Colle de mathématiques – MP Planche A

Algèbre linéaire : sommes directes, blocs, sous-espaces stables

19 novembre 2026

Ale Fenu

Dans toute la planche, $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$ et E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Exercice 1 (question de cours)

Soit $E_1, \dots, E_p$ des sous-espaces vectoriels de E.

1. Montrer que $E_1, \dots, E_p$ sont en somme directe si et seulement si : $\forall (x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p$, $\sum_k x_k = 0 \Rightarrow x_1 = \cdots = x_p = 0$. En dimension finie, en considérant $(x_1, \dots, x_p) \mapsto \sum_k x_k$, montrer que $\dim\left(\sum_k E_k\right) \leqslant \sum_k \dim E_k$, avec égalité si et seulement si la somme est directe.
2. Pour $p \geqslant 3$, la condition « $E_i \cap E_j = \{0\}$ pour $i \neq j$ » suffit-elle à ce que la somme soit directe ?
3. On suppose $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_p$, de projecteurs associés $\pi_1, \dots, \pi_p$. Montrer que $\sum_i \pi_i = \mathrm{Id}_E$ et $\pi_i \circ \pi_j = 0$ pour $i \neq j$. Matrice de π_i dans une base adaptée ?
4. Réciproquement, soit $p_1, \dots, p_r \in \mathcal{L}(E)$ tels que $\sum_i p_i = \mathrm{Id}_E$ et $p_i \circ p_j = 0$ pour $i \neq j$. Montrer que les p_i sont des projecteurs, que $E = \bigoplus_i \operatorname{Im} p_i$, et que les p_i sont les projecteurs associés.

Exercice 2

Soit E de dimension $n \geqslant 1$ et $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur de rang r. On note $F = \operatorname{Im} p$ et $G = \ker p$.

1. Rappeler pourquoi $E = F \oplus G$ et donner la matrice de p dans une base adaptée. En déduire $\mathrm{tr} p = \mathrm{rg} p$.
2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $u \circ p = p \circ u$ si et seulement si F et G sont stables par u. Retrouver ce résultat par un calcul matriciel par blocs.
3. Montrer que $\mathcal{C}(p) = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid u \circ p = p \circ u\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ et calculer sa dimension.
4. *Exemple.* Soit $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Vérifier que A est la matrice d'un projecteur p de $\mathbb{R}^3$; déterminer $\operatorname{Im} p$, $\ker p$, et une base dans laquelle la matrice de p est $\mathrm{diag}(1, 1, 0)$. Décrire les matrices qui commutent avec A.

Exercice 3

Soit E de dimension $n \geqslant 1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^n = 0$ et $u^{n-1} \neq 0$.

1. Soit $x \in E$ tel que $u^{n-1}(x) \neq 0$. Montrer que $\mathcal{B} = \big(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x)\big)$ est une base de E, et écrire la matrice de u dans $\mathcal{B}$.
2. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, montrer que $\ker u^k = \mathrm{Vect}\big(u^{n-k}(x), \dots, u^{n-1}(x)\big)$. Quelle est sa dimension ?
3. Soit F un sous-espace stable par u, de dimension $k \geqslant 1$, et u_F l'endomorphisme induit. Montrer qu'il existe $q \geqslant 1$ tel que $(u_F)^q = 0$, et, en adaptant la question 1, que $(u_F)^k = 0$. En déduire que $F = \ker u^k$, puis tous les sous-espaces stables par u.
4. *Application.* Déterminer les sous-espaces de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ stables par la dérivation $D : P \mapsto P'$.

Colle de mathématiques – MP Planche B

Algèbre linéaire : sommes directes, blocs, sous-espaces stables

19 novembre 2026

Ale Fenu

Dans toute la planche, $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$ et E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Exercice 1 (question de cours)

1. Soit $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $u \circ v = v \circ u$. Montrer que $\ker u$ et $\operatorname{Im} u$ sont stables par v.
2. Soit E de dimension n, F un sous-espace de dimension $p \in [\![1, n-1]\!]$, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E telle que $(e_1, \dots, e_p)$ soit une base de F, et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que F est stable par u si et seulement si $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} P & Q \\ 0 & S \end{pmatrix}$ avec $P \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, et identifier P. Cas où $E = F \oplus G$ avec F et G stables ?
3. *Application.* Soit $a \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \operatorname{Vect}\big((1,1,1)\big)$ et $\Pi = \{(x,y,z) \mid x+y+z = 0\}$.
   (a) Montrer que D et Π sont supplémentaires et stables par a.
   (b) Écrire la matrice de a dans la base $\big((1,-1,0),(0,1,-1),(1,1,1)\big)$. En déduire $\det A$.
   (c) Soit B la matrice de l'endomorphisme induit par a sur Π. Calculer B^2 ; montrer que D est la seule droite stable par a.

Exercice 2

Soit E de dimension finie n, $a, b \in \mathbb{K}$ avec $a \neq b$, et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $(u - a\mathrm{Id}) \circ (u - b\mathrm{Id}) = 0$.

1. Montrer que $E = \ker(u - a\mathrm{Id}) \oplus \ker(u - b\mathrm{Id})$. Quelle est la matrice de u dans une base adaptée ?
2. Soit p le projecteur sur $\ker(u - a\mathrm{Id})$ parallèlement à $\ker(u - b\mathrm{Id})$, et $q = \mathrm{Id} - p$. Exprimer p et q en fonction de u. Montrer que $u^k = a^k p + b^k q$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, puis pour tout $k \in \mathbb{Z}$ si $ab \neq 0$.
3. *Application.* Soit $J \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients valent 1, et $M = J - I_3$.
   (a) Montrer que $M^2 = M + 2I_3$. Identifier a, b, les deux sous-espaces de la question 1, et donner $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}MP$ soit diagonale.
   (b) Calculer M^k pour $k \in \mathbb{Z}$, et en particulier M^{-1}.

Exercice 3

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 = -\mathrm{Id}_E$.

1. Montrer que n est pair et que u est un automorphisme.
2. Montrer qu'aucune droite de E n'est stable par u. Pour $x \neq 0$, montrer que $P_x = \operatorname{Vect}\big(x, u(x)\big)$ est un plan stable par u, et écrire la matrice de l'endomorphisme induit dans la base $\big(x, u(x)\big)$.
3. Soit F un sous-espace stable par u et $x \notin F$. Montrer que $F \cap P_x = \{0\}$ et que $F \oplus P_x$ est stable par u.
4. En déduire qu'il existe $x_1, \dots, x_m \in E$ (avec $n = 2m$) tels que $E = P_{x_1} \oplus \cdots \oplus P_{x_m}$, puis une base de E dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} 0 & -I_m \\ I_m & 0 \end{pmatrix}$.

Colle de mathématiques – MP Planche C

Algèbre linéaire : sommes directes, blocs, sous-espaces stables

19 novembre 2026

Ale Fenu

Dans toute la planche, $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$.

Exercice 1 (question de cours)

Soit $M = \begin{pmatrix} P & Q \\ 0 & S \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, avec $P \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$, $S \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{K})$ et $1 \leqslant r < n$.

1. Vérifier que $M = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & Q \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}$, puis démontrer que $\det M = \det P \, \det S$.
2. On suppose P et S inversibles. Montrer que M est inversible et donner M^{-1} par blocs.
3. *Interprétation géométrique.* Soit E de dimension n, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base, $u \in \mathcal{L}(E)$ avec $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = M$, $F = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_r)$, $G = \mathrm{Vect}(e_{r+1}, \dots, e_n)$, et q le projecteur sur G parallèlement à F.
   (a) Montrer que F est stable par u, que P est la matrice de l'endomorphisme induit u_F, et que S est celle de $w : G \to G$, $z \mapsto q(u(z))$.
   (b) Montrer directement que u est bijectif si et seulement si u_F et w le sont. Retrouver ainsi : M inversible $\iff$ P et S inversibles.

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $M = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$.

1. On pose $P = \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ I_n & -I_n \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible, calculer P^{-1}, puis $P^{-1}MP$.
2. *Interprétation géométrique.* Soit m l'endomorphisme de $\mathbb{K}^{2n} = \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n$ canoniquement associé à M, $V_+ = \{(X, X) \mid X \in \mathbb{K}^n\}$ et $V_- = \{(X, -X) \mid X \in \mathbb{K}^n\}$. Montrer que $\mathbb{K}^{2n} = V_+ \oplus V_-$, que $V_\pm$ sont stables par m, et identifier les endomorphismes induits. Lien avec la question 1 ?
3. En déduire que $\det M = \det(A + B) \det(A - B)$ et que $\mathrm{rg} M = \mathrm{rg}(A + B) + \mathrm{rg}(A - B)$. Rang de la matrice par blocs dont les quatre blocs valent A ?
4. Calculer $\det M$ pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, puis $\det \begin{pmatrix} aI_n & bI_n \\ bI_n & aI_n \end{pmatrix}$ pour $a, b \in \mathbb{K}$.

Exercice 3

Soit E de dimension $n \geqslant 1$, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts tels que, en notant $E_i = \ker(u - \lambda_i \mathrm{Id})$, on ait $E_i \neq \{0\}$ pour tout i et $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_p$. On note $n_i = \dim E_i$ et $\mathcal{C}(u) = \{v \in \mathcal{L}(E) \mid u \circ v = v \circ u\}$.

1. Soit $v \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $v \in \mathcal{C}(u)$ si et seulement si chaque E_i est stable par v.
2. Écrire la matrice de u dans une base adaptée. Décrire matriciellement $\mathcal{C}(u)$ et montrer que $\dim \mathcal{C}(u) = \sum_i n_i^2$. Cas $p = 1$? Cas $p = n$? Exemple : décrire les matrices qui commutent avec $\mathrm{diag}(1, 1, 2)$.
3. On suppose $p = n$. Montrer que $\mathcal{C}(u) = \mathrm{Vect}\big(\mathrm{Id}, u, \dots, u^{n-1}\big)$ (on pourra utiliser l'interpolation de Lagrange). Cette famille est-elle libre ? Exemple : pour $\Delta = \mathrm{diag}(1, 2, 3)$, écrire $\mathrm{diag}(1, 0, 0)$ comme combinaison linéaire de I_3, Δ, Δ^2.