

Colle de mathématiques – MP Planche A

Espaces vectoriels normés

24 septembre 2026

Ale Fenu

Exercice 1 (question de cours)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit N une norme quelconque sur $\mathbb{K}^n$.

1. Montrer qu'il existe $\beta > 0$ tel que : $\forall x \in \mathbb{K}^n, N(x) \leq \beta \|x\|_\infty$.

2. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que : $\forall x \in \mathbb{K}^n, \alpha \|x\|_\infty \leq N(x)$.

Indication : raisonner par l'absurde. On admettra que toute suite bornée de $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ admet une suite extraite convergente.

3. En déduire que, dans un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Exercice 2

Soit $n \geq 1$. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ d'une norme $\|\cdot\|$ et on note $GL_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles.

1. Montrer que $GL_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

2. Montrer que $GL_n(\mathbb{K})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

3. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{K}, \det(xI_n - AB) = \det(xI_n - BA)$.

Exercice 3

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et C une partie convexe de E .

1. Montrer que $\overline{C}$ est convexe.

2. Soient $a \in \overset{\circ}{C}$ et $b \in \overline{C}$. Montrer que : $\forall t \in [0, 1[, (1-t)a + tb \in \overset{\circ}{C}$.

3. On suppose $\overset{\circ}{C} \neq \emptyset$. Montrer que $\overline{\overset{\circ}{C}} = \overline{C}$.

4. On suppose toujours $\overset{\circ}{C} \neq \emptyset$. Montrer que l'intérieur de $\overline{C}$ est égal à $\overset{\circ}{C}$.
Ces résultats subsistent-ils si l'on ne suppose plus C convexe ?

Colle de mathématiques – MP Planche B

Espaces vectoriels normés

24 septembre 2026

Ale Fenu

Exercice 1 (question de cours)

1. Soient $a < b$ deux réels. Montrer que, pour tout $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$, $\|f\|_1 \leq \sqrt{b-a} \|f\|_2 \leq (b-a) \|f\|_\infty$.
2. Sur $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$, montrer que deux normes distinctes parmi $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ ne sont jamais équivalentes.
3. Soient N_1, N_2 deux normes sur un espace E , N_1 étant dominée par N_2 . Montrer que tout ouvert de (E, N_1) est un ouvert de (E, N_2) , et que tout fermé de (E, N_1) est un fermé de (E, N_2) .
4. Application : l'ensemble $U = \{f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) \mid \|f\|_2 < 1\}$ est-il ouvert pour $\|\cdot\|_\infty$? pour $\|\cdot\|_1$?

Exercice 2

On munit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$ et on pose

$$A = \left\{ f \in E \mid f(0) = 0 \text{ et } \int_0^1 f(t) dt = 1 \right\}.$$

1. Montrer que A est une partie convexe et fermée de $(E, \|\cdot\|_\infty)$.
2. Montrer que, pour tout $f \in A$, $\|f\|_\infty > 1$.
3. Montrer que $d(0, A) = 1$. La distance de 0 à A est-elle atteinte ?
4. La partie A est-elle fermée dans $(E, \|\cdot\|_1)$?

Exercice 3

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$. On note V l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n) .

1. Montrer que $a \in V$ si et seulement si : $\forall \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, \|u_n - a\| \leq \varepsilon$.
2. En déduire que $V = \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \overline{\{u_n \mid n \geq N\}}$, puis que V est un fermé de E .
3. Construire une suite réelle dont l'ensemble des valeurs d'adhérence est $[0, 1]$.
Existe-t-il une suite réelle dont l'ensemble des valeurs d'adhérence est $]0, 1[$?

Colle de mathématiques – MP Planche C

Espaces vectoriels normés

24 septembre 2026

Ale Fenu

Exercice 1 (question de cours)

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

1. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur E . Montrer que toute boule (ouverte ou fermée) de $(E, \|\cdot\|)$ est convexe.
2. Soit $N : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant la séparation et l'homogénéité. On pose $B = \{x \in E \mid N(x) \leq 1\}$. Montrer que N est une norme sur E si et seulement si B est convexe.
3. Application : l'application $(x_1, x_2) \mapsto (\sqrt{|x_1|} + \sqrt{|x_2|})^2$ est-elle une norme sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a_0 < a_1 < \dots < a_n$ des points de $[0, 1]$. Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose

$$N(P) = \max_{0 \leq i \leq n} |P(a_i)| \quad \text{et} \quad \|P\|_\infty = \sup_{t \in [0, 1]} |P(t)|.$$

1. Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}_n[X]$, et justifier qu'il existe $C > 0$ tel que $\|P\|_\infty \leq C N(P)$ pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$.
2. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction (non supposée continue) et $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}_n[X]$ telle que

$$\sup_{t \in [0, 1]} |P_k(t) - f(t)| \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0.$$

Montrer que f est (la restriction à $[0, 1]$ d')une fonction polynomiale de degré au plus n .

Indication : on pourra introduire le polynôme interpolateur de Lagrange de f aux points $a_0, \dots, a_n$.

3. Pour $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$, on note $L(f) \in \mathbb{R}_n[X]$ ce polynôme interpolateur. Montrer que

$$\|f - L(f)\|_\infty \leq (1 + C) d(f, \mathbb{R}_n[X]),$$

la distance étant prise pour la norme de la convergence uniforme sur $[0, 1]$.

Exercice 3

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E .

1. Montrer que $\bar{F}$ est un sous-espace vectoriel de E .
2. Montrer que si $\overset{\circ}{F} \neq \emptyset$, alors $F = E$.
3. Soit H un hyperplan de E . Montrer que H est fermé ou dense dans E .
4. On pose $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ et $H = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$. Montrer que H est fermé dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$ et dense dans $(E, \|\cdot\|_1)$.