allo stesso modo:  $I^n / \partial I^n = (I / \partial I)^{\wedge n} = (S^1)^{\wedge n} \simeq S^n$ . □

**Corollario 11.2**  $\pi_n(X, x_0) = [(I^n / \partial I^n, [\partial I^n]), (X, x_0)] \simeq [(I^n, \partial I^n), (X, x_0)]$ .

Possiamo ora definire un'operazione su  $\pi_n(X, x_0)$ : per  $[f], [g] \in [(I^n / \partial I^n, [\partial I^n]), (X, x_0)]$  poniamo

$$(f + g)(t_1, \dots, t_n) = \begin{cases} f(2t_1, t_2, \dots, t_n) & t_1 \leq \frac{1}{2} \\ g(2t_1 - 1, t_2, \dots, t_n) & t_1 \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

**Osservazione.** L'operazione è ben definita:  $f, g$  sono costanti  $x_0$  su  $\partial I^n$ , quindi si incollano bene.

**Proposizione 11.3** Con questa operazione  $\pi_n(X, x_0)$  è un gruppo per  $n \geq 1$ , commutativo per  $n \geq 2$ .

*Dimostrazione. Inverso:* data  $[f]$ , la sua inversa è rappresentata dalla mappa

$$(t_1, \dots, t_n) \mapsto f(1 - t_1, t_2, \dots, t_n)$$

*Associatività:* per avere un'omotopia tra  $((f + g) + h)$  e  $(f + (g + h))$  è sufficiente riscaldare la prima coordinata.

*Commutatività:* vediamola graficamente

$$\begin{array}{|c|c|} \hline f & g \\ \hline \end{array} \simeq \begin{array}{|c|c|} \hline f & g \\ \hline \end{array} \simeq \begin{array}{|c|} \hline f \\ \hline g \\ \hline \end{array} \simeq \begin{array}{|c|c|} \hline g & f \\ \hline \end{array} \simeq \begin{array}{|c|c|} \hline g & f \\ \hline \end{array}$$

□

**Osservazione.** Ragionando allo stesso modo si trova che  $[(S^n \wedge X, *), (Y, y_0)]$  è un gruppo per  $n \geq 1$ , abeliano per  $n \geq 2$ .

<sup>27</sup> $\Sigma X = X \times I / (x, 0) \sim (y, 0), (x, 1) \sim (y, 1)$ .

Notazione:  $Hom(X, Y)$  è l'insieme delle mappe continue  $X \rightarrow Y$ ,  $Hom(X, Y)^0$  è l'insieme delle mappe continue e puntate  $(X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ .

**Fatto 11.4** Dati  $X, Y, Z$  spazi puntati con  $Y$  localmente compatto, esiste una bigezione

$$Hom(X \wedge Y, Z)^0 \leftrightarrow Hom(X, Hom(Y, Z)^0)^0$$

che è anche un isomorfismo.

**Definizione 62** Per  $(X, x_0)$  spazio puntato, lo spazio dei loop è  $\Omega X := Hom(S^1, X)^0$ . Lo consideriamo come spazio puntato, con punto base dato dalla mappa costante  $S^1 \rightarrow x_0$ .

Consideriamo ora i funtori  $X \mapsto SX = S^1 \wedge X$  e  $X \mapsto \Omega X$  su  $Top^0$ .

**Corollario 11.5** C'è un isomorfismo  $[SX, Y]^0 \simeq [X, \Omega Y]^0$ , detto *isomorfismo aggiunto*.

*Dimostrazione.* Segue direttamente dal Fatto 11.4. □

**Corollario 11.6**  $\pi_{n+1}(X, x_0) \simeq \pi_n(\Omega X, x_0)$  <sup>28</sup>.

*Dimostrazione.*  $\pi_{n+1}(X, x_0) = [S^{n+1}, X] = [S(S^n), X] \stackrel{C.11.5}{=} [S^n, \Omega X] = \pi_n(\Omega X, x_0)$ . □

Anche su  $\Omega X$  possiamo definire un prodotto: date  $f : I/\partial I \rightarrow X$  e  $g : I/\partial I \rightarrow X$ , poniamo

$$f * g : I/\partial I \rightarrow X, \quad t \mapsto \begin{cases} f(2t) & t \leq \frac{1}{2} \\ g(2t - 1) & t \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

**Fatto 11.7** Sia  $m : \Omega X \times \Omega X \rightarrow \Omega X$  la mappa  $(f, g) \mapsto f * g$ . Allora:

1.  $m$  è continua
2. le mappe  $f \mapsto f * x_0$ ,  $f \mapsto x_0 * f$  sono omotope (come mappe puntate) all'identità
3.  $m(Id \times m)$  e  $m(m \times Id)$  sono omotope (come mappe puntate) come mappe  $\Omega X \times \Omega X \rightarrow \Omega X$
4.  $f \mapsto f * f^-$  e  $f \mapsto f^- * f$  sono omotope (come mappe puntate) alla mappa costante<sup>29</sup>.

**Corollario 11.8**  $[X, \Omega Y]^0$  è un gruppo.

**Osservazione.** Dipendenza dal Punto Base e Azione di  $\pi_1$ :

Sia  $X$  connesso per archi (dunque  $\pi_0(X) = \{1\}$ ),  $x_0, x_1 \in X$ ,  $\Omega_{x_0} X$ ,  $\Omega_{x_1} X$  spazi di loop con punto base  $x_0$  e  $x_1$  rispettivamente. Sia inoltre  $\gamma : I \rightarrow X$  cammino con  $\gamma(0) = x_0$ ,  $\gamma(1) = x_1$ . Consideriamo la trasformazione

$$\begin{array}{ccc} \Omega_{x_1} X & \rightarrow & \Omega_{x_0} X \\ f & \mapsto & \gamma * f * \gamma^- \end{array}$$

questa induce sui gruppi di omotopia

$$\pi_{i+1}(X, x_1) \simeq \pi_i(\Omega_{x_1} X, x_1) \longrightarrow \pi_i(\Omega_{x_0} X, x_0) \simeq \pi_{i+1}(X, x_0)$$

con gli isomorfismi a destra e a sinistra che sono naturali. La mappa indotta

$$\pi_{i+1}(X, x_1) \xrightarrow{\gamma_*} \pi_{i+1}(X, x_0)$$

è una bigezione, e più precisamente è un isomorfismo (con inversa  $(\gamma^-)_*$ ). Dunque per  $x_1 = x_0$  è definita un'azione di  $\pi_1(X, x_0)$  su  $\pi_i(X, x_0)$  per ogni  $i \geq 1$ .

**Fatto 11.9** Se l'azione di  $\pi_1(X, x_0)$  è banale su  $\pi_n(X, x_0)$  allora  $\pi_n(X, x_0)$  non dipende dal punto base, nel senso che l'isomorfismo tra i gruppi al variare del punto base è naturale. Altrimenti l'isomorfismo dipenderà dal cammino  $\gamma$  che si sceglie.

<sup>28</sup>Attenzione si sta facendo un abuso di notazione: nello spazio  $(\Omega X, x_0)$  stiamo indicando con  $x_0$  la mappa costante.

<sup>29</sup> $f^-$  è la mappa  $t \mapsto f(1-t)$ .



## 11.1 Fibrazioni

Notazione: dato uno spazio  $X$ , ci capiterà di includerlo in  $X \times I$  ad un qualche tempo. Chiamiamo  $i_t^X$  l'inclusione al tempo  $t$ .

**Definizione 63** Una mappa  $p : E \rightarrow B$  si dice *fibrato di Hurewicz* se ha la proprietà di sollevamento di omotopia (HLP<sup>30</sup>) per qualsiasi spazio  $(X, x_0)$ , cioè: per ogni  $h : X \times I \rightarrow B$ , per ogni  $a : X \rightarrow E$  tale che  $p \circ a(x) = h(x, 0)$  esiste  $H : X \times I \rightarrow E$  tale che  $p \circ H = h$  e  $H(x, 0) = a(x)$ . Cioè esiste  $H$  che commuta con il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{a} & E \\ i_0^X \downarrow & \nearrow H & \downarrow p \\ X \times I & \xrightarrow{h} & B \end{array}$$

$H$  si dice sollevamento di  $h$  con dato iniziale  $a$ . Inoltre  $p^{-1}(x_0) = F$  è la fibra di  $p$ <sup>31</sup>.

**Definizione 64** Una mappa  $p : E \rightarrow B$  si dice *fibrato di Serre* se ha la HLP per  $X = I^n \forall n \in \mathbb{N}$ .

**Osservazione.** Rivestimenti sono fibrazioni di Hurewicz, e fibrazioni di Hurewicz sono fibrazioni di Serre.

**Fatto 11.10 1.** Se  $p : E \rightarrow B$  è fibrato di Hurewicz e  $B$  è connesso per archi, allora fibre di punti base distinti sono omotopicamente equivalenti.

2. Se  $p : E \rightarrow B$  è fibrato di Serre e  $B$  è connesso per archi, allora per ogni  $x, y \in B$  vale che  $\pi_n(p^{-1}(x)) \simeq \pi_n(p^{-1}(y))$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ .

## 11.2 Gruppi di Omotopia Relativa

Notazione: per  $n \geq 1$  sia  $J^n = \partial I^n \times I \cup I^n \times \{0\} \subseteq \partial I^{n+1}$ , cioè  $J^n = \partial I^{n+1} \setminus (I^n \times \{1\})$  è  $\partial I^{n+1}$  meno la parte interna della faccia superiore. Poniamo inoltre  $J^0 = \{0\} \subseteq \partial I$ .

**Definizione 65** Il gruppo di omotopia di  $(X, x_0)$  relativo a  $A \subseteq X$  è

$$\pi_{n+1}(X, A, x_0) = [(I^{n+1}, \partial I^{n+1}, J^n), (X, A, x_0)]$$

cioè è l'insieme delle classi di omotopia di mappe  $I^{n+1} \rightarrow X$  tali che  $\partial I^{n+1} \mapsto A$ ,  $J^n \mapsto x_0$ .

Come per i gruppi di omotopia normali, per  $n = 0$  non si ha un gruppo, mentre per  $n \geq 1$  lo è con l'operazione che concatena le mappe

$$(f + g)(t_1, \dots, t_n) = \begin{cases} f(2t_1, t_2, \dots, t_n) & t_1 \leq \frac{1}{2} \\ g(2t_1 - 1, t_2, \dots, t_n) & t_1 \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

ben definita perché  $f, g$  sono costanti  $x_0$  su  $J^n$ . Come nel caso normale:

**Proposizione 11.11** Per  $n \geq 2$  il gruppo  $\pi_{n+1}(X, A, x_0)$  è commutativo.

**Osservazione.** Attenzione al fatto che nella definizione si sta usando  $\pi_{n+1}$ , dunque il gruppo è abeliano da  $\pi_3$  in poi.

**Osservazione.** Per  $A = \{x_0\}$  si ottengono i gruppi di omotopia normali.

**Osservazione.**  $\pi_n$  è un funtore: una  $f : (X, A, x_0) \rightarrow (Y, B, y_0)$  induce un omomorfismo di gruppi  $f_* : \pi_n(X, A, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, B, y_0)$  per  $n \geq 2$  (o per  $n \geq 1$  nel caso  $A = \{x_0\}$ ).

**Lemma 11.12** Esiste un isomorfismo canonico (detto *isomorfismo aggiunto relativo*)

$$\pi_{n+1}(X, A, x_0) \simeq \pi_n(\Omega X, \Omega A, x_0)$$

*Dimostrazione.* Identifichiamo  $[(I^{n+1}, \partial I^{n+1}, J^n), (X, A, x_0)]$  con  $[(I^{n+1}/J^n, \partial I^{n+1}/J^n, *), (X, A, x_0)]$ . Poiché  $J^n$  è contraibile, i quozienti sono  $I^{n+1}/J^n \simeq D^{n+1}$ ,  $\partial I^{n+1}/J^n \simeq S^n$ , entrambi con punto base  $(1, 0, \dots, 0)$ . Inoltre si ha

$$S(D^{n+1}) = S(I^{n+1}/J^n) = I^{n+1}/J^n \wedge I/\partial I = I^{n+2}/(J^n \times I \cup I^{n+1} \times \partial I) = I^{n+2}/J^{n+1} = D^{n+2}$$

per cui si ha

$$\begin{aligned} \pi_n(\Omega X, \Omega A, x_0) &= [(D^n, S^{n-1}, *), (\Omega X, \Omega A, x_0)] \simeq [(S(D^n), S(S^{n-1}), *), (X, A, x_0)] = \\ &= [(D^{n+1}, S^n, *), (X, A, x_0)] = \pi_{n+1}(X, A, x_0) \end{aligned}$$

□

<sup>30</sup>L'abbreviazione sta per *Homotopy Lifting Property*.

<sup>31</sup>Diciamo "la" fibra di  $p$ , ma ovviamente dipende dal punto base  $x_0 \in B$  fissato.

**Osservazione.** Una classe  $[f] \in \pi_n(X, x_0) = [(I^n, \partial I^n), (X, x_0)]$  soddisfa le condizioni per essere un elemento di  $\pi_n(X, A, x_0) = [(I^n, \partial I^n, J^{n-1}), (X, A, x_0)]$ , possiamo dunque definire un omomorfismo

$$j_* : \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(X, A, x_0)$$

Data una mappa  $h : (I^{n+1}, \partial I^{n+1}, J^n) \rightarrow (X, A, x_0)$ , la sua restrizione alla faccia  $I^n \times \{1\}$  (quella la cui parte interna è quello che manca a  $J^n$  per essere  $\partial I^{n+1}$ ) induce una mappa

$$\partial h : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (A, x_0)$$

Abbiamo dunque un operatore

$$\partial : \pi_{n+1}(X, A, x_0) \rightarrow \pi_n(A, x_0)$$

che è un omomorfismo per  $n \geq 1$ <sup>32</sup>.

Infine, una classe  $[f] \in \pi_n(A, x_0) = [(I^n, \partial I^n), (A, x_0)]$  soddisfa le condizioni per essere un elemento di  $\pi_n(X, x_0) = [(I^n, \partial I^n), (X, x_0)]$ , possiamo dunque definire un omomorfismo (indotto dall'inclusione)

$$i_* : \pi_n(A, x_0) \rightarrow \pi_n(X, x_0)$$

Possiamo allora definire una successione di coppia  $(X, A)$ :

**Proposizione 11.13** La seguente successione lunga (di gruppi fino a prima dei termini  $\pi_1$ ) è esatta:

$$\begin{aligned} \dots &\longrightarrow \pi_n(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A, x_0) \longrightarrow \dots \\ \dots &\longrightarrow \pi_1(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_1(X, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_1(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_0(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_0(X, x_0) \end{aligned}$$

*Dimostrazione.* Grazie al Corollario 11.6 e al Lemma 11.12, basta dimostrare l'esattezza della successione solo per gli ultimi 3 termini, poi usiamo la successione della coppia  $(\Omega^n X, \Omega^n A)$ , i cui ultimi 3 termini danno l'esattezza della successione della coppia  $(X, A)$  in grado  $n$ .

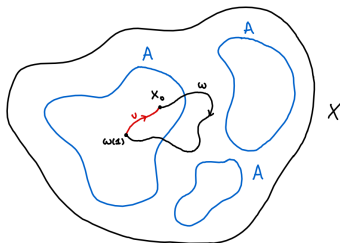
1. Esattezza in  $\pi_0(A, x_0)$ :

Sia  $a \in A$  tale che  $i_*[a] = [x_0]$  (dunque appartenente alla stessa componente connessa per archi di  $x_0$  in  $X$ ). Allora esiste  $\gamma : I \rightarrow X$  tale che  $\gamma(0) = x_0$ ,  $\gamma(1) = a$ , per cui  $[\gamma] \in \pi_1(X, A, x_0)$  e  $\partial[\gamma] = [\gamma(1)] = [a]$ .

2. Esattezza in  $\pi_1(X, A, x_0)$ :

Sia  $[\varphi] \in \pi_1(X, A, x_0)$ , cioè  $\varphi : I \rightarrow X$  con  $\varphi(0) = x_0 = \varphi(1)$ . La classe  $j_*[\varphi] \in \pi_1(X, A, x_0)$  è ancora rappresentata da  $\varphi$ , ora vista come mappa tale che  $I \mapsto X$ ,  $\{0, 1\} \mapsto A$ ,  $\{0\} \mapsto \{x_0\}$ . Ma allora  $\partial(j_*[\varphi]) = [\varphi(1)] = [x_0]$ , cioè  $\partial \circ j_*$  è la mappa banale.

Resta dunque da mostrare  $\ker(\partial) \subseteq \text{Im}(j_*)$ : sia  $\omega : I \rightarrow X$  un rappresentante di un elemento di  $\pi_1(X, A, x_0)$  tale che  $\partial[\omega] = [x_0]$ , cioè  $\omega(1)$  è nella stessa componente connessa per archi di  $x_0$  in  $A$ . Allora esiste  $u : I \rightarrow A$  tale che  $u(0) = \omega(1)$ ,  $u(1) = x_0$ , per cui  $\omega * u \in \pi_1(X, x_0)$ :



Possiamo allora considerare l'omotopia da  $\omega * u$  a  $\omega$  data dalla retrazione di  $u$  su  $u(0)$ . Questa è un'omotopia valida per  $\pi_1(X, A, x_0)$ , quindi in  $\pi_1(X, A, x_0)$  si ha  $[\omega * u] = [\omega]$ , che è esattamente equivalente a dire  $j_*[\omega * u] = [\omega]$ , che è quello che si voleva provare.

3. Esattezza in  $\pi_1(X, x_0)$ :

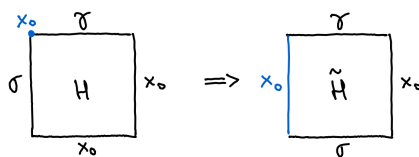
Sia  $[\gamma] \in \pi_1(A, x_0)$ . Poiché  $\gamma$  ha immagine tutta contenuta in  $A$ , l'omotopia che retrae  $\gamma$  su  $\gamma(0) = x_0$  è valida per  $\pi_1(X, A, x_0)$ , cioè in  $\pi_1(X, A, x_0)$  si ha  $[\gamma] = [x_0]$ , che è equivalente a dire  $j_*(i_*[\gamma]) = [x_0]$ .

Si è dunque provato che  $j_* \circ i_*$  è la mappa banale.

Resta da mostrare  $\ker(j_*) \subseteq \text{Im}(i_*)$ : sia  $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$  tale che  $j_*[\gamma] = [x_0]$ , cioè esiste un'omotopia

<sup>32</sup>Osservare che invece per  $n = 0$  si ha  $\partial[h] = [h(1)]$ .

valida per  $\pi_1(X, A, x_0)$  da  $\gamma$  a  $x_0$ , cioè esiste  $\sigma \in \pi_1(A, x_0)$  tale che  $\gamma * \sigma$  è omotopo a estremi fissi a  $x_0$ . Se ne deduce un'omotopia a estremi fissi da  $\sigma$  a  $\gamma$ :



cioè  $i_*[\sigma] = [\gamma]$ , che è quello che si voleva mostrare. □

**Osservazione.** Dato  $(X, x_0)$  e un'inclusione  $A \hookrightarrow X$  possiamo considerare la *fibra omotopica*:

$$\underbrace{F(t)}_{\text{fibra omotopica}} = \{(a, \gamma) \in A \times PX : \gamma(1) = a\} \simeq \{\gamma \in PX : \gamma(1) \in A\} = \underbrace{F(X, A)}_{\text{fibra relativa}}$$

dove  $PX = \{\gamma : I \rightarrow X : \gamma(0) = x_0\}$  è l'insieme dei cammini liberi.

Per  $n \geq 1$ , a  $f : (I^{n+1}, \partial I^{n+1}, J^n) \rightarrow (X, A, x_0)$  associo la mappa aggiunta

$$f^\wedge : \begin{array}{ccc} I^n & \rightarrow & F(X, A) \\ (t_1, \dots, t_n) & \mapsto & f^\wedge(t_1, \dots, t_n) \end{array} \quad \text{con} \quad f^\wedge(t_1, \dots, t_n)(t) = f(t_1, \dots, t_n, t)$$

Osserviamo che per  $(t_1, \dots, t_n) \in \partial I^n$  si ha  $(t_1, \dots, t_n, t) \in J^n$  per ogni  $t \in I$ , per cui ogni punto di  $\partial I^n$  è mandato da  $f^\wedge$  nel cammino costante  $x_0$ , dunque  $f^\wedge$  passa al quoziente  $I^n/\partial I^n$  definendo

$$\bar{f} : I^n/\partial I^n \rightarrow F(X, A)$$

che dà una bigezione

$$\pi_{n+1}(X, A, x_0) \leftrightarrow \pi_n(F(X, A), *)$$

che è anche un omomorfismo di gruppi. Possiamo quindi interpretare i gruppi di omotopia di una coppia come i gruppi di omotopia di fibra omotopica.

**Osservazione.** Per  $f : (X, A, x_0) \rightarrow (Y, B, y_0)$ ,  $f_*$  commuta con  $\partial$ , cioè l'omotopia di coppia è naturale.

**Osservazione.** Tramite il mapping cylinder possiamo vedere ogni mappa, a meno di equivalenza omotopica, come un'inclusione: data  $f : X \rightarrow Y$ , il mapping cylinder è

$$M_f = X \times I \sqcup Y / (x, 0) \sim f(x)$$

e osserviamo che  $M_f$  si retrae per deformazione su  $Y$ . Consideriamo dunque il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow \widehat{i}_1^X & \uparrow \\ & & M_f \end{array}$$

dove  $\widehat{i}_1^X$  è il passaggio al quoziente dell'inclusione di  $X$  al tempo 1 in  $X \times I$ . Abbiamo dunque fattorizzato  $f$  tramite un'inclusione e un'equivalenza omotopica.

Ora, data un'inclusione  $i : X \hookrightarrow Y$ , possiamo sostituire  $X$  con  $P_X Y = \{\gamma : I \rightarrow Y : \gamma(1) \in X\}$  che si retrae per deformazione su  $X$ , e la mappa

$$\bar{i} : \begin{array}{ccc} P_X Y & \longrightarrow & Y \\ \gamma & \longmapsto & \gamma(1) \end{array}$$

è una fibrazione di Serre, con fibra

$$F = F(i) = \{(x, \gamma) \in X \times P_X Y : \gamma(1) = x\}$$

cioè a meno di sostituire  $X$  con  $P_X Y$  possiamo vedere ogni inclusione come una fibrazione di Serre. Ma allora, a meno di equivalenza omotopica ogni mappa possiamo vederla come inclusione, e quindi come fibrazione di Serre.

**Teorema 11.14** Se  $p : E \rightarrow B$  fibrazione di Serre,  $B_0 \subseteq B$ ,  $E_0 \subseteq E$ , con  $E_0 = p^{-1}(B_0)$ ,  $b_0 \in B$  punto base e  $e_0 \in p^{-1}(b_0)$  punto base di  $E$ , allora  $p$  induce una bigezione

$$p_* : \pi_n(E, E_0, e_0) \rightarrow \pi_n(B, B_0, b_0)$$

che è un isomorfismo per  $n > 1$  (cioè quando gli insiemi sono anche gruppi).

*Dimostrazione.* 1. *Suriettività:* sia  $x \in \pi_n(B, B_0, b_0)$  rappresentato da  $h : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (B, B_0, b_0)$ .

Possiamo<sup>33</sup> sollevare  $h$  ad  $H : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (E, E_0, e_0)$  con dato iniziale  $H(J^{n-1}) \equiv e_0$  e con  $pH = h$ . Da questa uguaglianza segue  $H(\partial I^n) \subseteq p^{-1}(h(\partial I^n)) \subseteq p^{-1}(B_0) = E_0$ . Quindi abbiamo  $H \in \pi_n(E, E_0, e_0)$  e  $p_*H = h$ .

2. *Inieltività:* siano  $[x_0], [x_1] \in \pi_n(E, E_0, e_0)$  rappresentati da  $f_0, f_1$  e tali che  $p_*[x_0] = p_*[x_1]$ , cioè esiste un'omotopia  $\varphi_t : (I^n, \partial I^n, J^n) \rightarrow (B, B_0, b_0)$  tale che  $\varphi_0 = pf_0$ ,  $\varphi_1 = pf_1$ . Possiamo allora sollevare l'omotopia su  $T = \underbrace{I^n \times \{0, 1\}}_{\text{facce su cui vivono } \varphi_0, \varphi_1} \cup \underbrace{J^{n-1} \times I}_{\text{costante } b_0}$  nel seguente modo:

$$G : T \rightarrow E, \quad G(u, t) = \begin{cases} f_t(u) & t = 0, 1 \\ e_0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Ora,  $T \subseteq \partial I^{n+1}$  è contraibile, dunque esiste  $H : I^n \times I \rightarrow E$  omotopia tra  $f_0$  e  $f_1$ :

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{G} & E \\ \downarrow & \nearrow H & \downarrow p \\ I^n \times I & \xrightarrow{\varphi} & B \end{array}$$

cioè era  $[x_0] = [x_1] \in \pi_n(E, E_0, e_0)$ . □

**Corollario 11.15** Sia  $p : E \rightarrow B$  fibrazione di Serre,  $F = p^{-1}(b_0) \subseteq E$ . Allora

$$\pi_n(E, F, e_0) = \pi_n(B, \underbrace{\{b_0\}}_{p(F)}, \underbrace{b_0}_{p(e_0)}) = \pi_n(B, b_0)$$

quindi abbiamo una successione esatta lunga

$$\dots \longrightarrow \pi_n(F, e_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E, e_0) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B, b_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F, e_0) \longrightarrow \dots$$

detta *successione esatta lunga di omotopia di fibrazione*.

*Dimostrazione.* Basta sfruttare la Proposizione 11.13 (successione esatta lunga della coppia in omotopia) e quanto osservato nell'enunciato. □

**Osservazione.** Tutti i fibrati localmente banali sono fibrazioni di Serre.

**Osservazione.** Rivestimenti sono fibrazioni di Serre, allora possiamo sfruttare il Corollario 11.15 per ottenere informazioni sui gruppi di omotopia di spazi a partire dai gruppi di omotopia dei loro rivestimenti. Ad esempio, consideriamo  $B = S^1$ , con rivestimento  $E = \mathbb{R}$ . La fibra di un punto base è discreta, quindi  $\pi_i(F, *) = 0$  per  $i > 0$ . Dalla successione esatta allora segue  $\pi_i(S^1) \simeq \pi_i(\mathbb{R}) = 0$  per  $i \geq 2$ .

### 11.3 Teorema di Escissione in Omotopia

Enunciamo il seguente risultato, che è l'equivalente del Teorema 2.33 di escissione in omologia:

**Teorema 11.16** [Blakers-Massey] Sia  $Y$  unione di due aperti  $Y_1, Y_2$  con  $Y_0 = Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset$ . Supponiamo

$$\begin{aligned} \pi_i(Y_1, Y_0, *) &= 0 & \text{per } 0 < i < p, p \geq 1 \\ \pi_j(Y_2, Y_0, *) &= 0 & \text{per } 0 < j < q, q \geq 1 \end{aligned}$$

Allora per qualsiasi scelta di  $*$  in  $Y_0$  la mappa indotta dall'inclusione  $(Y_2, Y_0) \hookrightarrow (Y, Y_1)$

$$\iota : \pi_n(Y_2, Y_0, *) \rightarrow \pi_n(Y, Y_1, *) \quad (\text{escissione})$$

è suriettiva per  $1 \leq n \leq p + q - 2$  ed è biettiva per  $1 \leq n < p + q - 2$ .

<sup>33</sup>Per Serre possiamo sollevare se abbiamo come dato iniziale una faccia del cubo; qua abbiamo come dato iniziale  $J^{n-1}$ , ma basta sfruttare che  $(I^n, J^{n-1}) \simeq (I^n, I^{n-1})$ .

Sfruttiamo il Teorema 11.16 per studiare i gruppi di omotopia di  $S^n$ :  
Possiamo decomporre la sfera come  $S^n = E_+^n \cup E_-^n$  dove  $E_+^n, E_-^n$  sono gli emisferi superiore e inferiore.  
Abbiamo  $E_+^n \cap E_-^n = S^{n-1}$ .

**Osservazione.** Per usare il Teorema 11.16 vorremmo decomporre lo spazio in aperti, gli emisferi invece sono dei chiusi. Tuttavia a meno di equivalenza omotopica abbiamo  $E_+^n \sim S^n \setminus \{S\}$ ,  $E_-^n \sim S^n \setminus \{N\}$  (dove  $N, S$  sono il polo nord e il polo sud). Usiamo quindi direttamente gli emisferi, invece che due aperti.

**Teorema 11.17** 1)  $\pi_i(S^n) = \pi_{i+1}(E_+^{n+1}, S^n)$  per  $i, n \geq 0$

2)  $\pi_i(S^n) = \pi_i(S^n, E_-^n)$  per  $i > 0, n \geq 0$

3)  $\pi_i(S^n) = 0$  per  $i < n$ .

*Dimostrazione.* 1) Consideriamo la successione della coppia  $(E_+^{n+1}, S^n)$ :

$$\dots \longrightarrow \pi_{i+1}(E_+^{n+1}) \longrightarrow \pi_{i+1}(E_+^{n+1}, S^n) \longrightarrow \pi_i(S^n) \longrightarrow \pi_i(E_+^{n+1}) \longrightarrow \dots$$

e il primo termine e l'ultimo termine sono nulli perché  $E_+^{n+1}$  è contraibile. Segue la tesi per esattezza.

2) Consideriamo la successione della coppia  $(S^n, E_-^n)$ : ( $i > 0$ )

$$\dots \longrightarrow \pi_i(E_-^n) \longrightarrow \pi_i(S^n) \longrightarrow \pi_i(S^n, E_-^n) \longrightarrow \pi_{i-1}(E_-^n) \longrightarrow \dots$$

e il primo termine e l'ultimo termine sono nulli perché  $E_-^n$  è contraibile. Segue la tesi per esattezza.

3) Mostriamo per induzione su  $n$  che  $\pi_{i+1}(S^{n+1}) = \pi_i(S^n) = 0$  per  $i < n$ :

*Passo Base*  $n = 1$ : sappiamo  $\pi_0(S^1) = 0, \pi_1(S^2) = 0$ , tesi.

*Passo Induttivo*  $n \geq 2$ : usiamo il Teorema 11.16 con  $Y = S^{n+1}, Y_1 = E_+^{n+1}, Y_2 = E_-^{n+1}$ : abbiamo

$$\begin{cases} \pi_i(E_+^{n+1}, S^n) \stackrel{1)}{=} \pi_{i-1}(S^n) \stackrel{\text{hp. ind.}}{=} 0 \\ \pi_i(E_-^{n+1}, S^n) \stackrel{1)}{=} \pi_{i-1}(S^n) \stackrel{\text{hp. ind.}}{=} 0 \end{cases} \quad \text{per } i \leq n$$

quindi possiamo prendere  $p = q = n + 1$ . Per escissione (per usare 2) serve  $i > 0$ )

$$\pi_{i-1}(S^n) \stackrel{1)}{=} \pi_i(E_-^{n+1}, S^n) \xrightarrow{\iota} \pi_i(S^{n+1}, E_+^{n+1}) \stackrel{2)}{=} \pi_i(S^{n+1})$$

isomorfismo per  $1 \leq i < 2n = p + q - 2$ , suriettivo per  $1 \leq i \leq 2n$ . Poiché  $n \geq 2$  si ha  $2n > n$ , quindi in particolare  $\iota$  è isomorfismo per  $1 < i \leq n$ , cioè per  $1 < i \leq n$  si ha  $\pi_i(S^{n+1}) = \pi_{i-1}(S^n) \stackrel{\text{hp. ind.}}{=} 0$ . È immediato che  $\pi_0(S^n) = 0$ . Tesi.  $\square$

## 11.4 Isomorfismo di Freudenthal

**Definizione 66** Sia  $(X, x_0)$  spazio puntato. Consideriamo la mappa di sospensione

$$\Sigma : \pi_i(X, x_0) \rightarrow \pi_{i+1}(SX, x_0)$$

definita tramite l'isomorfismo aggiunto:

$$(f : (S^i, *) \rightarrow (X, x_0)) \mapsto (S_f : (S^1 \wedge S^i, *) \rightarrow (SX, *))$$

**Lemma 11.18**  $\Sigma$  è omomorfismo.

*Dimostrazione.* Consideriamo il cono ridotto  $CX = (I, 0) \wedge (X, x_0) = I \times X / I \times \{x_0\} \cup \{0\} \times X$ , l'inclusione  $X \hookrightarrow CX$  data da  $x \mapsto [(x, 1)]$  e il quoziente  $SX = CX/X$ . Abbiamo il diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} \pi_i(X, x_0) & \xrightarrow{\Sigma} & \pi_{i+1}(SX, *) \\ \partial \uparrow & & \downarrow \simeq \\ \pi_{i+1}(CX, X, x_0) & \xrightarrow{\alpha} & \pi_{i+1}(CX/X, *) \end{array}$$

Con  $\partial$  tratta dalla successione esatta lunga della coppia, che è isomorfismo (perché i termini adiacenti della successione sono nulli essendo  $CX$  contraibile), e la mappa verticale di destra che è un isomorfismo perché indotta da un omeomorfismo;  $\alpha$  la mappa indotta dalla proiezione al quoziente. Segue che  $\Sigma$  si scrive come composizione di omomorfismi, tesi.  $\square$

**Teorema 11.19** (Isomorfismo di Freudenthal) La sospensione  $\pi_{i-1}(S^n) \xrightarrow{\Sigma} \pi_i(S^{n+1})$  è un isomorfismo per  $i < 2n$ , omomorfismo suriettivo per  $i = 2n$ .

*Dimostrazione.* Abbiamo  $S(S^n) = S^{n+1}$ ,  $CS^n \simeq E_+^{n+1} \simeq E_-^{n+1}$ . Come visto nella dimostrazione del Lemma 11.18,  $\Sigma$  si fattorizza come

$$\begin{array}{ccc} \pi_{i-1}(S^n) & \xrightarrow{\Sigma} & \pi_i(S^{n+1}) \\ \partial(\simeq) \uparrow & & \downarrow \simeq \\ \pi_i(E_-^{n+1}, S^n) & \xrightarrow{\alpha} & \pi_i(E_-^{n+1}/S^n, *) \end{array}$$

dunque per concludere basta mostrare che  $\alpha$  è un isomorfismo per  $i < 2n$  e che è suriettivo per  $i = 2n$ . Abbiamo il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} \pi_i(E_-^{n+1}, S^n) & \xrightarrow{\alpha} & \pi_i(E_-^{n+1}/S^n, *) \\ \iota \downarrow & & \downarrow \simeq \\ \pi_i(S^{n+1}, E_-^{n+1}) & \xrightarrow{\simeq} & \pi_i(S^{n+1}/E_-^{n+1}) \end{array}$$

con la mappa la mappa orizzontale in basso che è un isomorfismo perché  $E_-^{n+1}$  è contraibile (cioè tale mappa è indotta da un'equivalenza omotopica), la mappa verticale a destra che è isomorfismo perché indotta da un omeomorfismo e  $\iota$  data da escissione (fatta con  $S^{n+1}, E_+^{n+1}, E_-^{n+1}$  <sup>34</sup>), dunque è isomorfismo per  $i < 2n$  ed è suriettiva per  $i = 2n$ .  $\square$

**Corollario 11.20**  $\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ .

*Dimostrazione.* Dal Teorema 11.19 (Isomorfismo di Freudenthal) si ha la seguente successione:

$$\mathbb{Z} = \pi_1(S^1) \longrightarrow \pi_2(S^2) \xrightarrow{\simeq} \pi_3(S^3) \xrightarrow{\simeq} \pi_4(S^4) \xrightarrow{\simeq} \dots$$

dunque per concludere basta mostrare che  $\pi_2(S^2)$  è infinito<sup>35</sup>. Per vederlo, basta osservare che esistono infinite mappe  $[S^2, S^2]^0 \rightarrow \text{Hom}(H_2(S^2), H_2(S^2)) = \mathbb{Z}$ :

$$\left( \begin{array}{ccc} S^2 = \mathbb{C} \cup \infty & \rightarrow & \mathbb{C} \cup \infty = S^2 \\ z & \mapsto & z^n \\ \infty & \mapsto & \infty \end{array} \right) \mapsto \left( \begin{array}{ccc} H_2(S^2) & \rightarrow & H_2(S^2) \\ 1 & \mapsto & n \end{array} \right) = n.$$

$\square$

<sup>34</sup>Per usare escissione dovremmo usare aperti, basta "incicciettire" gli emisferi e tutto funziona.

<sup>35</sup>Dal Primo Teorema di Omomorfismo segue che  $\pi_2(S^2)$  è isomorfo ad un sottogruppo di  $\mathbb{Z}$ ; se è infinito allora è  $\mathbb{Z}$ .

## 12 Omotopia di Complessi CW

**Definizione 67** Una  $i : A \rightarrow X$  ha la proprietà dell'estensione dell'omotopia (HEP<sup>36</sup>) per  $Y$  se data un'omotopia  $h : A \times I \rightarrow Y$  e  $f : X \rightarrow Y$  tale che  $(f \circ i)(a) = h(a, 0)$  esiste  $H : X \times I \rightarrow Y$  tale che  $H(x, 0) = f(x)$ ,  $H(i(a), t) = h(a, t)$ . Cioè esiste  $H$  tale che il seguente diagramma commuta:

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xrightarrow{i} & X & & \\
 \downarrow i_0^A & \searrow i \times 0 & \swarrow i_0^X & & \downarrow f \\
 & & X \times I & & \\
 \downarrow i_0^A & \searrow i \times Id & & \searrow H & \\
 A \times I & \xrightarrow{h} & Y & & 
 \end{array}$$

L'omotopia  $H$  è detta estensione di  $h$  con dato iniziale  $f$ .

**Definizione 68**  $i : A \rightarrow X$  si dice cofibrazione se ha HEP per ogni spazio  $Y$ .

Data  $i : A \rightarrow X$ , consideriamo il suo mapping cylinder  $M_i$ , e siano  $k : A \times I \rightarrow M_i$ ,  $b : X \rightarrow M_i$  le proiezioni al quoziente. Per  $Y$  spazio topologico,  $f : X \rightarrow Y$  e  $h : A \times I \rightarrow Y$  tali che  $h \circ i_0^A = f \circ i$ , esiste un'unica  $\sigma_Y : M_i \rightarrow Y$  tale che sia commutativo il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xrightarrow{i} & X & & \\
 \downarrow i_0^A & & \swarrow b & & \downarrow f \\
 & & M_i & & \\
 \downarrow i_0^A & \searrow k & & \searrow \sigma_Y & \\
 A \times I & \xrightarrow{h} & Y & & 
 \end{array}$$

**Teorema 12.1** Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1.  $i : A \rightarrow X$  ha HEP per  $M_i$
2.  $i : A \rightarrow X$  è cofibrazione
3.  $\sigma_{X \times I} : M_i \rightarrow X \times I$  indotta dalla proprietà universale del mapping cylinder ammette retrazione.

*Dimostrazione.* Nella dimostrazione riprendiamo la notazione appena introdotta.

(1.  $\implies$  2.) Siano  $f : X \rightarrow Y$  e  $h : A \times I \rightarrow Y$  tali che  $h \circ i_0^A = f \circ i$ , dunque esiste un'unica  $\sigma_Y : M_i \rightarrow Y$  che tale che  $f = \sigma_Y \circ b$  e  $h = \sigma_Y \circ k$ . Inoltre per ipotesi  $i$  ha HEP per  $M_i$ , abbiamo dunque il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xrightarrow{i} & X & & \\
 \downarrow i_0^A & \searrow i \times 0 & \swarrow i_0^X & & \downarrow b \\
 & & X \times I & & \\
 \downarrow i_0^A & \searrow i \times Id & & \searrow H & \\
 A \times I & \xrightarrow{k} & M_i & & \\
 & & & & \downarrow \sigma_Y \\
 & & & & Y
 \end{array}$$

Ma allora  $\sigma_Y \circ H$  è estensione di  $h$  con dato iniziale  $f$ , cioè  $i$  ha HEP per ogni spazio  $Y$ .

(2.  $\implies$  3.) Sia  $Y = X \times I$ ,  $H : X \times I \rightarrow M_i$  estensione dell'omotopia  $k$  con dato iniziale  $b$ . Abbiamo dunque il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xrightarrow{i} & X & & \\
 \downarrow i_0^A & \searrow i \times 0 & \swarrow i_0^X & & \downarrow b \\
 & & X \times I & & \\
 \downarrow i_0^A & \searrow i \times Id & & \searrow H & \\
 A \times I & \xrightarrow{k} & M_i & & \\
 & & & & \downarrow \sigma_{X \times I} \\
 & & & & X \times I
 \end{array}$$

<sup>36</sup>Homotopy Extension Property.

e per la proprietà universale del mapping cylinder  $H \circ \sigma_{X \times I} = Id_{M_i}$ , cioè  $\sigma_{X \times I}$  ammette retrazione  $H$ .  
 (3.  $\implies$  2.) Detta  $H' : X \times I \rightarrow M_i$  retrazione di  $\sigma_{X \times I}$ , dato uno spazio  $Y$  basta considerare l'estensione  $H = \sigma_Y \circ H' : X \times I \rightarrow Y$ .  
 (2.  $\implies$  1.) Ovvio. □

**Fatto 12.2** Se  $i : A \rightarrow X$  è cofibrazione, allora è un embedding. Inoltre, se  $X$  è Hausdorff allora  $i(A)$  è chiuso.

D'ora in poi consideriamo fibrazioni chiuse (in particolare quindi avremo  $i(A)$  chiuso).

**Definizione 69** Se  $\{x_0\} \hookrightarrow X$  è cofibrazione chiusa, diciamo che  $(X, x_0)$  è uno spazio *ben puntato*, e che  $x_0$  è punto base non degenerare.

**Proposizione 12.3** Sia  $i : A \rightarrow X$  un'inclusione chiusa. Allora  $i$  è una cofibrazione se e solo se l'inclusione  $j : X \times \{0\} \cup A \times I \hookrightarrow X \times I$  ha una retrazione.

*Dimostrazione.* ( $\implies$ ) Usiamo la HEP per  $X \times 0 \cup A \times I$  con  $f : X \rightarrow X \times 0 \cup A \times I$  e con  $x \mapsto (x, 0)$  e con  $h : A \times I \rightarrow X \times 0 \cup A \times I$  . Otteniamo dunque il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xrightarrow{i} & X & & \\
 \downarrow i_0^A & \searrow i \times 0 & \swarrow i_0^X & & \downarrow f \\
 & & X \times I & & \\
 \downarrow i_0^A & \nearrow i \times Id & & \searrow H & \\
 A \times I & \xrightarrow{h} & X \times 0 \cup A \times I & & 
 \end{array}$$

e  $H$  è retrazione per  $j$  (è immediata la verifica  $H \circ j = Id_{X \times 0 \cup A \times I}$ ).

( $\impliedby$ ) Siano  $f : X \rightarrow Y$  e  $h : A \times I \rightarrow Y$  che si comportano secondo la definizione. Allora la mappa  $g : X \times 0 \cup A \times I \rightarrow Y$  data da  $g(x, 0) = f(x)$ ,  $g(a, t) = h(a, t)$  è continua. Detta  $r$  una retrazione per  $j$  allora la composizione  $X \times I \xrightarrow{r} X \times 0 \cup A \times I \xrightarrow{g} Y$  è estensione dell'omotopia. Dunque  $i$  è cofibrazione. □

**Esempio 8** L'inclusione  $S^{n-1} \hookrightarrow D^n$  è una cofibrazione:

Consideriamo  $D^n \times I \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  e la mappa  $D^n \times I \rightarrow D^n \times 0 \cup S^{n-1} \times I$  che ad ogni punto associa la proiezione dal punto  $P = (0, \dots, 0, 2)$ , cioè per ogni  $x \in D^n \times I$  consideriamo la semiretta  $r_x$  uscente da  $P$  e passante per  $x$ , e mandiamo  $x$  in  $r_x \cap (D^n \times 0 \cup S^{n-1} \times I)$ . Si verifica facilmente che questa è una retrazione dell'inclusione.

**Lemma 12.4** Se  $i : A \rightarrow X$  cofibrazione,  $g : A \rightarrow Y$  e  $Z = X \sqcup Y / i(a) \sim g(a)$ , allora anche la mappa di proiezione  $\pi_Y : Y \rightarrow Z$  è cofibrazione, cioè dalla cofibrazione "sopra" otteniamo una cofibrazione "sotto":

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{i} & X \\
 g \downarrow & & \downarrow \pi_X \\
 Y & \xrightarrow{\pi_Y} & Z
 \end{array}$$

*Dimostrazione.* Data  $h : Y \times I \rightarrow W$  e  $f : Z \rightarrow W$  tali che  $h(y, 0) = f(\pi_Y(y))$ , la seguente composizione, dato che  $i$  è cofibrazione, si estende:

$$A \times I \xrightarrow{g \times Id} Y \times I \xrightarrow{h} W \rightsquigarrow H' : X \times I \rightarrow W$$

abbiamo cioè il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc}
 A \times I & \xrightarrow{i \times Id} & X \times I \\
 g \times Id \downarrow & & \downarrow \pi_X \times Id \\
 Y \times I & \xrightarrow{\pi_Y \times Id} & Z \times I \\
 & \searrow h & \downarrow H \\
 & & W
 \end{array}$$

ed è immediato che esista una mappa  $H : Z \times I \rightarrow W$  che commuti. □



**Corollario 12.5** Dato  $X$  complesso CW,  $X^n \hookrightarrow X$  è cofibrazione.

*Dimostrazione.* Abbiamo visto nell'Esempio 8 che l'inclusione  $S^n \hookrightarrow D^{n+1}$  è cofibrazione per ogni  $n$ . Possiamo inoltre rappresentare l'incollamento di  $n$ -celle mediante il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} \bigsqcup S^n & \longrightarrow & \bigsqcup D^{n+1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X^n & \longrightarrow & X^{n+1} \end{array}$$

dove la mappa di sopra è cofibrazione perché lo è sulle singole componenti, e si sta facendo un'unione disgiunta. Inoltre valgono le ipotesi del Lemma 12.4, dunque anche la mappa  $X^n \hookrightarrow X^{n+1}$  è una cofibrazione. Inoltre composizione di cofibrazioni è ancora una cofibrazione, dunque  $X^n \hookrightarrow X^{n+m}$  è cofibrazione per ogni  $m \in \mathbb{N}$ . Ma allora anche  $X^n \hookrightarrow X$  è cofibrazione, infatti basta estendere l'omotopia uno scheletro alla volta, in modo coerente con le inclusioni, e si trova così un'omotopia  $X \times I \rightarrow Y$ .  $\square$

**Osservazione.** Se  $X$  è complesso CW e  $A \subseteq X$  è un sottocomplesso,  $(X, A)$  è una coppia CW e  $A \hookrightarrow X$  è una cofibrazione (la dimostrazione è uguale a quella per il Corollario 12.5).

## 12.1 Teorema di Approssimazione Cellulare

**Definizione 70** Una coppia di spazi connessi per archi  $(X, A)$  è  $n$ -connessa se  $\pi_i(X, A, x_0) = 0$  per ogni  $x_0 \in A$  e per  $i \leq n$ .

**Esempio 9** La coppia  $(D^n, S^{n-1})$  è  $(n-1)$ -connessa: dalla successione della coppia abbiamo

$$0 = \pi_{i+1}(D^n) \longrightarrow \pi_{i+1}(D^n, S^{n-1}) \longrightarrow \pi_i(S^{n-1}) \longrightarrow \pi_i(D^n) = 0$$

per cui per ogni  $i$  si ha

$$\pi_{i+1}(D^n, S^{n-1}) \simeq \pi_i(S^{n-1}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & i = n-1 \\ 0 & i < n-1 \end{cases}$$

**Osservazione.** Se  $(X, A)$  è una coppia  $n$ -connessa, dalla successione della coppia si ha per  $0 < i < n$

$$0 = \pi_{i+1}(X, A, x_0) \longrightarrow \pi_i(A, x_0) \longrightarrow \pi_i(X, x_0) \longrightarrow \pi_i(X, A, x_0) = 0$$

cioè  $\pi_i(A, x_0) \simeq \pi_i(X)$  per  $0 < i < n$ . Viceversa, se  $A \subseteq X$  e  $\pi_i(A, x_0) \simeq \pi_i(X, x_0)$  per  $i \leq n$  allora dalla successione della coppia segue che  $(X, A)$  è  $(n-1)$ -connessa.

**Lemma 12.6**  $f : (D^i, S^{i-1}, *) \rightarrow (X, A, x_0)$  è banale in  $\pi_i(X, A, x_0)$  se e solo se  $f$  è omotopa (relativamente a  $S^{i-1}$ ) ad una mappa  $f' : D^i \rightarrow A$ .

*Dimostrazione.* ( $\Leftarrow$ ) Supponiamo  $f$  omotopa (relativamente a  $S^{i-1}$ ) tramite  $h$  ad una mappa  $f'$  tale che  $f'(D^i) \subseteq A$ . Definiamo allora  $H : (D^i \times I, S^{i-1} \times I, * \times I) \rightarrow (X, A, x_0)$  data da

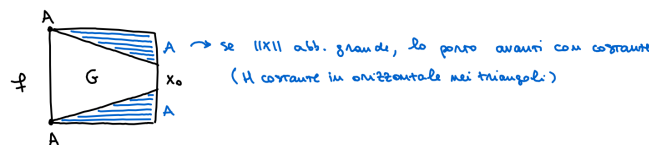
$$H(x, t) = \begin{cases} h(x, 2t) & t \leq \frac{1}{2} \\ f'(\underbrace{(2-2t)x + (2t-1)*}_{\text{contrazione di } D^i}) & t \geq \frac{1}{2} \end{cases} \quad (\text{omotopia da } f' \text{ alla mappa costante } f'(*))$$

e questa è un'omotopia tra  $f$  e la mappa costante  $f'(*) = x_0$ , cioè  $f$  banale in  $\pi_i(X, A, x_0)$ .

( $\Rightarrow$ ) Sia  $G : D^i \times I \rightarrow X$  omotopia tra  $f$  e la mappa costante  $x_0$ . Definiamo allora  $H : D^i \times I \rightarrow X$  data da

$$H(x, t) = \begin{cases} G(\frac{2x}{2-t}, t) & 0 \leq \|x\| \leq \frac{2-t}{2} \\ G(\frac{x}{\|x\|}, 2-2\|x\|) & \frac{2-t}{2} \leq \|x\| \leq 1 \end{cases}$$

che possiamo rappresentare come segue:



e si ha  $H(x, 0) = G(x, 0) = f(x)$ ,  $H(x, 1) \subseteq A$  perché  $G(\cdot, 1) \subseteq A$  e  $G(S^{n-1}, t) \subseteq A$ . Inoltre, per  $\|x\| = 1$  si ha  $H(x, t) = G(x, 0) = H(x, 0)$ , cioè  $H$  costante su  $S^{i-1}$ .  $\square$

**Corollario 12.7** 1.  $(X, A)$   $n$ -connessa se e solo se per ogni  $i \leq n$  ogni  $f : (D^i, S^{i-1}) \rightarrow (X, A)$  è omotopa (relativamente a  $S^{i-1}$ ) ad una  $g : D^i \rightarrow A$ .

2. Per  $X \supseteq A_1 \supseteq A_2$ , se  $(X, A_1)$  e  $(A_1, A_2)$  sono  $n$ -connesse allora  $(X, A_2)$  è  $n$ -connessa.

**Proposizione 12.8** Se  $X$  è un complesso CW, allora  $(X, X^n)$  è una coppia  $n$ -connessa.

*Dimostrazione.* Siano  $U_1, U_2 \subseteq X^{n+1}$  aperti,  $U_1$  unione di dischi aperti (uno per ogni  $(n+1)$ -cella) e  $U_2$  ingrossamento di  $X^n$  in  $X^{n+1}$  (ad esempio  $U_2 = X^{n+1} \setminus \{\text{centri delle } (n+1)\text{-celle}\}$ ). Per costruzione  $U_1 \cup U_2 = X^{n+1}$  e  $(U_1, U_1 \cap U_2) \overset{\text{omotopia}}{\sim} \bigsqcup_{\alpha \in \Lambda} (D_\alpha^{n+1}, S_\alpha^n)$  con  $\Lambda$  che indicizza le  $(n+1)$ -celle. In particolare

$$\pi_i(U_1, U_1 \cap U_2) = 0 \quad \text{per } i \leq n \quad (7)$$

Applicando allora il Teorema 11.16 (di escissione in omotopia) con  $Y = X^{n+1}$ ,  $Y_1 = U_1$ ,  $Y_2 = U_2$ ,  $p = n+1$  e  $q = 1$  si ottiene

$$\pi_i(U_1, U_1 \cap U_2) \longrightarrow \pi_i(X^{n+1}, U_2) \overset{(\star)}{=} \pi_i(X^{n+1}, X^n) \quad \text{suriettiva per } i \leq p+q-2 = n$$

dove l'uguaglianza  $(\star)$  si ha perché  $U_2$  si retrae su  $X^n$ .

Per l'equazione (7)  $\pi_i(U_1, U_1 \cap U_2) = 0$  per  $i \leq n$ . Segue dunque che la coppia  $(X^{n+1}, X^n)$  è  $n$ -connessa. In particolare per ogni  $k \in \mathbb{N}$  la coppia  $(X^{n+k+1}, X^{n+k})$  è  $(n+k)$ -connessa, e quindi anche  $n$ -connessa. Per il Corollario 12.7 (punto 2.) allora abbiamo che  $(X^{n+k}, X^n)$  è  $n$ -connessa per ogni  $k \in \mathbb{N}$ .

Una  $f : D^i \rightarrow X$  ( $i \leq n$ ) ha immagine compatta, che quindi interseca un numero finito di celle, cioè esiste  $k \in \mathbb{N}$  tale che  $f(D^i) \subseteq X^{n+k}$ . Ma allora  $[f] \in \pi_i(X^{n+k}, X^n) = 0$ , quindi  $0 = [f] \in \pi_i(X, X^n)$ .  $\square$

**Definizione 71**  $f : X \rightarrow Y$  tra complessi CW si dice cellulare se  $f(X^n) \subseteq Y^n$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ .

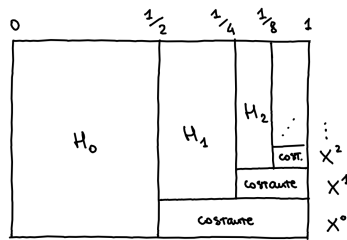
**Teorema 12.9** (di Approssimazione Cellulare) Una mappa  $f : X \rightarrow Y$  tra complessi CW è omotopa ad una mappa cellulare.

*Dimostrazione.* Costruiamo l'omotopia scheletro per scheletro, in particolare mostriamo per induzione che ci sono omotopie  $H^n : X \times I \rightarrow Y$  tali che:

1.  $H_0^0 = f$
2.  $H_1^{n-1} = H_0^n$  per ogni  $n \geq 1$
3.  $H_1^n(X^i) \subseteq Y^i$  per ogni  $i \leq n$
4.  $H^n$  costante su  $X^{n-1}$ .

Poi, date tali omotopie, se  $X = X^n$  basta incollarne in numero finito e si ha la tesi. Altrimenti poniamo

$$H(x, t) = \begin{cases} H^i(x, 2^{i+1}(t-1+2^{-i})) & 1-2^{-i} \leq t \leq 1-2^{-i-1} \\ H^i(x, 1) & x \in X^i, t = 1 \end{cases}, \quad \text{che possiamo rappresentare così:}$$



In particolare  $H$  è continua perché su ogni  $n$ -scheletro incolliamo solo un numero finito di omotopie (poi la mappa è costante). Costruiamo dunque delle tali  $H^n$ :

$n = 0$ : per ogni  $x \in X^0$  fissiamo un punto  $y_0 \in Y^0$  nella stessa componente connessa per archi di  $f(x)$  e un cammino da  $f(x)$  a  $y_0$ . In questo modo si definisce un'omotopia tra  $f|_{X^0}$  e una mappa  $X^0 \rightarrow Y^0$ . Poiché l'inclusione  $X^0 \hookrightarrow X$  è una cofibrazione (Corollario 12.5), possiamo estendere l'omotopia a tutto  $X$ . Si è così definita un'omotopia tra  $f$  e una  $\tilde{f}$  tale che  $\tilde{f}(X^0) \subseteq Y^0$ .

$n > 0$ : supponiamo senza perdita di generalità  $f(X^i) \subseteq Y^i$  per  $i \leq n-1$ . Consideriamo una mappa di incollamento  $\varphi_\alpha : (D_\alpha^n, S_\alpha^{n-1}) \rightarrow (X^n, X^{n-1})$ ; allora  $f \circ \varphi_\alpha : (D_\alpha^n, S_\alpha^{n-1}) \rightarrow (Y, Y^{n-1}) \subseteq (Y, Y^n)$ .

D'altra parte per la Proposizione 12.8  $\pi_n(Y, Y^n) = 0$ , quindi  $f \circ \varphi_\alpha$  è omotopa (relativamente a  $S_\alpha^{n-1}$ ) ad una mappa  $(D_\alpha^n, S_\alpha^{n-1}) \rightarrow (Y^n, Y^{n-1})$ . Possiamo iterare questo ragionamento per tutte le  $n$ -celle, e otteniamo così un'omotopia tra  $f|_{X^n}$  e una mappa  $X^n \rightarrow Y^n$ . Poiché l'inclusione  $X^n \hookrightarrow X$  è una cofibrazione (Corollario 12.5), l'omotopia si estende ad un'omotopia  $H^n$  definita su tutto  $X$ , tra  $f$  e  $\tilde{f}$  tale che  $\tilde{f}(X^n) \subseteq Y^n$ , con  $H^n$  che è costante su  $X^{n-1}$ .  $\square$

**Osservazione.** L'unica proprietà di  $Y$  che si è usata è che  $\pi_n(Y, Y^n) = 0$ , quindi la stessa dimostrazione dà anche la seguente:

**Proposizione 12.10** Sia  $X$  complesso CW,  $f : X \rightarrow Y$  continua,  $T \subseteq Y$  tale che  $\pi_i(Y, T) = 0$  per ogni  $i \in \mathbb{N}$ . Allora  $f$  è omotopa ad una  $g : X \rightarrow T$ . Inoltre, se  $X' \subseteq X$  è un sottocomplesso tale che  $f(X') \subseteq T$ , allora possiamo scegliere un'omotopia che sia costante su  $X'$ .

## 12.2 Teorema di Whitehead

**Lemma 12.11** Se  $f : X \rightarrow Y$  mappa tra complessi CW è cellulare, allora il suo mapping cylinder  $M_f$  è un complesso CW e si può vedere  $X$  come suo sottocomplesso.

*Dimostrazione.* Ricordiamo che  $M_f = X \times I \sqcup Y / (x, 1) \sim f(x)$ .

$X \times I$  ha una struttura di complesso CW, con celle  $e^i \times \{0\}$ ,  $e^i \times \{1\}$ ,  $e^i \times (0, 1)$  al variare di  $e^i$   $i$ -cella di  $X$ <sup>37</sup>. Definiamo induttivamente una struttura cellulare su  $M_f$ :

$n = 0$ : prendiamo le 0-celle di  $X$  e  $Y$ .

$n > 0$ : dato  $M_f^{n-1}$ , attacchiamo le celle  $e^n \times \{0\}$ ,  $e^{n-1} \times (0, 1)$  di  $X \times I$  e poi le  $n$ -celle di  $Y$ . Presa una  $n$ -cella di  $X \times I$  della forma  $e^{n-1} \times (0, 1)$ , questa ha bordo che è contenuto nell' $(n-1)$ -scheletro di  $X \times I$ <sup>38</sup>. Inoltre  $f$  è cellulare, dunque  $f(X^{n-1}) \subseteq Y^{n-1}$ , quindi  $(X \times \{0\})^{n-1} \rightarrow Y^{n-1} \subseteq M_f^{n-1}$ , cioè il bordo di una  $n$ -cella come descritto è in  $M_f^{n-1}$ , come voluto. □

**Teorema 12.12** (Whitehead) Sia  $f : X \rightarrow Y$  mappa tra complessi CW che induce un isomorfismo  $\pi_i(X, x_0) \rightarrow \pi_i(Y, y_0)$  per ogni  $i \in \mathbb{N}$ . Allora  $f$  è un'equivalenza omotopica.

*Dimostrazione.* A meno di omotopia  $f$  è mappa cellulare. Senza perdita di generalità possiamo supporre che  $f$  sia un'inclusione, infatti: preso il mapping cylinder  $M_f = X \times I \sqcup Y / (x, 1) \sim f(x)$ , possiamo considerare l'inclusione  $X \hookrightarrow X \times 0 \subseteq M_f$ , che è una mappa cellulare per il Lemma 12.11, e la retrazione per deformazione, quindi omotopa all'identità,  $M_f \rightarrow Y$ . Abbiamo che  $f$  si fattorizza tramite la composizione  $X \hookrightarrow M_f \rightarrow Y$ , ed essendo la retrazione omotopa all'identità è sufficiente studiare il caso di  $f$  inclusione. Sia dunque  $f : X \hookrightarrow Y$  un'inclusione di sottocomplessi. La successione della coppia  $(X, Y)$  è

$$\dots \longrightarrow \pi_i(X, x_0) \xrightarrow{\cong} \pi_i(Y, x_0) \longrightarrow \pi_i(Y, X, x_0) \longrightarrow \pi_{i-1}(X, x_0) \xrightarrow{\cong} \pi_{i-1}(Y, x_0) \longrightarrow \dots$$

quindi per esattezza si ha  $\pi_i(Y, X, x_0) = 0$  per ogni  $i \in \mathbb{N}$ . In particolare allora, per la Proposizione 12.10,  $Id_Y$  è omotopa (relativamente a  $X$ ) ad una mappa  $Y \rightarrow X$ , cioè  $X$  è retratto per deformazione di  $Y$ , dunque  $f$  è equivalenza omotopica. □

**Corollario 12.13** Un complesso CW che ha tutti i gruppi di omotopia banali è contraibile.

## 12.3 Teorema di Approssimazione CW

**Teorema 12.14** (di Approssimazione CW)

Sia  $A$  complesso CW,  $k \geq -1$ ,  $Y$  spazio topologico e  $f : A \rightarrow Y$  tale che

$$f_* : \pi_i(A, *) \rightarrow \pi_i(Y, *) \quad \text{isomorfismo per } i < k, \text{ suriettivo per } i = k.$$

Allora per ogni  $n > k$ , anche  $n = \infty$ , esiste  $X$  complesso CW contenente  $A$  come sottocomplesso ed esiste  $F : X \rightarrow Y$  che estende  $f$  e tale che

$$F_* : \pi_i(X, *) \rightarrow \pi_i(Y, *) \quad \text{isomorfismo per } i < n, \text{ suriettivo per } i = n.$$

Inoltre  $X$  è ottenuto da  $A$  attaccando  $d$ -celle al variare di  $k \leq d \leq n$ .

*Dimostrazione.* Osserviamo innanzitutto che incollando  $d$ -celle ad  $A$  con  $d > k$  i gruppi di omotopia di grado  $i < k$  non cambiano. Infatti, data una mappa  $f : S^i \rightarrow X$ , questa è omotopa, per il Teorema 12.9 (di Approssimazione Cellulare), ad una  $f' : S^i \rightarrow A$  ( $i < k$ ). Analogamente, un'omotopia  $H$  tra  $f$  e  $f'$  è omotopa a  $H'$  a valori in  $A$ . Questi attaccamenti quindi non modificano i gruppi di omotopia per  $i < k$ . Mostriamo la tesi per induzione:

<sup>37</sup>In particolare le celle della forma  $e^i \times \{0\}$ ,  $e^i \times \{1\}$  sono  $i$ -celle di  $X \times I$ , le celle della forma  $e^i \times (0, 1)$  sono  $(i+1)$ -celle di  $X \times I$ .

<sup>38</sup>Che è il dato delle celle della forma  $e^{n-2} \times I$  unito a  $(X \times \{0\})^{n-1}$  e  $(X \times \{1\})^{n-1}$ .

$n = 0$ : se  $f_* : \pi_0(A) \rightarrow \pi_0(Y)$  non è suriettiva, aggiungo 0-celle ad  $A$  in numero pari al numero di componenti connesse per archi di  $Y$  che non sono raggiunte, e le mappe su tali componenti connesse per archi di  $Y$ . Si ha dunque ora suriettività.

$n = 1$ : supponiamo  $f_* : \pi_0(A) \rightarrow \pi_0(Y)$  suriettiva. Per ogni  $a, b \in A^0$  con  $f(a)$  e  $f(b)$  nella stessa componente connessa per archi di  $Y$ , aggiungo una 1-cella che collega  $a$  e  $b$ , e la mappa su un cammino tra  $f(a)$  e  $f(b)$ . In questo modo si ottiene l'iniettività.

Per ogni loop di  $Y$  che non è raggiunto, posso aggiungere una 1-cella a  $A$  e mapparla su tale loop, si ha così la suriettività a livello dei  $\pi_1$ .

$n > 1$ : supponiamo che  $f : A \rightarrow Y$  sia  $(n-1)$ -connessa, e senza perdita di generalità supponiamo che  $f$  sia un'inclusione (altrimenti sostituisco  $Y$  con il mapping cylinder  $M_f$ ). Fissiamo

$$(\Phi_j, \varphi_j) : (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (Y, A, *)$$

che siano generatori di  $\pi_n(Y, A, *)$  come  $\pi_1(A)$ -modulo ( $\pi_1(A)$  agisce su tale gruppo). Per ognuno di questi generatori, aggiungiamo ad  $A$  una  $n$ -cella, usando le  $\varphi_j$  come mappe di incollamento. Otteniamo così  $X \supseteq A$ , e possiamo estendere  $f$  ad una  $F : X \rightarrow Y$  tramite le  $\Phi_j$ . Ogni incollamento delle  $n$ -celle rappresenta una classe  $[x_j] \in \pi_n(X, A, *)$ , e per costruzione

$$F_*[x_j] = [(\Phi_j, \varphi_j)] \in \pi_n(Y, A, *)$$

La mappa  $F$  induce un omomorfismo tra le successioni esatte lunghe delle coppie:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} \dots & \longrightarrow & \pi_n(A) & \longrightarrow & \pi_n(X) & \longrightarrow & \pi_n(X, A) & \longrightarrow & \pi_{n-1}(A) & \longrightarrow & \pi_{n-1}(X) & \longrightarrow & \pi_{n-1}(X, A) & = & 0 \\ & & \parallel & & (1) \downarrow F_* & & (2) \downarrow F_* & & \parallel & & (3) \downarrow F_* & & \parallel & & \\ \dots & \longrightarrow & \pi_n(A) & \longrightarrow & \pi_n(Y) & \longrightarrow & \pi_n(Y, A) & \longrightarrow & \pi_{n-1}(A) & \xrightarrow{(4)} & \pi_{n-1}(Y) & \longrightarrow & 0 & & \end{array}$$

Per costruzione si ha che (2) è suriettiva (prende tutti i generatori) e che  $\pi_{n-1}(X, A) = 0$ . Inoltre (3) e (4) sono suriettive per ipotesi. Si conclude immediatamente tramite diagram chasing che (1) è suriettiva e (3) è iniettiva, cioè si ha suriettività a livello del  $\pi_n$  e isomorfismo al livello del  $\pi_{n-1}$ .

□

**Definizione 72**  $f : X \rightarrow Y$  è detta equivalenza omotopica debole se induce tra i gruppi di omotopia isomorfismi in ogni grado.

**Corollario 12.15** Se  $Y$  spazio topologico connesso per archi, allora esiste  $X$  complesso CW e  $F : X \rightarrow Y$  equivalenza omotopica debole.

*Dimostrazione.* Basta usare il Teorema 12.14 (di Approssimazione CW) con  $k = -1$  e  $A = \{*\}$ . □

**Proposizione 12.16** Un'approssimazione CW è unica a meno di equivalenze omotopiche. Inoltre

$$Y \mapsto \{\text{classe di omotopia di una sua approssimazione CW}\}$$

è un funtore dagli spazi topologici connessi per archi a complessi CW a meno di omotopia.

*Dimostrazione.* Siano  $F_1 : X_1 \rightarrow Y_1$ ,  $F_2 : X_2 \rightarrow Y_2$  approssimazioni CW, e sia  $g : Y_1 \rightarrow Y_2$  continua. Vogliamo costruire  $f : X_1 \rightarrow X_2$  che faccia commutare, a meno di omotopia, il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{f} & X_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y_1 & \xrightarrow{g} & Y_2 \end{array}$$

Mostrato questo, prendendo  $Y_1 = Y_2$  e  $g = Id$  otteniamo la tesi<sup>39</sup>.

A meno di sostituire  $X_2 \rightarrow Y_2$  con un'inclusione (usando il mapping cylinder) possiamo supporre  $X_2 \hookrightarrow Y$ . Poiché  $\pi_i(X_2) = \pi_i(Y_2)$  per ogni  $i$ , la coppia  $(Y_2, X_2)$  è  $i$ -connessa per ogni  $i$  (dalla successione della coppia). Per la Proposizione 12.10 allora la composizione  $X_1 \rightarrow Y_1 \xrightarrow{g} Y_2 \supseteq X_2$  è omotopa ad una mappa  $f : X_1 \rightarrow X_2$ . Si verifica che due possibili  $f$  che fanno commutare sono omotope. □

<sup>39</sup>Passando ai gruppi di omotopia  $(F_1)_*$  e  $(F_2)_*$  sono isomorfismi, dunque per commutatività anche  $f_*$  lo è. Allora per il Teorema 12.12 (Whitehead)  $f$  è un'equivalenza omotopica.

Abbiamo il seguente caso particolare del Teorema 12.14 (di Approssimazione CW):

**Teorema 12.17** Sia  $Y$  complesso CW tale che  $\pi_i(Y) = 0$  per  $i \leq n$ . Allora  $Y$  è omotopicamente equivalente a  $X$  complesso CW tale che  $X^n = \{*\}$ .

*Dimostrazione.* Ripercorrendo la dimostrazione del Teorema 12.14 (di Approssimazione CW) si nota che in corrispondenza di gruppi di omotopia banali dello spazio da approssimare non è necessario modificare il corrispondente  $n$ -scheletro. La costruzione produce un complesso CW  $X$  con  $n$ -scheletro banale.  $\square$

## 12.4 Teorema di Hurewicz

Dato  $X$  spazio topologico e  $A \subseteq X$ , per  $n \geq 0$  definiamo il sottocomplesso delle catene di Eilenberg  $C_\bullet^{(n,A)}(X) \subseteq C_\bullet(X)$ , generato dai  $\sigma : \Delta^i \rightarrow X$  tali che le facce con dimensione  $< n$  vanno in  $A$  (è immediato che questo sia davvero un sottocomplesso).

**Fatto 12.18** Se  $(X, A)$  è  $(n-1)$ -connessa allora l'inclusione  $C_\bullet^{(n,A)}(X) \hookrightarrow C_\bullet(X)$  è un'equivalenza omotopica di catene.

**Proposizione 12.19** Sia  $f : X \rightarrow Y$  equivalenza omotopica debole. Allora  $f_* : H_i(X) \rightarrow H_i(Y)$  è isomorfismo per ogni  $i$ .

*Dimostrazione.* Senza perdita di generalità  $f$  è un'inclusione (altrimenti si sostituisce  $Y$  con  $M_f$ ). Le ipotesi dicono che  $(Y, X)$  è  $n$ -connessa per ogni  $n$  (dalla successione della coppia), dunque abbiamo

$$H_i(Y) \stackrel{F.12.18}{\cong} H_i(C_\bullet^{(n,X)}(Y)) \quad \text{per ogni } i \text{ e per ogni } n$$

Per definizione, per  $i < n$  si ha  $C_i^{(n,X)}(Y) = C_i(X)$ , dunque per arbitrarietà di  $n$  si ha

$$H_i(C_\bullet^{(n,X)}(Y)) = H_i(C_\bullet(X))$$

Segue la tesi.  $\square$

**Osservazione.** Con gli strumenti visti, abbiamo che in linea teorica è sempre possibile approssimare uno spazio  $X$  con un complesso CW  $A$  debolmente omotopicamente equivalente, e usare  $A$  per calcolare l'omologia di  $X$ .

**Lemma 12.20** Per  $n > 1$  si ha

$$\pi_n\left(\bigvee_j S_j^n\right) = \bigoplus_j \pi_n(S_j^n)$$

ed è generato dalle inclusioni  $S_j^n \hookrightarrow \bigvee_j S_j^n$ .

*Dimostrazione.* Se il bouquet è finito: abbiamo  $\bigvee_j S_j^n \subseteq \prod_j S_j^n$ , con il primo che è il bouquet di complessi CW  $n$ -dimensionali, il secondo che è un complesso CW di dimensione  $> n$ , in particolare avente  $i$ -scheletri nulli se  $i$  non è multiplo di  $n$ . Per  $n \geq 2$  i due hanno  $n$ -scheletro coincidente e non sono presenti  $d$ -celle con  $n < d < 2n$ , dunque la coppia  $(\prod_j S_j^n, \bigvee_j S_j^n)$  è  $(2n-1)$ -connessa. Allora l'inclusione  $\bigvee_j S_j^n \hookrightarrow \prod_j S_j^n$  induce un isomorfismo sui  $\pi_n$ . Basta a questo punto usare il fatto noto  $\pi_n(X \times Y) \simeq \pi_n(X) \oplus \pi_n(Y)$ .

Se il bouquet è infinito: la mappa  $\Phi : \bigoplus_j \pi_n(S_j^n) \rightarrow \pi_n(\bigvee_j S_j^n)$  indotta dalle inclusioni  $S_j^n \hookrightarrow \bigvee_j S_j^n$  è suriettiva e iniettiva per compattezza, infatti: una mappa dalla sfera in  $\bigvee_j S_j^n$  ha immagine compatta, dunque che interseca un numero finito di celle; analogamente, se una classe  $[\gamma]$  nell'immagine di  $\Phi$  è banale, allora esiste un'omotopia da  $\gamma$  alla mappa costante. Tale omotopia ha immagine compatta, dunque che interseca un numero finito di celle. Allora la stessa relazione si ha in  $\bigoplus_j \pi_n(S_j^n)$ .  $\square$

**Teorema 12.21** (Hurewicz) Sia  $X$  spazio topologico connesso per archi: c'è un omomorfismo functoriale

$$h_n : \pi_n(X, x_0) \longrightarrow H_n(X)$$

Inoltre se  $X$  è  $(n-1)$ -connesso allora: 1. se  $n = 1$  allora  $h_1$  è l'abelianizzazione

2. se  $n > 1$  allora  $h_n$  è isomorfismo e  $\tilde{H}_i(X) = 0$  per  $i < n$ .

*Dimostrazione.* Abbiamo già affrontato il caso  $n = 1$  con il Teorema 2.23.

Sia dunque  $n > 1$ : possiamo, senza perdita di generalità, supporre che  $X$  sia un complesso CW<sup>40</sup>. Inoltre per il Teorema 12.17 possiamo supporre  $X^{n-1} = \{*\}$ .

<sup>40</sup>Possiamo approssimare  $X$  con un complesso CW a lui debolmente omotopicamente equivalente (Teorema 12.14), e le equivalenze omotopiche deboli inducono isomorfismi anche in omologia (Proposizione 12.19).

Poiché la coppia  $(X, X^{n+1})$  è  $(n+1)$ -connessa (Proposizione 12.8), l'inclusione  $X^{n+1} \hookrightarrow X$  induce un isomorfismo  $\pi_n(X^{n+1}) \rightarrow \pi_n(X)$ . Inoltre, dalla successione della coppia  $(X, X^{n+1})$  in omologia si ottiene  $H_n(X^{n+1}) \simeq H_n(X)$ . Per funtorialità possiamo allora supporre  $X = X^{n+1}$  e  $X^n = \bigvee_{\alpha} S_{\alpha}^n$ . Poiché  $X^{n+1}$  è ottenuto incollando  $(n+1)$ -celle a  $X^n$ , si hanno mappe di incollamento  $\varphi_j : S_j^n \rightarrow \bigvee_{\alpha} S_{\alpha}^n$ . Consideriamo allora

$$A := \bigvee_j S_j^n \xrightarrow{\varphi} \bigvee_{\alpha} S_{\alpha}^n =: B$$

e vale che  $X$  è omotopicamente equivalente al mapping cone di  $\varphi$ <sup>41</sup>.

Osserviamo che per  $X = S^n$  la tesi vale, infatti  $\pi_n(S^n) \stackrel{C.11.20}{=} \mathbb{Z} = H_n(S^n)$  e  $h_n$  è

$$h_n : \begin{array}{ccc} \pi_n(S^n) & \rightarrow & H_n(S^n) \\ [f : S^n \rightarrow S^n] & \mapsto & f_*(a) \end{array} \quad \text{dove } a \text{ è un generatore di } H_n(S^n).$$

Inoltre, per  $X = \bigvee_j S_j^n$  la tesi segue dal Lemma 12.20, sfruttando l'additività di  $H_i$  e la naturalità. In generale abbiamo il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} \pi_n(A) & \longrightarrow & \pi_n(B) & \longrightarrow & \pi_n(B, A) & \longrightarrow & 0 \\ (1) \downarrow & & (2) \downarrow & & (3) \downarrow & & \\ H_n(A) & \longrightarrow & H_n(B) & \longrightarrow & H_n(B, A) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

con (1) e (2) che sono isomorfismi per il Lemma 12.20. Segue che anche (3) è isomorfismo. Per concludere basta osservare che (ricordiamo  $X \sim$  mapping cone di  $\varphi$ ) per escissione si ha

$$(B, A) \stackrel{\text{escissione}}{\sim} (X, CA) \sim (X, *) \implies \pi_n(X) = \pi_n(B, A), \quad H_n(X) = H_n(B, A)$$

□

**Corollario 12.22** Se  $X$  è semplicemente connesso e  $\tilde{H}_i(X) = 0$  per  $i < n$ , allora  $\pi_i(X) = 0$  per  $i < n$  e  $\pi_n(X) \simeq H_n(X)$ .

*Dimostrazione.* Si tratta di applicare induttivamente il Teorema 12.21 (Hurewicz). □

**Teorema 12.23** Sia  $(X, A)$  coppia di complessi CW semplicemente connessi e tali che  $H_i(X, A) = 0$  per  $i < n$ ,  $n \geq 2$ . Allora  $\pi_i(X, A) = 0$  per  $i < n$  e  $h_n : \pi_n(X, A) \rightarrow H_n(X, A)$  è un isomorfismo.

*Dimostrazione.* Per escissione, se  $A$  è semplicemente connesso e  $\pi_i(X, A) = 0$  per ogni  $i < n$ , allora

$$\pi_n(X, A) \rightarrow \pi_n(X/A, *)$$

è isomorfismo (si sta usando che  $(X, A)$  è una buona coppia, cosa vera per complessi CW), e per il Teorema di Van Kampen  $\pi_1(X/A) = 0$ . Inoltre  $H_i(X, A) = \tilde{H}_i(X/A)$  (di nuovo, si sta usando che  $(X, A)$  è una buona coppia) e abbiamo  $\pi_i(X/A) = 0$  per  $i < n$ . Allora:

$n = 2$ : abbiamo il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} \pi_2(X, A) & \xrightarrow{\simeq} & \pi_2(X/A) \\ h_2 \downarrow & & \downarrow \simeq \\ H_2(X, A) & \xrightarrow{\simeq} & H_2(X/A) \end{array}$$

dove le mappe orizzontali sono date da escissione, la mappa verticale di destra è data dal Teorema 12.21 (Hurewicz). Per commutatività allora  $h_2$  è un isomorfismo.

$n > 2$ : per induzione, se  $H_i(X, A) = 0$  per ogni  $i < j$ , allora  $\pi_i(X, A) = 0$  per ogni  $i < j$ . Con lo stesso diagramma segue anche  $\pi_n(X, A) \simeq H_n(X, A)$ .

□

<sup>41</sup>Il mapping cone di  $f : X \rightarrow Y$  è  $X \times I \sqcup Y / (x, 0) \sim (x', 0)$ ,  $(x, 1) \sim f(x)$

### 13 Invariante di Hopf

Si è caratterizzata completamente l'omologia della sfera  $S^n$ :

$$\tilde{H}_i(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & i = n \\ 0 & i \neq n \end{cases}$$

mentre invece per i gruppi di omotopia ci siamo fermati a descrivere quelli fino all'ordine  $n$ :

$$\pi_i(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & i = n \\ 0 & i < n \end{cases}$$

Vale il seguente Teorema:

**Teorema 13.1** (Serre) Fissato  $n \in \mathbb{N}$ , esistono gruppi abeliani finiti  $G, \{G_i\}_{i>n}$  tali che

$$\pi_i(S^n) = \begin{cases} 0 & i < n \\ \mathbb{Z} & i = n \\ \mathbb{Z} \oplus G & i = 2n - 1, n \text{ pari} \\ G_i & \text{altrimenti} \end{cases}$$

In particolare se ne deduce che per  $n$  dispari l' $n$ -esimo gruppo di omotopia è l'unico gruppo di omotopia infinito, mentre per  $n$  pari anche il  $(2n - 1)$ -esimo è infinito.

Non dimostriamo il Teorema 13.1, ma mostriamo che esiste una  $\mathcal{H} : \pi_{2n-1}(S^n) \rightarrow \mathbb{Z}$  che per  $n$  pari ha immagine infinita (questo dimostra che per  $n$  pari il  $(2n - 1)$ -esimo gruppo di omotopia è infinito). Tale  $\mathcal{H}$  prende il nome di *invariante di Hopf*.

Consideriamo una mappa  $f : X \rightarrow Y$  e il suo mapping cone  $C_f = CX \sqcup Y / (x, 1) \sim f(x)$ <sup>42</sup>, e sia  $j : Y \hookrightarrow C_f$  inclusione. In particolare, nel caso in cui  $X = S^n$ ,  $Y$  complesso CW e  $f$  mappa cellulare, si ha che  $C_f$  è il risultato dell'incollamento di una  $(n + 1)$ -cella su  $Y$ , proprio tramite la mappa  $f$ .

**Proposizione 13.2** Le mappe  $f : X \rightarrow Y$  e  $j : Y \rightarrow C_f$  inducono una successione esatta lunga in co-omologia:

$$\begin{aligned} H^0(Y) &\longrightarrow H^0(X) \longrightarrow H^1(C_f) \longrightarrow H^1(Y) \longrightarrow \dots \\ \dots &\longrightarrow H^{i-1}(X) \xrightarrow{\partial} H^i(C_f) \xrightarrow{j^*} H^i(Y) \xrightarrow{f^*} H^i(X) \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

Inoltre, mappe  $X \rightarrow Y$  omotope inducono successione esatte lunghe isomorfe.

*Dimostrazione.* Sia  $M_f$  il mapping cylinder di  $f$ . Abbiamo le inclusioni ovvie  $X \hookrightarrow X \times \{0\} \subseteq M_f$  e  $Y \hookrightarrow M_f$ , con quest'ultima che è un'equivalenza omotopica. Allora la successione esatta lunga in co-omologia della coppia  $(M_f, X)$  è

$$\dots \longrightarrow H^{i-1}(X) \longrightarrow H^i(M_f, X) \longrightarrow \underbrace{H^i(M_f)}_{=H^i(Y)} \longrightarrow H^i(X) \longrightarrow \dots$$

e per escissione la mappa  $M_f \xrightarrow{p} C_f$  che incolla  $X \times \{0\}$  sul punto base  $*$  induce

$$\tilde{H}^i(C_f) \simeq H^i(C_f, *) \xrightarrow{p^*} H^i(M_f, X) \quad \text{isomorfismo}$$

infatti:  $X \times \{0\} \subseteq M_f$  è retratto di  $\bar{X} = X \times [0, \frac{1}{2}]$ . Inoltre, posto  $\bar{C} = p(\bar{X}) \subseteq C_f$ , si ha il diagramma

$$\begin{array}{ccccc} H^i(M_f, X) & \xleftarrow{(1)} & H^i(M_f, \bar{X}) & \xrightarrow{(2)} & H^i(M_f \setminus X, \bar{X} \setminus X) \\ p^* \uparrow & & p^* \uparrow & & \uparrow Id \\ H^i(C_f, *) & \xleftarrow{(3)} & H^i(C_f, \bar{C}) & \xrightarrow{(4)} & H^i(C_f \setminus *, \bar{C} \setminus *) \end{array}$$

<sup>42</sup>Dove  $CX = X \times I / (x, 0) \sim (x', 0)$  è il cono di  $X$ .

con (1), (3) che sono isomorfismi perché  $\overline{X}, \overline{C}$  si retraggono per deformazione rispettivamente su  $X$  e  $*$ , e (2), (4) che sono isomorfismi per escissione. Infine, se  $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$  sono omotope tramite  $H$ , allora abbiamo il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{i_0^X} & X \times I & \xleftarrow{i_1^X} & X \\ f_0 \downarrow & & H \downarrow & & \downarrow f_1 \\ Y & \xrightarrow{Id} & Y & \xleftarrow{Id} & Y \end{array}$$

che induce isomorfismi sulle rispettive successioni esatte lunghe in co-omologia, dato che  $i_0^X$  e  $i_1^X$  sono equivalenze omotopiche.  $\square$

### 13.1 Costruzione dell'invariante $\mathcal{H}(f)$

Sia fissata una mappa  $f : S^{2n-1} \rightarrow S^n$ . Fissiamo anche  $x \in H^{2n-1}(S^{2n-1})$  e  $y \in H^n(S^n)$  generatori dei rispettivi gruppi. Consideriamo il seguente pezzo della successione esatta della Proposizione 13.2:

$$\dots \longrightarrow \underbrace{H^{n-1}(S^{2n-1})}_{=0} \longrightarrow H^n(C_f) \xrightarrow{j^*} H^n(S^n) \longrightarrow \underbrace{H^n(S^{2n-1})}_{=0} \longrightarrow \dots$$

per cui  $H^n(C_f) \simeq H^n(S^n) = \mathbb{Z}$ . Analogamente:

$$\dots \longrightarrow \underbrace{H^{2n-1}(S^n)}_{=0} \longrightarrow H^{2n-1}(S^{2n-1}) \xrightarrow{\partial^*} H^{2n}(C_f) \longrightarrow \underbrace{H^{2n}(S^n)}_{=0} \longrightarrow \dots$$

da cui  $H^{2n}(C_f) \simeq H^{2n-1}(S^{2n-1}) = \mathbb{Z}$ . Poniamo  $\alpha = (j^*)^{-1}(y) \in H^n(C_f)$  e  $\beta = \partial^*(x) \in H^{2n}(C_f)$ . Ma allora che  $\alpha \smile \alpha$  è multiplo di  $\beta$ <sup>43</sup>, cioè esiste  $\mathcal{H}(f) \in \mathbb{Z}$  tale che

$$\alpha \smile \alpha = \mathcal{H}(f)\beta$$

**Definizione 73**  $\mathcal{H}(f)$  è l'invariante di Hopf di  $[f]$ .

**Osservazione.** 1. Se  $g : S^n \rightarrow S^n$  ha grado  $m$ , allora  $\mathcal{H}(gf) = m^2\mathcal{H}(f)$ .

2. Se  $g : S^{2n-1} \rightarrow S^{2n-1}$  ha grado  $m$ , allora  $\mathcal{H}(fg) = m\mathcal{H}(f)$ .

3. Se  $n$  è dispari, allora  $\mathcal{H}(f) = 0$  (perché  $\smile$  è anticommutativo).

**Fatto 13.3** Se  $n$  pari, allora esiste  $f : S^{2n-1} \rightarrow S^n$  tale che  $\mathcal{H}(f) = \pm 2$ .

**Corollario 13.4** Per  $n$  pari  $\pi_{2n-1}(S^{2n-1})$  è infinito.

<sup>43</sup>Per costruzione  $\beta$  è un generatore di  $H^{2n}(C_f)$ , in quanto è preimmagine tramite un isomorfismo di un generatore.