Colle de mathématiques – MP Planche A

Groupes – Intégration

9 novembre 2026

Ale Fenu

Exercice 1 (question de cours)

Soit $(G, \cdot)$ un groupe de neutre e et $a \in G$.

1. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $a^k = e$, et on pose $d = \min\{k \in \mathbb{N}^* \mid a^k = e\}$.
   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $a^n = e \iff d \mid n$.
   (b) Montrer que $\langle a \rangle = \{e, a, \dots, a^{d-1}\}$ et que ces d éléments sont deux à deux distincts. Que vaut l'ordre de a ?
2. Déterminer l'ordre de chacun des éléments de $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}, +)$, puis ses générateurs. Le groupe produit $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ est-il cyclique ?
3. On suppose G commutatif. Soit $a, b \in G$ d'ordres finis respectifs m et n, avec $m \wedge n = 1$.
   (a) Montrer que $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \{e\}$, puis que ab est d'ordre mn.
   (b) Soit $p, q \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ est cyclique si et seulement si $p \wedge q = 1$.

Exercice 2

Pour $a \in \mathbb{R}$, on pose

$$F(a) = \int_0^1 x^{-ax}\,dx = \int_0^1 e^{-a\,x\ln x}\,dx.$$

1. Montrer que F est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est croissante.
3. Déterminer les limites de F en $-\infty$ et en $+\infty$.
4. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que $\displaystyle\int_0^1 (x\ln x)^n\,dx = \frac{(-1)^n\,n!}{(n+1)^{n+1}}$.
5. Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $F(a) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{(n+1)^{n+1}}$. En déduire

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n} \qquad \text{et} \qquad \int_0^1 x^x\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}.$$

Exercice 3

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{Z}$, on note $\overline{k}^{[n]}$ la classe de k dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

1. Déterminer les endomorphismes du groupe $(\mathbb{Z}, +)$, puis ses automorphismes.
2. Soit $n, m \in \mathbb{N}^*$ et $b \in \mathbb{Z}$. Montrer qu'il existe un morphisme $f : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ tel que $f\left(\overline{1}^{[n]}\right) = \overline{b}^{[m]}$ si et seulement si $m \mid nb$, et qu'il est alors unique.
3. En déduire que le nombre de morphismes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ est égal à $n \wedge m$. Quels sont les morphismes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$?
4. Pour $b \in \mathbb{Z}$, on note $f_b : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\overline{k} \mapsto \overline{kb}$. Montrer que f_b est un automorphisme si et seulement si $b \wedge n = 1$. Montrer que l'ensemble $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ des automorphismes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un groupe commutatif pour $\circ$, et donner son cardinal.
5. Les groupes $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$ et $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})$ sont-ils cycliques ?

Colle de mathématiques – MP Planche B

Groupes – Intégration

9 novembre 2026

Ale Fenu

Exercice 1 (question de cours)

Soit $(G, \cdot)$ et $(G', \cdot)$ deux groupes de neutres e et e', et $f : G \to G'$ un morphisme de groupes.

1. Montrer que $f(e) = e'$, $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$, que $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$ sont des sous-groupes, et que f est injectif si et seulement si $\ker f = \{e\}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité.
   (a) Déterminer le noyau et l'image du morphisme $\psi : (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{C}^*, \times)$, $k \mapsto e^{2ik\pi/n}$. En déduire que $\theta : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{U}_n$, $\overline{k} \mapsto e^{2ik\pi/n}$ est bien définie et est un isomorphisme.
   (b) Déterminer les générateurs de $(\mathbb{U}_n, \times)$. Les expliciter pour $n = 12$.
3. Déterminer les morphismes de $(\mathbb{Q}, +)$ dans $(\mathbb{Z}, +)$. Le groupe $(\mathbb{Q}, +)$ est-il monogène ?

Exercice 2

Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on pose

$$F(x) = \int_0^{\pi/2} \ln\left(\cos^2 t + x^2 \sin^2 t\right) \mathrm{d}t.$$

1. Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}_+$ (on distinguera $x > 0$ et $x = 0$).
2. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}_+$.
3. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et, à l'aide du changement de variable $u = \tan t$, calculer $F'(x)$.
4. En déduire $F(x)$ pour $x \geqslant 0$, puis $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\cos t)\,\mathrm{d}t$. Pour $a, b > 0$, calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln\left(a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t\right) \mathrm{d}t$.
5. F est-elle dérivable à droite en 0 ? Que donnerait une dérivation « sous le signe $\int$ » en $x = 0$? Quelle hypothèse du théorème de dérivation tombe en défaut au voisinage de 0 ?

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\pi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $k \mapsto \overline{k}$.

1. Montrer que π est un morphisme surjectif de groupes et déterminer son noyau.
2. Soit H un sous-groupe de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. En considérant $\pi^{-1}(H)$, montrer qu'il existe un unique diviseur positif a de n tel que $H = \langle \overline{a} \rangle$, et que $\operatorname{card} H = n/a$.
3. En déduire que, pour tout $d \mid n$, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ possède un unique sous-groupe de cardinal d. Lister les sous-groupes de $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$. Qu'en est-il pour un groupe cyclique quelconque ?
4. On note $\varphi(d)$ le nombre d'entiers de $[\![1, d]\!]$ premiers avec d. Montrer que, pour $d \mid n$, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ possède exactement $\varphi(d)$ éléments d'ordre d. En déduire que $\sum_{d \mid n} \varphi(d) = n$.

Colle de mathématiques – MP Planche C

Groupes – Intégration

9 novembre 2026

Ale Fenu

Exercice 1 (question de cours)

1. Démontrer que les sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ sont exactement les $a\mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{N}$, et que a est unique.
2. Soit $a, b \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \{au + bv \mid (u, v) \in \mathbb{Z}^2\}$ et $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$ sont des sous-groupes de $\mathbb{Z}$, et identifier leurs générateurs positifs. Quel résultat classique retrouve-t-on ?
3. Soit $(G, \cdot)$ un groupe de neutre e, $a \in G$ et $\psi : (\mathbb{Z}, +) \to G$, $k \mapsto a^k$. Montrer que ψ est un morphisme d'image $\langle a \rangle$. Si ψ n'est pas injectif, montrer qu'il existe $d \in \mathbb{N}^*$ tel que $a^k = e \iff d \mid k$, et que $\overline{k} \mapsto a^k$ est un isomorphisme de $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ sur $\langle a \rangle$. Et si ψ est injectif ?

Exercice 2

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose, lorsque cela a un sens,

$$F(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,dt.$$

1. Montrer que F est définie sur $]0, +\infty[$ exactement.
2. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et en déduire son sens de variation.
3. Calculer $F(x) + F(x+1)$ pour $x > 0$. En déduire un équivalent de $F(x)$ en 0^+ et en $+\infty$.
4. (a) Écrire $\dfrac{t^{x-1}}{1+t}$ comme somme d'une série de fonctions sur $]0, 1[$. Peut-on appliquer le théorème d'intégration terme à terme ?

   (b) En itérant la relation obtenue en 3, montrer que $F(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$ pour tout $x > 0$.

   (c) Retrouver ce résultat en appliquant le théorème de convergence dominée aux sommes partielles.
5. En déduire les valeurs de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ et de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Exercice 3

Soit H un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ non réduit à $\{0\}$.

1. Justifier l'existence de $\alpha = \inf\big(H \cap]0, +\infty[\big)$. Si $\alpha > 0$, montrer que $\alpha \in H$ puis que $H = \alpha\mathbb{Z}$. Si $\alpha = 0$, montrer que H est dense dans $\mathbb{R}$.
2. Soit $a, b \in \mathbb{R}^*$. Montrer que $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $\dfrac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$.
3. En admettant que $\pi \notin \mathbb{Q}$, montrer que $\{\cos n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1, 1]$.
4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(x+1) = f(x+\sqrt{2}) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que f est constante.