

# Colle de mathématiques – MP    Planche A

Intégrales à paramètre

15 octobre 2026

Ale Fenu

## Exercice 1 (question de cours)

Soit  $A$  une partie de  $E$ ,  $J$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f : A \times J \rightarrow \mathbb{K}$ .

1. Énoncer le théorème de continuité « sous le signe  $\int$  », puis le démontrer à l'aide du théorème de convergence dominée (pour les suites de fonctions).
2. On pose, lorsque cela a un sens,  $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t} dt$ .
  - (a) Déterminer l'ensemble de définition de  $F$ .
  - (b) Montrer que  $F$  est continue sur  $]0, +\infty[$ . Peut-on dominer sur tout  $]0, +\infty[$ ?
  - (c) Montrer que  $F$  est décroissante, puis déterminer ses limites en  $+\infty$  et en  $0^+$ .

## Exercice 2

On admet que  $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ . Pour  $x \in \mathbb{R}$ , on pose

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt) dt.$$

1. Montrer que  $F$  est définie, continue et paire sur  $\mathbb{R}$ .
2. Montrer que  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  et exprimer  $F'(x)$  sous forme d'une intégrale.
3. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que  $F$  est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre.
4. En déduire une expression explicite de  $F(x)$ .

## Exercice 3

Pour  $x > -1$ , on pose

$$F(x) = \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} t^x dt.$$

1. Montrer que  $F$  est bien définie sur  $] -1, +\infty[$ .
2. Montrer que  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $] -1, +\infty[$  et calculer  $F'(x)$ .
3. Déterminer la limite de  $F$  en  $+\infty$ .
4. En déduire  $F(x)$  pour tout  $x > -1$ , puis la valeur de  $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} dt$ .

# Colle de mathématiques – MP    Planche B

Intégrales à paramètre

15 octobre 2026

Ale Fenu

## Exercice 1 (question de cours)

Soit  $I, J$  deux intervalles de  $\mathbb{R}$  et  $f : I \times J \rightarrow \mathbb{K}$ .

1. Énoncer le théorème de dérivation « sous le signe  $\int$  » (avec domination sur  $I$  tout entier), puis le démontrer. On pourra admettre le théorème de continuité « sous le signe  $\int$  » et l'extension du théorème de convergence dominée à un paramètre réel.
2. Pour  $x > 0$ , on pose  $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{x + t^2}$ .
  - (a) Calculer  $F(x)$ .
  - (b) Montrer que  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $]0, +\infty[$  et exprimer  $F^{(n)}(x)$  sous forme d'une intégrale. Pourquoi faut-il travailler sur les  $[a, +\infty[$ ,  $a > 0$  ?
  - (c) En déduire, pour  $n \in \mathbb{N}$ , la valeur de  $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1 + t^2)^{n+1}}$ .

## Exercice 2 (fonction $\Gamma$ )

Pour  $x \in \mathbb{R}$ , on pose, lorsque cela a un sens,  $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ .

1. Montrer que  $\Gamma$  est définie sur  $]0, +\infty[$  exactement.
2. Montrer que  $\Gamma$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $]0, +\infty[$  et exprimer  $\Gamma^{(k)}(x)$  pour  $k \in \mathbb{N}$ .
3. Montrer que  $\Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$  pour tout  $x > 0$ . Calculer  $\Gamma(n+1)$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .
4. Montrer que  $\Gamma$  est convexe, puis que  $\Gamma'$  s'annule en un unique point  $c \in ]1, 2[$ . Dresser le tableau de variations de  $\Gamma$ .
5. Déterminer un équivalent de  $\Gamma(x)$  en  $0^+$  et la limite de  $\Gamma$  en  $+\infty$ .

## Exercice 3

Pour  $x \in \mathbb{R}$ , on pose

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)} dt.$$

1. Montrer que  $F$  est définie et impaire sur  $\mathbb{R}$ .
2. Montrer que  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ .
3. Calculer  $F'(x)$  pour  $x \geq 0$  (on commencera par  $x \notin \{0, 1\}$ ), puis en déduire  $F(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .
4. En déduire les valeurs de

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\theta}{\tan \theta} d\theta \quad \text{et} \quad \int_0^{\pi/2} \ln(\sin \theta) d\theta.$$

# Colle de mathématiques – MP    Planche C

Intégrales à paramètre

15 octobre 2026

Ale Fenu

## Exercice 1 (question de cours)

Soit  $A$  une partie de  $E$ ,  $a \in \overline{A}$ ,  $J$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f : A \times J \rightarrow \mathbb{K}$ .

1. Énoncer l'extension du théorème de convergence dominée à un paramètre  $x \in A$  tendant vers  $a$ , et la démontrer à partir de la version séquentielle.
2. Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ . Démontrer que, dans le théorème de continuité « sous le signe  $\int$  », on peut remplacer l'hypothèse de domination sur  $I$  par une domination sur tout segment inclus dans  $I$ . (On prendra garde au cas où  $x_0$  est une extrémité de  $I$ .)
3. Pour  $x \geq 0$ , on pose  $F(x) = \int_0^{+\infty} x e^{-xt} dt$ . Calculer  $F$ ; est-elle continue sur  $\mathbb{R}_+$ ? Montrer que l'hypothèse de domination est satisfaite sur tout segment de  $]0, +\infty[$ , mais pas sur  $[0, 1]$ .

## Exercice 2 (intégrale de Dirichlet)

Pour  $x \geq 0$ , on pose

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin t}{t} dt.$$

1. Montrer que  $F$  est définie sur  $\mathbb{R}_+$  (on distinguera  $x > 0$  et  $x = 0$ ).
2. Montrer que  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0, +\infty[$  et calculer  $F'(x)$ .
3. Déterminer la limite de  $F$  en  $+\infty$  et en déduire  $F(x)$  pour  $x > 0$ .
4. Pour  $x \geq 0$  et  $t > 0$ , on pose  $K_x(t) = -\frac{e^{-xt}(x \sin t + \cos t)}{1+x^2}$ . Vérifier que  $\partial_t K_x(t) = e^{-xt} \sin t$  et  $|K_x(t)| \leq 2$ , puis, à l'aide d'une intégration par parties sur  $[1, +\infty[$ , montrer que  $F$  est continue en 0.
5. En déduire  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ , puis  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt$ .

## Exercice 3

On admet que  $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ . Pour  $x \in \mathbb{R}$ , on pose

$$G(x) = \int_0^{+\infty} \exp\left(-t^2 - \frac{x^2}{t^2}\right) dt.$$

1. Montrer que  $G$  est définie, continue et paire sur  $\mathbb{R}$ .
2. Montrer que  $G$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0, +\infty[$ .
3. À l'aide du changement de variable  $u = \frac{x}{t}$ , montrer que  $G'(x) = -2G(x)$  pour  $x > 0$ . En déduire  $G(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .
4. La fonction  $G$  est-elle dérivable en 0? Quelle hypothèse du théorème de dérivation tombe en défaut au voisinage de 0?
5. Soit  $a, b > 0$ . Calculer  $\int_0^{+\infty} \exp\left(-at^2 - \frac{b}{t^2}\right) dt$  et  $\int_0^{+\infty} \exp\left(-\left(t - \frac{x}{t}\right)^2\right) dt$  pour  $x > 0$ .